



УДК 519.61

ББК

Р е ц е н з е н т:

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры электрификации горных предприятий (протокол № ) и рекомендовано для издания в УГГУ.

**Раевская Л. Т., Карякин А. Л.**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОГРАММЫ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ: учебное пособие / Л. Т. Раевская, А. Л. Карякин; Урал. гос. горный ун-т. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2020. – 117 с.**

Учебное пособие соответствует дисциплине «Вычислительные методы и прикладные программы» подготовки бакалавров и инженеров. Пособие включает краткие теоретические сведения по основным разделам дисциплины и задания для выполнения практических и лабораторных работ, а также для самостоятельной работы обучающихся с использованием пакетов программ SciLab, OpenOffice Calc, MathLab. Учебное пособие может быть использовано для выполнения курсовой работы по данной дисциплине.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению базового высшего образования 21.05.04 – Горное дело, специализации «Электрификация и автоматизация горного производства» и по направлению бакалавриата 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника».

© Раевская Л. Т., Карякин А. Л.

© Уральский государственный  
горный университет, 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
РАЗДЕЛ 1. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле и погрешности результата	7
Задание 1.1. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле	14
Задание 1.2. Правильная запись результатов, выполнение округлений	16
Задание 1.3. Погрешности прямых измерений	19
Задание 1.4. Погрешности косвенных измерений	21
РАЗДЕЛ 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами	26
Задание 2.1. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления (метод дихотомии)	28
Задание 2.2. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом Ньютона (касательных)	35
Задание 2.3. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом хорд (секущих)	39
Задание 2.4. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом простых итераций	43
РАЗДЕЛ 3. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Метод Гаусса	45
Задание 3.1. Решение СЛАУ методом Гаусса	51
РАЗДЕЛ 4. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приближенными методами	54
Задание 4.1. Решение СЛАУ приближенными методами	62
РАЗДЕЛ 5. Аппроксимация. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона	65
Задание 5.1. Построение интерполяционного полинома Лагранжа	68
Задание 5.2. Построение интерполяционного полинома Ньютона	71
Задание 5.3. Аппроксимация методом наименьших квадратов	78
РАЗДЕЛ 6. Интерполирование сеточной функции сплайнами	79
Задание 6.1. Интерполирование кубическими сплайнами	85
Задание 6.2. Интерполирование. Использование подпрограммы <i>interpln</i>	88
РАЗДЕЛ 7. Вычисление интегралов. Приближенные методы расчета	91
Задание 7.1. Вычисление интегралов приближенными методами	97
Задание 7.2. Вычисление интегралов по формуле Гаусса	101
РАЗДЕЛ 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)	102
Задание 8.1. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера	107
Задание 8.2. Решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты и	

с помощью программы	113
Приложение 1. Укрупнённая схема алгоритма (блок-схема) метода Гаусса	114
Приложение 2. Блок-схема алгоритма построения функции многочлена Лагранжа	119
Приложение 3. Блок-схема метода интерполяции сплайнами	121
Приложение 4. Блок-схемы методов Эйлера и Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений	126
Список рекомендуемой литературы	130

## Введение

«Вычислительные методы и прикладные программы» – раздел прикладной математики, в котором рассматриваются разработка, обоснование и реализация с использованием вычислительной техники методов приближенного решения разнообразных задач на уровне математических моделей. Основное содержание дисциплины составляют методы, представляющие собой итерационные процедуры, расчетные формулы, алгоритмы переработки информации. Пособие предназначено для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях по дисциплине «Вычислительные методы и прикладные программы», формирования умений решать практические задачи, а также для овладения студентами навыков самостоятельного применения этих знаний.

Пособие содержит задания для практических занятий, и служат руководством к выполнению лабораторных работ. Каждое задание включает 30 вариантов данных, для выполнения которых рекомендуется использовать математически ориентированные программные системы, такие как SciLab, Open Office Calc, MathLAB. Пособие выполняет функцию управления самостоятельной работой студента, поэтому раздел пособия имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, краткая теория по данной теме, порядок выполнения работы, пример решения задания, а также варианты задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

В результате освоения учебной дисциплины обучающиеся должны

### **уметь:**

- использовать основные численные методы решения математических задач;
- разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

### **знать:**

- методы хранения чисел в памяти ЭВМ и действия над ними, оценку точности вычислений, действия над приближенными числами;
- методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, методы оптимизации, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

В пособии приведен теоретический (справочный) материал в соответствии с темой занятия, обращение к которому поможет выполнить задания практического занятия. Перечень практических занятий соответствует

рабочей программе по дисциплине «Вычислительные методы и прикладные программы».

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения направления базового высшего образования 21.05.04 – Горное дело, специализации «Электрификация и автоматизация горного производства» и по направлению бакалавриата 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника». Организация выполнения и контроля практических занятий по дисциплине «Вычислительные методы и прикладные программы» является подготовительным этапом к сдаче экзамена по данной дисциплине.

## РАЗДЕЛ 1. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле и погрешности результата

### Цель занятия:

- закрепить умения вычислять погрешности результатов арифметических действий; косвенных и прямых измерений;
- закрепить умения определять количество верных цифр в числе, вычислять относительные и абсолютные погрешности.

### 1.1. Приближение числа. Погрешности приближенных значений чисел

Пусть  $X$  - точное значение некоторой величины,  $x$  - наилучшее приближение этой величины.

**Определение:** Абсолютной погрешностью  $e_x$  приближенного значения числа  $X$  называется модуль разности между точным числом  $X$  его приближенным значением  $x$ , т.е.

$$e_x = |X - x|.$$

**Определение:** Число  $x$  называется приближённым значением точного числа  $X$  с точностью до  $\Delta x$ , если абсолютная погрешность приближённого значения  $a$  не превышает  $\Delta x$ , т.е.

$$|X - x| \leq \Delta x. \quad (1.1)$$

**Определение:** Число  $\Delta x$  называется границей абсолютной погрешности приближённого значения числа  $x$ .

Число  $\Delta x$  на практике стараются подобрать как можно меньше. Из неравенства (1.1) найдём границы, в которых заключено точное значение числа  $X$ :

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x.$$

$\text{НГ}_x = x - \Delta x$  - нижняя граница приближения величины  $X$ .

$\text{ВГ}_x = x + \Delta x$  - верхняя граница приближения величины  $X$ .

**Определение:** Относительной погрешностью  $\delta x$  приближенного числа  $x$  называется отношение абсолютной погрешности  $\Delta x$  этого приближения к числу  $x$ , т.е.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности  $\delta x$  меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства  $\delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$ , где  $n$  - количество верных цифр.

### ***Погрешности арифметических действий***

<b>x; y</b>	<b><math>\Delta(x; y)</math></b>	<b><math>\delta(x; y)</math></b>
x+y	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x+y } \delta x + \frac{ y }{ x+y } \delta y$
x-y	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{ x }{ x-y } \delta x + \frac{ y }{ x-y } \delta y$
xy	$ x \Delta y +  y \Delta x$	$\delta x + \delta y$
x/y	$\frac{ x \Delta y +  y \Delta x}{y^2}$	$\delta x + \delta y$

### ***Погрешности значений функций***

<b>f(x)</b>	<b><math>\Delta f(x)</math></b>	<b><math>\delta f(x)</math></b>
$\sqrt{x}$	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2} \delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	$\delta x$
sin x	$ \cos x  \cdot \Delta x$	$ x \operatorname{ctg} x  \cdot \delta x$
cos x	$ \sin x  \cdot \Delta x$	$ x \operatorname{tg} x  \cdot \delta x$
tg x	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 x }{ \sin 2x } \cdot \delta x$
ln x	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{ \ln x }$
lg x	$\frac{\Delta x}{x \ln 10}$	$\frac{\delta x}{ \lg x } \cdot \ln 10$
$e^x$	$e^x \Delta x$	$ x  \cdot \delta x$
arcsin x	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arcsin x  \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$
arccos x	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{ x }{ \arccos x  \sqrt{1-x^2}} \cdot \delta x$

$\arctg x$	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{ x }{ \arctg x  \sqrt{1+x^2}} \cdot \delta x$
$x^y$	$x^y ( y  \frac{\Delta x}{x} +  \ln x  \cdot \Delta y)$	$ y \ln x  \cdot \delta y +  y  \cdot \delta x$

Погрешности функций вычисляются по формуле

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

**Пример 1.** Вычисление погрешности  $S$  с учетом погрешностей функций

$$S = \frac{\sqrt{ab}}{3a+c^2}, \quad \text{если} \quad \begin{array}{l} a = 12.3 \\ b = 0.43 \\ c = 0.029 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Delta a = 0.1 \\ \Delta b = 0.01 \\ \Delta c = 0.001 \end{array} \quad \text{все цифры верные, т. е.}$$

*Решение.*

$$S = \frac{\sqrt{ab}}{3a+c^2} = \frac{\sqrt{12.3 \cdot 0.43}}{3+12.3+0.029} = 0.062. \text{ Относительную погрешность можно расписать}$$

$$\text{как } \delta S = \delta(\text{числ.}) + \delta(\text{знам.}) = \delta(\sqrt{ab}) + \delta(3a+c^2) = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\Delta(3a+c^2)}{3a+c^2} = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{2.299} + \frac{\Delta(3a+c^2)}{36.929},$$

где

$$\Delta\sqrt{ab} = \frac{\Delta(ab)}{2\sqrt{ab}} = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{2\sqrt{ab}} = 0.036 \quad \text{и} \quad \Delta(3a+c^2) = 3\Delta a + 2c\Delta c = 0.300. \text{ Тогда получаем}$$

$$\delta S = \frac{\Delta\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{\Delta(3a+c^2)}{3a+c^2} = 0.024, \quad \Delta S = 0.062 \cdot 0.024 = 0.001488, \quad S = 0.062 \pm 0.002, \text{ или}$$

верными цифрами  $S = 0.06 \pm 0.01$

## 1.2. Методы приближенных вычислений погрешностей и примеры выполнения задания

### *Вычисление по правилам подсчета цифр*

При вычислении данным методом явного учёта погрешностей не ведётся, правила подсчёта цифр показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надёжными.

#### *Правила метода*

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.

2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.
3. При определении количества верных цифр в значениях функций от приближённых значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной.
4. В записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем описано в правилах 1-3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

Правила подсчёта цифр носят оценочный характер, но практическая надёжность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчётная таблица – расписка формул.

**Пример 2.** Вычислить значение функции  $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}$ ,  $a = 2,156$ ,  $b = 0,927$ .

a	2,156	Пояснения при подсчете верных цифр
b	0,927	
$e^a$	8,637	$e^a = e^{2.156} = 8,63652$ , оценим производную $(e^a)' = e^a \approx 2^{2.156} < 10$ , значит (правило 3) надо сохранить на один знак меньше, чем в значении аргумента + 1 запасная цифра.
$\sqrt{b}$	0,9628	$\sqrt{b} = 0,9628083$ , оценим производную $(\sqrt{b})' = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{0.927}} < 1$ , (правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
$e^a + \sqrt{b}$	9,600	$e^a + \sqrt{b} = 8,637 + 0,9628 = 9,5998$ , (правило 1) результат округляется до трёх знаков после запятой, т.е. 9,600.
$b^2$	0,8593	$b^2 = 0,927^2 = 0,859329$ , (правило 2) результат округляем до трех цифр, как аргумент + 1 запасная цифра.

$a+b^2$	3,0153	$a+b^2 = 2.156 + 0.8593 = 3.0153$ , (правило 1) округляем результат до трех цифр + 1 запасная цифра.
$\ln(a+b^2)$	1,1037	$\ln(a+b^2) = \ln(3.0153) \approx 1.10369933$ , оценим производную $(\ln(a+b^2))' = \frac{1}{a+b^2} = \frac{1}{3.0153} < 1$ , (правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
A	8,698	$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b^2)} = \frac{9,600}{1,1037} \approx 8,698$ , при округлении результата использовали правило 2.
A	8,70	8-запасная цифра, По правилу 4, запасная цифра в окончательном результате округляется $8,698 \approx 8,70$

### **Вычисление со строгим учётом предельных абсолютных погрешностей**

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей. При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты, так же как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей – для результатов и их погрешностей. В таблице приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в предыдущем примере, и в предположении, что исходные данные  $a$  и  $b$  имеют предельные абсолютные погрешности  $\Delta a = \Delta b = 0,0005$ , т.е. у  $a$  и  $b$  все цифры верны.

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры; значения погрешностей для удобства округляются (всегда в сторону увеличения значения погрешности) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе.

**Пример 3.** Вычислить значение функции  $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b^2)}$ ,  $a = 2,156$ ,  $b = 0,927$ .

a	b	$e^a$	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	$b^2$	$a+b^2$	$\ln(a+b^2)$	A
2,156	0,927	8,637	0,9628	9,600	0,860	3,016	1,104	8,70
$\Delta a$	$\Delta b$	$\Delta(e^a)$	$\Delta(\sqrt{b})$	$\Delta(e^a + \sqrt{b})$	$\Delta(b^2)$	$\Delta(a+b^2)$	$\Delta \ln(a+b^2)$	$\Delta A$
0,0005	0,0005	0,0049	0,00027	0,0054	0,0016	0,0021	0,00076	0,016

Используя калькулятор, имеем  $e^{2,156} = 8,63652$ .

При вычислении предельных абсолютных погрешностей используем соотношение  $\Delta(e^a) = e^a \cdot \Delta a = e^{2,156} \cdot 0,0005 = 0,0043182 \approx 0,0044$ .

Судя по ее величине, в полученном значении экспоненты в строгом смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой:  $e^{2,156} \approx 8,637$  и вносим его в таблицу. При этом возникает погрешность округления:  $8,637 - 8,63652 = 0,00048$ .

Вслед за этим вычисляем полную погрешность полученного результата (погрешность действия плюс погрешность округления:  $0,0044 + 0,00048 = 0,0049$ ), которую так же вносим в таблицу.

Все последующие действия выполняем аналогично с применением соответствующих формул для предельных абсолютных погрешностей.

Округляя окончательный результат до последней верной в строгом смысле цифры, а так же округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем:  $A = 8,7 \pm 0,1$ .

Вычисления по методу строго учёта предельных абсолютных погрешностей можно выполнить на компьютере с помощью программы. Если не производить пооперационного учёта движения вычислительной ошибки, то достаточно вычислить значение предельной абсолютной погрешности окончательного результата, а затем произвести его округление.

### ***Вычисление по методу границ***

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений – *метод границ*.

Пусть  $f(x, y)$  – функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов  $x$  и  $y$ . Нужно получить её значение  $f(a, b)$ , где  $a$  и  $b$  – приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$$НГ_a < a < ВГ_a; \quad НГ_b < b < ВГ_b.$$

Здесь НГ, ВГ - обозначение соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения  $f(a, b)$  при известных границах значений  $a$  и  $b$ .

Допустим, что функция  $f(x, y)$  возрастает по каждому из аргументов  $x$  и  $y$ . Тогда

$$f(НГ_a, НГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, ВГ_b).$$

Пусть теперь  $f(x, y)$  возрастает по аргументу  $x$  и убывает по аргументу  $y$ . Тогда будет строго гарантировано неравенство

$$f(НГ_a, ВГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, НГ_b).$$

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий. Пусть  $f_1(x, y) = x + y$ . Тогда очевидно, что

$$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b.$$

Точно так же для функции  $f_2(x, y) = x - y$  (она по  $x$  возрастает, а по  $y$  убывает) имеем

$$НГ_a - ВГ_b < a - b < ВГ_a - НГ_b.$$

Аналогично для умножения и деления:

$$\begin{aligned} НГ_a \cdot НГ_b &< a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b; \\ \frac{НГ_a}{ВГ_b} &< \frac{a}{b} < \frac{ВГ_a}{НГ_b} \end{aligned}$$

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк – отдельно для вычисления НГ и ВГ результата (по этой причине метод границ называют ещё методом двоичных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчёта цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведётся по недостатку, а верхних по – избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

**Пример 4.** Вычислить значение функции  $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}$ ,  $a = 2,156$ ,  $b = 0,927$ .

Нижняя и верхняя границы значений  $a$  и  $b$  определены из условия, что в исходных данных  $a = 2,156$  и  $b = 0,927$  все цифры верны в строгом смысле ( $\Delta a = \Delta b = 0,0005$ ), т.е.  $2,1555 < a < 2,1565$ ;  $0,9265 < b < 0,9275$ .

	$a$	$b$	$e^a$	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	$b^2$	$a + b^2$	$\ln(a + b^2)$	$A$
НН Г	2,155 5	0,9265	8,63220	0,96255	9,59475	0,85840	3,01434	1,10338	8,6894
ВВ Г	2,156 5	0,9275	8,64084	0,96307	9,60391	0,86026	3,01676	1,10419	8,7041

Таким образом, результат вычислений значения  $A$  по методу границ имеет вид  $8,6894 < A < 8,7041$ .

По результатам вычислений получаем

$$A = \frac{8,6894 + 8,7041}{2} = 8,69675; \quad \Delta A = \frac{8,7041 - 8,6894}{2} = 0,00735,$$

что дает  $A = 8,697 \pm 0,008$ , или при записи верными цифрами,  $A = 8,7 \pm 0,01$ .

## Задание 1.1. Вычисление приближенного значения числа по заданной формуле

Вычислить приближенное значение величины  $F$ , используя три метода расчета результата и его погрешностей при заданных значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

1. правило подсчета цифр;
2. строгий учет границ абсолютных погрешностей;
3. метод границ.

Сравнить полученные результаты между собой, пояснить различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

Сделать вывод о целесообразности и эффективности использования тех или иных методов и средств вычислений. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

**Варианты задания 1.1**

Номер варианта	$F$	$a$	$b$	$c$
1	$\frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	3,433	6,22	0,149
2	$\frac{(b-c)^2}{2a+b}$	4,05	6,723	0,3254
3	$\frac{\ln b - a}{a^2 + 12c}$	0,7219	1,347	0,013
4	$\frac{b - \sin a}{a + 3c}$	3,672	4,63	0,0278
5	$\frac{10c + \sqrt{b}}{a^2 - b}$	1,2473	0,346	0,51
6	$\frac{(a-c)^2}{\sqrt{a} + 3b}$	11,7	0,937	5,081
7	$\frac{a - \sin b}{b^2 + 6c}$	1,75	1,21	0,199
8	$\frac{\sqrt{b-c}}{\ln a + b}$	18,0354	3,7251	0,071
9	$\frac{\ln c - 10a}{\sqrt{bc}}$	0,113	0,1056	89,4
10	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,0399	4,83	0,072
11	$\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	1,574	1,40	1,1236
12	$\frac{ab-4c}{\ln a + b}$	12,72	0,34	0,0290

<b>13</b>	$\frac{a - \cos b}{13c + b}$	3,49	0,845	0,0037
<b>14</b>	$\frac{ac + b}{\sqrt{b - c}}$	0,0976	2,371	1,15874
<b>15</b>	$\frac{a + \cos c}{2a + b}$	0,11587	4,25	3,00971
<b>16</b>	$\frac{ab}{a^2c + b}$	0,112	1,22	5,084
<b>17</b>	$\frac{\sqrt{ab}}{3a^2 + c}$	12,3	0,43	0,029
<b>18</b>	$\frac{\sqrt{ab}}{b + c^2}$	4,151	2,659	0,851
<b>19</b>	$\frac{\sqrt{a + \sin b}}{a + c^2}$	14,85	0,87	10,431
<b>20</b>	$\frac{\sqrt{a + b^2}}{2b + c^2}$	2,119	5,431	1,679
<b>21</b>	$\frac{a + 2c^2}{\ln(a + b)}$	0,087	1,342	1,367
<b>22</b>	$\frac{ab^2 - c}{\ln a + b}$	11,831	0,341	1,971
<b>23</b>	$\frac{ab^2}{\ln(a + c^2)}$	0,874	1,986	4,567
<b>24</b>	$\frac{2c^2}{\ln(a^2 + b)}$	1,75	1,21	0,041
<b>25</b>	$\frac{(a^2 + c)}{\sqrt{a + b^2}}$	1,2451	2,346	0,517
<b>26</b>	$\frac{(a - c)^2}{\sqrt{a + 3b}}$	3,272	5,63	1,0278
<b>27</b>	$\frac{(a^2 + c)^2}{c^2 + b}$	0,813	0,1056	1,94
<b>28</b>	$\frac{a^2 + \cos c}{a + b}$	0,399	3,83	0,72
<b>29</b>	$\frac{a + \cos b}{2a^2 + c}$	0,991	0,85	0,722
<b>30</b>	$\frac{b^2 + \sin c}{2a + b}$	1,932	4,83	0,79

## Задание 1.2. Правильная запись результатов, выполнение округлений

Проверить запись результатов, исправить при необходимости. Выполнить округление. Варианты заданий приведены ниже в таблице 1.2.

Таблица 1.2

### Варианты задания 1.2

Вариант 1.  $17,0 \pm 0,2$ ;  $17 \pm 0,2$ ;  $17,00 \pm 0,2$ ;  $12,13 \pm 0,2$ ;  $12,13 \pm 0,17$ ;  $12,1 \pm 0,17$ ;  $46,402 \pm 0,15$ ;  $46,4 \pm 0,15$ ;  $46,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,3219 \pm 0,0291$ ; (до десятых)  $7,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $789 \pm 12$ .

Вариант 2.  $11,0 \pm 0,2$ ;  $67 \pm 0,2$ ;  $67,00 \pm 0,2$ ;  $122,13 \pm 0,2$ ;  $122,13 \pm 0,17$ ;  $122,1 \pm 0,17$ ;  $146,402 \pm 0,15$ ;  $146,4 \pm 0,15$ ;  $146,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,8569 \pm 0,0891$ ; (до десятых)  $2,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $789 \pm 32$ .

Вариант 3.  $107,0 \pm 0,2$ ;  $107 \pm 0,2$ ;  $107,00 \pm 0,2$ ;  $123,13 \pm 0,2$ ;  $123,13 \pm 0,17$ ;  $123,1 \pm 0,17$ ;  $406,402 \pm 0,15$ ;  $406,4 \pm 0,15$ ;  $406,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,2439 \pm 0,0721$ ; (до десятых)  $1,1449 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $4329 \pm 22$ .

Вариант 4.  $147,0 \pm 0,2$ ;  $147 \pm 0,2$ ;  $147,00 \pm 0,2$ ;  $172,13 \pm 0,2$ ;  $172,13 \pm 0,17$ ;  $172,1 \pm 0,17$ ;  $496,402 \pm 0,15$ ;  $496,4 \pm 0,15$ ;  $496,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,7439 \pm 0,0221$ ; (до десятых)  $9,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $289 \pm 32$ .

Вариант 5.  $137,0 \pm 0,2$ ;  $137 \pm 0,2$ ;  $137,00 \pm 0,2$ ;  $132,13 \pm 0,2$ ;  $132,13 \pm 0,17$ ;  $132,1 \pm 0,17$ ;  $436,402 \pm 0,15$ ;  $436,4 \pm 0,15$ ;  $436,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,37439 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $32,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $3789 \pm 32$ .

Вариант 6.  $187,1 \pm 0,2$ ;  $187 \pm 0,2$ ;  $187,00 \pm 0,2$ ;  $142,13 \pm 0,2$ ;  $142,13 \pm 0,17$ ;  $142,1 \pm 0,17$ ;  $446,402 \pm 0,15$ ;  $446,4 \pm 0,15$ ;  $446,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,47439 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $42,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $4789 \pm 32$ .

Вариант 7.  $127,3 \pm 0,2$ ;  $127 \pm 0,2$ ;  $127,00 \pm 0,2$ ;  $122,13 \pm 0,2$ ;  $122,13 \pm 0,17$ ;  $122,1 \pm 0,17$ ;  $246,402 \pm 0,15$ ;  $246,4 \pm 0,15$ ;  $246,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,27439 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $22,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $2789 \pm 32$ .

Вариант 8.  $117,0 \pm 0,2$ ;  $117 \pm 0,2$ ;  $117,00 \pm 0,2$ ;  $112,13 \pm 0,2$ ;  $112,13 \pm 0,17$ ;  $112,1 \pm 0,17$ ;  $146,402 \pm 0,15$ ;  $146,4 \pm 0,15$ ;  $146,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,17439 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $2,17849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $1789 \pm 32$ .

Вариант 9.  $37,0 \pm 0,2$ ;  $37 \pm 0,2$ ;  $37,00 \pm 0,2$ ;  $152,13 \pm 0,2$ ;  $15,13 \pm 0,17$ ;  $152,1 \pm 0,17$ ;

546,402±0,15; 546,4±0,15; 546,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,5439±0,0791; (до десятых) 52,7849±0,98; (до десятков) 7589±32.

Вариант 10. 187,0±0,2; 187±0,2; 187,00±0,2; 182,13±0,2; 182,13±0,17; 182,1±0,17; 846,402±0,15; 846,4±0,15; 846,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,87439±0,0791; (до десятых) 2,87849±0,98; (до десятков) 8789±32.

Вариант 11. 14,0±0,2; 14±0,2; 14,00±0,2; 132,13±0,2; 132,13±0,17; 132,1±0,17; 46,02±0,15; 46,0±0,15; 46,00±0,15. Округлить: (до сотых) 0,9439±0,0791; (до десятых) 4,7849±0,98; (до десятков) 189±32.

Вариант 12. 47,0±0,2; 47±0,2; 47,00±0,2; 144,13±0,2; 144,13±0,17; 144,1±0,17; 16,402±0,15; 16,4±0,15; 16,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,7321±0,0791; (до десятых) 2,1239±0,98; (до десятков) 789±32.

Вариант 13. 57,0±0,2; 57±0,2; 57,00±0,2; 15,13±0,2; 15,13±0,17; 15,1±0,17; 416,402±0,15; 416,4±0,15; 416,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,5639±0,0713; (до десятых) 6,7749±0,98; (до десятков) 689±32.

Вариант 14. 77,0±0,2; 77±0,2; 77,00±0,2; 172,13±0,2; 172,13±0,17; 172,1±0,17; 47,402±0,15; 47,4±0,15; 47,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,6371±0,0791; (до десятых) 2,43349±0,98; (до десятков) 712±32.

Вариант 15. 87,0±0,2; 87±0,2; 87,00±0,2; 18,13±0,2; 18,13±0,17; 18,1±0,17; 26,402±0,15; 26,4±0,15; 26,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,6579±0,0791; (до десятых) 2,7452±0,98; (до десятков) 154±32.

Вариант 16. 11,0±0,2; 11±0,2; 11,00±0,2; 112,13±0,2; 112,13±0,17; 112,1±0,17; 41,402±0,15; 41,4±0,15; 41,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,7439±0,0722; (до десятых) 2,7849±0,98; (до десятков) 789±32.

