

Лекция. Вычисление интегралов. Приближенные методы расчета

Цель занятия:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи следующих формул Ньютона-Котеса: 1. формула прямоугольников, 2. формула трапеций, 3. формула парабол (Симпсона);
- освоить расчет интегралов методом Гаусса.

7.1. Квадратурные формулы приближенного вычисления интегралов

Постановка задачи численного интеграла

При вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx ,$$

где $f(x)$ - функция непрерывная на отрезке $[a,b]$ используется формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (7.1)$$

Однако бывают случаи, когда первообразную $F(x)$ нельзя найти, или не всегда удается довести вычисления до числового значения. Иногда подынтегральная функция может быть задана таблично или графиком, поэтому формула (7.1) не исчерпывает практических приемов вычисления интегралов.

На практике часто применяют различные методы приближенного (численного) интегрирования.

Определение: Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называют *квадратурными формулами*.

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a;b]$ интерполяционным многочленом Лагранжа $L_n(x)$, и тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx . \quad (7.2)$$

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, легко реализуемым на компьютере, и позволяющим получать результат с точностью, достаточной для широкого круга практических приложений.

Метод прямоугольников

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, отрезок $[a;b]$ разбивают на n частей, в каждой из которых криволинейную трапецию, заменяют прямоугольником с основанием $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, и высотой y_0, y_1, \dots, y_n , соответственно (рис. 7.1).

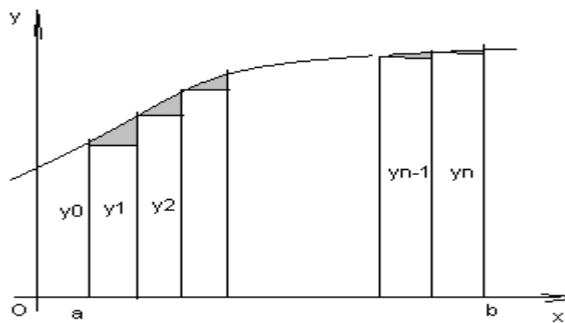


Рис.7.1. Замена криволинейной трапеции прямоугольником

Данный подход к решению задачи дает площадь меньше площади криволинейной трапеции, говорят, что значение определенного интеграла получено с недостатком.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (7.3)$$

Формула (7.3) называется *формулой прямоугольников с недостатком*.

Аналогично можно получить формулу для вычисления определенного интеграла с избытком (рис. 7.2).

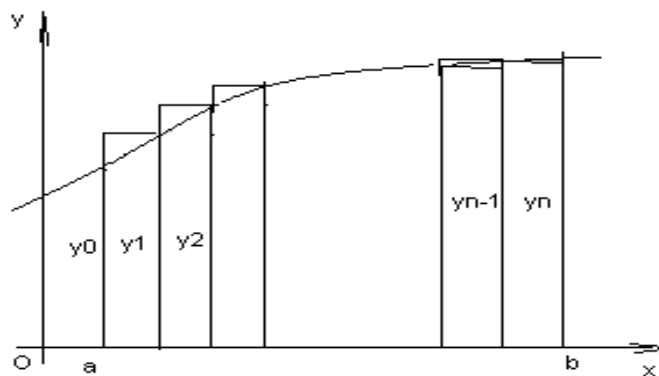


Рис. 7.2. Вычисление интеграла с избытком

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (7.4)$$

Формула (7.4) называется *формулой прямоугольников с избытком*.
где значение

$$y_k = f(a + k \cdot \Delta x), k = \overline{0, n}.$$

(7.5)

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx \quad (n=5).$$

Решение.

Имеем $a=0$, $b = \pi/4$, $f(x) = \cos x$.

$$\text{Тогда } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/4 - 0}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157.$$

Вычислим значение функции по формуле (7.5):

$$y_0 = f(a + 0 \cdot \Delta x) = \cos(0) = 1,$$

$$y_1 = f(a + 1 \cdot \Delta x) = \cos(0 + \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{20} \approx \cos 9^\circ \approx 0,987,$$

$$y_2 = \cos(0 + 2 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ \approx 0,951,$$

$$y_3 = \cos(0 + 3 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{3\pi}{20} = \cos 27^\circ \approx 0,891,$$

$$y_4 = \cos(0 + 4 \cdot \frac{\pi}{20}) = \cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ \approx 0,809.$$

