

ЛЕКЦИЯ 5. Нелинейные уравнения. Отделение корней.

Метод половинного деления (метод дихотомии)

Постановка задачи отделения корней нелинейного уравнений

$$\ln^2 x - 4 \cos x = 0$$

Решение нелинейного уравнения, описывающего состояние электрической цепи, может быть реализовано приближенными численными методами. Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция. Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления *количества корней и интервалов, каждый из которых содержит только один корень*.

Следует отметить, что универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для *любых* уравнений, не существует. Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.

Упростим задачу, заменив уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением $f_1(x)=f_2(x)$. В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси x отмечаются отрезки, локализирующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

$$y=f(x)=0$$

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a;b]$ единственный корень, причем функция $f(x)$ на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам точкой $c=(a+b)/2$. Если $f(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: $f(x)$ меняет знак либо на отрезке $[a;c]$ (рис. 2.3,а), либо на отрезке $[c;b]$ (рис 2.3,б).

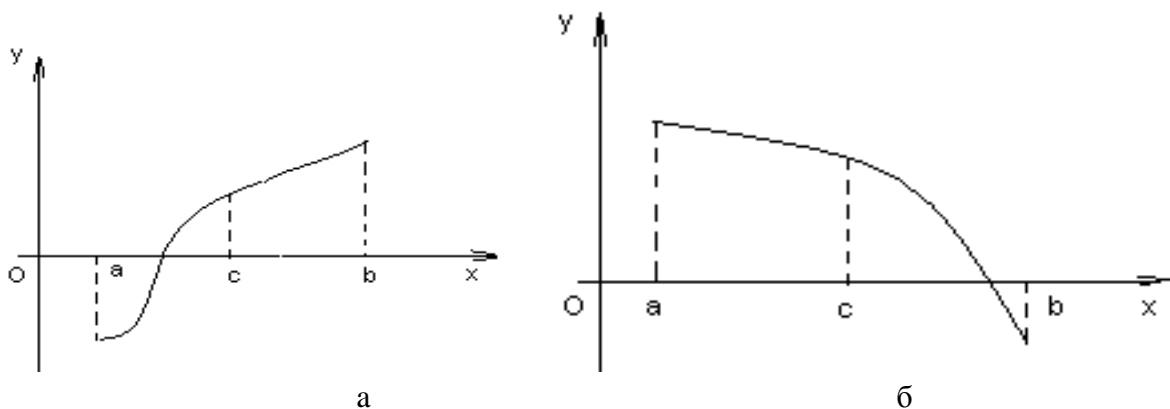


Рис 2.3. Изменение знака функции: а– функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a;c]$, б – функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[c;b]$

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления (дихотомии) дальше, можно прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения. Метод половинного деления требует утомительных ручных вычислений, однако он легко реализуется с помощью программы на компьютере.

Задание 2.1. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления (метод дихотомии)

- Отделить корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.
- По методу половинного деления вычислить один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3} с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.
- Отделить корни и вычислить один корень с помощью программы для компьютера с точностью 10^{-5} .
- Сравнить результаты.

Необходимые данные приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Варианты задания 2.1

Номер варианта	Уравнение $y(x)$	Пояснения	Номер варианта	Уравнение $y(x)$	Пояснения
1	$2x - \cos x$	-	16	$2x - 11 \sin(x)$	-
2	$x - 10 \sin x$	-	17	$1,6x - 9 \sin(x)$	-
3	$2^{-x} - \sin x$	При $x < 10$	18	$1,7x - 8 \sin(x)$	-
4	$2^x - 2 \cos x$	При $x > 10$	19	$2x - 11 \sin(x)$	-
5	$\ln(x + 5) - \cos x$	При $x < 5$	20	$e^x - 11x$	-
6	$\sqrt{4x + 7} - 3 \cos x$	-	21	$1,4x - 6 \sin(x)$	-
7	$6 \sin x - 0,5x$	-	22	$0,9x - 5 \sin(x)$	-
8	$8 \cos x - x - 6$	-	23	$e^x - 4 \sin(x)$	-
9	$\sin x - 0,2x$	-	24	$1,3x - 3 \sin(x)$	-
10	$10 \cos x - 0,1x^2$	-	25	$\sqrt{3x + 2} - 3 \cos x$	-
11	$2 \ln(x + 7) - 5 \sin x$	-	26	$1,5x - 9 \sin(x)$	-
12	$4 \cos x + 0,3x$	-	27	$2x - 8 \sin(x)$	-
13	$\sqrt{1 - x} - 5 \sin 2x$	-	28	$\sqrt{2x + 1} - 3 \sin x$	-
14	$2x^2 - 5 - 2^x$	-	29	$3x - 6 \sin(x)$	-
15	$10 - 0,5x^2 - 2^{-x}$	-	30	$2x - 5 \sin(x)$	-

Пример 3. Найти корень уравнения $y(x) = \sin 2x - \ln x$.