Вариант 17. 12,0±0,2; 12±0,2; 12,00±0,2; 122,13±0,2; 122,13±0,17; 122,1±0,17; 26,202±0,15; 26,2±0,15; 26,20±0,15. Округлить: (до сотых) 0,7439±0,0132; (до десятых) 2,7849±0,98; (до десятков) 789±32.

Вариант 18. 15,0±0,2; 15±0,2; 15,00±0,2; 152,13±0,2; 152,13±0,17; 152,1±0,17; 56,402±0,15; 56,4±0,15; 56,40±0,15. Округлить: (до сотых) 0,3339±0,0324; (до десятых) 2,1149±0,98; (до десятков) 711±32.

Вариант 19.  $14,0 \pm 0,2$ ;  $14 \pm 0,2$ ;  $14,00 \pm 0,2$ ;  $142,13 \pm 0,2$ ;  $142,13 \pm 0,17$ ;  $142,1 \pm 0,17$ ;  $44,302 \pm 0,15$ ;  $44,3 \pm 0,15$ ;  $44,30 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,334539 \pm 0,06532$ ; (до десятых)  $2,34149 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $281 \pm 32$ .

Вариант 20.  $67,0 \pm 0,2$ ;  $67 \pm 0,2$ ;  $67,00 \pm 0,2$ ;  $16,13 \pm 0,2$ ;  $16,13 \pm 0,17$ ;  $16,1 \pm 0,17$ ;  $66,406 \pm 0,15$ ;  $66,4 \pm 0,15$ ;  $66,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,2319 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $1,7866 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $182 \pm 32$ .

Вариант 21.  $97,0 \pm 0,2$ ;  $97 \pm 0,2$ ;  $97,00 \pm 0,2$ ;  $19,13 \pm 0,2$ ;  $19,13 \pm 0,17$ ;  $19,1 \pm 0,17$ ;  $96,902 \pm 0,15$ ;  $96,9 \pm 0,15$ ;  $96,90 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,7439 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $2,7849 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $789 \pm 32$ .

Вариант 22.  $47,0 \pm 0,2$ ;  $47 \pm 0,2$ ;  $47,00 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,17$ ;  $412,1 \pm 0,17$ ;  $446,402 \pm 0,15$ ;  $446,4 \pm 0,15$ ;  $446,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,1234 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $7,7433 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $657 \pm 32$ .

Вариант 23.  $617,0 \pm 0,2$ ;  $617 \pm 0,2$ ;  $617,00 \pm 0,2$ ;  $126,13 \pm 0,2$ ;  $126,13 \pm 0,17$ ;  $126,1 \pm 0,17$ ;  $46,402 \pm 0,15$ ;  $46,4 \pm 0,15$ ;  $46,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,7216259 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $2,4249 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $243 \pm 32$ .

Вариант 24.  $217,0 \pm 0,2$ ;  $217 \pm 0,2$ ;  $127,00 \pm 0,2$ ;  $212,13 \pm 0,2$ ;  $212,13 \pm 0,17$ ;  $212,1 \pm 0,17$ ;  $246,102 \pm 0,15$ ;  $246,1 \pm 0,15$ ;  $246,10 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,4239 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $2,2224 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $341 \pm 32$ .

Вариант 25.  $317,0 \pm 0,2$ ;  $317 \pm 0,2$ ;  $317,00 \pm 0,2$ ;  $312,13 \pm 0,2$ ;  $312,13 \pm 0,17$ ;  $312,1 \pm 0,17$ ;  $43,212 \pm 0,15$ ;  $43,2 \pm 0,15$ ;  $43,21 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,6452 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $6,9473 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $739 \pm 32$ .

Вариант 26.  $997,0 \pm 0,2$ ;  $997 \pm 0,2$ ;  $997,00 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,17$ ;  $412,1 \pm 0,17$ ;  $21,402 \pm 0,15$ ;  $21,4 \pm 0,15$ ;  $21,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,5843 \pm 0,0791$ ; (до десятых)  $4,73642 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $232 \pm 32$ .

Вариант 27.  $317,0 \pm 0,2$ ;  $317 \pm 0,2$ ;  $317,00 \pm 0,2$ ;  $41,13 \pm 0,2$ ;  $41,13 \pm 0,17$ ;  $41,1 \pm 0,17$ ;  $1,402 \pm 0,15$ ;  $1,4 \pm 0,15$ ;  $1,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,25443 \pm 0,0961$ ; (до десятых)  $6,152642 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $231 \pm 32$ .

Вариант 28.  $142,0 \pm 0,2$ ;  $142 \pm 0,2$ ;  $142,00 \pm 0,2$ ;  $4112,13 \pm 0,2$ ;  $4112,13 \pm 0,17$ ;  $4112,1 \pm 0,17$ ;  $41,302 \pm 0,15$ ;  $41,3 \pm 0,15$ ;  $21,30 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,5743 \pm 0,0264$ ; (до десятых)  $2,1342542 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $232 \pm 32$ .

Вариант 29.  $997,0 \pm 0,2$ ;  $997 \pm 0,2$ ;  $997,00 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,17$ ;  $412,1 \pm 0,17$ ;  $21,402 \pm 0,15$ ;  $21,4 \pm 0,15$ ;  $21,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,8743 \pm 0,0321$ ; (до десятых)  $3,125442 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $232 \pm 32$ .

Вариант 30.  $997,0 \pm 0,2$ ;  $997 \pm 0,2$ ;  $997,00 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,2$ ;  $412,13 \pm 0,17$ ;  $412,1 \pm 0,17$ ;  $21,402 \pm 0,15$ ;  $21,4 \pm 0,15$ ;  $21,40 \pm 0,15$ . Округлить: (до сотых)  $0,22743 \pm 0,0543$ ; (до десятых)  $7,73642 \pm 0,98$ ; (до десятков)  $232 \pm 32$ .

**Пример 5.** Выполнить округление и правильно записать результат

Запись до округления	Запись после округления
$123357 \pm 678$ А/м	$123400 \pm 700$ А/м
$123357 \pm 678$ В.	$123,4 \pm 0,7$ кВ.
$237,46 \pm 0,13$ мм	$237,5 \pm 0,2$ мм.
$0,00283 \pm 0,00034$ кг.	$(2,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$ кг.
$1,045 \pm 0,000003$ с.	$1,045000 \pm 0,000003$ с.
$359623 \pm 307$ с.	$(359,62 \pm 0,31) 10^3$ с.
$0,000000047 \pm 0,0000000098$ м.	$50 \pm 10$ нм.
$67,89 \cdot 10^{-7} \pm 49,3 \cdot 10^{-8}$ А	$6,8 \pm 0,5$ мкА.
$589 \pm 0,69$ Н.	$589,0 \pm 0,7$ Н.
$589 \pm 0,078$ Н.	$589,00 \pm 0,08$ Н.

### Задание 1.3. Погрешности прямых измерений

Штангенциркулем были проведены измерения длины металлического бруска. Цена деления штангенциркуля - 0,1 мм. В результате 10-ти замеров были получены следующие значения (табл. 1.3). Вычислить абсолютную и относительную погрешности измерений. Правильно записать результат. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

#### Данные для задания 1.3

Вариант	Результаты 10-ти замеров длины металлического бруска (мм)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	31,0	31,1	31,2	31,3	31,0	31,0	31,1	31,0	31,0	31,1
2	32,0	32,1	32,2	32,3	32,0	32,0	32,1	32,0	32,0	32,1

3	33,0	33,1	33,2	33,3	33,0	33,0	33,1	33,0	33,0	33,1
4	21,0	21,1	21,2	21,3	21,0	21,0	21,1	21,0	21,0	21,1
5	41,0	41,1	41,2	41,3	41,0	41,0	41,1	41,0	41,0	41,1
6	36,0	36,1	36,2	36,3	36,0	36,0	36,1	36,0	36,0	36,1
7	35,0	35,1	35,2	35,3	35,0	35,0	35,1	35,0	35,0	35,1
8	31,2	31,4	31,3	31,3	31,2	31,3	31,1	31,5	31,4	31,5
9	35,0	35,1	35,2	35,3	35,0	35,0	35,1	35,0	35,0	35,1
10	71,0	71,1	71,2	71,3	71,0	71,0	71,1	71,0	71,0	71,1
11	38,0	38,1	38,2	38,3	38,0	38,0	38,1	38,0	38,0	38,1
12	51,0	51,1	51,2	51,3	51,0	51,0	51,1	51,0	51,0	51,1
13	37,0	37,1	37,2	37,3	37,0	37,0	37,1	37,0	37,0	37,1
14	42,0	42,1	42,2	42,3	42,0	42,0	42,1	42,0	42,0	42,1
15	34,0	34,1	35,2	33,3	35,0	34,0	34,1	34,0	35,0	34,1
16	21,7	21,8	21,6	21,6	21,7	21,8	21,7	21,6	21,8	21,5
17	61,0	61,1	61,2	61,3	61,0	61,0	61,1	61,0	61,0	61,1
18	45,0	45,1	45,2	45,3	45,0	45,0	45,1	45,0	45,0	45,1
19	22,0	22,1	22,2	22,3	22,0	22,0	22,1	22,0	22,0	22,1
20	29,0	29,1	29,2	29,3	29,0	29,0	29,1	29,0	29,0	29,1
21	48,0	48,1	48,2	48,3	48,0	48,0	48,1	48,0	48,0	48,1
22	44,0	44,1	44,2	44,3	44,0	44,0	44,1	44,0	44,0	44,1
23	39,0	39,1	39,2	39,3	39,0	39,0	39,1	39,0	39,0	39,1
24	81,0	81,1	81,2	81,3	81,0	81,0	81,1	81,0	81,0	81,1
25	91,0	91,1	91,2	91,3	91,0	91,0	91,1	91,0	91,0	91,1
26	47,0	47,1	47,2	47,3	47,0	47,0	47,1	47,0	47,0	47,1
27	55,0	55,1	55,2	55,3	55,0	55,0	55,1	55,0	55,0	55,1
28	58,0	58,1	58,2	58,3	58,0	58,0	58,1	58,0	55,0	58,1
29	28,0	28,1	28,2	28,3	28,0	28,0	28,1	28,0	28,0	28,1
30	84,0	84,1	84,2	84,3	84,0	84,0	84,1	84,0	84,0	84,1

**Пример 6.** Вольтметром сделано 10 отсчетов напряжения  $U$  в электрической цепи. Вольтметр, класс точности которого  $K=2.5$ , имеет максимальное значение шкалы, равное  $a=200$  В. Обработать результаты измерений, обеспечив 98% надежность оценки напряжения. Результаты измерений представлены в таблице ниже.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U, В	145	140	145	105	130	150	150	155	175	160

*Решение.*

Вычисляем инструментальную погрешность  $\Delta a = K \cdot a / 100 = 5B$ .

Для заданной доверительной вероятности  $P=98\%$  и количества отсчетов  $N=10$  определяем коэффициент Стьюдента  $t_{98;10}=2$ . Вычисляем среднее значение.

$$\bar{U} = \frac{\sum_{n=1}^N U_n}{N} = 146B$$

Вычисляем среднее квадратичное отклонение отсчетов.

$$S_U = \sqrt{\frac{\sum (U_n - \bar{U})^2}{N-1}} = 18,6B$$

Проверяем отсчеты на наличие промахов. Аномальным отсчетом является отсчет №4. Вычисляем нормированное отклонение  $U_4$  от среднего значения

$$Z = \frac{|U_4 - \bar{U}|}{S_U} = \frac{|105 - 146|}{18,6} = 2,17$$

Известно, что количество опытов, при котором полученный отсчет нельзя считать промахом, равно 17. Это число больше, чем  $N=10$ . Следовательно, отсчет  $U=105$  В является промахом и его нужно удалить из обрабатываемого ряда. Новый ряд отсчетов напряжения ( $N=9$ ,  $t_{98;9} = 2,9$ )

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
U, В	145	140	145	130	150	150	155	175	160

Вычисляем новое среднее значение и среднее квадратичное отклонение

$$\bar{U} = 150 \text{ В}, \quad S_U = 12,7 \text{ В}$$

Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\bar{U}} = \frac{S_U}{\sqrt{N}} = \frac{12,7}{\sqrt{9}} = 4,23B$$

$$\Delta_U = t_{\alpha;N} \cdot S_{\bar{U}} = 2,9 \cdot 4,23 = 12,2B$$

Вычисляем полную абсолютную погрешность и относительную

$$\Delta U = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta_U^2} = \sqrt{5^2 + 12,2^2} = 13 \approx 10B$$

$$\delta U = \frac{\Delta U}{\bar{U}} = \frac{10}{150} = 6,6\%$$

После округлений результат измерения напряжения записываем в виде:

$$U = (150 \pm 10)B, \quad \delta U = 7\%, \quad P = 98\%.$$

#### Задание 1.4. Погрешности косвенных измерений

Определить погрешность косвенного измерения момента статического сопротивления  $M_c$  электродвигателя для номинального режима работы. Использовать второй закон Ньютона, закон электромагнитных сил для вычисления электромагнитного момента и уравнение связи между током возбуждения и магнитным потоком

$$M_{\partial\partial} - Mc = J \frac{d\omega}{dt} \quad M_{\partial\partial} = k * \Phi(t) I_{\partial\partial} \quad k = M_{\text{ном}} / \Phi_{\text{ном}}(t) I_{\partial\partial}$$

$$\Phi_{\text{ном}}(t) = k_{\Phi} I_{B.\text{ном}} \quad k_1 = k * k_{\Phi} \quad M_{\text{ном}} = \frac{P_{\text{ном}}}{\omega_{\text{ном}}} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \varepsilon = \frac{\omega_{\text{ном}} - \omega_0}{t_{\text{разг}}}$$

где  $M_{\partial\partial}(t)$  – крутящий момент двигателя,  $I_{\partial\partial}$  – ток обмотки якоря,  $\Phi(t)$  – магнитный поток,  $I_{\partial}(t)$  – ток возбуждения,  $\omega(t)$  – угловая скорость и  $\varepsilon(t)$  – угловое ускорение электродвигателя,  $J$  – момент инерции. Расчеты выполнить для заданной относительной погрешности измеряемых величин 10, 5, и 1 %. Необходимые для расчета данные приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

### Варианты задания 1.4

№ варианта	Мощность P, кВт	Напряжение U, В	Число оборотов n, об/мин	Магнитный поток $\Phi$ , Вб	Масса m, кг	Радиус R, м	Скорость V, м/с	Время t, с
1	16	550	1200	1.1	450	0.4	1.1	5
2	11	500	1100	1.0	500	0.3	1.2	4
3	12	510	1300	1.2	600	0.5	1.4	3
4	13	520	1200	1.3	400	0.4	1.5	5
5	17	520	1400	1.1	550	0.3	1.4	4
6	11	540	1000	1.1	450	0.4	1.0	2
7	12	500	1200	1.2	640	0.5	1.1	5
8	13	480	1300	1.3	500	0.3	1.4	4
9	14	470	1400	1.4	550	0.4	1.0	3
10	15	460	1500	1.5	450	0.5	1.5	5
11	10	540	1100	1.1	400	0.4	1.0	3
12	10	530	1000	1.2	540	0.5	1.5	4
13	11	520	1200	1.1	600	0.5	1.4	3
14	12	550	1300	1.3	500	0.4	1.0	3
15	15	500	1400	1.2	400	0.5	1.4	4
16	12	560	1500	1.4	450	0.5	1.4	4
17	11	400	1000	1.1	500	0.4	1.5	5
18	10	520	1200	1.0	550	0.5	1.5	3
19	14	510	1100	1.0	600	0.3	1.4	4
20	13	570	1300	1.1	480	0.3	1.0	3
21	12	580	1400	1.2	580	0.4	1.4	4
22	10	500	1500	1.0	500	0.4	1.4	5
23	13	550	1500	1.4	600	0.4	1.1	5
24	14	500	1000	1.5	400	0.3	1.4	4
25	11	510	1200	1.1	550	0.5	1.0	3
26	12	520	1100	1.2	450	0.4	1.5	5
27	13	530	1300	1.1	640	0.3	1.0	4
28	14	540	1400	1.3	500	0.4	1.5	2
29	15	500	1500	1.2	550	0.5	1.4	5

30	10	480	1100	1.4	450	0.3	1.0	4
----	----	-----	------	-----	-----	-----	-----	---

**Пример 7.** Определить абсолютную и относительную ошибки момента статического сопротивления в двигателе постоянного тока, если угловое ускорение, ток возбуждения, ток обмотки якоря даны с относительной погрешностью 10%, 5%, 1%. Масса поднимаемого груза  $m$ . Момент инерции вычислить по формуле  $J = mR^2/2$ . В данном примере принять  $J = 2 \text{ кгм}^2$ .

Дано:  $P = 11 \text{ кВт}$ ,  $U = 520 \text{ В}$ ,  $n = 1200 \text{ об/мин}$ ,  $\Phi = 1,1 \text{ Вб}$ ,  $R = 0,5 \text{ м}$ ,  $V = 1,4 \text{ м/с}$ ,  $t = 3 \text{ с}$ .

Решение:

1) Найдем потребляемую силу тока двигателя

$$I_{\text{ос}} = \frac{P}{U} = \frac{11000}{520} = 21,2 \text{ А}$$

2) Определим ток возбуждения

$$I_{\text{в}} = 10\% \cdot I_{\text{ос}} = 0,1 \cdot 21,2 = 2,12 \text{ А}$$

3) Найдем угловую скорость

$$\omega = n \frac{\text{об}}{\text{мин}} \rightarrow \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = \frac{1200 \cdot 2\pi}{60} = 125,7 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

4) Вычислим линейную скорость привода

$$v_{\text{пр}} = \omega \cdot R = 125,7 \cdot 0,5 = 62,9 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

5) Передаточное отношение получается равным

$$i = \frac{v_{\text{пр}}}{V} = \frac{62,9}{1,4} = 44,9$$

6) Найдем крутящий момент двигателя

$$M_{\text{ос}} = \frac{P}{\omega} = \frac{11000}{125,7} = 87,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

7) Найдем тангенциальное ускорение (начальная скорость равна нулю)

$$a^{\tau} = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{1,4}{3} = 0,47 \text{ м/с}^2$$

8) Определим угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{a^r}{R} = \frac{0.47}{0.5} = 0.9 \text{ рад}/\text{с}^2$$

9) Зная момент двигателя, ток возбуждения и ток двигателя, выразим коэффициент  $k_1$

$$k_1 = \frac{M_{\partial\theta}}{I_{\theta} \cdot I_{\theta}} = \frac{87.5}{2.12 \cdot 21.2} = 2.0 \text{ рад}/\text{с}^2$$

10) Находим абсолютные погрешности при 10 % относительной погрешности

$$\Delta\varepsilon = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$$

$$\Delta I_{\partial\theta} = 0.1 \cdot 21.2 = 2.12$$

$$\Delta I_{\theta} = 0.1 \cdot 2.12 = 0.21$$

Далее полученные данные подставляем в формулу

$$\Delta M_c = \frac{\partial M_c}{\partial I_{\theta}} \cdot \Delta I_{\theta} + \frac{\partial M_c}{\partial I_{\partial\theta}} \cdot \Delta I_{\partial\theta} + \frac{\partial M_c}{\partial \varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon = k_1 \cdot I_{\partial\theta} \cdot \Delta I_{\theta} + k_1 \cdot I_{\theta} \cdot \Delta I_{\partial\theta} + J \cdot \Delta \varepsilon$$

Абсолютная погрешность при 10 %:

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.21 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 2.12 + 2 \cdot 0.09 = 18.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

При номинальном режиме работы можно считать, что  $M_c = M_{\partial\theta} = 87.5 \text{ Н} \cdot \text{м}$

относительная погрешность  $\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{18.1}{87.5} = 0.207 = 20.7\%$

11) Находим абсолютные погрешности при 5 % относительной погрешности

$$\Delta\varepsilon = 0.05 \cdot 0.9 = 0.05$$

$$\Delta I_{\partial\theta} = 0.05 \cdot 21.2 = 1.06$$

$$\Delta I_{\theta} = 0.05 \cdot 2.12 = 0.11$$

Абсолютная погрешность при 5% :

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.11 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 1.06 + 2 \cdot 0.05 = 9.3 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

относительная погрешность

$$\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{9.3}{87.5} = 0.106 = 10.6\%$$

12) Находим абсолютные погрешности при 1 % относительной погрешности

$$\Delta \varepsilon = 0.01 \cdot 0.9 = 0.01$$

$$\Delta I_{\partial \varepsilon} = 0.01 \cdot 21.2 = 0.21$$

$$\Delta I_{\varepsilon} = 0.01 \cdot 2.12 = 0.02$$

Абсолютная погрешность при 1%:

$$\Delta M_c = 2.0 \cdot 21.2 \cdot 0.02 + 2.0 \cdot 2.12 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.01 = 1.8 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

относительная погрешность

$$\delta M_c = \frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{1.8}{87.5} = 0.021 = 2.1\%$$

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях значений по правилам подсчета цифр.
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей.
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?

## РАЗДЕЛ 2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений приближенными методами

### Цель занятия:

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления, метод хорд (секущих), метод Ньютона (метод касательных));
- разработать алгоритм и использовать программу для решения вычислительных задач приближенными методами, учитывая необходимую точность получаемого результата.

### 2.1. Постановка задачи отделения корней нелинейного уравнений

Решение нелинейного уравнения, описывающего состояние электрической цепи, может быть реализовано приближенными численными методами. Пусть имеется уравнение вида  $f(x)=0$ , где  $f(x)$  - алгебраическая или трансцендентная функция. Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления *количества корней и интервалов, каждый из которых содержит только один корень*.

Следует отметить, что универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для *любых* уравнений, не существует. Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.

Упростим задачу, заменив уравнение  $f(x)=0$  равносильным ему уравнением  $f_1(x)=f_2(x)$ . В этом случае строятся графики функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , а потом на оси  $x$  отмечаются отрезки, локализирующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

**Пример 1.** Пусть необходимо найти корни уравнения  $f(x)=e^x-x^2=0$ .

*Решение.* Преобразуем исходное уравнение к виду  $y_1(x)=e^x$ ;  $y_2(x)=x^2$ ;  $e^x=x^2$ . Чтобы найти корни уравнения, необходимо найти точку пересечения графиков функций  $y_1(x)=e^x$  и  $y_2(x)=x^2$ . Построим графики функций в Scilab и нанесем на график сетку для удобства визуального определения точки пересечения. Необходимые команды приведены в листинге программы, результат выполнения команд можно видеть на рис. 2.1.

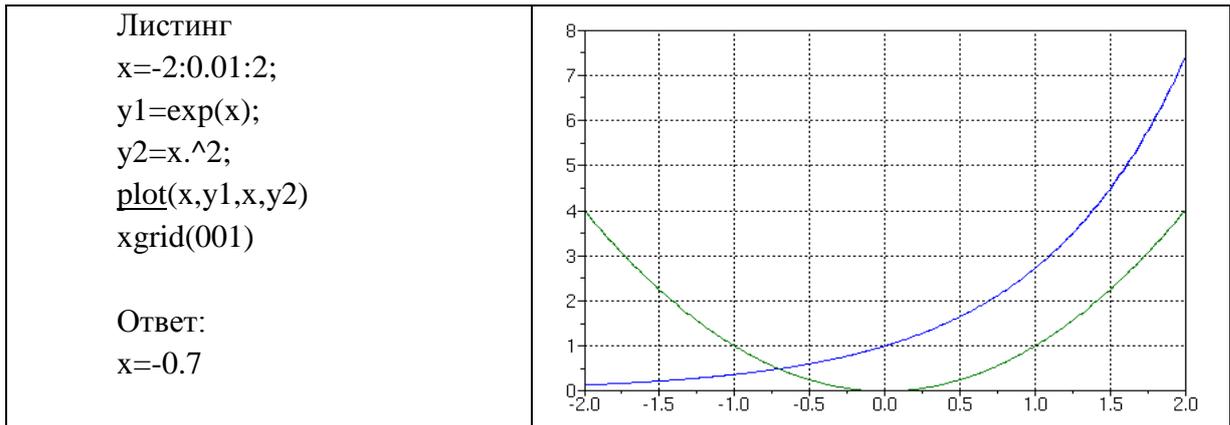


Рис.2.1. Графическое решение уравнения  $f(x)=e^x-x^2$

**Пример 2.** Пусть необходимо найти корни уравнения  $f(x)=x-8.5*\sin(x)$ .  
Графическое решение уравнения  $f(x)=x-8.5*\sin(x)$  показано на рис. 2.2.

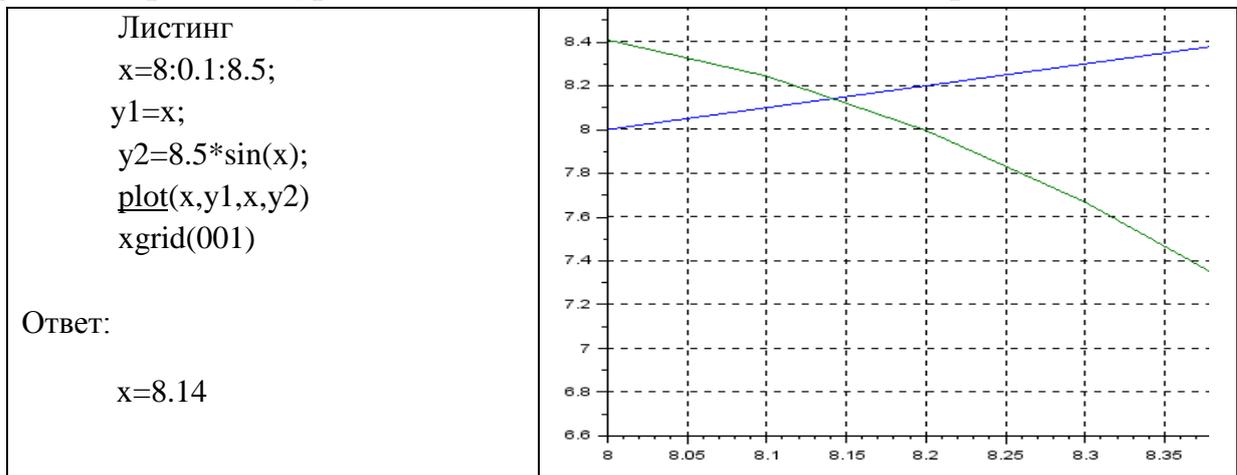


Рис.2.2. Графическое решение уравнения  $f(x)=x-8.5*\sin(x)$ .

При решении задачи об отделении корней бывают полезными следующие очевидные положения:

1. Если непрерывная на отрезке  $[a;b]$  функция  $f(x)$  принимает на его концах значения разных знаков, т.е. произведение  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , то уравнение  $f(x)=0$  имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень.
2. Если функция  $f(x)$  к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке  $[a;b]$  единственный.