Применяя формулу прямоугольника с недостатком (7.3) получим

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = 0,157(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0,157 \cdot (1 + 0,987 + 0,951 + 0,891 + 0,809) = 0,728$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона - Лейбница и сравним результаты:

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Относительная погрешность вычисления:

$$\Delta = \frac{(I_{\text{точн}} - I_{\text{прибл}})}{I_{\text{точн}}} \approx 0,029.$$

Метод трапеций

Геометрический смысл этого метода практического вычисления определенного интеграла состоит в том, что нахождение площади криволинейной трапеции заменяется нахождением площади приблизительно равновеликой прямолинейной трапеции (рис.7.3).

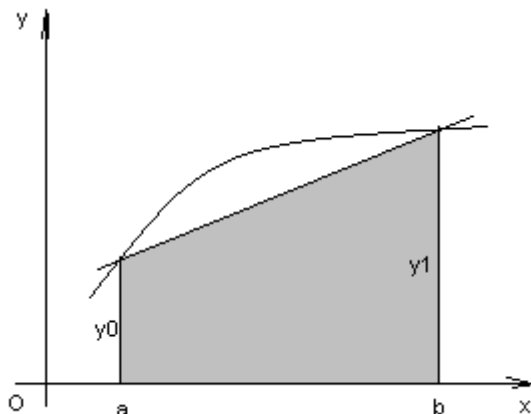


Рис. 7.3. Замена криволинейной трапеции на прямолинейную

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} (b - a) \quad (7.6)$$

Для повышения точности результата разобьём фигуру на n частей, а затем суммируем площади получившихся трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right), \quad (7.7)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

где $y_k = f(x_k) = f(a + k\Delta x)$, $k = \overline{0, n}$.

Формула (7.7) называется *формулой трапеций*.

Пример 2. По формуле трапеции вычислить интеграл

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \quad (n=5).$$

Решение. Имеем $a=0$, $b=5$, $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$.

Вычислим промежуточные значения функции в узлах:

$$\begin{aligned}
y_0 = y(0) &= \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2} = 0,5, & y_1 = y(1) &= \frac{1}{\sqrt{1+4}} = 0,447, \\
y_2 = y(2) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,409, & y_3 = y(3) &= \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,377, \\
y_4 = y(4) &= \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,353, & y_5 = y(5) &= \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0,333.
\end{aligned}$$

Тогда по формуле трапеций (7.7) имеем:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \left(\frac{0,5}{2} + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353 + \frac{0,3}{2} \right) \approx 2,002.$$

Метод парабол

Замена подынтегральной функции $f(x)$ параболой (рис.7.4), проходящей через точки $M_i(x_i; y_i)$, ($i=0,1,2$) позволяет получать более точное значение определенного интеграла.

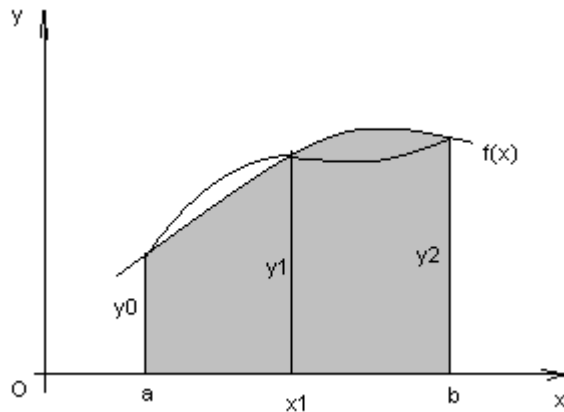


Рис. 7.4. Замена подынтегральной функции $f(x)$ параболой

Если считать, что n - четное ($n=2m$), то получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right), \quad (7.8)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Формула (7.8) называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона*. Для оценки погрешности формулы Симпсона применяется формула

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot \frac{|b-a|h^4}{180} \leq \varepsilon. \quad (7.9)$$

Как следует из оценки (7.9), формула Симпсона оказывается точной для многочленов до 3-ей степени включительно. Так как для этих случаев производная 4-го порядка равна 0.

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций, это означает, что для достижения той же точности, что и в формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число n - отрезков разбиения.