Решение. Прежде всего, выполним отделение корней. Для графического отделения корней уравнения $\sin 2x - \ln x = y(x)$ преобразуем его к равносильному уравнению $\sin 2x = \ln x$ и построим графики функций $\sin 2x$, $\ln x$ (рис. 2.4).

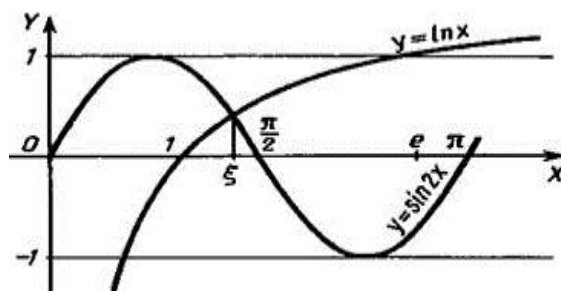


Рис. 2.4. Графическое решение

Из графика следует, что уравнение имеет единственный корень, который находится в интервале $[1; 1,5]$. Вычислим значения функции $y(x) = \sin 2x - \ln x$ на концах отрезка $[1; 1,5]$: $y(1) = 0,909298$; $y(1,5) = -0,264344$. Знаки результатов разные, следовательно, корень на отрезке $[1; 1,5]$ действительно имеется.

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом. Так, в нашем примере, имеем $y(1,3) = 0,253138 > 0$, так что отрезком, на котором находится корень, можно считать интервал $[1,3; 1,5]$.

После отделения корней уточним корень с помощью ручного счета на отрезке $[1,3; 1,5]$ с точностью до 10^{-3} .

Решение с помощью калькулятора. Уравнение $y(x) = \sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[1,3; 1,5]$. Найдём середину отрезка $[1,3; 1,5]$: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3+1,5}{2} = 1,4$. Определим, на каком из полученных отрезков $[1,3; 1,4]$ и $[1,4; 1,5]$ функция $y(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

- 1) $[1,3; 1,4]$: $y(1,3) = \sin(2 \cdot 1,3) - \ln(1,3) > 0$;
 $y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0$.
- 2) $[1,4; 1,5]$: $y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0$;
 $y(1,5) = \sin(2 \cdot 1,5) - \ln(1,5) < 0$.

Значит, корень уравнения находится на отрезке $[1,3; 1,4]$.

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3} :

$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,3}{2} = 0,05 > 10^{-3}$, точность не достигнута. Разделим отрезок $[1,3; 1,4]$

пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3+1,4}{2} = 1,35$.

Определим, на каком из полученных отрезков $[1,3;1,35]$ и $[1,35;1,4]$ функция $y(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

- 1) $[1,3;1,35]$: $y(1,3) = \sin(2 \cdot 1,3) - \ln(1,3) > 0$;
 $y(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0$.
- 2) $[1,35;1,4]$: $y(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0$;
 $y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0$.

Значит, корень уравнения находится на отрезке $[1,35;1,4]$.

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3} :

$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,35}{2} = 0,025 > 10^{-3}$, точность не достигнута. Снова разделим отрезок

$[1,35;1,4]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,35+1,4}{2} = 1,375$.

Определим, на каком из полученных отрезков $[1,35;1,375]$ и $[1,375;1,4]$ функция $y(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

- 1) $[1,35;1,375]$: $y(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0$;
 $y(1,375) = \sin(2 \cdot 1,375) - \ln(1,375) > 0$.
- 2) $[1,375;1,4]$: $y(1,375) = \sin(2 \cdot 1,375) - \ln(1,375) > 0$;
 $y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0$.

Значит, корень уравнения находится на отрезке $[1,375;1,4]$.

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3} :

$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,375}{2} = 0,0125 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

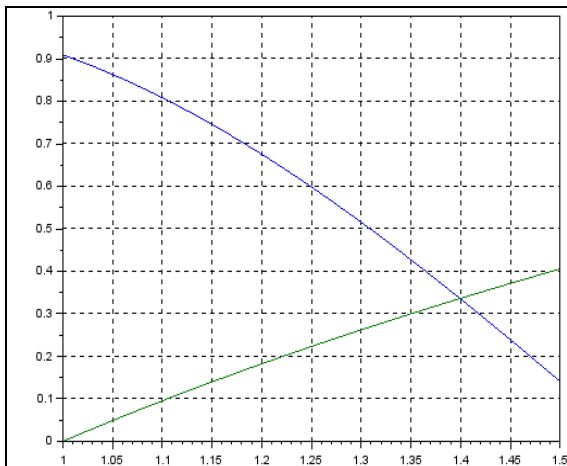
Продолжаем делить отрезок пополам и проверять знаки функции на новых промежутках, до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность решения.