## 2.2. Методы уточнения корней с заданной точностью

### *Метод половинного деления (метод дихотомии)*

Пусть уравнение  $f(x)=0$  имеет на отрезке  $[a;b]$  единственный корень, причем функция  $f(x)$  на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок  $[a;b]$

пополам точкой  $c=(a+b)/2$ . Если  $f(c) \neq 0$  (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая:  $f(x)$  меняет знак либо на отрезке  $[a;c]$  (рис. 2.3,а), либо на отрезке  $[c;b]$  (рис 2.3,б).

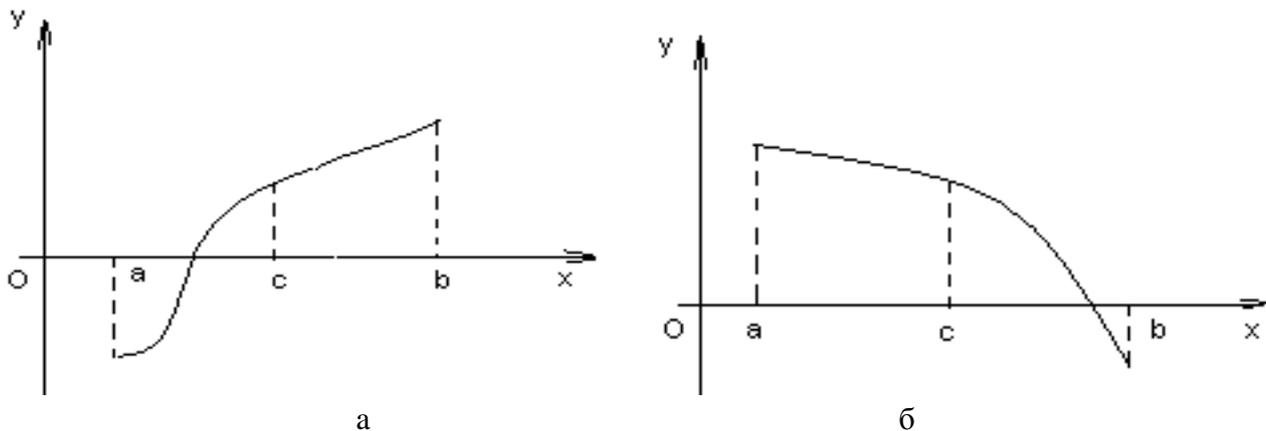


Рис 2.3. Изменение знака функции: а– функция  $f(x)$  меняет знак на отрезке  $[a;c]$ , б – функция  $f(x)$  меняет знак на отрезке  $[c;b]$

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и, продолжая процесс половинного деления (дихотомии) дальше, можно прийти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Метод половинного деления требует утомительных ручных вычислений, однако он легко реализуется с помощью программы на компьютере.

### Задание 2.1. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления (метод дихотомии)

- Отделить корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.
- По методу половинного деления вычислить один корень заданного уравнения с точностью  $10^{-3}$  с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.
- Отделить корни и вычислить один корень с помощью программы для компьютера с точностью  $10^{-5}$ .
- Сравнить результаты.

Необходимые данные приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

#### Варианты задания 2.1

Номер варианта	Уравнение $y(x)$	Пояснения	Номер варианта	Уравнение $y(x)$	Пояснения
1	$2x - \cos x$	-	16	$2x - 11 \sin(x)$	-
2	$x - 10 \sin x$	-	17	$1,6x - 9 \sin(x)$	-
3	$2^{-x} - \sin x$	При $x < 10$	18	$1,7x - 8 \sin(x)$	-
4	$2^x - 2 \cos x$	При $x > -10$	19	$2x - 11 \sin(x)$	-
5	$\ln(x + 5) - \cos x$	При $x < 5$	20	$e^x - 11x$	-

6	$\sqrt{4x+7} - 3\cos x$	-	21	$1,4x-6\sin(x)$	-
7	$6\sin x - 0,5x$	-	22	$0,9x-5\sin(x)$	-
8	$8\cos x - x - 6$	-	23	$e^x-4\sin(x)$	-
9	$\sin x - 0,2x$	-	24	$1,3x-3\sin(x)$	-
10	$10\cos x - 0,1x^2$	-	25	$\sqrt{3x+2} - 3\cos x$	-
11	$2\ln(x+7) - 5\sin x$	-	26	$1,5x-9\sin(x)$	-
12	$4\cos x + 0,3x$	-	27	$2x-8\sin(x)$	-
13	$\sqrt{1-x} - 5\sin 2x$	-	28	$\sqrt{2x+1} - 3\sin x$	-
14	$2x^2 - 5 - 2^x$	-	29	$3x-6\sin(x)$	-
15	$10 - 0,5x^2 - 2^{-x}$	-	30	$2x-5\sin(x)$	-

**Пример 3.** Найти корень уравнения  $y(x) = \sin 2x - \ln x$ .

*Решение.* Прежде всего, выполним отделение корней. Для графического отделения корней уравнения  $\sin 2x - \ln x = y(x)$  преобразуем его к равносильному уравнению  $\sin 2x = \ln x$  и построим графики функций  $\sin 2x$ ,  $\ln x$  (рис. 2.4).

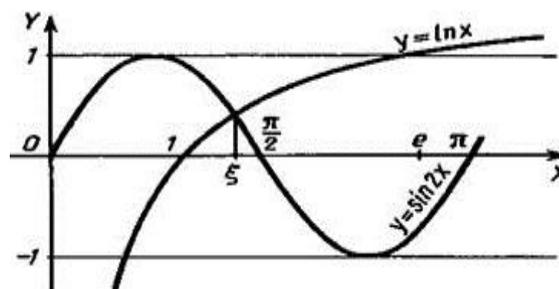


Рис. 2.4. Графическое решение

Из графика следует, что уравнение имеет единственный корень, который находится в интервале  $[1; 1,5]$ . Вычислим значения функции  $y(x) = \sin 2x - \ln x$  на концах отрезка  $[1; 1,5]$ :  $y(1) = 0,909298$ ;  $y(1,5) = -0,264344$ . Знаки результатов разные, следовательно, корень на отрезке  $[1; 1,5]$  действительно имеется.

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом. Так, в нашем примере, имеем  $y(1,3) = 0,253138 > 0$ , так что отрезком, на котором находится корень, можно считать интервал  $[1,3; 1,5]$ .

После отделения корней уточним корень с помощью ручного счета на отрезке  $[1,3; 1,5]$  с точностью до  $10^{-3}$ .

*Решение с помощью калькулятора.* Уравнение  $y(x) = \sin 2x - \ln x = 0$  имеет единственный корень на отрезке  $[1,3; 1,5]$ . Найдем середину отрезка  $[1,3; 1,5]$ :

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3+1,5}{2} = 1,4$ . Определим, на каком из полученных отрезков  $[1,3; 1,4]$  и

$[1,4; 1,5]$  функция  $y(x) = \sin 2x - \ln x$  меняет свой знак.

$$\begin{aligned}
1) [1,3;1,4]: & \quad y(1,3) = \sin(2 \cdot 1,3) - \ln(1,3) > 0; \\
& \quad y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0. \\
2) [1,4;1,5]: & \quad y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0; \\
& \quad y(1,5) = \sin(2 \cdot 1,5) - \ln(1,5) < 0.
\end{aligned}$$

Значит, корень уравнения находится на отрезке  $[1,3;1,4]$ .

Проверим, достигается ли заданная точность решения  $10^{-3}$ :

$$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,3}{2} = 0,05 > 10^{-3}, \text{ точность не достигнута. Разделим отрезок } [1,3;1,4]$$

$$\text{пополам точкой } c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3+1,4}{2} = 1,35.$$

Определим, на каком из полученных отрезков  $[1,3;1,35]$  и  $[1,35;1,4]$  функция  $y(x) = \sin 2x - \ln x$  меняет свой знак.

$$\begin{aligned}
1) [1,3;1,35]: & \quad y(1,3) = \sin(2 \cdot 1,3) - \ln(1,3) > 0; \\
& \quad y(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0. \\
2) [1,35;1,4]: & \quad y(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0. \\
& \quad y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0.
\end{aligned}$$

Значит, корень уравнения находится на отрезке  $[1,35;1,4]$ .

Проверим, достигается ли заданная точность решения  $10^{-3}$ :

$$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,35}{2} = 0,025 > 10^{-3}, \text{ точность не достигнута. Снова разделим отрезок}$$

$$[1,35;1,4] \text{ пополам точкой } c = \frac{a+b}{2} = \frac{1,35+1,4}{2} = 1,375.$$

Определим, на каком из полученных отрезков  $[1,35;1,375]$  и  $[1,375;1,4]$  функция  $y(x) = \sin 2x - \ln x$  меняет свой знак.

$$\begin{aligned}
1) [1,35;1,375]: & \quad y(1,35) = \sin(2 \cdot 1,35) - \ln(1,35) > 0; \\
& \quad y(1,375) = \sin(2 \cdot 1,375) - \ln(1,375) > 0. \\
2) [1,375;1,4]: & \quad y(1,375) = \sin(2 \cdot 1,375) - \ln(1,375) > 0. \\
& \quad y(1,4) = \sin(2 \cdot 1,4) - \ln(1,4) < 0.
\end{aligned}$$

Значит, корень уравнения находится на отрезке  $[1,375;1,4]$ .

Проверим, достигается ли заданная точность решения  $10^{-3}$ :

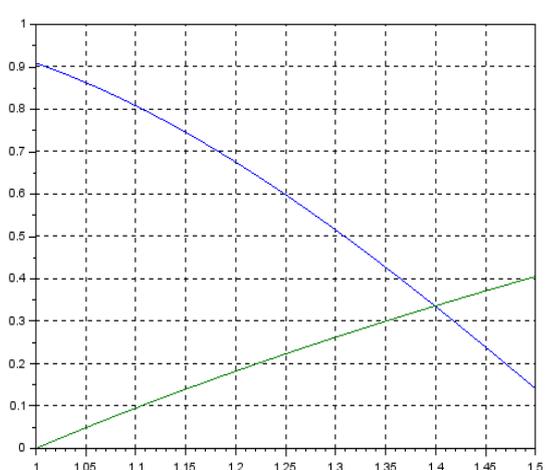
$$\varepsilon = \frac{1,4 - 1,375}{2} = 0,0125 > 10^{-3}, \text{ точность не достигнута.}$$

Продолжаем делить отрезок пополам и проверять знаки функции на новых промежутках, до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность решения.

Решение уравнения с точностью  $10^{-3}$  будет получено равным  $x=1,399$ .

С целью проверки полученного результата можно использовать программ *MathLab* или *SciLab*.

**Пример 4.** Отделить корень уравнения  $y(x) = \sin 2x - \ln x = 0$  графически и вычислить корень с заданной точностью  $10^{-5}$  методом половинного деления в программе *SciLab*.

<p>Листинг программы отделения корней и результат</p> <pre>x=1:0.01:1.5; y1=sin(2*x); y2=log(x); plot(x,y1,x,y2) xgrid(001)</pre>  <p>Результат. <math>x=1.4</math></p>	<p>Листинг метода дихотомии и результат</p> <pre>function [y]=F_x(x)     y=sin(2*x)-log(x); endfunction //метод дихотомии disp('--метод дихотомии-'); a=1.0; b=1.5; e=1E-5; n=0; while abs((b-a))&gt;e,     c=(a+b)/2;     if F_x(a)*F_x(c)&lt;0 then         b=c;     else         a=c;     end     n=n+1; end x=(a+b)/2 //корень Dx=(a-b)/2 //погрешность корня F_x_x=F_x(x) n Результаты: Корень x = 1.3994255, погрешность Dx=- 0.0000038, значение функции y(x) = 0.0000087, число итераций n = 16.</pre>
---	--

Программа *Scilab* обладает большим набором встроенных функций, позволяющих решить те или иные вычислительные задачи. Для решения нелинейного уравнения предусмотрена функция *fsolve*. Продемонстрируем действие этой подпрограммы на следующем примере.

**Пример 5.** Найти значение корня для функции  $f(x) = \exp(x) - 10x$  на интервале  $[0; 0,5]$ . используя функцию *fsolve*.

Листинг программы

```
// Вычисление корня уравнения с помощью fsolve
//описание функции f(x)
function y=ff(x)
y=exp(x)-10*x;
endfunction
//задание начальных приближений
x=0;
//решение и вывод результата
xk=fsolve(x,ff)
```

Результат

$x_k = 0.1118326$

Алгоритм решения приведен на рис. 2.5.

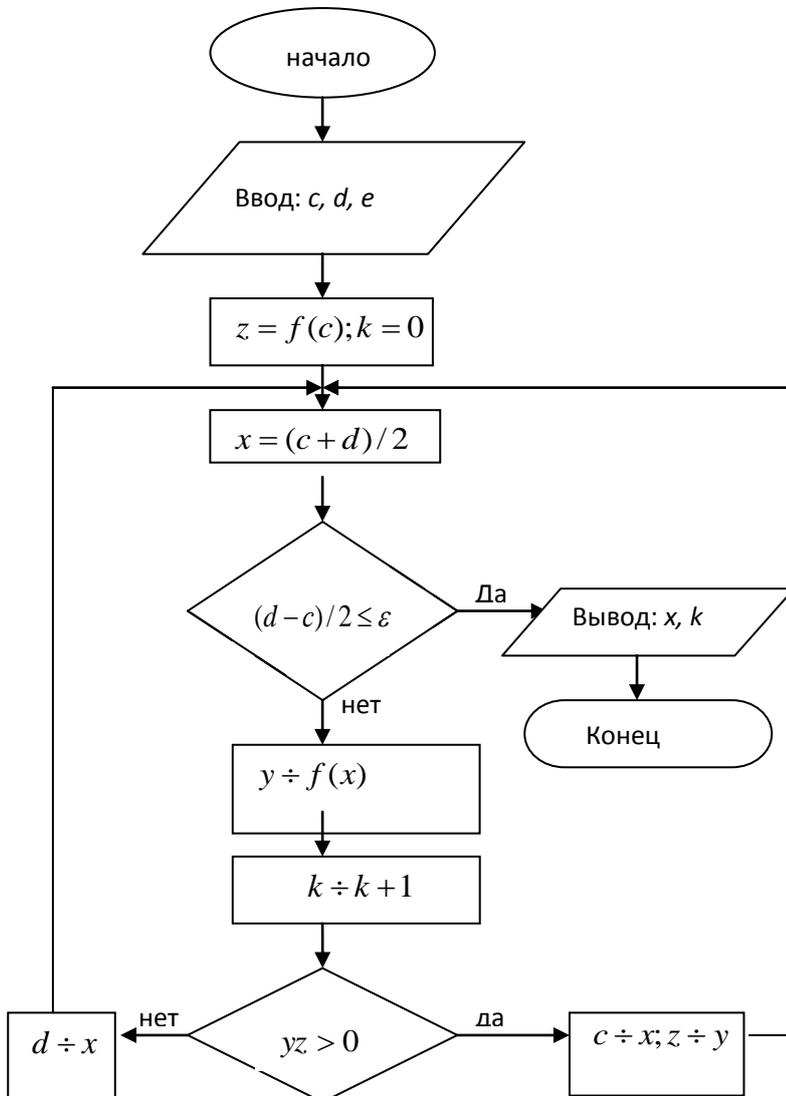
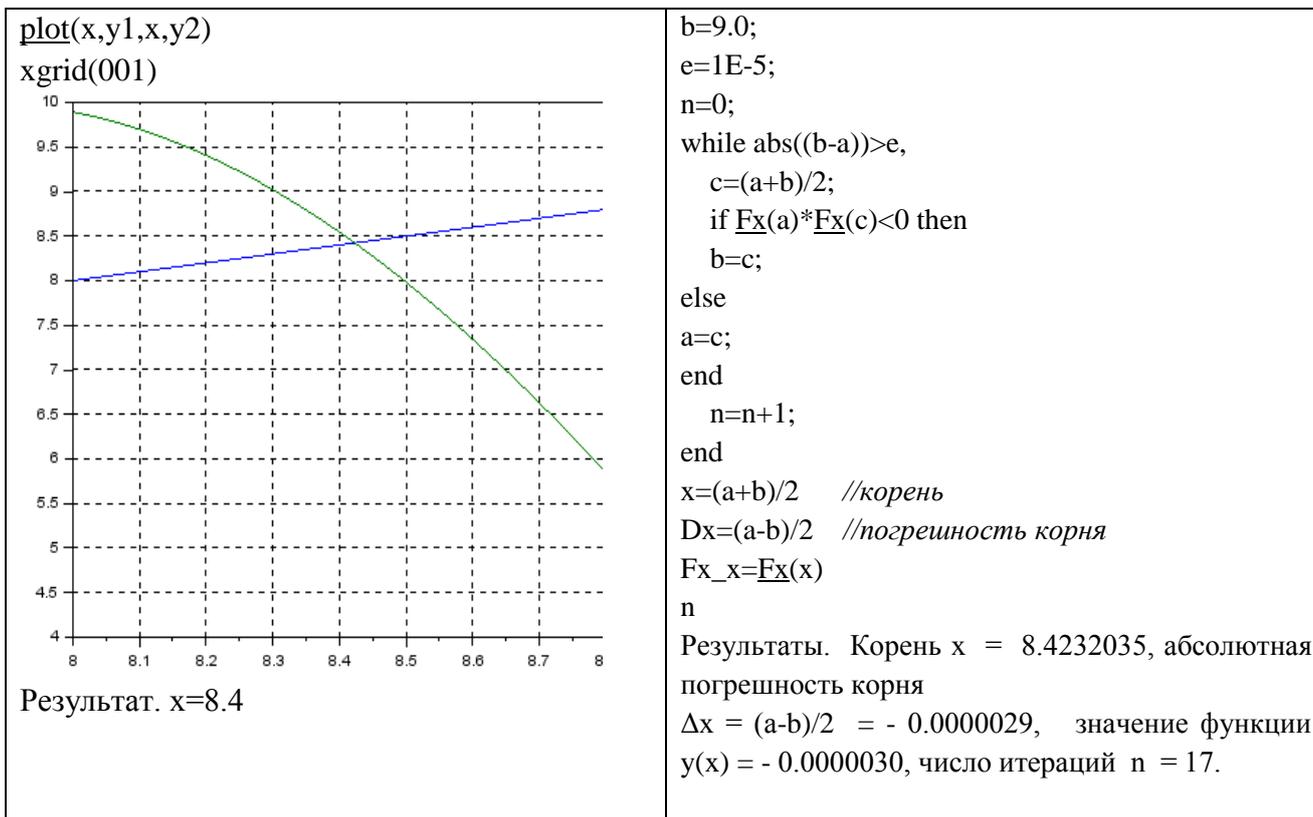


Рис. 2.5. Алгоритм решения методом дихотомии

Приведем еще один пример решения задачи отделения корней нелинейного уравнения и уточнения корней с помощью программного комплекса *Scilab*

**Пример 6.** Отделить корень уравнения  $y=x-10.0*\sin(x)$  и вычислить корень с заданной точностью  $10^{-5}$  методом половинного деления.

Листинг программы отделения корней и результаты  $x=8:0.01:9;$ $y1=x;$ $y2=10.0*\sin(x);$	Листинг метода дихотомии и результаты <code>function [y]=F<math>\underline{x}</math>(x)     <math>y=x-10.0*\sin(x);</math> endfunction //метод дихотомии disp('--метод дихотомии---'); a=8.25;</code>
---	--



### ***Контрольные вопросы***

1. Что означает «решить уравнение аналитически» и «решить уравнение численно».
2. В чем заключается задача отделения корней.
3. В чем состоит основная идея метода половинного деления.
4. Может ли метод половинного деления дать точное значение корня уравнения.

### ***Метод Ньютона (метод касательных)***

Наряду с методом половинного деления существуют и другие, более эффективные итерационные методы. Прежде всего, к ним относится группа методов, которые связаны с именем Ньютона. Рассмотрим два из них – *метод касательных* и *метод хорд (секущих)*. Оба метода основаны на преобразовании исходного уравнения.

Пусть уравнение  $f(x)=0$  имеет единственный корень на отрезке  $[a;b]$ . Преобразуем его к равносильному уравнению

$$x = x - \varphi(x) \cdot f(x),$$

где  $\varphi(x)$  - любая функция, определенная на отрезке  $[a;b]$  и не обращающаяся на нем в нуль. Осуществляя различными способами выбор  $\varphi(x)$ , можно получить, в частности, и указанные методы.

Пусть функция  $\varphi(x) = \frac{1}{f'(x)}$ . Таким образом, итерационная последовательность строится с помощью рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Функция  $f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1) является дважды дифференцируемой на отрезке  $[a;b]$ ;
- 2) производные – первая и вторая – не меняют знак на этом отрезке, т.е. функция  $f(x)$  монотонна и не меняет характер выпуклости.

В этом случае за  $x_0$  берется тот конец интервала  $[a;b]$ , на котором функция  $f(x)$  и ее вторая производная имеют одинаковые знаки, т.е. выполняется условие  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .

На каждом шаге построения итерационной последовательности будем проверять точность достижения корня с помощью неравенства:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \min_{[a;b]} |f'(x)|, \quad (2.2)$$

где  $\xi$  - корень,  $m$  - минимальное значение первой производной функции  $f(x)$ .

Рассмотренный метод называется *методом касательных* потому, что если обратиться к графической иллюстрации, то точка  $x_1$ , определяемая по формуле (2.1) при  $n = 0$ , есть точка пересечения касательной, проведенной к графику  $y=f(x)$  с осью абсцисс (рис. 2.6).

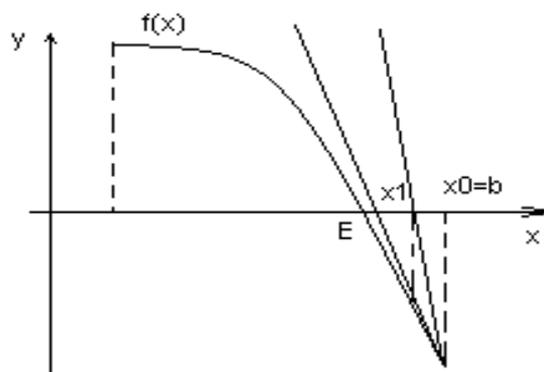


Рис. 2.6. Метод касательных

Каждому следующему члену итерационной последовательности соответствует точка пересечения касательной, проведенной к графику  $y=f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , с осью абсцисс.

## Задание 2.2. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом Ньютона (касательных)

- Отделить корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.
- По методу Ньютона вычислить один корень заданного уравнения с точностью  $10^{-3}$  с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.
- Вычислить один корень с помощью программы для компьютера с точностью  $10^{-5}$ .
- Сравнить результаты.

Необходимые данные приведены в таблице 2.1.

**Пример 7.** Уточнить корень уравнения  $\sin 2x - \ln x = 0$  на отрезке  $[1,3; 1,5]$  методом касательных с точностью до  $1 \cdot 10^{-4}$ .

*Решение:* Итерационная формула в нашем примере имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin 2x_n - \ln x_n}{2 \cos 2x_n - 1/x_n},$$

т. к. производная  $f'(x) = (\sin 2x - \ln x)' = 2 \cos 2x - \frac{1}{x}$ .

Для определения точки  $x_0$  найдем знаки  $f(x) = \sin 2x - \ln x$  и  $f''(x) = -4 \sin 2x + 1/x^2$  на концах отрезка  $[1,3; 1,5]$ :

$$f(1,3) = 0,515501 - 0,262363 = 0,253137 > 0,$$

$$f(1,5) = 0,14112 - 0,405465 = -0,26435 < 0,$$

$$f''(1,3) = -2,062 + 0,591716 = -1,4703 < 0,$$

$$f''(1,5) = -0,56448 + 0,4444 = -0,12 < 0.$$

Таким образом,  $x_0 = 1,5$ , так как при этом значении аргумента функция и ее вторая производная имеют одинаковые знаки.

Вычислим несколько членов итерационной последовательности «ручным» способом:

$$x_1 = 1,5 - \frac{\sin(2 \cdot 1,5) - \ln 1,5}{2 \cos(2 \cdot 1,5) - \frac{1}{1,5}} = 1,5 - \frac{-0,26435}{-1,97998 - 0,66667} = 1,400119$$

Сделаем проверку точности достижения корня по условию (2.2):

$$m = \min_{[a;b]} |f'(x)|, \quad f'(1,3) \approx -2,48, \quad f'(1,5) \approx -2,65, \quad \text{значит } m = 2,4.$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)|}{m} = \frac{|\sin(2 \cdot 1,400119) - \ln(1,400119)|}{2,4} = \frac{|0,334763 - 0,336557|}{2,4} = 0,000747 > 0,0001 -$$

требуемая точность не достигнута.

$$x_2 = 1,400119 - \frac{\sin(2 \cdot 1,400119) - \ln(1,400119)}{2 \cos(2 \cdot 1,400119) - \frac{1}{1,400119}} = 1,399429$$

Снова проверка:

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{|\sin(2 \cdot 1,399429) - \ln(1,399429)|}{2,4} = \frac{|0,33606395 - 0,336064|}{2,4} = \frac{0,000005}{2,4} < 0,0001 -$$

требуемая точность достигнута.

Корень уравнения  $x_1 = 1,399429$ .

Алгоритм решения уравнения методом Ньютона (касательных) с помощью ЭВМ показан на рис. 2.7.