Решение уравнения с точностью 10^{-3} будет получено равным $x=1,399$.

С целью проверки полученного результата можно использовать программ *MathLab* или *SciLab*.

Пример 4. Отделить корень уравнения $y(x) = \sin 2x - \ln x = 0$ графически и вычислить корень с заданной точностью 10^{-5} методом половинного деления в программе *SciLab*.

Листинг программы отделения корней и результат $x=1:0.01:1.5$; $y1=\sin(2*x)$; $y2=\log(x)$; $\text{plot}(x,y1,x,y2)$ $\text{xgrid}(001)$	Листинг метода дихотомии и результат $\text{function } [y]=F_x(x)$ $y=\sin(2*x)-\log(x)$; endfunction <i>//метод дихотомии</i> $\text{disp}('--\text{метод дихотомии--}')$; $a=1.0$; $b=1.5$; $e=1E-5$; $n=0$; $\text{while } \text{abs}((b-a))>e$; $c=(a+b)/2$;
--	--



Результат. $x=1.4$

```

if  $F_x(a) * F_x(c) < 0$  then
     $b=c$ ;
else
     $a=c$ ;
end
     $n=n+1$ ;
end
 $x=(a+b)/2$  //корень
 $Dx=(a-b)/2$  //погрешность корня
 $Fx\_x=F_x(x)$ 
n

```

Результаты: Корень
 $x = 1.3994255$, погрешность $\Delta x = -0.0000038$, значение функции $y(x) = 0.0000087$, число итераций $n = 16$.

Программа *Scilab* обладает большим набором встроенных функций, позволяющих решить те или иные вычислительные задачи. Для решения нелинейного уравнения предусмотрена функция *fsolve*. Продемонстрируем действие этой подпрограммы на следующем примере.

Пример 5. Найти значение корня для функции $f(x) = \exp(x) - 10x$ на интервале $[0; 0,5]$. используя функцию *fsolve*.

Листинг программы

// Вычисление корня уравнения с помощью **fsolve**

//описание функции $f(x)$

function $y=ff(x)$

$y=\exp(x)-10*x$;

endfunction

//задание начальных приближений

$x=0$;

//решение и вывод результата

$xk=fsolve(x,ff)$

Результат

$xk = 0.1118326$

Алгоритм решения приведен на рис. 2.5.

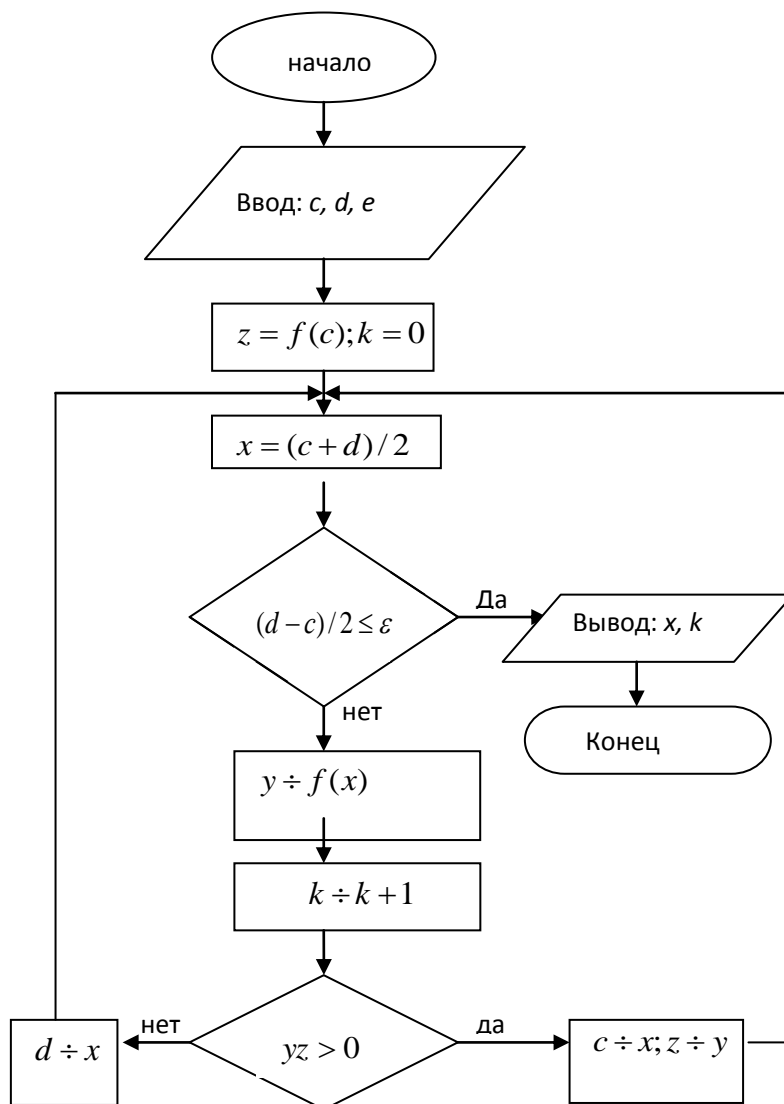


Рис. 2.5. Алгоритм решения методом дихотомии

Приведем еще один пример решения задачи отделения корней нелинейного уравнения и уточнения корней с помощью программного комплекса *Scilab*

Пример 6. Отделить корень уравнения $y = x - 10.0 \cdot \sin(x)$ и вычислить корень с заданной точностью 10^{-5} методом половинного деления.

Листинг программы отделения корней и результаты

```

x=8:0.01:9;
y1=x;
y2=10.0*sin(x);
plot(x,y1,x,y2)
xgrid(001)

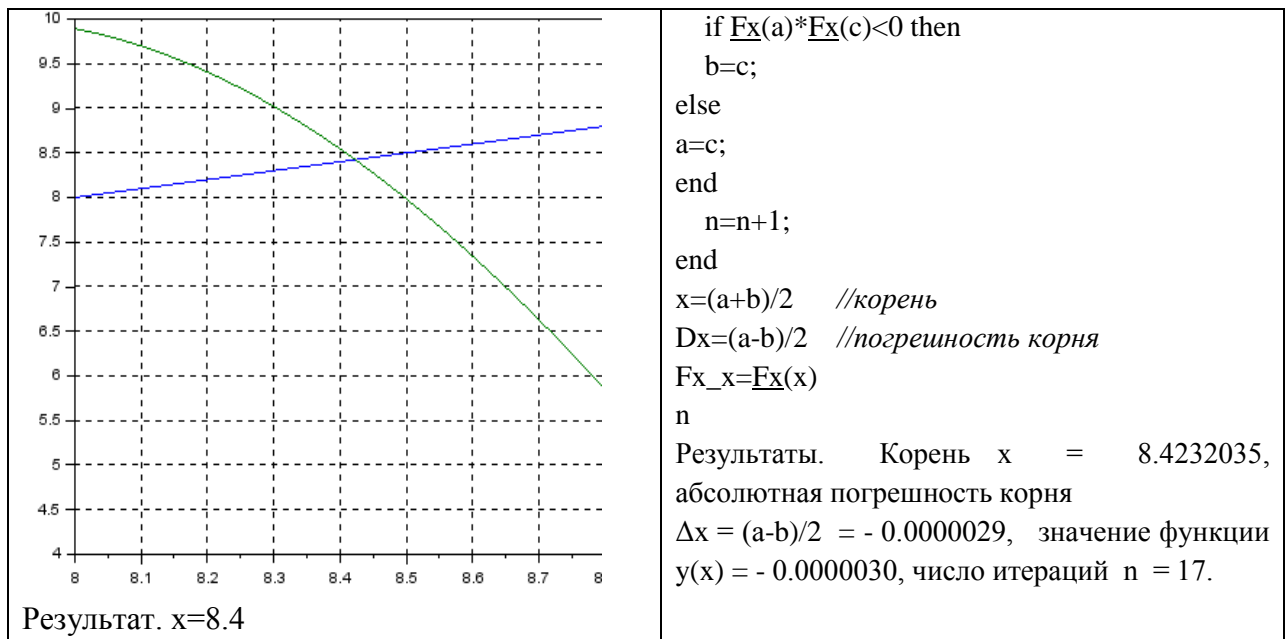
```

Листинг метода дихотомии и результаты

```

function [y]=Fx(x)
    y=x-10.0*sin(x);
endfunction
//метод дихотомии
disp('--метод дихотомии--');
a=8.25;
b=9.0;
e=1E-5;
n=0;
while abs((b-a))>e,
    c=(a+b)/2;

```



Контрольные вопросы

1. Что означает «решить уравнение аналитически» и «решить уравнение численно».
2. В чем заключается задача отделения корней.
3. В чем состоит основная идея метода половинного деления.
4. Может ли метод половинного деления дать точное значение корня уравнения.