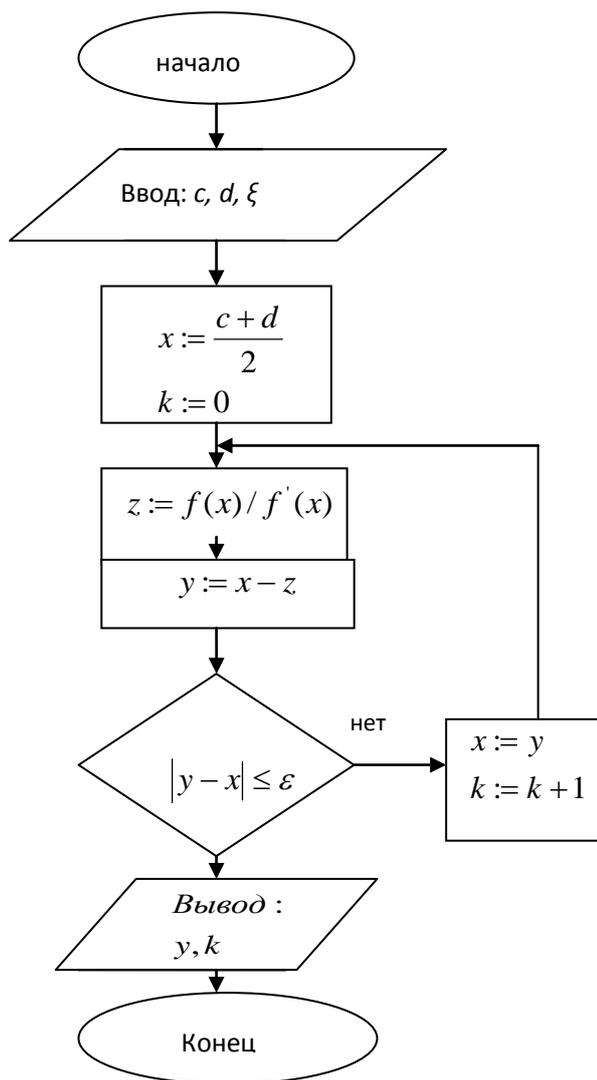


Рис. 2.7. Алгоритм решения методом Ньютона (касательных)

Приведем пример решения нелинейного уравнения методом касательных с помощью программ *MathLab* (аналогично *SciLab*)

**Пример 8.** Вычислить корень уравнения  $y=x-10\sin(x)$  методом касательных с использованием программы *SciLab*.

Листинг программы – метод Ньютона (касательных)

<pre>function [y]=F<math>x</math>(x)     y=x-10.0*sin(x); endfunction function [y]=dF<math>x</math>(x)     y=1-10.0*cos(x); endfunction disp('----'); x=8.25; e=1E-5; n=0; while abs(F<math>x</math>(x))&gt;e,</pre>	<pre>    xn_1=x;     x=x-F<math>x</math>(x)/dF<math>x</math>(x);     n=n+1; end x Dx=x-xn_1 F<math>x</math>_x=F<math>x</math>(x) n ОТВЕТЫ. x = 8.4232041; <math>\Delta x</math> = - 0.0004831; F(x) = 0.0000010; n = 3 число итераций.</pre>
--	--

### Контрольные вопросы

1. Дайте общее описание метода касательных.
2. Нарисуйте геометрическую схему метода касательных.
3. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей для метода.
4. Как проверяется требуемая точность в методах.

### Метод хорд (секущих)

Реализуя метод касательных, при каждой итерации необходимо вычислить значение не только функции  $f(x)$ , но и ее производной  $f'(x)$ . Однако есть вариант метода Ньютона, в котором можно ограничиться вычислением только значений  $f(x)$ , что иногда упрощает вычислительный алгоритм. Это важно, если в задаче сложно вычисляется производная или исходная функция не дана аналитически.

Если записать функцию  $\varphi(x)$  в виде

$$\varphi(x) = \frac{x - c}{f(x) - f(c)},$$

и в качестве  $c$  взять тот конец промежутка  $[a; b]$ , на котором  $f(c) \cdot f''(c) > 0$ , то приходим к итерационному соотношению:

$$x_{n+1} = \frac{cf(x_n) - x_n f(c)}{f(x_n) - f(c)}, \quad (2.3)$$

для метода хорд.

В качестве  $x_0$  в этом случае следует принять тот конец промежутка  $[a; b]$ , который остался после выбора  $c$  (т.е. если  $c=a$ , то  $x_0=b$  или наоборот). Далее последовательность строится по итерационному соотношению (2.3). Оценка степени приближения к корню возможна с помощью неравенства (2.2).

На рис. 2.8 показан геометрический смысл метода хорд.

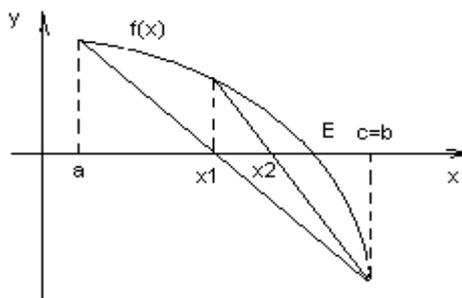


Рис. 2.8. Метод хорд

В данном случае  $c=b$ ,  $x_0=a$ , координата  $x_1$  соответствует точке пересечения хорды, соединяющей концы кривой, с осью абсцисс. Далее находится значение функции в точке с абсциссой  $x_1$ , проводится следующая хорда и т.д. В данном методе важен выбор граничных точек. При условии, что производные  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  – непрерывные и знакопостоянные функции, одна из граничных точек остается неподвижной. Неподвижной границей отрезка является та граница, для которой знаки функции и второй производной совпадают (рис.2.9, 2.10). Подвижная граница отрезка принимается равной очередному приближению.

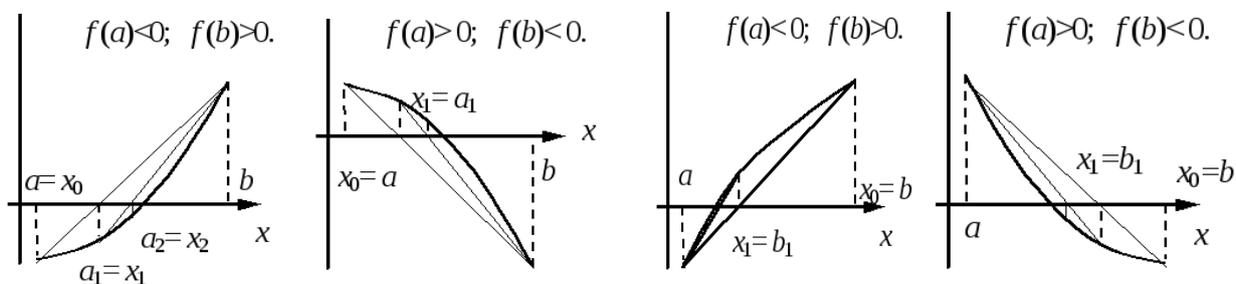


Рис. 2.9. Неподвижна точка  $b$ ,  $f(a)f''(a) > 0$ . Рис.2.10. Неподвижна точка  $a$ ,  $f(a)f''(a) > 0$ .

Метод секущих также как и метод хорд не требует вычисления производной. Производная в методе секущих заменяется отношением приращения функции к приращению аргумента  $f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ .

Воспользовавшись формулой метода Ньютона (2.1), получим итерационное соотношение для метода секущих в виде

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

В этом методе касательная заменяется секущей по двум последним итерациям. Процессы, где для вычисления очередного приближения используются два предыдущих, называются *двух шаговыми*. Для начала процесса надо знать  $x_0$  и  $x_1$  (рис.2.11).

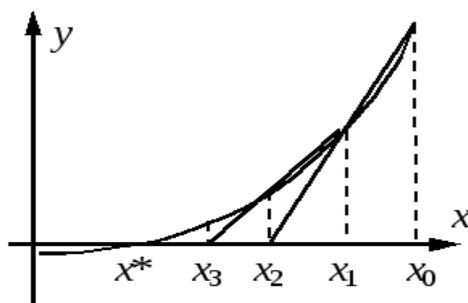


Рис. 2.11. Метод секущих

Так как не требуется вычислять производную, то время счета в методах хорд и секущих обычно меньше, чем в методе Ньютона. Однако из-за наличия в числителе и знаменателе формулы разности близких чисел вблизи корня возникает потеря значащих цифр, приводящая к "разболтке" счета (разболтка – поочередное приближение и удаление от корня). От "разболтки" страхуются так называемым *приемом Гаврика*. Выбирают не очень малое  $\varepsilon$ , ведут итерации до выполнения условия  $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$  и затем продолжают расчет до тех пор пока  $|x_k - x_{k-1}|$  убывает. Первое возрастание обычно означает начало "разболтки".

### Задание 2.3. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом хорд (секущих)

- Отделить корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.
- По методу хорд вычислить один корень заданного уравнения с точностью  $10^{-3}$  с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.
- Вычислить один корень с помощью программы для компьютера с точностью  $10^{-5}$ .
- Сравнить результаты.

Необходимые данные приведены в таблице 2.1.

**Пример 9.** Уточнить корень уравнения  $\sin 2x - \ln x = 0$  на отрезке  $[1,3; 1,5]$  методом хорд с точностью до  $1 \cdot 10^{-4}$ .

*Решение.* Точка  $c$  выбирается так же, как и точка  $x_0$  в предыдущем примере, т.е.  $c=1,5$ . Будем приближать точку  $x_0 = a = 1,3$ .

$$x_1 = \frac{cf(x_0) - x_0 f(c)}{f(x_0) - f(c)} = \frac{1.5(\sin(2 \cdot 1.3) - \ln 1.3) - 1.3(\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)}{(\sin(2 \cdot 1.3) - \ln 1.3) - (\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)} \approx 1.397834$$

Проверим, достигнута ли заданная точность.

$$\frac{|f(x_1)|}{m} = \frac{\sin(2 \cdot 1.397834) - \ln 1.397834}{2,4} \approx 0.002 > 10^{-4} - \text{требуемая точность не достигнута.}$$

Найдём следующее приближение:

$$x_2 = \frac{cf(x_1) - x_1 f(c)}{f(x_1) - f(c)} = \frac{1.5(\sin(2 \cdot 1.397834) - \ln 1.397834) - 1.397834(\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)}{(\sin(2 \cdot 1.397834) - \ln 1.397834) - (\sin(2 \cdot 1.5) - \ln 1.5)} \approx 1.399410$$

Проверим точность:

$$\frac{|f(x_2)|}{m} = \frac{\sin(2 \cdot 1.39941) - \ln(1.39941)}{2,4} \approx 0.00002 < 10^{-4} - \text{требуемая точность достигнута}$$

Итак, корень уравнения  $x=1, 39941$ .

**Пример 10.** Вычислить корень уравнения  $y=x-10.0*\sin(x)$  методом секущих с использованием программы *SciLab* (или *MathLab*);

<pre> Листинг программы - метод секущих function [y]=Fx(x)     y=x-10.0*sin(x); endfunction function [y]=DrazFx(x, x1)     y=(Fx(x)-Fx(x1))/(x-x1); endfunction disp('----'); x=8.25; e=1E-5; n=0; x1=x-0.01; while abs(Fx(x))&gt;e, </pre>	<pre>     xn_1=x;     x=x-Fx(x)/DrazFx(x, x1);     x1=x-0.01;     n=n+1; end x Dx=x-xn_1 Fx_x=Fx(x) n ОТВЕТЫ. x = 8.4232039; Δ x = 0.0000024; F(x) = 0.0000001; n = 4 число итераций. </pre>
---	--

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте общее описание метода хорд (секущих).
2. Нарисуйте геометрические схемы методов секущих и хорд.
3. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей метода хорд.
4. Как проверяется требуемая точность в методах.

### **Метод простых итераций**

Для нелинейного уравнения метод простых итераций основан на переходе от уравнения

$$f(x) = 0 \quad (2.4)$$

к эквивалентному уравнению  $x = \varphi(x)$ . Этот переход можно осуществить разными способами, в зависимости от вида  $f(x)$ . Например, можно положить

$$\varphi(x) = x + \mu f(x), \quad (2.5)$$

где  $\mu = \text{const}$ , при этом корни исходного уравнения (2.4) не изменятся. Если известно начальное приближение к корню  $x_0$ , то новое приближение  $x_1 = \varphi(x_0)$ , т.е. общая схема итерационного процесса:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k). \quad (2.6)$$

Наиболее простой критерий окончания процесса  $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ .

*Критерий сходимости* метода простых итераций: если вблизи корня  $|\varphi'(x)| < 1$ , то итерации сходятся. Если указанное условие справедливо для любого  $x$ , то итерации сходятся при любом начальном приближении. Исследуем выбор константы  $\mu$  в функции (2.5) с точки зрения обеспечения максимальной скорости сходимости. В соответствии с критерием сходимости наибольшая скорость сходимости обеспечивается при  $|\varphi'(x)| = 0$ . При этом, исходя из (2.5),  $\mu = -1/f'(x)$ , и итерационная формула (2.6) переходит в следующую

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

т.е. в формулу метода Ньютона (2.1). Таким образом, метод Ньютона является частным случаем метода простых итераций, обеспечивающим самую высокую скорость сходимости из всех возможных вариантов выбора функции  $\varphi(x)$ .

Представить исходное уравнение в эквивалентном виде  $x = \varphi(x)$  можно множеством способов. Из всевозможных таких представлений выбирают тот, который дает сходящуюся к корню последовательность вычислений.

Очевидно, что корень уравнения будет равен  $x^* = \varphi(x^*)$ . Достаточное условие сходимости можно получить следующим образом: пусть  $\varphi(x)$  имеет производную на отрезке  $[a, b]$ ,  $\varphi(x) \in [a, b]$  и первая производная по модулю меньше единицы  $|\varphi'(x)| \leq q \leq 1$  для всех  $x$  из отрезка  $[a, b]$ , тогда итерационный процесс сходится к корню уравнения, т.е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ . Доказательство следует из следующих оценок:

$$|x_{k+1} - x^*| = |\varphi(x_k) - x^*| = |\varphi(x_k) - \varphi(x^*)| \leq |\varphi'(\xi)| |x_k - x^*| \leq q |x_k - x^*|$$

Аналогично  $|x_k - x^*| \leq q |x_{k-1} - x^*|$ ,  $|x_{k-1} - x^*| \leq q |x_{k-2} - x^*|$  и т. д.

Следовательно

$$|x_{k+1} - x^*| \leq q |x_k - x^*| \leq q^2 |x_{k-1} - x^*| \leq q^3 |x_{k-2} - x^*| \leq \dots \leq q^k |x_0 - x^*| \leq q^k |b - a|$$

Так как  $q < 1$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$ , следовательно  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ . Геометрический смысл условия сходимости метода простой итерации показан на рис. 2.12.

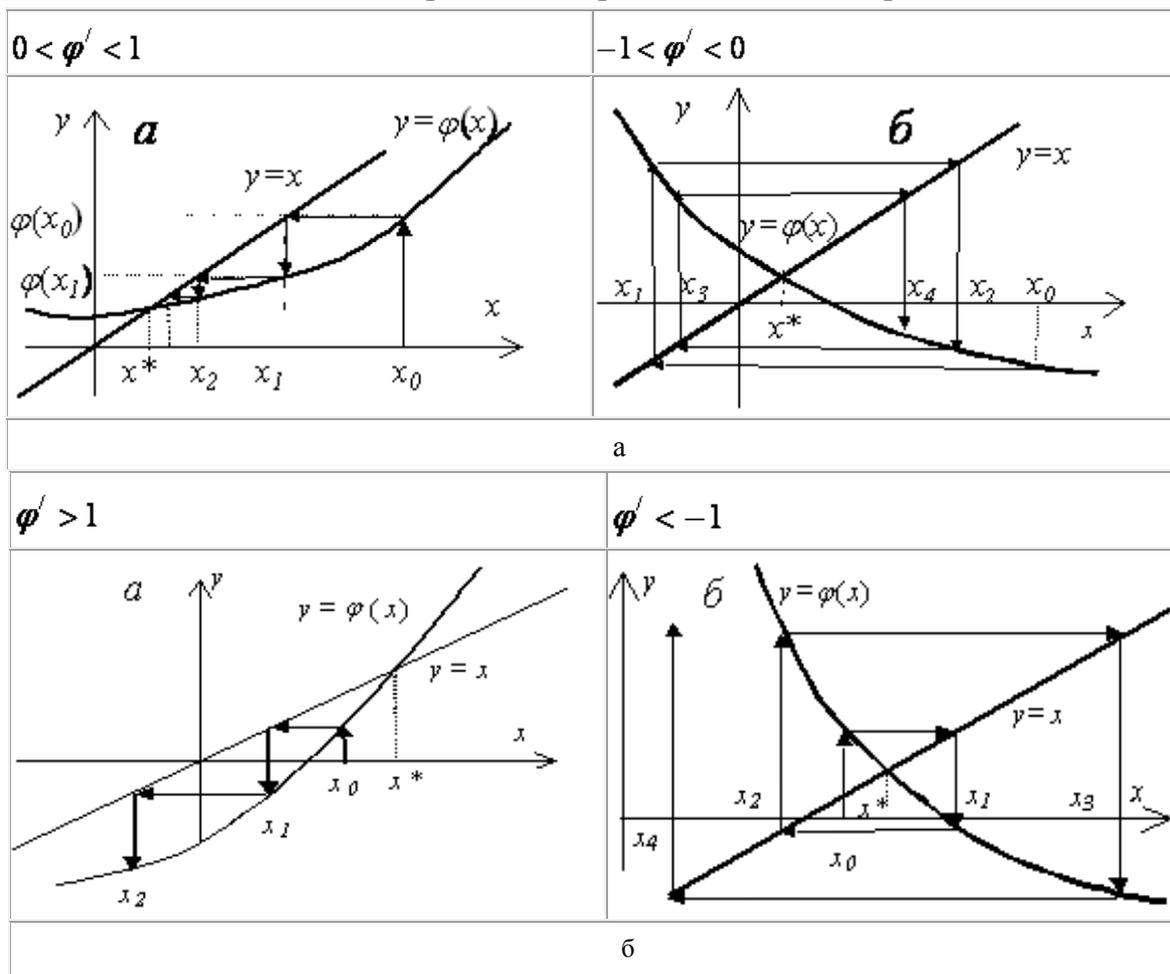


Рис.2.12. Геометрическая интерпретация сходимости: а-процесс сходится, б - расходится

В качестве начального приближения обычно берут середину отрезка  $[a,b]$ :  $x_0 = (a+b)/2$ . На практике часто в качестве  $\varphi(x)$  берут функцию  $\varphi(x) = x - \mu f(x)$ , где  $\mu$  – некоторая постоянная. Константу  $\mu$  выбирают таким образом, чтобы  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  для всех  $x \in [a,b]$ . При таком выборе функции  $\varphi(x)$  метод простой итерации сходится. Получим условия для выбора  $\mu$ :  $|\varphi'(x)| = |1 - \mu f'(x)| < 1, \Rightarrow -1 < (1 - \mu f'(x)) < 1, \Rightarrow -2 < -\mu f'(x) < 0$ . Таким образом, если  $f'(x) < 0$ , то  $2/f'(x) < \mu < 0$ . Если же  $f'(x) > 0$ , то  $2/f'(x) > \mu > 0$ . Видно, что знак у  $\mu$  совпадает со знаком  $f'(x)$ . Часто  $\mu$  выбирают в виде  $\mu = 2/(M + m)$ , где  $M = \max(f'(x))$ ,  $m = \min(f'(x))$ . Убедимся, что такой выбор  $\mu$  удовлетворяет условию сходимости:

Пусть  $f'(x) > 0$ . Тогда  $M > 0$  и  $m > 0 \Rightarrow \mu > 0$  и

$$\frac{2}{f'(x)} - \frac{2}{M+m} = \frac{2(M+m-f'(x))}{f'(x)(M+m)} > 0 \text{ так как } M > f'(x)$$

Следовательно  $2/(f'(x)) > \mu > 0$ .

Пусть  $f'(x) < 0$ . Тогда  $M < 0$  и  $m < 0 \Rightarrow \mu < 0$  и

$$\frac{2}{M+m} - \frac{2}{f'(x)} = \frac{2(f'(x) - M - m)}{f'(x)(M+m)} > 0, \text{ так как } f'(x)(M+m) > 0, f'(x) - M > 0 \text{ и } (-m) > 0.$$

Следовательно  $2/f'(x) < \mu < 0$ . Условием окончания итерационного процесса является условие:  $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon$  или  $f(x_k) < \varepsilon$ .

### Задание 2.4. Вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений методом простых итераций

- Отделить корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.
- По методу простых итераций вычислить один корень заданного уравнения с точностью  $10^{-3}$  с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора.
- Проверить расчет с помощью программы для компьютера с точностью  $10^{-5}$ , используя найденное значение  $\mu$ .

Необходимые данные приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Вариант	Функция	Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	$y=2.1x-11.0*\sin(x)$	11	$y=2x-8.0*\sin(x)$	21	$y=2.4x-4.0*\sin(x)$
2	$y=2.2x-9.0*\sin(x)$	12	$y=0.8x-7.0*\sin(x)$	22	$y=2.5x-10.0*\sin(x)$
3	$y=1.2x-8.0*\sin(x)$	13	$y=1.8x-6.0*\sin(x)$	23	$y=1.7x-8.0*\sin(x)$
4	$y=1.1x-7.0*\sin(x)$	14	$y=0.6x-5.0*\sin(x)$	24	$y=1.6x-5.0*\sin(x)$
5	$y=1.2x-6.0*\sin(x)$	15	$y=x-4.0*\sin(x)$	25	$y=1.9x-7.0*\sin(x)$
6	$y=2.1x-7.5*\sin(x)$	16	$y=x-3.0*\sin(x)$	26	$y=0.8x-6.0*\sin(x)$
7	$y=0.5x-4.0*\sin(x)$	17	$y=2x-5.7*\sin(x)$	27	$y=2.1x-4.5.0*\sin(x)$
8	$y=0.9x-3.0*\sin(x)$	18	$y=x-5.0*\sin(x)$	28	$y=2.3x-4.0*\sin(x)$
9	$y=1.3x-2.0*\sin(x)$	19	$y=x-6.0*\sin(x)$	29	$y=x-3.0*\sin(x)$
10	$y=1.5*x-9.0*\sin(x)$	20	$y=x-7.0*\sin(x)$	30	$y=2x-2.0*\sin(x)$

**Пример 11.** Найти корень уравнения  $2x - 9.0 \sin(x) = f(x)$ , который лежит в интервале  $[2,5; 3]$  с точностью  $\varepsilon=0.001$  методом простых итераций.

*Решение.*  $2x - 9.0 \sin(x) = f(x)$ , интервал локализации корня  $- [2.5; 3]$ .

$f(x^*) = 0$ . Условие сходимости  $|\varphi'| < 1$ . Итерационная формула  $x = \varphi(x)$ .

Начальное приближение выберем в центре интервала  $x_0 = 2.75$ . Вычислим  $\mu$ .

Так как производная равна  $f'(x) = 2 - 9\cos(x)$  и на концах интервала получаем для нее следующие значения:

$f'(2.5) = 2 - 9\cos(2.5) = 9.21$ ,  $f'(3) = 2 - 9\cos(3) = 10.91$  (max), то для коэффициента  $\mu$  получим число  $\mu = \frac{1}{|f'|} = \frac{1}{10.91} = 0.09$ . При данном значении производная от

функции  $\varphi(x) = x - \mu f(x)$   $\varphi' = |1 - \mu f'(x)| = 0.018$  меньше единицы, что удовлетворяет условию сходимости метода. Запишем итерационное соотношение  $x_1 = x_0 - \mu f(x_0)$  и вычислим несколько приближений к корню.

Получаем следующие результаты итерационных расчетов

$$x_1 = 2.75 - 0.09(2 * 2.75 - 9 \sin(2.75)) = 2.564$$

$$x_2 = 2.564 - 0.09(2 * 2.564 - 9 \sin(2.564)) = 2.551$$

$$x_3 = 2.551 - 0.09(2 * 2.551 - 9 \sin(2.551)) = 2.542$$

$$x_4 = 2.542 - 0.09(2 * 2.542 - 9 \sin(2.542)) = 2.541$$

Оценим точность приближения к корню

$$|x_0 - x_1| = |2.75 - 2.564| = |0.186|$$

$$|x_2 - x_1| = |2.551 - 2.564| = |0.013|$$

$$|x_3 - x_2| = |2.542 - 2.551| = |0.009|$$

$$|x_4 - x_3| = |2.541 - 2.542| = |0.001|$$

последнее приближение соответствует заданной точности  $\varepsilon = 0.001$ , следовательно, в качестве корня можно принять значение  $x_4 = 2.541$ .

Проверим полученный результат с помощью программы и сравним с его с результатом решения этого же уравнения методом касательных (табл. 2.3).

Таблица 2.3

### Расчет двумя методами

<p>Метод простых итераций  <math>x_0</math> можно выбрать в центре интервала <math>[a;b]</math></p> <pre>function [y]=F<math>\underline{x}</math>(x)     y=2*x-9.0*sin(x); endfunction disp('----'); x=2.75; e=1E-5; n=0; while abs(F<math>\underline{x}</math>(x))&gt;e,     xn_1=x;     x=x-0.09*F<math>\underline{x}</math>(x);     n=n+1; end x Dx=x-xn_1 F<math>\underline{x}</math>_x=F<math>\underline{x}</math>(x) n</pre> <p>Результаты  x = 2.5414441 Dx = - 0.0000015  F<math>\underline{x}</math>_x = 0.0000025 n = 7</p>	<p>Метод касательных  <math>x_0</math> –та граница интервала <math>[a;b]</math>, где <math>f(x)</math> и <math>f'(x)</math> имеют одинаковые знаки</p> <pre>function [y]=F<math>\underline{x}</math>(x)     y=2*x-9.0*sin(x); endfunction function [y]=dF<math>\underline{x}</math>(x)     y=2-9.0*cos(x); endfunction disp('----'); x=3; e=1E-5; n=0; while abs(F<math>\underline{x}</math>(x))&gt;e,     xn_1=x;     x=x-F<math>\underline{x}</math>(x)/dF<math>\underline{x}</math>(x);     n=n+1; end x Dx=x-xn_1 F<math>\underline{x}</math>_x=F<math>\underline{x}</math>(x) n</pre> <p>Результаты  x = 2.5414438 Dx = - 0.0001624  F<math>\underline{x}</math>_x = 6.700D-08 n = 3</p>
---	---

### **Контрольные вопросы**

1. Дайте общее описание метода простых итераций.
2. Каков геометрический смысл условия сходимости метода простых итераций.
3. Запишите формулы для построения итерационных последовательностей метода простых итераций.

## **РАЗДЕЛ 3. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Метод Гаусса**

### **Цель занятия:**

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения решать системы линейных уравнений методом Гаусса;
- закрепить умения находить значения определителя системы методом Гаусса;
- закрепить умения находить обратную матрицу методом Гаусса.

### **3.1. Системы линейных алгебраических уравнений**



## 3.2. Использование метода единственного деления

### *Метод Гаусса решения систем уравнений*

Под названием «метод Гаусса» фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Наиболее популярным является метод, основанный на так называемой схеме *единственного деления*; этот метод имеет также и ряд модификаций.

Сам по себе метод Гаусса относится к точным методам. Это означает, что если точно выполнять все требуемые действия, получено точное решение, поскольку погрешность метода в данном случае равна нулю.

Будем считать матрицу системы (3.1) невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю. Рассмотрим алгоритм, который получил название схемы единственного деления. Подвергнем систему (3.1) следующим преобразованиям.

Считая, что  $a_{11} \neq 0$  (ведущий элемент), разделим на  $a_{11}$  коэффициенты первого уравнения:

$$x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1 \quad (3.2)$$

Используя уравнение (3.2), легко исключить неизвестное  $x_1$  из остальных уравнений системы (достаточно из каждого уравнения вычесть первое уравнение, умноженное на соответствующий коэффициент при  $x_1$ ).

Над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное  $x_2$ .

Повторяя этот процесс, получим систему с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1; \\ x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2; \\ x_n = \beta_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Из системы (3.3) последовательно находим значения неизвестных  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

Отметим, что последовательное исключение неизвестных называется *прямым ходом метода Гаусса*. Нахождение значений неизвестных – *обратным ходом*.

**Пример 1.** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41; \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44; \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

*Решение.* Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 14,41 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & -6,44 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 55,56 \end{array} \right)$$

Так как,  $a_{11} = 2,34 \neq 0$ , разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 19,685 & 40,161 & -55,951 \\ 0 & -0,938 & 27,819 & 31,42 \end{array} \right) \cdot$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 29,732 & 28,756 \end{array} \right) \cdot$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,156 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 1 & 0,967 \end{array} \right) \cdot$$

Получаем треугольную матрицу. Решая ее, начиная с последней строки, найдем значения неизвестных:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0,967, \\ x_2 + 2,04x_3 &= -2,842, \\ x_2 &= -2,842 - 2,04 \cdot 0,962, \\ x_2 &= -4,816, \\ x_1 - 1,799 \cdot x_2 - 4,962 \cdot x_3, \\ x_1 &= 6,156 + 4,962 \cdot 0,967 + 1,799 \cdot (-4,816), \\ x_1 &= 2,293. \end{aligned}$$

Так как в процессе решения выполнялись округления, то решение содержит вычислительную ошибку.

**Определение:** Значение разностей между свободными элементами исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных называется *невязками*.

В рассмотренном примере невязки имеют следующие значения:

$$\varepsilon_1 = 14,41 - 14,411 = -0,001, \quad \varepsilon_2 = -6,44 - (-6,441) = 0,001, \quad \varepsilon_3 = 55,56 - (55,561) = 0,001.$$

Следует заметить, что по величине невязок нельзя судить о погрешностях результатов, но можно уточнить решение системы, вычислив поправки для найденных значений неизвестных.

### ***Метод Гаусса и вычисление определителей матриц***

Приступая к рассмотрению процесса решения системы линейных уравнений методом Гаусса, делается оговорка, что система невырожденная, т.е. её определитель отличен от нуля.

Вычисление определителя может представлять и самостоятельный интерес, т.к. такая задача нередко встречается в высшей математике.

Рассмотрим алгоритм вычисления определителя в связи с решением СЛАУ. методом Гаусса по схеме единственного деления.

Обозначим определитель системы через  $D$ . Что происходит с ним на каждом шаге реализации метода Гаусса?

- 1)  $D/a_{11}$ ;
- 2)  $D/a_{11} \cdot a_{22}^{(1)}$ ;
- .....
- $n) D/(a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)})$ .

Матрица коэффициентов при неизвестных системы, полученная в результате - треугольная, с единицами по главной диагонали. Поэтому её определитель равен 1.

**Практический вывод:**

Если необходимо вычислить определитель некоторой квадратной матрицы, надо решить систему уравнений с этой матрицей и произвольной правой

частью и воспользоваться формулой:  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$ .

***Применение метода Гаусса для вычисления обратной матрицы***

Схема единственного деления может использоваться также и для вычисления элементов матрицы  $A^{-1}$ , обратной для невырожденной матрицы  $A$ . По определению  $AA^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная матрица.

Представим искомую матрицу  $A^{-1}$  и единичную матрицу  $E$  в виде совокупности вектор-столбцов. В такой записи соотношение  $AA^{-1} = E$  предстанет в виде совокупности из  $n$  систем линейных уравнений вида  $Ax^{(i)} = e^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Решение каждой системы дает соответствующий столбец обратной матрицы.

Расширив таблицу схемы единственного деления, можно проиллюстрировать получение обратной матрицы рассмотренным методом.

**Пример 2.** Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2,34 & -4,21 & -11,61 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 \end{pmatrix}$$

Найти обратную матрицу, пользуясь схемой единственного деления.

*Решение.*

Запишем данную и единичную матрицы в одну, и применим к ним элементарные преобразования схемы единственного деления:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 1 & 0 & 0 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & 0 & 1 & 0 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Так как,  $a_{11} = 2,34 \neq 0$ , разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 19,6848 & 40,1605 & -3,4363 & 1 & 0 \\ 0 & -0,9388 & 27,8191 & -1,6741 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,0401 & -0,1746 & 0,0508 & 0 \\ 0 & 0 & 29,7318 & -1,8391 & 0,0476 & 1 \end{array} \right).$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,0401 & -0,1746 & 0,0508 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Из элементов второй строки вычтем элементы третьей, умноженные на 2,0401.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Из элементов первой строки вычтем элементы третьей, умноженные на (-4,9615).

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & 0 & 0,1203 & 0,0079 & 0,1667 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Из элементов первой строки вычтем элементы второй, умноженные на (-1,7991).

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,0334 & 0,0934 & 0,0433 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array} \right).$$

Матрица, полученная справа и является искомой обратной матрицей:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0334 & 0,0934 & 0,0433 \\ -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{pmatrix}.$$

Сделаем прямую проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{1,0041} & -0,0088 & -0,0270 \\ 0,0000 & \underline{0,9994} & -0,0033 \\ -0,0002 & \underline{0,0005} & \underline{1,003} \end{pmatrix}$$

Поскольку вычисления матрицы  $A^{-1}$  велись с округлением, то наличие невязок, отражённых в матрице  $AA^{-1}$ , является естественным.

### Задание 3.1. Решение СЛАУ методом Гаусса

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными (табл. 3.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Решить систему методом Гаусса:

- используя «ручную» схему единственного деления; вычислить невязки;
- выбрав ведущие элементы схемы единственного деления, найдите значения определителя системы;
- для матрицы системы, по схеме единственного деления, найдите обратную матрицу;
- найти решение системы трех линейных алгебраических уравнений с помощью программы для ЭВМ.

Таблица 3.1

#### Варианты заданий для метода единственного деления

Номер варианта	$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$b_i$	Номер варианта	$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$b_i$
<b>1</b>	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91	<b>16</b>	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32		2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83		3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
<b>2</b>	1	-3	0,5	0,5	-56,5	<b>17</b>	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	0,5	-6,0	0,5	-100		2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	0,5	0,5	-3	-210		3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
<b>3</b>	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15	<b>18</b>	1	-9,11	-1,06	-0,67	-1,56
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31		2	7,61	6,35	-2,42	2,33
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37		3	-4,64	1,23	-8,88	-3,57

<b>4</b>	1	0,63	0,05	0,15	0,34	<b>19</b>	1	0,06	0,92	0,03	-0,82
	2	0,15	0,10	0,71	0,42		2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	0,03	0,34	0,10	0,32		3	1,01	0,02	0,99	-0,98
<b>5</b>	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30	<b>20</b>	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40		2	0,5	-6,0	0,5	-100
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60		3	0,5	0,5	-3	-210
<b>6</b>	1	0,30	1,20	-0,20	-0,60	<b>21</b>	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	-0,10	-0,20	1,60	0,30		2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	0,05	0,34	0,10	0,32		3	-0,35	0,05	0,63	0,37
<b>7</b>	1	0,20	0,44	0,81	0,74	<b>22</b>	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,58	-0,29	0,05	0,02		2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,05	0,34	0,10	0,32		3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
<b>8</b>	1	6,36	11,75	10	-41,40	<b>23</b>	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	7,42	19,03	11,75	-49,49		2	0,5	-6,0	0,5	-100
	3	5,77	7,48	6,36	-27,67		3	0,5	0,5	-3	-210
<b>9</b>	1	-9,11	1,02	-0,73	-1,25	<b>24</b>	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	7,61	6,25	-2,32	2,33		2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-4,64	1,13	-8,88	-3,75		3	-0,35	0,05	0,63	0,37
<b>10</b>	1	-9,11	-1,06	-0,67	-1,56	<b>25</b>	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	7,61	6,35	-2,42	2,33		2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	-4,64	1,23	-8,88	-3,57		3	0,03	0,34	0,10	0,32
<b>11</b>	1	1,02	-0,73	-9,11	-1,25	<b>26</b>	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	6,25	-2,32	7,62	2,33		2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,13	-8,88	4,64	-3,75		3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
<b>12</b>	1	0,06	0,92	0,03	-0,82	<b>27</b>	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,99	0,01	0,07	0,66		2	0,58	-0,29	0,05	0,02
	3	1,01	0,02	0,99	-0,98		3	0,05	0,34	0,10	0,32
<b>13</b>	1	0,10	-0,07	-0,96	-2,04	<b>28</b>	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,04	-0,99	-0,85	-3,73		2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,91	1,04	0,19	-1,67		3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
<b>14</b>	1	0,62	0,81	0,77	-8,18	<b>29</b>	1	0,62	0,81	0,77	-8,18
	2	0,03	-1,11	-1,08	0,08		2	0,03	-1,11	-1,08	0,08
	3	0,97	0,02	-1,08	0,06		3	0,97	0,02	-1,08	0,06
<b>15</b>	1	0,63	-0,37	1,76	-9,29	<b>30</b>	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,90	0,99	0,05	0,12		2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,13	-0,95	0,69	0,69		3	0,03	0,34	0,10	0,32

**Пример 3.** Решить СЛАУ методом Гаусса в программе *SciLab 5.5.2*

Найти неизвестные  $x_1, x_2, x_3$  системы линейных алгебраических уравнений, если матрица коэффициентов и свободных членов -  $A$ - дана в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,99 & 1,01 & 0,92 \\ 0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,07 \\ 0,99 & -0,82 & 0,66 & -0,98 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,06 & 0,99 & 1,01 & 0,92 \\ 0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,07 \\ 0,99 & -0,82 & 0,66 & -0,98 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,82 \\ 0,66 \\ -0,98 \end{pmatrix}$$

Алгоритм решения приведен на рис. 3.1. Отдельные блоки приведены в приложении 1.

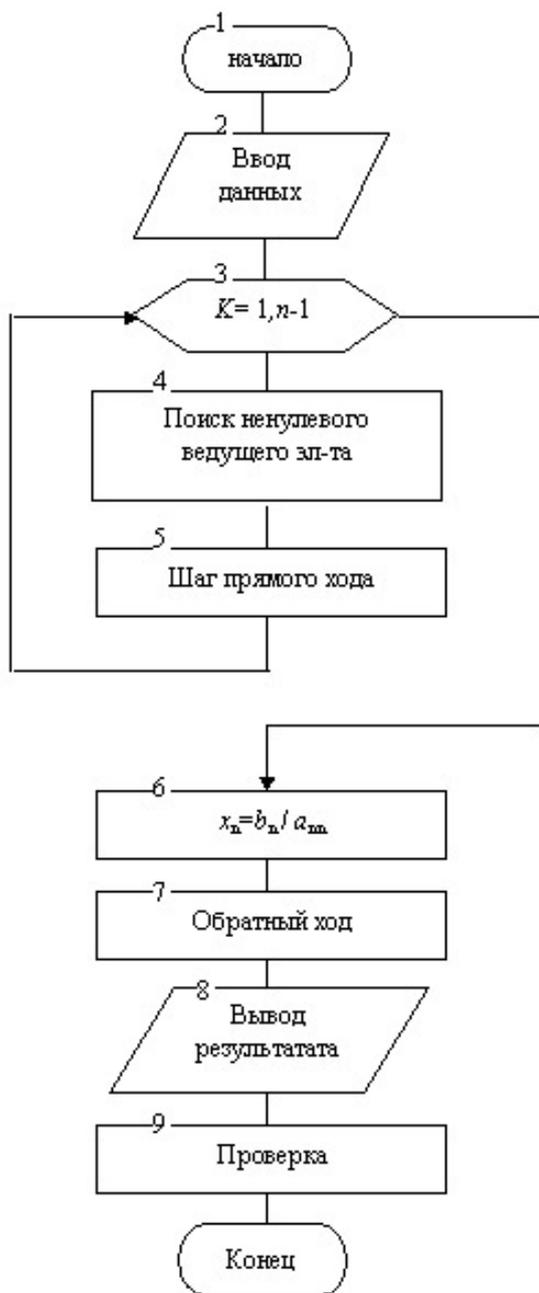


Рис. 3.1. Алгоритм метода Гаусса

Листинг программы

```

n=3
a=[0.06 0.99 1.01 0.92;
0.01 0.02 0.03 0.07;
0.99 -0.82 0.66 -0.98]
//a=[...]
A=a
//организация цикла
n1=n+1;
for k=1:n,

```

```

    for j=k1:n1,
        a(k,j)=a(k,j)/s;
    end //next j line 280
    for i=k1:n,
        r=a(i,k);
    for j=k1:n1,
        a(i,j)=a(i,j)-a(k,j)*r;
    end //next j line 300
    end //next i
end //next k from line 4
//погрешность

```

<pre> k1=k+1; s=a(k,k); j=k; //проверка условия for i=k1:n,     r=a(i,k);     if abs(r)&gt;abs(s) then         s=r;         j=i;     end //if end //next i line 240 if s==0 then     disp('Det=0');     return end if j&lt;&gt;k then     for i=k:n1,         r=a(k,i);         a(k,i)=a(j,i);         a(j,i)=r;     end end //расчет </pre>	<pre> for i=n:-1:1,     s=a(i,n1);     for j=i+1:n,         s=s-a(i,j).*x(j);     end     x(i)=s; end x //результаты (x1, x2, x3) //свободные члены уравнения b=A(:,1:3)*x  //результаты (x1, x2, x3) ans =     24.895323     17.213808    -17.44098 --&gt;//свободные члены уравнения --&gt;b=A(:,1:3)*x b =     0.92     0.07    -0.98 </pre>
--	---

### ***Контрольные вопросы***

1. Какие методы решения СЛАУ вы знаете?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. На чем основываются подходы к организации контроля вычислений в прямом ходе, обратном ходе?
4. На чем основываются алгоритмы вычисления определителя по методу Гаусса?
5. Каким образом схема единственного деления может использоваться для вычисления обратной матрицы?

### **РАЗДЕЛ 4. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) приближенными методами**

#### **Цель занятия:**

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения решать системы линейных алгебраических уравнений приближенными методами: методом простой итерации, методом Зейделя.



привести к нормальному виду (4.2), т.е. коэффициенты  $\alpha_{ij}$  при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему (4.1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (4.2), у которой все  $|\alpha_{ij}| < 1$ .

Для проверки точности решения используем условие (4.4).

**Пример 1.** Привести систему линейных уравнений к нормальному виду

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41, \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

*Решение.* Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 3-го уравнений. Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 6,26x_1 - 12,2x_2 - 3,24x_3 = 69,97, \\ 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41. \end{cases}$$

Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и, выразим из каждого уравнения диагональные элементы:

$$\begin{cases} x_1 = -0,649x_2 - 0,034x_3 - 0,801, \\ x_2 = 0,573x_1 - 0,266x_3 - 5,735, \\ x_3 = 0,202x_1 - 0,363x_2 - 1,241. \end{cases}$$

Система приведена к нормальному виду. Проверку условия сходимости (4.4) и точности решения можно осуществить с помощью программы.

Далее приведем пример решения системы линейных алгебраических уравнений данным методом.

**Пример 2.** Решить систему уравнений методом простых итераций. Проверить расчет с помощью программы. Дана система с преобладающими диагональными коэффициентами.

$$\begin{cases} 4.3x_1 + 0.217x_2 = 2.663 \\ 0.1x_1 - 3.4x_2 - 0.207x_3 = 2.778 \end{cases}$$

$$0.09x_2 + 2.5x_3 + 0.197x_4 = 2.533$$

$$0.08x_3 - 1.6x_4 = 1.928$$

Запишем эквивалентную систему уравнений

$$x_1 = \frac{2.663}{4.3} - \frac{0.217x_2}{4.3}$$

$$x_2 = -\frac{2.778}{3.4} - \frac{0.207x_4}{3.4} + \frac{0.1x_1}{3.4}$$

$$x_3 = \frac{2.533}{2.5} - \frac{0.197x_4}{2.5} - \frac{0.09x_2}{2.5}$$

$$x_4 = -\frac{1.928}{1.6} + \frac{0.08x_3}{1.6}$$

Нулевое приближение  $x_1^0 = 0.6193$   $x_2^0 = -0.8170$   $x_3^0 = 1.013$   $x_4^0 = -1.205$ .

Первая итерация

$$x_1^1 = 0.6193 + 0.0411 = 0.6604$$

$$x_2^1 = -0.8170 - 0.0616 + 0.018 = -0.8606$$

$$x_3^1 = 1.013 + 0.0949 + 0.0294 = 1.1373$$

$$x_4^1 = -1.205 + 0.05 = -1.155$$

Вторая итерация

$$x_1^2 = 0.6193 + (0.05 * 0.86) = 0.6623$$

$$x_2^2 = -0.817 - (0.06 * 1.137) = -0.8678$$

$$x_3^2 = 1.013 + (0.078 * 1.55) + (0.036 * 0.86) = 1.072$$

$$x_4^2 = -1.205 + 0.05 * 1.137 = -1.148$$

Третья итерация

$$x_1^3 = 0.6193 + (0.05 * 0.86) = 0.6623$$

$$x_2^3 = -0.817 - (0.06 * 1.072) + (0.029 * 0.66) = -0.862$$

$$x_3^3 = 1.013 + (0.078 * 1.148) + (0.036 * 0.86) = 1.133$$

$$x_4^3 = -1.205 + (0.05 * 1.072) = -1.151$$

Оценим сходимость итерационной процедуры

$$|x_1^2 - x_1^1| = 0.0019 \quad |x_1^3 - x_1^2| = 0.00001$$

$$|x_2^2 - x_2^1| = 0.0063 \quad |x_2^3 - x_2^2| = 0.005$$

$$|x_3^2 - x_3^1| = 0.069 \quad |x_3^3 - x_3^2| = 0.061$$

$$|x_4^2 - x_4^1| = 0.007 \quad |x_4^3 - x_4^2| = 0.003$$

Проверим решение с помощью программы.

<i>// решение СЛАУ методом простых итераций.</i>	<i>// вычисление начальных приближений</i>
<i>Листинг программы</i>	$X0=B;$
<i>// ввод матрицы A</i>	$X=P*X0+G;$
$A=[4.3 \ 0.217 \ 0 \ 0;$	<i>//циклические вычисления</i>
$0.1 \ -3.4 \ -0.207 \ 0;$	$while \ max(abs(X-X0))>=0.00001,$
$0 \ 0.09 \ 2.5 \ 0.197;$	$X0=X; \ X=P*X0+G;$
$0 \ 0 \ 0.08 \ -1.6]$	$end;$
<i>// ввод вектора B</i>	<i>//вывод результата</i>
$B=[2.633;2.778;2.533;1.928]$	$X$

// формирование матрицы D R=diag(A); D=diag(R); // формирование матриц P и G P=-inv(D)*(A-D); G=inv(D)*B;	// проверка обусловленности матрицы A cond(A) X = 0.6560717 - 0.8668572 1.1348894 - 1.1482556
--	---

Сравним результаты «ручного» счета и с помощью ЭВМ

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Ручной счет	0.6623	- 0.862	1.1373	-1.151
ЭВМ	0.6560717	- 0.8668572	1.1348894	- 1.1482556

## 4.2.Метод Зейделя

Рассмотрим систему линейных уравнений (4.1) и эквивалентную ей систему (4.2). При решении системы (4.2) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению.

Обозначим элементы имеющегося приближения через  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а элементы очередного (вычисляемого) приближения -  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Вычислительные формулы имеют вид:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения  $y_i$  учитываются уже полученные значения  $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$ . Выпишем соответствующие соотношения:

$$y_1 = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_{21} y_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j + \beta_2,$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} y_j + \alpha_{nn} x_n + \beta_n$$

Справедливо следующее утверждение:

Если для матрицы коэффициентов системы (4.2) выполняется условие (4.4), то итерационный процесс метода Зейделя сходится к решению системы при любом выборе начального приближения  $x^{(0)}$ .

Преимущество этого метода состоит в том, что он обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

### Пример 3. Решить СЛАУ методом Зейделя

№	Матрица системы				Правая часть
1	0,401	0,301	0,000	0,000	0,122
	-0,029	-0,500	-0,018	0,000	-0,253
	0,000	-0,050	-1,400	-0,039	-0,988
	0,000	0,000	-0,007	-2,300	-2,082

Расширенная матрица системы имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0,401 & 0,301 & 0,000 & 0,000 & 0,122 \\ -0,029 & -0,500 & -0,018 & 0,000 & -0,253 \\ 0,000 & -0,050 & -1,400 & -0,039 & -0,988 \\ 0,000 & 0,000 & -0,007 & -2,300 & -2,082 \end{pmatrix}$$

Приведем систему к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{0,401} (0,122 - 0,301x_2) \\ x_2 = \frac{1}{-0,500} (-0,253 + 0,018x_3 + 0,029x_1) \\ x_3 = \frac{1}{-1,400} (-0,988 + 0,050x_2 + 0,039x_4) \\ x_4 = \frac{1}{-2,300} (-2,082 + 0,007 \cdot x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,304 - 0,751x_2 \\ x_2 = 0,506 - 0,036x_3 - 0,058x_1 \\ x_3 = 0,706 - 0,036x_2 - 0,028x_4 \\ x_4 = 0,905 - 0,003x_3 \end{cases}$$

В качестве начальных приближений примем все  $x_i$  равными нулю в правой части системы  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$ .

Найдем значения неизвестных на первой итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,304 - 0,751x_2^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 0,506 - 0,036x_3^{(0)} - 0,058x_1^{(1)} \\ x_3^{(1)} = 0,706 - 0,036x_2^{(1)} - 0,028x_4^{(0)} \\ x_4^{(1)} = 0,905 - 0,003x_3^{(1)} \end{cases}$$

Или после подстановки получаем

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0 = 0,304 \\ x_2^{(1)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0 - 0,058 \cdot 0,304 = 0,488 \\ x_3^{(1)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,488 - 0,028 \cdot 0 = 0,688 \\ x_4^{(1)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,688 = 0,903 \end{cases}$$

Далее произведем вторую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,304 - 0,751x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 0,506 - 0,036x_3^{(1)} - 0,058x_1^{(2)} \\ x_3^{(2)} = 0,706 - 0,036x_2^{(2)} - 0,028x_4^{(1)} \\ x_4^{(2)} = 0,905 - 0,003x_3^{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,488 = -0,062 \\ x_2^{(2)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,688 - 0,058 \cdot (-0,062) = 0,485 \\ x_3^{(2)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,485 - 0,028 \cdot 0,903 = 0,663 \\ x_4^{(2)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |-0,062 - 0,304| = 0,366 \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |0,488 - 0,485| = 0,003 \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |0,663 - 0,688| = 0,025 \\ |x_4^{(2)} - x_4^{(1)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0,366; 0,003; 0,025; 0\} = 0,366 > 0,001$$

Точность не достигнута.

Произведем третью итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,304 - 0,751x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 0,506 - 0,036x_3^{(2)} - 0,058x_1^{(3)} \\ x_3^{(3)} = 0,706 - 0,036x_2^{(3)} - 0,028x_4^{(2)} \\ x_4^{(3)} = 0,905 - 0,003x_3^{(3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,485 = -0,060 \\ x_2^{(3)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,663 - 0,058 \cdot (-0,060) = 0,486 \\ x_3^{(3)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,486 - 0,028 \cdot (0,903) = 0,663 \\ x_4^{(3)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |-0,060 - 0,062| = 0,002 \\ |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |0,486 - 0,485| = 0,001 \\ |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |0,663 - 0,663| = 0 \\ |x_4^{(3)} - x_4^{(2)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0,002; 0,001; 0; 0\} = 0,002 > 0,001$$

Точность не достигнута.

Произведем четвертую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,304 - 0,751x_2^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 0,506 - 0,036x_3^{(3)} - 0,058x_1^{(4)} \\ x_3^{(4)} = 0,706 - 0,036x_2^{(4)} - 0,028x_4^{(3)} \\ x_4^{(4)} = 0,905 - 0,003x_3^{(4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,486 = -0,060 \\ x_2^{(4)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,663 - 0,058 \cdot (-0,060) = 0,486 \\ x_3^{(4)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,486 - 0,028 \cdot (0,903) = 0,663 \\ x_4^{(4)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = |-0,060 - 0,060| = 0 \\ |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = |0,486 - 0,486| = 0 \\ |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = |0,663 - 0,663| = 0 \\ |x_4^{(4)} - x_4^{(3)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \\ \max\{0; 0; 0; 0\} = 0 < 0,001 \end{cases}$$

Точность достигнута.

Решение системы с точностью 0,001:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -0,060 \\ x_2^{(4)} = 0,486 \\ x_3^{(4)} = 0,663 \\ x_4^{(4)} = 0,903 \end{cases}$$

Выполним проверку с помощью программы

<pre>// решение СЛАУ методом Зейделя. Листинг программы // ввод матрицы A A=[0.401 0.301 0 0; -0.029 -0.5 -0.018 0; 0 -0.05 -1.4 -0.039; 0 0 -0.007 -2.3] // ввод вектора B B=[0.122;-0.253;-0.988;-2.082] // формирование матриц R и T R=tril((A)) T=A-R // формирование матриц P и G P=-inv(R)*T; G=inv(R)*B;</pre>	<pre>// вычисление начальных приближений X0=B; X=P*X0+G; //циклические вычисления while max(abs(X-X0))&gt;=0.00001, X0=X; X=P*X0+G; end; //вывод результата X // проверка обусловленности матрицы A cond(A) Результаты X = - 0.0602787 0.4856206 0.6632102 0.9031989</pre>
---	--

Сравнение результатов «ручного» и машинного счета

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Ручной счет	-0.060	0.486	0.663	0.903
ЭВМ	- 0.0602787	0.4856206	0.6632102	0.9031989

--	--	--	--	--

### Задание 4.1. Решение СЛАУ приближенными методами

- Решить систему линейных уравнений, коэффициенты которой приведены в табл.4.1 «ручным» способом и методами простых итераций и Зейделя.
- Решить на ЭВМ итерационными методами систему уравнений. Сравнить результаты.

Таблица 4.1.

#### Варианты задания 4.1

Вариант	Матрица системы				Правая часть
1	-1,700	0,003	0,000	0,000	0,681
	0,002	0,800	0,001	0,000	0,480
	0,000	-0,002	-0,100	0,030	-0,802
	0,000	0,000	-0,003	-1,600	-1,007
2	-3,000	0,001	0,000	0,000	1,514
	-0,011	2,100	0,520	0,000	1,478
	0,000	0,005	1,200	0,600	1,083
	0,000	0,000	-0,010	-0,300	-1,007
3	4,300	0,217	0,000	0,000	2,663
	0,100	-3,400	-0,207	0,000	2,778
	0,000	0,090	2,500	0,197	2,533
	0,000	0,000	0,080	-1,600	1,928
4	-5,600	0,268	0,000	0,000	4,032
	0,147	4,700	0,271	0,000	4,313
	0,000	-0,150	-3,800	0,274	4,235
	0,000	0,000	0,153	2,900	3,797
5	-8,200	0,370	0,000	0,000	7,559
	0,234	7,300	5,600	0,000	8,175
	0,000	0,260	-6,340	0,422	8,421
	0,000	0,000	0,268	5,500	8,322
6	9,500	0,422	0,000	0,000	9,719
	0,278	8,601	0,459	0,000	10,500
	0,000	0,315	7,700	0,496	10,915
	0,000	0,000	0,351	6,803	10,978
7	10,800	-0,576	0,000	0,000	12,143
	0,321	9,900	7,300	0,000	13,089
	0,000	0,369	9,000	-6,060	13,674
	0,000	0,000	0,416	8,100	13,897
8	-1,100	0,528	0,000	0,000	14,830
	0,365	1,13	0,536	0,000	15,941
	0,000	-0,423	1,031	0,534	16,969
	0,000	0,000	0,481	-0,570	17,081
9	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782

	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528
10	30,300	0,153	0,000	0,000	80,168
	0,975	-29,400	0,011	0,000	83,578
	0,000	0,117	-2,500	1,660	86,609
	0,000	0,000	1,700	27,600	89,278
11	1,61	0,332	0,000	0,000	86,814
	0,109	-0,301	-0,150	0,000	90,358
	0,000	-0,060	0,171	0,051	19,861
	0,000	0,000	0,145	-0,298	93,502
12	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528
13	3,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	1,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-2,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	1,700	20,528
14	11,400	0,681	0,000	0,000	17,782
	-0,408	10,500	-0,550	0,000	19,593
	0,000	0,677	-8,600	0,881	19,974
	0,000	0,000	0,746	11,800	20,528
15	-1,700	0,003	0,000	0,000	0,681
	0,002	0,800	0,001	0,000	0,480
	0,000	-0,002	-0,500	0,030	-0,802
	0,000	0,000	-0,003	-1,600	-1,007
16	-3,000	0,001	0,000	0,000	1,514
	-0,011	2,100	0,520	0,000	1,478
	0,000	0,005	1,200	0,300	1,083
	0,000	0,000	-0,010	-1,300	-1,007
17	4,300	0,217	0,000	0,000	2,663
	0,100	-3,400	-0,207	0,000	2,778
	0,000	0,090	2,500	0,197	2,533
	0,000	0,000	0,080	-1,600	1,928
18	-5,600	0,268	0,000	0,000	4,032
	0,147	4,700	0,271	0,000	4,313
	0,000	-0,150	-3,800	0,274	4,235
	0,000	0,000	0,153	2,900	3,797
19	-8,200	0,370	0,000	0,000	7,559
	0,234	7,300	0,600	0,000	8,175
	0,000	0,260	-5,340	0,422	8,421
	0,000	0,000	0,268	5,500	8,322
20	9,500	0,422	0,000	0,000	9,719
	0,278	8,601	0,459	0,000	10,500
	0,000	0,315	7,700	0,496	10,915
	0,000	0,000	0,351	6,803	10,978
	10,800	-0,576	0,000	0,000	12,143

21	0,321	9,900	2,300	0,000	13,089
	0,000	0,369	9,000	-6,060	13,674
	0,000	0,000	0,416	8,100	13,897
22	-1,100	0,528	0,000	0,000	14,830
	0,365	2,713	0,536	0,000	15,941
	0,000	-0,423	2,031	0,534	16,969
	0,000	0,000	0,481	-1,570	17,081
23	13,400	0,581	0,000	0,000	17,782
	-0,408	12,500	-0,650	0,000	19,593
	0,000	0,477	-11,600	0,781	19,974
	0,000	0,000	0,546	10,700	20,528
24	30,300	0,153	0,000	0,000	80,168
	0,975	-29,400	0,011	0,000	83,578
	0,000	0,117	-12,500	1,660	86,609
	0,000	0,000	1,700	27,600	89,278
25	0,761	0,332	0,000	0,000	86,814
	0,109	-1,301	-0,150	0,000	90,358
	0,000	-0,060	2,171	0,051	19,861
	0,000	0,000	0,145	-1,298	93,502
26	11,400	0,589	0,000	0,000	18,732
	-0,418	15,500	-0,650	0,000	29,590
	0,000	0,467	-10,600	0,981	18,994
	0,000	0,000	0,846	10,900	21,511
27	3,400	0,581	0,000	0,000	10,892
	-1,908	3,500	-0,650	0,000	12,521
	0,000	1,477	-9,600	0,781	13,376
	0,000	0,000	2,546	6,700	21,765
28	1,400	0,681	0,000	0,000	7,782
	-0,408	6,500	-0,550	0,000	9,593
	0,000	0,677	-8,600	0,881	9,974
	0,000	0,000	0,746	13,800	23,528
29	11,400	0,681	0,000	0,000	12,734
	-0,408	10,500	-0,550	0,000	15,576
	0,000	0,677	-8,600	0,881	12,174
	0,000	0,000	0,746	11,800	10,523
30	10,600	0,681	0,000	0,000	10,654
	-0,408	11,100	-0,550	0,000	12,598
	0,000	0,677	-7,600	0,881	10,456
	0,000	0,000	0,746	13,800	9,528

### ***Контрольные вопросы***

1. Каким образом система линейных уравнений преобразуется к итерационному виду?
2. Как сформулировать условие сходимости итерационного процесса

3. Как привести исходную систему линейных уравнений к системе с преобладающими диагональными элементами?
4. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом простой итерации.
5. В чем состоит отличие метода Зейделя от аналогичного процесса простой итерации?
6. Постройте блок-схему решения системы линейных уравнений методом Зейделя.

## РАЗДЕЛ 5. Аппроксимация. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона

### Цель занятия:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения составлять интерполяционные формулы Лагранжа, Ньютона;
- освоить метод аппроксимации – метод наименьших квадратов.

### 5.1. Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

#### *Постановка задачи аппроксимации функций*

В вычислительной математике нередки случаи, когда одну функцию приходится заменять другой, более другой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют *аппроксимацией* функций.

Поводом для аппроксимации функции может послужить, в частности, табличный способ её задания. Предположим, что в результате некоторого эксперимента для конечного набора значений  $x_i$  величины  $x$  из отрезка  $[a;b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_n = b$$

получен набор значений  $y_i$  величины  $y$  (табл. 5.1).

Таблица 5.1

$x$	$x_0$	$x_1$	...	$x_i$	...	$x_n$
$F(x)$	$y_0$	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_n$

Допустим, существует функциональная зависимость  $y=F(x)$ . Необходимо задать  $F(x)$  аналитически. Точки  $x_0, \dots, x_n$  называют *узлами аппроксимации*.

Классический подход к численному решению подобных задач заключается в том, чтобы, опираясь на информацию о функции  $F$ , по некоторому алгоритму подобрать аппроксимирующую функцию  $G$ , в определенном смысле «близкую» к  $F$ .

Чаще всего задача аппроксимации решается с помощью многочленов. Вычисления значений многочлена легко автоматизировать, производная и интеграл от многочлена, в свою очередь, также являются многочленами.

Для оценки «близости» функций выбирают тот или иной *критерий согласия*.

Для функций, заданных таблично, достаточно распространенным является *критерий Чебышева*, который определяет расстояние  $\rho$  между аппроксимируемой и аппроксимирующей функциями как максимум величины отклонения между этими функциями в узлах:

$$\rho = \max_i |F(x_i) - G(x_i)| \quad (5.1)$$

Если  $\rho=0$ , т.е.  $F(x_i) = G(x_i) = y_i$  (в узлах значения совпадают), то соответствующий способ аппроксимации называют *интерполяцией*, а процедуру вычисления значений  $F(x)$  с помощью  $G(x)$  в точках, не являющихся узлами сетки, - *интерполированием*.

Часто процедура аппроксимации связана с другим критерием согласия:

$$\rho = \min_i \sum_{i=0}^n (F(x_i) - G(x_i))^2 .$$

Применяемый на его основе способ аппроксимации называется *методом наименьших квадратов*.

### ***Существование и единственность интерполяционного многочлена***

Пусть известны значения некоторой функции  $F(x)$ :

$x$	$x_0$	$x_1$	...	$x_i$	...	$x_n$
$F(x)$	$y_0$	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_n$

Будем решать задачу интерполирования этой функции с помощью построения интерполяционного многочлена  $n$ -ой степени,

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (5.2)$$

который в узлах  $x_i$  принимает значения  $y_i$ .

$$G(x_0) = y_0, \dots, G(x_n) = y_n \quad (5.3)$$

Условия интерполяции (5.3) приводят к системе из  $(n+1)$  линейных уравнений с  $(n+1)$  неизвестными – коэффициентами многочлена:



**Пример 1.** Построить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблицей значений:

$x$	1	3	4
$F(x)$	12	4	6

*Решение.* Из таблицы следует, что  $n=2$  (на 1 меньше, чем число узлов).

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$y_0 = 12, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 6$$

По формуле (5.9) получаем:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 12 \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4 \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6 \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = \\ &= 12 \frac{(x^2 - 7x + 12)}{-2(-3)} + 4 \frac{(x^2 - 5x + 4)}{2(-1)} + 6 \frac{(x^2 - 4x + 3)}{3 \cdot 1} = \\ &= 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22. \end{aligned}$$

Таким образом, интерполяционный многочлен для заданной функции имеет вид  $L_2(x) = 2x^2 - 12x + 22$ . Для проверки решения подставим в найденную функцию  $L_2(x)$   $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4$ . Поскольку в результате подстановки получаются значения функции в узлах  $y_0 = 12, y_1 = 4, y_2 = 6$ , решение найдено верно. Построим график  $L_2(x)$  и точки в координатной плоскости (рис.5.1).

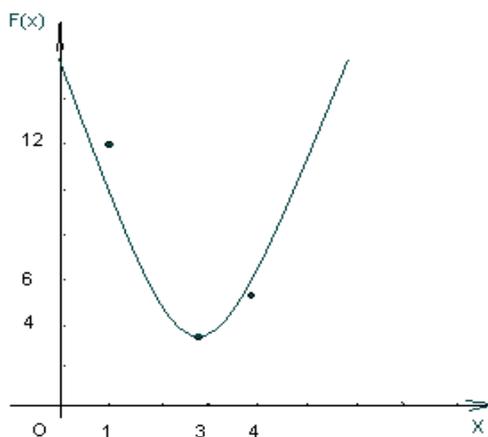


Рис.5.1. График функции Лагранжа и заданные значения  $y_i$  в узлах

### **Задание 5.1. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа**

По заданным (табл. 5.2) значениям функции и аргумента составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график и отметить на нем узловые точки. Вычислить с помощью калькулятора одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента  $x$  с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа и оценить погрешность интерполяции.

Таблица 5.2

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0.1	0.100	0.2	0.200	0.4	0.450	0.5	0.521	0.2	2.376
0.3	0.304	0.4	0.521	0.6	0.637	0.7	0.645	0.3	3.304
0.7	0.759	0.8	0.859	0.9	1.026	0.9	0.779	0.5	3.759
0.9	0.175	1.1	1.375	1.2	1.580	1.1	0.980	0.8	3.175
0.6		0.7		0.8		0.6		0.7	
Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
0.5	0.154	0.1	0.298	0.3	0.423	0.2	0.721	0.1	1.349
0.7	0.367	0.4	0.556	0.6	0.537	0.7	0.945	0.4	2.345
0.8	0.701	0.6	0.850	0.8	1.126	0.9	1.379	0.7	3.776
1.5	0.775	1.1	1.300	1.1	1.380	1.2	1.980	0.8	4.170
1.1		0.7		0.7		0.8		0.6	
Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
0.1	0.324	0.3	0.255	0.8	0.450	0.5	0.532	0.6	2.132
0.3	0.604	0.6	0.525	1.6	0.637	0.7	0.840	0.9	4.312
0.7	0.790	0.7	0.823	1.9	1.026	0.8	0.980	1.5	5.560
0.9	1.175	1.2	1.312	2.2	1.580	1.3	1.380	1.8	6.175
0.6		0.9		1.8		1.1		1.7	
Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
0.8	0.100	0.2	0.588	0.6	0.850	0.6	1.521	0.2	1.376
0.9	0.304	0.5	0.621	0.8	1.637	0.8	1.645	0.3	2.304
1.2	0.759	0.7	0.810	0.9	2.026	1.4	1.779	0.5	3.759
1.5	0.975	1.1	1.175	1.2	2.580	1.6	1.980	0.8	4.175
1.1		0.9		1.0		1.2		0.7	
Вариант 21		Вариант 22		Вариант 23		Вариант 24		Вариант 25	
0.9	2.133	0.3	0.654	0.1	0.850	0.3	1.521	0.5	2.376
1.3	2.365	0.4	1.521	0.6	1.630	0.4	3.645	0.6	3.304
1.7	2.723	0.7	2.859	0.7	2.126	0.9	4.779	0.9	3.759
1.9	4.165	1.0	5.375	1.0	4.585	1.2	4.980	1.1	3.175
1.6		0.5		0.8		0.6		0.7	

В приложении 2 приведены алгоритм и программа построения функции многочлена Лагранжа.

## 5.2. Интерполяционные формулы Ньютона

Пусть дана табличная функция  $y_i = f(x_i)$ , в которой значения аргумента заданы с постоянным шагом  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Нужно построить полином  $P_n(x)$ , удовлетворяющий двум условиям:

1. Степень полинома не должна превышать  $n$ .
2.  $P_n(x_i) = y_i$ .

### *Первая интерполяционная формула Ньютона*

Формула  $P_n(x)$  для первой интерполяционной формулы Ньютона имеет вид

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (5.10)$$

Первая интерполяционная формула Ньютона применяется тогда, когда  $x$  находится в начале таблицы. Тогда в качестве  $x_0$  следует брать ближайшее слева к заданному  $x$  табличное значение.

### **Вторая интерполяционная формула Ньютона**

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. Для этого применяется вторая интерполяционная формула Ньютона

$$P(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \quad (5.11)$$

Здесь в качестве  $x_n$  следует брать ближайшее справа к заданному  $x$  табличное значение.

### **Оценка погрешностей первой и второй интерполяционных формул Ньютона**

Используя подстановки  $q = (x - x_0) / h$  для первой формулы (5.10) и  $q = (x - x_n) / h$  для второй (5.11), получим формулы для оценки погрешности интерполирования по первой и второй интерполяционной формуле Ньютона, соответственно

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)(q-2) \dots (q-n)$$

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q+1)(q+2) \dots (q+n)$$

**Пример 2.** Составить интерполяционную формулу Ньютона, если заданы следующие значения  $x$  и  $y$ :

$$x_0 = 0.4, \quad x_1 = 0.6, \quad x_2 = 0.8, \quad y_0 = 0.588, \quad y_1 = 0.62, \quad y_2 = 0.81, \quad h = 0.2$$

Используем первую формулу Ньютона.

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) = 0.588 + \frac{0.033}{0.2}(x - 0.4) + \frac{0.158}{0.08}(x - 0.4)(x - 0.6) = 1.975x^2 - 1.81x + 1.002$$

Здесь вычислены следующие конечные разности первого и второго порядка:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0.033 \quad \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = 0.81 - 1.24 + 0.588 = 0.158$$

Итак, для полинома получаем соотношение

$$P(x) = 1.975x^2 - 1.81x + 1.002.$$

Проверим результат. С этой целью подставим в полученный полином данные значения для  $x_i$ , убедимся, что результаты совпадают с заданными  $y_i$

$$P(0.4) = 1.975 * 0.4^2 - 1.81 * 0.4 + 1.002 = 0.594$$

$$P(0.6) = 1.975 * 0.6^2 + 1.81 * 0.6 + 1.002 = 0.627$$

$$P(0.8) = 1.975 * 0.8^2 - 1.81 * 0.8 + 1.002 = 0.818$$

Результаты интерполирования в узлах совпали с заданными  $y_i$ .

Используя полученный полином можно вычислить, например, производную для исходной зависимости  $y(x)$ :  $P'(x) = 3.95x - 1.81$ .

Можно с помощью полученной зависимости найти значение функции в какой-нибудь промежуточной произвольной точке, например, для  $x=0.458$ .

$$P(0.458) = 1.975 * 0.458^2 - 1.81 * 0.458 + 1.002 = 0.587$$

### Задание 5.2. Построение интерполяционного полинома Ньютона

По заданным (табл. 5.3) значениям функции и аргумента составить формулу интерполяционного полинома Ньютона. Построить его график и отметить на нем узловые точки. Оценить погрешность интерполяции.

Таблица 5.3

#### Варианты задания 5.2

Вариант	$x$	5	10	15	20	25	30	35	40
1	$y$	2,236	3,162	3,873	4,472	5,000	5,477	5,916	6,325
2	$y$	1,710	2,154	2,466	2,714	2,924	3,107	3,271	3,420
3	$y$	7,071	10,000	12,247	14,142	15,811	17,321	18,708	20,000
4	$y$	3,684	4,642	5,313	5,848	6,300	6,694	7,047	7,368
5	$y$	7,937	10,000	11,447	12,599	13,572	14,422	15,183	15,874
6	$y$	0,200	0,100	0,067	0,050	0,040	0,033	0,029	0,025
7	$y$	19,635	78,540	176,720	314,160	490,870	706,860	962,100	1256,600
8	$y$	15,710	31,420	47,120	62,830	78,540	94,250	109,960	125,700
9	$y$	1,609	2,303	2,708	2,996	3,219	3,401	3,555	3,689
10	$y$	0,087	0,174	0,259	0,342	0,423	0,500	0,534	0,643
11	$y$	0,996	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766
12	$y$	0,088	0,176	0,268	0,364	0,466	0,577	0,700	0,839
13	$y$	3,236	4,162	4,873	5,472	6,000	6,477	6,916	7,325
14	$y$	2,836	3,962	4,673	5,572	6,100	7,670	8,1236	9,445
15	$y$	4,246	5,165	5,893	6,876	7,435	8,871	9,716	10,123
16	$y$	5,236	6,162	7,134	7,451	8,871	9,177	9,916	10,325
17	$y$	1,235	1,901	2,073	2,775	3,657	4,189	4,651	5,125
18	$y$	6,277	6,965	7,277	7,485	7,998	8,421	8,980	9,345
19	$y$	7,336	7,988	8,873	9,472	10,000	11,455	12,976	13,395
20	$y$	1,236	1,162	1,873	2,472	3,000	4,477	4,916	5,325
21	$y$	1,236	3,162	3,873	4,472	5,400	5,677	5,916	6,325
22	$y$	1,710	2,154	2,466	2,714	2,924	3,107	3,271	3,420
23	$y$	7,071	10,000	12,247	14,142	15,811	17,321	18,708	20,000
24	$y$	3,684	4,642	5,313	5,848	6,300	6,694	7,047	7,368
25	$y$	8,937	10,000	11,447	12,599	13,572	14,422	15,183	17,874
26	$y$	1,200	2,100	2,067	2,050	2,040	1,033	1,029	1,025
27	$y$	9,635	8,540	6,720	4,160	9,870	7,860	9,100	12,600

28	y	1,710	3,420	4,120	6,830	7,540	9,250	10,960	12,700
29	y	2,609	3,303	3,708	3,996	4,219	4,401	4,555	4,689
30	y	0,187	0,194	0,259	0,342	0,423	0,500	0,534	0,643

### 5.3. Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

Решим задачу, считая, что экспериментальные значения  $y_i$  содержат ошибки. Пусть требуется исследовать зависимость  $y=f(x)$ , причем величины  $x$  и  $y$  получены экспериментально. Обычно считают, что величины  $x$  измеряются точно, в то время как измерение величин  $y$  содержит случайные ошибки. Это означает, что погрешность измерения  $x$  пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью измерения  $y$ . Необходимо установить функциональную зависимость  $y = f(x)$  по результатам измерений  $(x_i, y_i)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . При этом в отличие от классической интерполяции, не требуется совпадения функции и полученных результатов в узлах, т.е. чтобы  $f(x_i) = y_i$ . Позволяя значениям  $f(x_i)$  отличаться от  $y_i$ , можно достаточно хорошо отразить характер изменения данных и даже учесть некоторые ошибки, содержащиеся в исходных данных.

Пусть функция  $f(x)$  может быть представлена в виде  $f(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  - неизвестные параметры. Тогда результаты измерений можно представить как  $y_i = f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k) + \xi_i$ , где  $\xi_i$  - случайные величины, характеризующие погрешности эксперимента. Обычно предполагают, что они – независимы, нормально распределены с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями. Задача состоит в том, чтобы по опытным данным наилучшим образом определить значения параметров  $a_k$ . При этом в методе наименьших квадратов считается, что наилучшими будут те значения параметров  $a_k$ , при которых сумма квадратов отклонений расчетных величин  $y$  от экспериментальных окажется наименьшей, т.е.  $S = \sum_i (f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k) - y_i)^2 \Rightarrow \min$ .

Для решения этой задачи в комплексе программ *Scilab* предусмотрена встроенная функция

$$[a, S] = \text{datafit}(F, z, c),$$

где  $F$  – функция, параметры которой надо подобрать,

$z$  – массив экспериментальных данных, состоящий из 2 строк: в первой расположены значения  $x$ , во второй – значения  $y$ ,

$c$  – вектор начальных приближений параметров  $a$ ,

$a$  – вектор регрессионных коэффициентов,

$S$  – минимальная сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от расчетных. Покажем на примерах 3-5 как составить программу для аппроксимации функции с помощью подпрограммы  $\text{datafit}(F, z, c)$  и оценить погрешность.

**Пример 3.** В результате опыта определена зависимость потребляемой от сети мощности  $P$  от входного напряжения  $U$  для асинхронного двигателя.

$U$ , В      132 140 150 162 170 180 190 200 211 220 232 240 251

$P$ , Вт      330 350 385 425 450 485 540 600 660 730 920 1020 1350

Методом наименьших квадратов подобрать зависимость вида

$P = a_1 + a_2 U + a_3 U^2 + a_4 U^3$ . Для удобства решения поделим на 100 все исходные данные.

Листинг программы

```
function [zr]=G(c, z)
zr=z(2)-c(1)-c(2)*z(1)-c(3)*z(1)^2-c(4)*z(1)^3
endfunction
//Исходные данные
x=[1.32 1.40 1.50 1.62 1.70 1.80 1.90...
  2.00,2.11,2.20,2.32,2.40,2.51];
y=[3.30 3.50 3.85 4.25 4.50 4.85 5.40...
  6.00 6.60 7.30 9.20 10.20 13.50];
//Формирование матрицы исходных данных
z=[x;y];
//Вектор начальных приближений
c=[0;0;0;0];
[a,err]=datafit(G,z,c)
//Построение графика экспериментальных данных
plot2d(x,y,-4);
//Построение графика подобранной функции
t=1.32:0.01:2.51;
Ptc=a(1)+a(2)*t+a(3)*t^2+a(4)*t^3;
plot2d(t,Ptc);
```

Результаты:  $a_1 = - 51.576664$ ,  $a_2=95.594671$ ,  $a_3=- 55.695312$ ,  $a_4=11.111453$ .

Исходя из полученных машинных расчетов, можно записать аппроксимирующую функцию в виде  $P = - 51.576664 + 95.594671U - 55.695312U^2 + 11.111453U^3$ . Подобранная аналитическая зависимость наилучшим образом отображает экспериментальные данные, что и показано на рис. 5.2, на котором исходные значения отмечены точками.

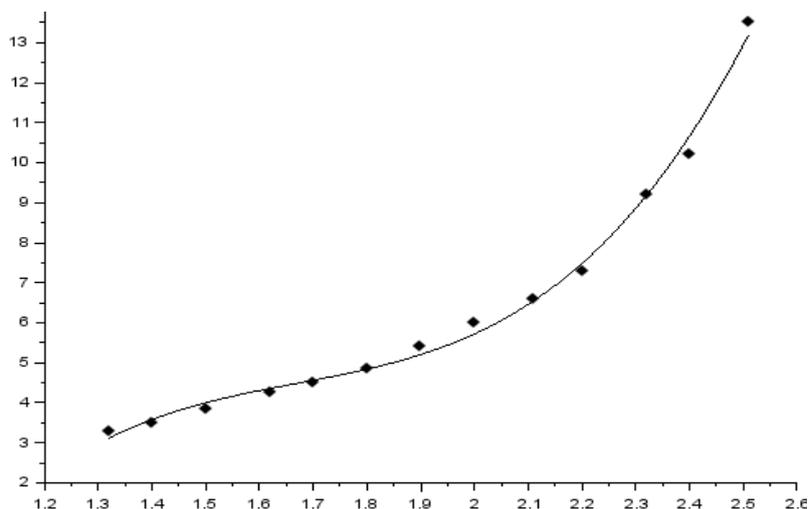


Рис. 5.2. Графическое решение методом наименьших квадратов

Решение задачи аппроксимации, выполненное аналитически, показано на примере 4.

**Пример 4.** В табл. 5.4 приведены экспериментальные данные зависимости  $y_i$  от  $x_i$ . Вычислить коэффициенты линейной аппроксимирующей функции  $\varphi(x) = a_1 + a_2x$ .

Таблица 5.4

$N(i)$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i x_i$
1	1,30	4,30	1.6900	5,59
2	1,41	4,50	1.9881	6,345
3	1,51	4,85	2.2801	7,3235
4	1,61	5,25	2.5921	8,4525
5	1,72	5,50	2.9840	9,46
6	1,83	5,85	3.3489	10,7055
7	1,93	6,40	3.7249	12,352
8	2,01	7,00	4.0401	14,07
9	2,31	8,60	5.3361	19,866
10	2,40	9,30	5.7600	22,32
11	2,52	10,20	6.3504	25,704
12	2,60	11,20	6.7600	29,12

13	2,81	12,50	7.8961	35,125
$\Sigma$	25,96	95,45	54,7251	206,4335

Так как функция линейная  $\varphi(x) = a_1 + a_2x$ , то минимизируем конечную разность в виде  $S = \sum_{i=1}^{13} (a_1 + a_2 * x_i - y_i)^2$ .

Находим первые частные производные по коэффициентам функции

$$1) \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = \frac{\partial S}{\partial a_1} \sum_{i=1}^{13} (a_1 + a_2 * x_i - y_i)^2 = 0, \quad 2 \sum_{i=1}^{13} (a_1 + a_2 * x_i - y_i) = 0$$

или можно записать

$$\sum_{i=1}^{13} a_1 + \sum_{i=1}^{13} a_2 x_i = \sum_{i=1}^{13} y_i.$$

С учетом сумм, приведенных в табл. 5.4 получаем первое уравнение для расчета коэффициентов:

$$13a_1 + 25.96a_2 = 95.45$$

Аналогично для производной по второму коэффициенту получаем

$$2) \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^{13} (a_1 + a_2 * x_i - y_i) x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{13} a_1 x_i + \sum_{i=1}^{13} a_2 x_i^2 = \sum_{i=1}^{13} y_i x_i$$

и с учетом полученных сумм в табл. 5.4 запишем второе уравнение в виде

$$25.96a_1 + 54.7251a_2 = 206.4335.$$

Решая систему двух уравнений вычислим коэффициенты аппроксимирующей линейной функции. Получаем  $a_1 = 5.3258$ ,  $a_2 = -3.4125$ . Проверка расчета на компьютере привела практически к тем же результатам:  $a_1 = 5,4858$ ,  $a_2 = -3,6215$ .

**Пример 5.** Исходные экспериментальные данные содержат значения ампер-витков обмотки и ЭДС генератора. Данные приведены в таблице 5.5, где  $x$  – нормированные значения ампер-витков,  $y$  – нормированные экспериментальные данные по ЭДС. Всего для исследования было получено 8 дискретных значений.

Таблица 5.5

## Экспериментальные нормированные переменные

$x$	0.000	0.182	0.257	0.366	0.664	0.910	1.160	1.460
$y$	0.000	0.700	0.460	0.640	0.920	0.944	1.012	1.104

Поскольку точная связь между переменными  $x$  и  $y$  неизвестна, необходимо получить аппроксимирующую функцию  $\varphi(x)$ . Следует учесть требование минимума отклонений полученной функции  $\varphi(x)$  в узлах  $x_i$  от экспериментальных значений  $y_i$ .

*Решение.* Обычно выбирается аппроксимирующая функция в виде полинома

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m,$$

где эмпирические параметры  $a_i$  подбирают исходя из условия минимума отклонений. Покажем подробнее решение с аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$  в виде полинома 2-й степени  $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Используем метод наименьших квадратов, т.е. минимизируем сумму квадратов отклонений реально наблюдаемых значений  $y_i$  от их оценок  $\varphi(x_i)$ . Это условие можно записать в виде

$$S = \sum_i (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \rightarrow \min_{a_0, a_1, a_2}. \quad (5.12)$$

Параметры функции  $S$  -  $a_0, a_1, a_2$  - являются независимыми переменными, поэтому минимум данной функции определим, приравнявая частные производных нулю:  $\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0$ ,  $\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$ ,  $\frac{\partial S}{\partial a_2} = 0$ , что приводит к следующим уравнениям относительно коэффициентов  $a_i$

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 = \sum_{i=0}^n y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \end{cases} \quad (5.13)$$

С учетом данных табл. 5.5, были вычислены все суммы в системе уравнений (5.13) и составлены уравнения для расчета коэффициентов функции

$$\begin{cases} 8a_0 + 4.999a_1 + 4.98a_2 = 5.78 \\ 4.999a_0 + 4.98a_1 + 5.79a_2 = 4.74 \\ 4.98a_0 + 5.79a_1 + 7.26a_2 = 5.04. \end{cases} \quad (5.14)$$

В результате решения системы уравнений (5.14) для коэффициентов были получены значения  $a_0 = 0.1685$ ;  $a_1 = 1.5084$ ;  $a_2 = -0.6243$ .

Получаем аппроксимирующую функцию  $\varphi(x)=0.1685+1.5084x - 0.6243x^2$ . Подставляя в данную функцию  $x_i$ , вычислим значения отклика  $y_i$  и сравним с исходными данными (табл. 5.6).

Таблица 5.6

Результаты вычислений

$x$	$\varphi(x)$	$y$	$\delta y$
0.182	0.422	0.700	-0.396
0.257	0.514	0.460	0.119
0.366	0.636	0.640	-0.004
0.664	0.894	0.920	-0.027
0.910	1.012	0.944	0.072
1.160	1.078	1.012	0.065
1.460	1.040	1.104	-0.057

Оценивая относительные погрешности  $\delta y$  в заданных узлах  $x_i$ , представим результаты в виде табл. 5.6. Опытные данные могут содержать случайные ошибки или даже промахи. Первый отклик в табл. 5.6, равный 0.700, скорее всего является результатом случайной ошибки. В случаях значительного разброса экспериментальных данных целесообразно провести сглаживание данных. Метод

наименьших квадратов также применим для этой цели.

Дополнительно были получены линейная и кубическая аппроксимирующие функции.

Линейная аппроксимирующая эксперимент функция показана на рис. 5.3 под номером 1. Зависимость от  $x$  в этом случае получилась в виде  $\varphi_1(x) = 0.3435 + 0.6076x$ . Проводя аналогичные расчеты коэффициентов для кубической зависимости аппроксимирующей функции, получили результат в виде  $\varphi_3(x) = 0.0659 + 2.6080x - 2.6191x^2 + 0.9085x^3$  (линия под номером 3 на рис.5.3), а для квадратичной зависимости на рисунке 5.3 представлен результат под номером 2. Проведенные расчеты погрешностей показали, что наилучшее приближение с экспериментальными данными демонстрирует кубическая зависимость (линия под номером 3 на рисунке 5.3). Все коэффициенты были проверены с помощью программы *datafit(F,z,c)*.

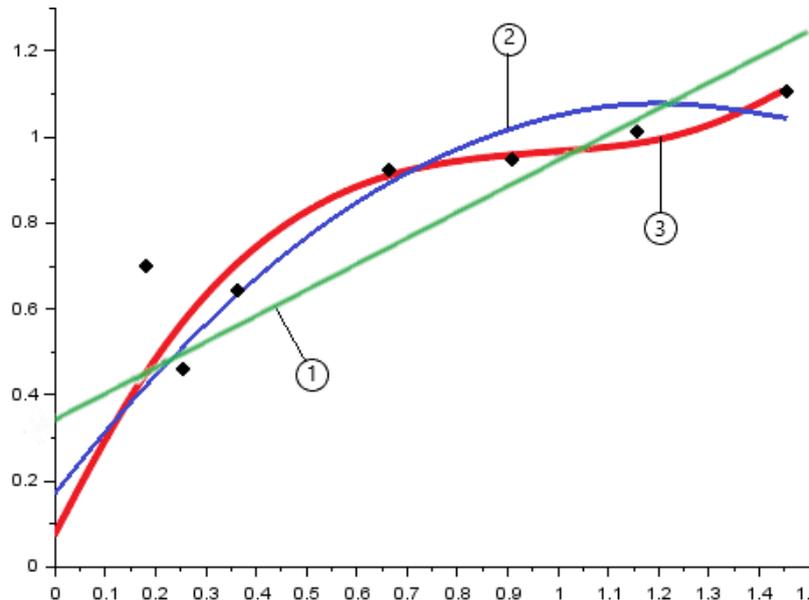


Рис. 5.3. Эмпирические функции. Линейная (1), квадратичная (2) и кубическая (3) аппроксимирующие функции. Точками отмечены заданные табличные значения функции

### **Задание 5.3. Аппроксимация методом наименьших квадратов**

По заданным (табл. 5.3) значениям функции и аргумента получить «ручным» способом аппроксимирующую линейную функцию. Используя подпрограмму *datafit(F,z,c)* комплекса *SciLab*, вычислить коэффициенты кубической, квадратичной и линейной аппроксимирующих функций. Оценить погрешности аппроксимаций. Построить графики.

#### ***Контрольные вопросы***

1. Как ставится задача интерполяции?
2. Какие виды интерполяции вы знаете?
3. В чем суть и геометрический смысл линейной интерполяции?
4. Как выглядит оценка точности при интерполировании многочленом?
5. В какой форме строится интерполяционный многочлен Лагранжа? Ньютона?
6. В каких случаях может потребоваться аппроксимация функции?
7. Какими критериями пользуются для определения «близости» функции?
8. На чем основывается доказательство существования и единственности интерполяционного многочлена для таблично заданной функции?

## РАЗДЕЛ 6. Интерполирование сеточной функции сплайнами

### Цель занятия:

- закрепить умения интерполировать функцию сплайнами и находить ее значение в заданной точке.
- Овладение вычислительными методами и практическими методами оценки погрешности вычислений.
- Приобретение умений и навыков при программировании и отладке вычислительных задач на компьютере

### 6.1. Интерполяция кубическими сплайнами

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений.

Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей, с последующим построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена.

Однако такое интерполирование наталкивается на существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов бывает разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции - интерполяции *сплайнами*.

Суть этого подхода заключается в следующем.

**Определение.** Функция  $S_m(x)$  называется *интерполяционным сплайном порядка  $m$*  для функции  $f(x)$ , заданной таблицей:

$x$	$x_0$	$x_1$	...	$x_i$	...	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_n$

если:

1. на каждом отрезке  $[x_i; x_{i+1}]$  ( $i=0, \dots, n-1$ )  $S(x)$  является многочленом порядка  $m$ ;
2.  $S(x)$  и её производная до  $(m-1)$ -го порядка включительно непрерывны на  $[x_0; x_n]$ ;
3.  $S(x)=y_i$  ( $i=0, \dots, n$ ) - условие интерполяции.

Остановимся на построении наиболее популярных в практике *кубических сплайнов*.

По определению кубический сплайн  $S(x)$  можно представить в виде



$$\begin{cases} c_1 - 3h_1d_1 = 0; \\ c_n = 0; \\ h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1}; \\ b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0; \\ c_{i-1} - c_i + 3h_i d_i = 0. \end{cases}$$

Последовательно, исключая переменные получим

$$h_{i+1}c_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_i c_{i-1} = 3 \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) \quad (6.9)$$

(это уравнение содержит лишь неизвестные  $c_i$ ).

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i} \quad (6.10)$$

Это уравнение содержит лишь неизвестные  $d_i$ .

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + h_i c_i - h_i^2 d_i \quad (6.11)$$

В этом уравнении неизвестные  $b_i$ .

Построив кубический сплайн, найдем оценку погрешности интерполяции по формуле:

$$|f(x) - S(x)| \leq \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)|,$$

где  $[a;b]$  - промежуток интерполяции.

**Пример 1.** Построить кубический сплайн для функции  $y=f(x)$ , заданной таблицей:

$x_i$	-1	0	1	2
$y_i$	1/2	1	2	4

с дополнительным условием:  $S''(-1) = S''(2) = 0$ . Найти  $S(x)$  значения функции при  $x=0,3$ . (Заметим, что в основу таблицы положена функция  $y = 2^x$ ).

*Решение.*  $c_0 = 0$  (т.к. не используется в функциях) и  $c_3 = 0$  (т.к. из условия (6.8)  $c_n = 0$ ).

Шаг таблицы  $h_i = 1$ . Из условия (6.9) получаем:

$$\begin{cases} 1 \cdot c_2 + 2(1+1)c_1 + 1 \cdot c_0 = 3 \left( \frac{y_2 - y_1}{1} - \frac{y_1 - y_0}{1} \right), \text{ при } i=1, \\ 1 \cdot c_3 + 2(1+1)c_2 + 1 \cdot c_1 = 3 \left( \frac{y_3 - y_2}{1} - \frac{y_2 - y_1}{1} \right), \text{ при } i=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 + 4c_1 = 3 \left( \frac{2-1}{1} - \frac{1-1}{1} \right) = 3 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \\ 0 + 4c_2 + c_1 = 3 \left( \frac{4-2}{1} - \frac{2-1}{1} \right) = 3(2-1) = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 + 4c_1 = \frac{3}{2}, \\ 4c_2 + c_1 = 3. \end{cases}$$

$$15c_1 = 6 - 3 = 3,$$

$$c_1 = \frac{1}{5}, \quad c_2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}.$$

Из (6.10) имеем:

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{3h} = \frac{\frac{1}{5} - 0}{3 \cdot 1} = \frac{1}{15},$$

$$d_2 = \frac{c_2 - c_1}{3h} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{6},$$

$$d_3 = \frac{c_3 - c_2}{3h} = \frac{0 - \frac{7}{10}}{3} = -\frac{7}{30}.$$

Из (6.11) имеем:

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + hc_1 - h^2 d_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} + 1 \cdot \frac{1}{5} - 1^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{19}{30},$$

$$b_2 = \frac{y_2 - y_1}{h} + hc_2 - h^2 d_2 = \frac{2-1}{1} + 1 \cdot \frac{7}{10} - 1 \cdot \frac{1}{6} = 1 + \frac{7}{10} - \frac{1}{6} = \frac{23}{15},$$

$$b_3 = \frac{y_3 - y_2}{h} + hc_3 - h^2 d_3 = \frac{4-2}{1} + 1 \cdot 0 - 1 \cdot \left( -\frac{7}{30} \right) = 2 + \frac{7}{30} = \frac{67}{30}.$$

Из формулы (6.2) получаем:

$$P_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3, x \in [x_0; x_1],$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}(x-0) + \frac{1}{5}(x-0)^2 + \frac{1}{15}(x-0)^3, \quad \text{т.е.} \quad P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1; 0].$$

$$P_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3, x \in [x_1; x_2],$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x-1) + \frac{7}{10}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3, x \in [x_1; x_2]$$

$$P_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_3)^2 + d_3(x - x_3)^3, x \in [x_2; x_3],$$

$$P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x-2) - \frac{7}{30}(x-2)^3, x \in [1; 2]$$

Следовательно, сплайн S(x) построен:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, x \in [-1;0]; \\ P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x-1) + \frac{7}{10}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3, x \in [0;1]; \\ P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x-2) - \frac{7}{30}(x-2)^3, x \in [1;2]. \end{cases}$$

Найдем его значение при  $x=0,3$ :

Заметим, что  $0,3 \in [0;1]$ , поэтому используем многочлен  $P_2(x)$ :

$$P_2(0.3) = 2 + \frac{23}{15}(0,3 - 1) + \frac{7}{10}(0,3 - 1)^2 + \frac{1}{6}(0,3 - 1)^3 = 1,2125.$$

Отметим для сопоставления с той же точностью значение функции, положенной в основу данного примера:  $f(x) = 2^x$ ;  $f(0.3) = 2^{0.3} = 1,2311$ .

Интерполяция сплайнами сопряжена с немалым объемом вычислительной работы. Весьма необычна и форма окончательного результата, ибо сплайн имеет различные представления на различных частичных отрезках интерполяции. Это осложняет доступ к значениям сплайна в каждой конкретной точке, так как предполагает, прежде всего, поиск параметров, определяющих соответствующую форму сплайна. Эти трудности легко предотвратимы при использовании компьютера, так как упорядоченное хранение всех необходимых параметров организовать нетрудно, а выполнение однотипных процедур по вычислению параметров сплайна и его значений может быть обеспечено специальными процедурами. В следующих двух примерах продемонстрируем интерполирование функции  $y(x)$  кубическими сплайнами с использованием программы *SciLab*

**Пример 2.** Для заданных значений  $x$  и  $y$  выполнить интерполирование функции  $y(x)$

$$x=[122 \ 130 \ 140 \ 152 \ 160 \ 170 \ 180 \ 210 \ 221 \ 230 \ 242 \ 250 \ 261];$$

$$y=[320 \ 330 \ 355 \ 465 \ 480 \ 585 \ 640 \ 700 \ 860 \ 930 \ 1020 \ 1220 \ 1450];$$

кубическими сплайнами с использованием программы *SciLab*, листинг которой приведен ниже. В промежуточных точках  $x=[200, 211, 241]$  вычислить значения  $y$ . Результат расчета показать на графике.

Листинг

```
x=[122 130 140 152 160 170 180 210 221 230 242 250 261];
y=[320 330 355 465 480 585 640 700 860 930 1020 1220 1450];
plot2d(x,y,-4); //График экспериментальных данных
coeff=splin(x,y);
X=[200 211 241];
//Значение функции в заданных точках
Y=interp(X,x,y,coeff)
plot2d(X,Y,-3); //Нанесение точек на график
//Построение кубического сплайна
t=122:0.1:261;
ptd=interp(t,x,y,coeff);
plot2d(t,ptd);
```

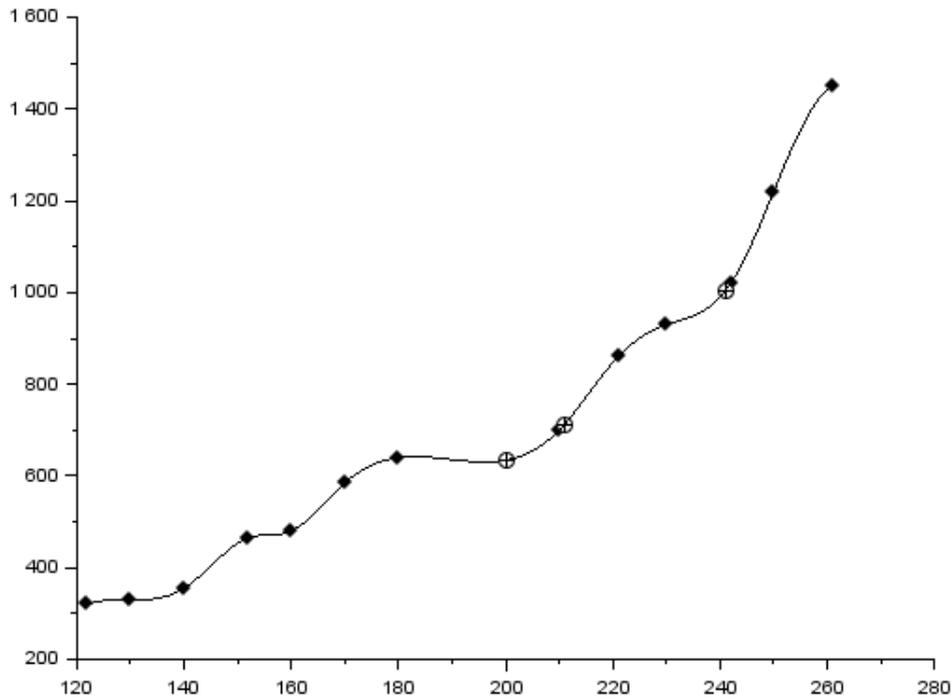


Рис. 6.1. Графическое представление результатов расчета

Значения функции в заданных точках  $x=[200, 211, 241]$  получились равными  $y = 634.4315; 712.64729; 1003.7637$ . На рис. 6.1 эти значения показаны кружками.

**Пример 3.** Выполнить интерполирование функции  $y(x)$  кубическими сплайнами с использованием программы *SciLab*, листинг которой приведен ниже. В промежуточной точке  $x=[1.8]$  вычислить значения  $y$ . Результат построения показать на графике.

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$x$
-1	0	1	2	-3	5	2	-6	1,8

```

Листинг
x=[-1 0 1 2];
y=[-3 5 2 -6];
plot2d(x,y,-4); //График экспериментальных данных
coeff=splin(x,y);
X=[1.8];
//Значение функции в заданных точках
Y=interp(X,x,y,coeff)
plot2d(X,Y,-3); //Нанесение точек на график
//Построение кубического сплайна
t=-1:0.1:2;
ptd=interp(t,x,y,coeff);
plot2d(t,ptd);

```

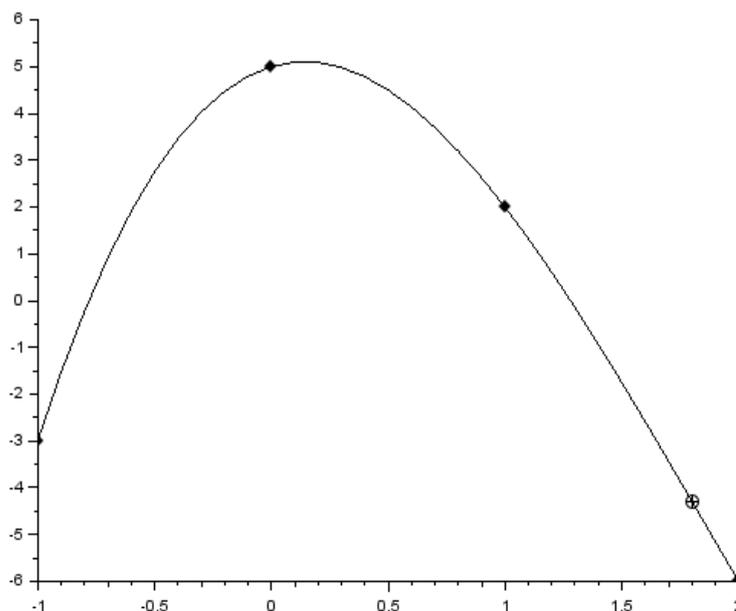


Рис. 6.2. Результат интерполирования

Значение функции в заданной точке  $x$  получилось равным  $y = -4.288$ . Эта точка на рис. 6.2 отмечена кружком.

### Задание 6.1. Интерполирование кубическими сплайнами

По заданным значениям функции  $y_i$  и  $x_i$  (табл.6.1) вычислить коэффициенты и составить формулы кубического сплайна. Результат интерполирования проверить путем вычисления значений сплайна в узловых точках.

Вычислить значение функции в промежуточной точке  $x$ .

Проверить результаты с помощью программы, используя интерполяцию кубическими сплайнами.

Таблица 6.1

#### Варианты задания 6.1

Вариант	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$x$
1	-2	0	1	3	-3	5	2	-6	1,9
2	2	3	4	5	4	1	7	2	3,5
3	0	2	4	6	-1	-4	2	-8	0,5
4	7	9	11	13	2	-2	3	-4	4,8
5	-3	-1	1	3	7	-1	4	-6	2,1
6	1	2	3	4	-3	-7	2	8	3,9
7	-1	1	3	5	4	9	1	6	3,3
8	2	4	6	7	9	-3	6	-2	4,0
9	-4	-2	0	2	2	8	5	10	1,9
10	-1	0	1	2	4	-7	1	-8	1,3
11	1	4	6	8	-1	-6	3	12	4,1
12	-9	-7	-5	-3	3	-3	4	-9	-7,6

13	0	1	2	3	7	-1	8	2	2,4
14	-8	-7	-6	-5	9	-2	4	6	-5,5
15	-7	-5	-3	-1	4	-4	5	10	-5,2
16	-2	0	1	3	-3	5	2	-6	2,4
17	4	6	7	7	4	1	7	2	5,5
18	1	2	5	6	-2	-4	-3	-8	2,5
19	7	9	11	13	2	-2	3	-4	8,8
20	-3	-1	1	3	7	-1	4	-6	2,1
21	1	2	3	4	-3	-7	2	8	3,9
22	-1	1	3	5	4	9	1	6	3,3
23	2	4	6	7	9	-3	6	-2	4,0
24	-4	-2	0	2	2	8	5	10	1,9
25	-1	0	1	2	4	-7	1	-8	1,3
26	1	4	6	8	-1	-6	3	12	4,1
27	-9	-7	-5	-3	3	-3	4	-9	-6,6
28	0	1	2	3	7	-1	8	2	2,4
29	-2	-7	-6	-3	9	-2	4	6	-2,5
30	-9	-8	-3	-1	5	-4	-5	-10	-5,2

## 6.2. Интерполирование функций. Линейные сплайны. Обработка экспериментальных данных

Часто в результате постановки эксперимента получают дискретные наборы некоторых величин. Табличные значения могут быть получены в результате расчетов или в процессе замеров в каком-либо эксперименте. Если табличные точки получены из очень точных экспериментальных наблюдений, то их зачастую можно считать лишенными ошибок. Решение задачи состоит в том, что табличную функцию  $f(x)$  (аналитическая запись которой не известна) заменяют некоторой приближающей линейной аналитической функцией  $\varphi(x)$  с требованием, чтобы она совпадала с табличной функцией в узлах, т.е.  $\varphi(x_i) = f(x_i)$ .

Пусть функция  $f(x)$  задана множеством своих значений для дискретного набора несовпадающих точек  $x_i$  (называемых узлами) в виде таблицы.

$$x \quad y = f(x)$$

$$x_1 \quad y_1$$

$$x_2 \quad y_2$$

-----

$$x_n \quad y_n$$

Здесь  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Требуется найти приближенное значение  $y = f(x)$  для  $x \neq x_i$ , причем  $x_1 < x < x_n$ .

Пусть функция на всех интервалах интерполирования имеет линейную зависимость. Будем решать эту задачу интерполяции с помощью программы *Scilab*. В комплексе программ *Scilab* для построения линейной интерполяции служит встроенная функция

$$z = \text{interpln}(y,x),$$

где  $y$  – массив исходных данных,  $x$  – вектор абсцисс,  $z$ – вектор значений линейного сплайна в точках  $x$ . Покажем на двух примерах как проводить расчет с помощью подпрограммы *interpln*( $y,x$ ).

**Пример 4.** Пусть задан некоторый набор экспериментальных данных  $y$ , зависящих от  $x$ . Построим интерполяционную зависимость с помощью функции *interpln*. Листинг программы, решающей эту задачу, приведен ниже.

Листинг

```
// интерполяция экспериментальных данных
// ввод экспериментальных данных
x=[0 0.15 0.31 0.48 0.61 0.77 0.92 1.01 1.16 1.32 1.47];
y=[0 0.16 0.33 0.42 0.59 0.72 0.75 0.88 0.95 0.96 0.99];
// построение графика экспериментальных данных в виде точек
plot2d(x,y,-4);
// вычисление интерполяционных данных
t=0:0.01:1.47;
ptd=interpln([x;y],t);
// построение графика интерполяционных данных в виде линии
plot2d(t,ptd)
```

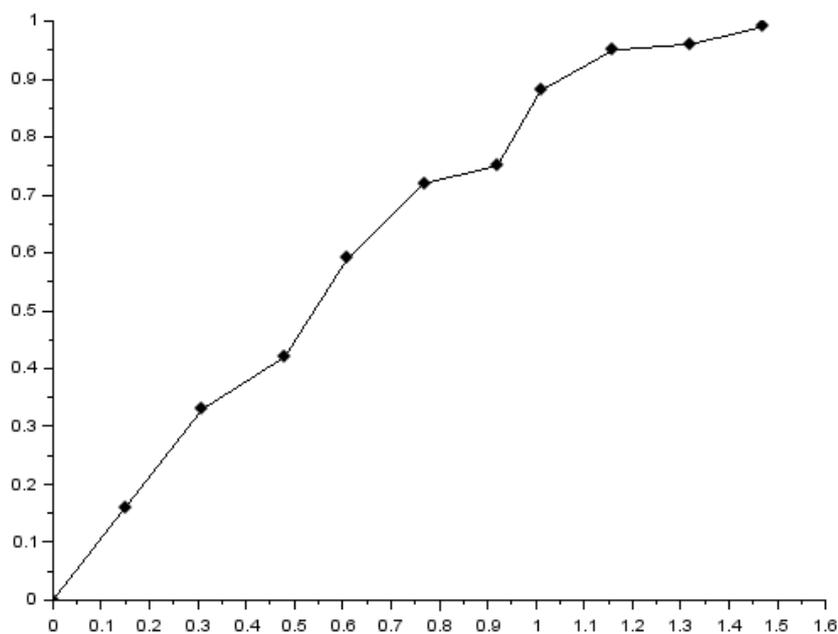


Рис. 6.3. Линейная интерполяция экспериментальных значений

Как видно из рис. 6.3, узлы исходной функции соединены линейными отрезками.

**Пример 5.** Дан набор точечных значений  $x$  и  $y$ . Интерполировать точечную функцию линейным сплайном с помощью функции *interp1n*.

```
x=[122 130 140 152 160 170 180 210 221 230 242 250 261];
y=[320 330 355 465 480 585 640 700 860 930 1020 1220 1450];
plot2d(x,y,-4);
z=[x;y];
t=122:1:261; ptd=interp1n(z,t);
plot2d(t,ptd);
```

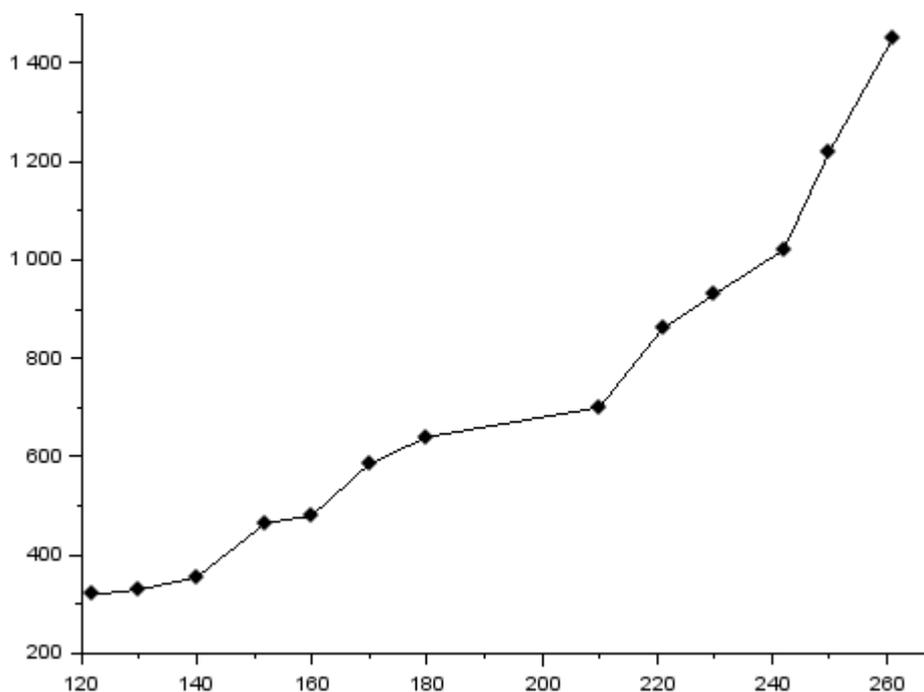


Рис. 6.4. Интерполирование линейным сплайном

В приложении 3 приведены блок-схема и программа метода интерполяции сплайнами.

### **Задание 6.2. Интерполирование. Использование подпрограммы *interp1n***

По заданной таблице дискретных значений функции (табл.6.2) выполнить интерполирование линейными сплайнами в подпрограмме *interp1n*.

Таблица 6.2

### **Зависимость потребляемой из сети мощности $P$ от входного напряжения $U$**

Вариант 1

$U, В$	122	130	140	152	160	170	180	190	201	210	222	230	241
$P, Вт$	310	330	365	405	430	465	520	580	640	710	900	1000	1150

Вариант 2

*U, B* 112 120 130 142 150 160 170 180 190 200 212 220 230  
*P, Bт* 350 360 385 445 470 495 550 610 620 750 940 1062 1350

Вариант 3

*U, B* 135 146 155 166 175 186 190 215 225 232 245 265 289  
*P, Bт* 330 350 385 425 450 485 540 600 660 730 920 1020 1350

Вариант 4

*U, B* 142 150 160 172 180 190 210 220 230 242 252 260 271  
*P, Bт* 230 250 285 325 350 385 440 500 560 630 820 920 970

Вариант 5

*U, B* 138 148 158 169 178 188 198 209 216 227 232 245 251  
*P, Bт* 310 320 335 445 460 475 520 630 640 750 960 1060 1150

Вариант 6

*U, B* 120 140 152 163 171 182 193 204 215 226 236 248 259  
*P, Bт* 130 150 185 225 250 285 340 400 460 530 720 1120 1450

Вариант 7

*U, B* 134 140 150 162 170 180 190 200 211 220 232 240 251  
*P, Bт* 230 250 275 325 370 385 470 570 590 630 830 940 990

Вариант 8

*U, B* 132 150 160 172 180 190 195 210 221 230 242 250 261  
*P, Bт* 220 360 375 415 420 435 510 620 630 710 920 1320 1450

Вариант 9

*U, B* 112 120 130 132 140 150 160 170 181 220 232 240 251  
*P, Bт* 330 340 355 425 440 485 550 610 660 740 920 1250 1450

Вариант 10

*U, B* 123 130 140 152 160 170 180 190 201 210 222 230 241  
*P, Bт* 250 360 485 545 670 795 850 910 1020 1150 1240 1362 1450

Вариант 11

*U, B* 142 150 160 172 180 190 195 210 221 230 242 250 261  
*P, Bт* 350 360 385 445 470 495 550 610 620 750 940 1062 1350

Вариант 12

*U, B* 132 135 140 155 168 179 185 196 211 220 242 280 341  
*P, Bт* 310 330 365 405 430 465 520 580 640 710 900 1000 1150

Вариант 13

*U, B* 122 140 160 172 180 190 220 250 280 242 252 260 271  
*P, Bт* 230 250 285 325 350 385 440 500 560 630 820 920 970

Вариант 14

*U, B* 130 143 155 166 172 184 195 205 215 230 242 250 260  
*P, Bт* 180 250 305 325 350 385 440 500 560 630 720 820 950

Вариант 15

*U, B* 137 142 150 162 176 188 194 208 215 220 232 240 251  
*P, Bт* 230 250 385 325 350 385 540 500 560 630 820 920 1350

Вариант 16

*U, B* 142 150 160 172 180 190 200 220 241 250 302 340 351  
*P, Bт* 330 350 385 425 450 485 540 600 660 730 920 1020 1350

Вариант 17

*U, B* 130 141 151 161 172 183 193 201 231 240 252 260 281  
*P, Bт* 430 450 485 525 550 485 640 700 860 930 1020 1120 1250

Вариант 18

*U, B* 122 130 140 152 160 170 180 190 201 210 222 230 241  
*P, Bт* 250 360 485 545 670 795 850 910 1020 1150 1240 1362 1450

Вариант 19

*U, B* 142 150 160 172 180 190 210 220 230 242 252 260 271  
*P, Bт* 310 320 335 415 420 445 510 560 660 730 920 1020 1350

Вариант 20

*U, B* 138 158 164 169 175 187 192 204 212 225 233 241 250  
*P, Bт* 340 360 395 415 420 435 550 650 690 710 920 1020 1350

Вариант 21

*U, B* 102 120 130 152 160 171 182 193 204 215 226 235 244  
*P, Bт* 300 310 345 405 430 465 520 580 640 710 900 1000 1150

Вариант 22

*U, B* 140 150 160 172 180 190 230 280 290 230 312 320 330  
*P, Bт* 350 360 385 445 470 495 550 610 620 750 940 1062 1350

Вариант 23

*U, B* 131 141 152 160 170 186 190 205 215 232 245 265 289  
*P, Bт* 330 350 385 425 450 485 540 600 660 730 920 1020 1350

Вариант 24

*U, B* 122 130 140 152 160 170 180 190 201 210 222 230 241  
*P, Bт* 310 330 365 405 430 465 520 580 640 710 900 1000 1150

Вариант 25

*U, B* 112 120 130 142 150 160 170 180 190 200 212 220 230  
*P, Bт* 350 360 385 445 470 495 550 610 620 750 940 1062 1350

Вариант 26

*U, B* 130 136 145 160 165 176 190 205 215 234 255 268 287  
*P, Bт* 330 350 385 425 450 485 540 600 660 730 920 1020 1350

Вариант 27

*U, B* 120 130 150 162 170 195 220 280 290 230 322 328 334  
*P, Bт* 320 340 325 415 450 485 530 610 620 730 920 1002 1150

Вариант 28

U, B 111 121 142 150 180 188 196 215 219 230 250 268 290  
P, Вт 235 355 385 425 450 485 540 600 660 730 920 1020 1350

Вариант 29

U, B 222 230 240 252 260 270 280 290 303 310 323 331 348  
P, Вт 340 370 395 415 435 485 520 580 640 720 950 1060 1250

Вариант 30

U, B 122 140 160 182 190 210 270 280 290 320 352 380 430  
P, Вт 310 360 385 445 470 495 550 610 620 750 940 1062 1350

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое сплайн-интерполяция и в чем ее суть?
2. Какие трудности возникают при интерполировании сплайнами?

## **РАЗДЕЛ 7. Вычисление интегралов. Приближенные методы расчета**

### **Цель занятия:**

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения приближенно вычислять интегралы при помощи следующих формул Ньютона-Котеса: 1. формула прямоугольников, 2. формула трапеций, 3. формула парабол (Симпсона);
- освоить расчет интегралов методом Гаусса.

### **7.1. Квадратурные формулы приближенного вычисления интегралов**

#### ***Постановка задачи численного интеграла***

При вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx ,$$

где  $f(x)$  - функция непрерывная на отрезке  $[a,b]$  используется формула Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (7.1)$$

Однако бывают случаи, когда первообразную  $F(x)$  нельзя найти, или не всегда удается довести вычисления до числового значения. Иногда

подынтегральная функция может быть задана таблично или графиком, поэтому формула (7.1) не исчерпывает практических приемов вычисления интегралов.

На практике часто применяют различные методы приближенного (численного) интегрирования.

**Определение:** Формулы, используемые для приближенного вычисления интегралов, называют *квадратурными формулами*.

Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция  $f(x)$  заменяется на отрезке  $[a;b]$  интерполяционным многочленом Лагранжа  $L_n(x)$ , и тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx. \quad (7.2)$$

Подобный подход удобен тем, что он приводит к алгоритмам, легко реализуемым на компьютере, и позволяющим получать результат с точностью, достаточной для широкого круга практических приложений.

### **Метод прямоугольников**

Для вычисления определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$ , отрезок  $[a;b]$  разбивают на  $n$  частей, в каждой из которых криволинейную трапецию, заменяют прямоугольником с основанием  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ , и высотой  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , соответственно (рис. 7.1).

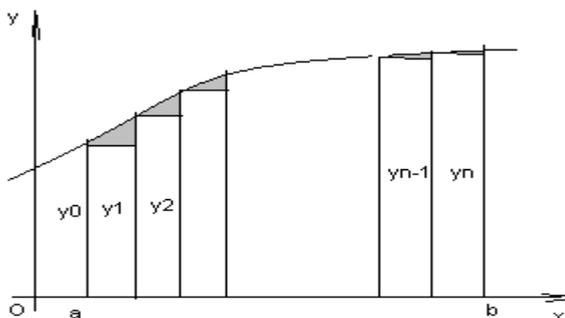


Рис.7.1. Замена криволинейной трапеции прямоугольником

Данный подход к решению задачи дает площадь меньше площади криволинейной трапеции, говорят, что значение определенного интеграла получено с недостатком.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (7.3)$$

Формула (7.3) называется *формулой прямоугольников с недостатком*.

Аналогично можно получить формулу для вычисления определенного интеграла с избытком (рис. 7.2).

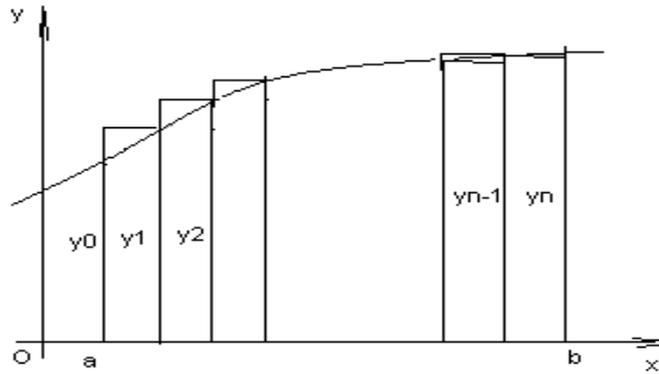


Рис. 7.2. Вычисление интеграла с избытком

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \quad (7.4)$$

Формула (7.4) называется *формулой прямоугольников с избытком*, где значение

$$y_k = f(a + k \cdot \Delta x), k = \overline{0, n}. \quad (7.5)$$

**Пример 1.** Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx \quad (n=5).$$

*Решение.*

Имеем  $a=0$ ,  $b = \pi/4$ ,  $f(x) = \cos x$ .

$$\text{Тогда } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi/4 - 0}{5} = \frac{\pi}{20} \approx 0,157.$$

Вычислим значение функции по формуле (7.5):

$$y_0 = f(a + 0 \cdot \Delta x) = \cos(0) = 1,$$

$$y_1 = f(a + 1 \cdot \Delta x) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{20}\right) = \cos \frac{\pi}{20} \approx \cos 9^\circ \approx 0,987,$$

$$y_2 = \cos\left(0 + 2 \cdot \frac{\pi}{20}\right) = \cos \frac{\pi}{10} = \cos 18^\circ \approx 0,951,$$

$$y_3 = \cos\left(0 + 3 \cdot \frac{\pi}{20}\right) = \cos \frac{3\pi}{20} = \cos 27^\circ \approx 0,891,$$

$$y_4 = \cos\left(0 + 4 \cdot \frac{\pi}{20}\right) = \cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ \approx 0,809.$$

Применяя формулу прямоугольника с недостатком (7.3) получим

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = 0,157(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0,157 \cdot (1 + 0,987 + 0,951 + 0,891 + 0,809) = 0,728$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона - Лейбница и сравним результаты:

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Относительная погрешность вычисления:

$$\Delta = \frac{(I_{\text{точн}} - I_{\text{прибл}})}{I_{\text{точн}}} \approx 0,029.$$

### **Метод трапеций**

Геометрический смысл этого метода практического вычисления определенного интеграла состоит в том, что нахождение площади криволинейной трапеции заменяется нахождением площади приблизительно равновеликой прямолинейной трапеции (рис.7.3).

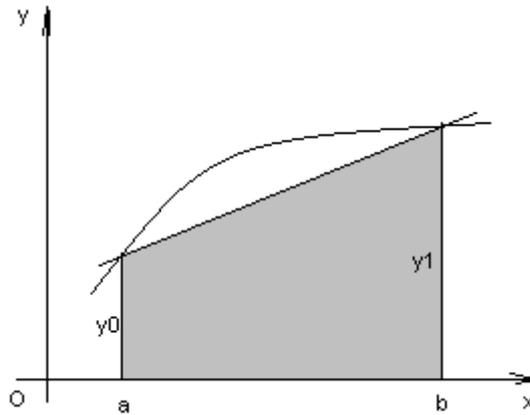


Рис. 7.3. Замена криволинейной трапеции на прямолинейную

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} (b - a) \quad (7.6)$$

Для повышения точности результата разобьем фигуру на  $n$  частей, а затем суммируем площади получившихся трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right), \quad (7.7)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

где  $y_k = f(x_k) = f(a + k\Delta x)$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Формула (7.7) называется *формулой трапеций*.

**Пример 2.** По формуле трапеции вычислить интеграл

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \quad (n=5).$$

*Решение.* Имеем  $a=0$ ,  $b=5$ ,  $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ ,  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$ .

Вычислим промежуточные значения функции в узлах:

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2} = 0,5, \quad y_1 = y(1) = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = 0,447,$$

$$y_2 = y(2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,409, \quad y_3 = y(3) = \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,377,$$

$$y_4 = y(4) = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,353, \quad y_5 = y(5) = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0,333.$$

Тогда по формуле трапеций (7.7) имеем:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}} \approx 1 \left( \frac{0,5}{2} + 0,447 + 0,409 + 0,377 + 0,353 + \frac{0,3}{2} \right) \approx 2,002.$$

### Метод парабол

Замена подынтегральной функции  $f(x)$  параболой (рис.7.4), проходящей через точки  $M_i(x_i ; y_i)$ , ( $i=0,1,2$ ) позволяет получать более точное значение определенного интеграла.

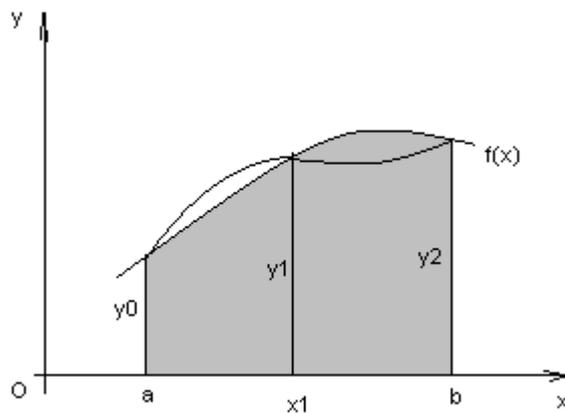


Рис. 7.4. Замена подынтегральной функции  $f(x)$  параболой

Если считать, что  $n$  - четное ( $n=2m$ ), то получим:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left( \frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right), \quad (7.8)$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Формула (7.8) называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона*. Для оценки погрешности формулы Симпсона применяется формула

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot \frac{|b-a|h^4}{180} \leq \varepsilon. \quad (7.9)$$

Как следует из оценки (7.9), формула Симпсона оказывается точной для многочленов до 3-ей степени включительно. Так как для этих случаев производная 4-го порядка равна 0.

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций, это означает, что для достижения той же точности, что и в формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число  $n$  - отрезков разбиения. Последнее обстоятельство весьма важно для вычислений, поскольку основное время затрачивается на нахождение значений функции в узлах. Укажем простой практический прием, позволяющий прогнозировать требуемое число отрезков разбиения по заданной точности  $\varepsilon$  (7.10).

$$h \leq \sqrt{\frac{180\varepsilon}{|b-a| \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|}}. \quad (7.10)$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл по формуле парабол

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx, \quad (n=10).$$

*Решение:* Значения подынтегральной функции в узловых точках запишем в таблицу:

$x_i$	$y_i$
0	0
0,1	0,0019966
0,2	0,0079467
0,3	0,0531936
0,4	0,0623068
0,5	0,2397124
0,6	0,2032711
0,7	0,6313333
0,8	0,4591078
0,9	1,2689896
1	0,841478

Подставим найденные значения в формулу Симпсона, учитывая, что  $h=0,1$ :

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx \approx \frac{2 \cdot 0,1}{3} \left( \frac{0 + 0,841471}{2} + 2 \cdot 0,0019966 + 0,0079467 + 2 \cdot 0,0531936 + 0,0623068 + \right. \\ \left. + 2 \cdot 0,2397124 + 0,2032711 + 2 \cdot 0,6313333 + 0,4591078 + 2 \cdot 1,2689896 \right) \approx 0,2232395$$

В данном случае легко вычислить «точное» значение этого интеграла, пользуясь формулой Ньютона - Лейбница

$$\int_0^1 x^2 \sin x dx = 2 \sin 1 + \cos 1 - 2 = 0,223244275 .$$

Как видим, результат, полученный с помощью приближенной формулы парабол, дает высокую точность.

### Задание 7.1. Вычисление интегралов приближенными методами

1. Вычислить интеграл от заданной функции  $f(x)$  (табл.7.1) на отрезке  $[a;b]$  при делении отрезка на 10 равных частей тремя способами:
  - по формуле прямоугольников;
  - по формуле трапеций;
  - по формуле Симпсона.
2. Выполнить проверку расчета с помощью программы, листинг которой приведен в табл. 7.2
3. Сравнить точность полученных результатов.

Таблица 7.1

Варианты задания 7.1

Вариант	$f(x)$	$a$	$b$	Вариант	$f(x)$	$a$	$b$
1	$0,5 + x \lg x$	1	2	16	$x e^{-x}$	-2	2
2	$(x+1,9) \sin(x/3)$	1	2	17	$\sin^3 x / \cos x$	0	1
3	$\frac{1}{x} \ln(x+2)$	2	3	18	$x^2 e^x$	0	2
4	$(2x+0,6) \cos(x/2)$	1	2	19	$1/(1+e^x)$	-1	1
5	$2,6x^2 \ln x$	1.2	2.2	20	$1/(\sin x + \cos x)^2$	0	1
6	$(x^2 + 1) \sin(x-0,5)$	0.5	1.5	21	$\ln(1+2x)$	1	3
7	$x^2 \cos(x/4)$	2	3	22	$\ln^2 x / x$	2	5
8	$\frac{\sin(0,2x-3)}{x^2+1}$	3	4	23	$\sin x / (1+\cos x)$	0	1
9	$3x + \ln x$	2	4	24	$x e^x / (1+x)^2$	0	4
10	$4x e^{x^2}$	-1	0	25	$x e^{-2x} / (1-x)^2$	0	0.5
11	$3x^2 + \operatorname{tg} x$	0	0.5	26	$\ln(x-2)/x^2$	4	5
12	$\frac{3x^2 + \sin x}{x^2}$	0,1	1,1	27	$1/(0,5+e^{2x})$	1	2
13	$3x e^{\cos x}$	0.2	1.2	28	$1/x \ln^2 x$	3	5
14	$x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	1.5	2.5	29	$x^2 + \operatorname{tg} 2x$	0.5	1
15	$\sqrt{x} e^{-x}$	0.1	1.1	30	$\frac{\sin(x-1)}{x^2+1}$	2	3

Встроенная функция  $intg(a,b,f)$  в программе *SciLab* позволяет вычислять определенные интегралы, при условии, что подынтегральная функция на заданном интервале не имеет разрывов.

Табл.7.2

Листинг программы

```
// Функция, написанная на языке Scilab
function y=f(x),y=sqrt(x)*exp(-x),endfunction
I=intg(0.1,1.1,f)
```

### Контрольные вопросы

1. Почему формула Ньютона-Котеса может оказаться непригодной для реального вычисления определенного интеграла?
2. Как связаны задачи численного интегрирования и интерполирования?
3. Чем объясняется название формулы прямоугольников?
4. Чем объясняется название формулы трапеций?
5. В чем выражаются преимущества формулы Симпсона перед формулой трапеций?
6. Каким образом при использовании формулы парабол можно рассчитать требуемое число отрезков разбиения для достижения заданной точности интегрирования  $\varepsilon$ ?

## 7.2. Квадратурные формулы Гаусса

Существует подход к построению квадратурных формул, в котором главную роль играет выбор узлов для интерполирования подынтегральной функции, называемый *методом Гаусса*.

При получении квадратурных формул Гаусса в исходном интеграле выполняется замена переменной, переводящая интеграл по отрезку  $[a;b]$  в интеграл по отрезку  $[-1;1]$ .

$$t = \frac{2x - (b+a)}{b-a} \text{ или } x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a) \quad (7.11)$$

Тогда с учетом замены (7.11) для интеграла можем записать

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)\right)dt \quad (7.12)$$

Последний интеграл в (7.12) обозначим  $\int_{-1}^1 \varphi(t)dt$ . Последующее изложение метода Гаусса применительно к нему.

Для разъяснения существа метода Гаусса будем использовать простейшую (линейную) интерполяцию подынтегральной функции:

Если в качестве узлов интерполяции взять концы отрезка  $[-1;1]$ , то различие в площадях криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $y = \varphi(x)$  и «обычной» трапеции, ограниченной сверху прямой, проведённой через концы указанной кривой, фиксировано видом функции  $y = \varphi(x)$  (рис. 7.5).

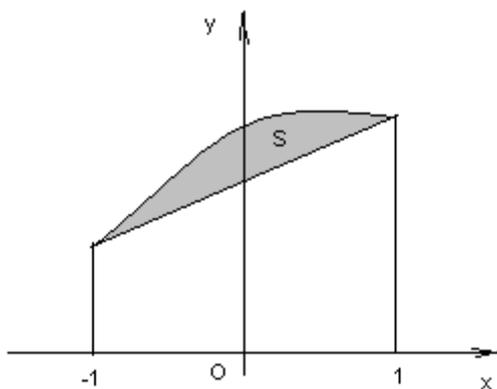


Рис.7.5. Криволинейная и прямолинейная трапеции

Однако, можно выбрать узлы интерполяции таким образом, чтобы разность между площадями криволинейной и «обычной» трапеции была значительно меньше.

Более того, можно сделать эти площади равными ( $S_1 + S_3 = S_2$ ) (рис.7.6), т.е. аппроксимировать интеграл точно, но для этого необходимо определить точки  $t_1, t_2$ .

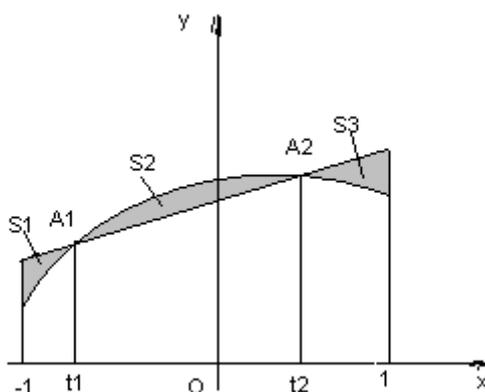


Рис.7.6. Новые узлы интерполяции

Сформулируем задачу следующим образом:

Выбрать значения  $t_1, t_2$  так, чтобы площадь трапеции, ограниченной сверху прямой, проходящей через точки  $A_1(t_1; \varphi(t_1))$ ,  $A_2(t_2; \varphi(t_2))$ , была равна интегралу от любого многочлена некоторой (наивысшей возможной) степени.

Так как положение точек  $A_1, A_2$  определяют четыре координаты, то этот многочлен может определяться максимум четырьмя коэффициентами, т.е. является многочленом третьей степени.

$$P_3(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (7.13)$$

Легко установить, что уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1, A_2$  имеет

вид: 
$$y = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}t + \frac{t_2\varphi_1 - t_1\varphi_2}{t_2 - t_1}, \quad (7.14)$$

где  $\varphi_1 = \varphi(t_1), \varphi_2 = \varphi(t_2)$ .

Будем выбирать  $t_1, t_2$  так, чтобы выполнялось равенство (7.15)

$$\int_{-1}^1 \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}t + \frac{t_2\varphi_1 - t_1\varphi_2}{t_2 - t_1} \right) dt = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3) dt \quad (7.15)$$

при любых значениях коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .

Если взять узлами линейной интерполяции числа

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (7.16)$$

то интеграл в (7.15), вычисленный по формуле  $I = \int_{-1}^1 \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}t + \frac{t_2\varphi_1 - t_1\varphi_2}{t_2 - t_1} \right) dt$ , точно

совпадает с интегралом от любого многочлена третьей степени.

Вычислив интеграл по указанной формуле с учётом (7.16), получим

$$I = \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (7.17)$$

Формула (7.17) и называется *квадратурной формулой Гаусса*. С учетом формулы (7.12) формула Гаусса (7.17) примет вид:

$$I_r = \frac{1}{2}(b-a) \left[ f\left(-\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} + \frac{b+a}{2}\right) \right] \quad (7.18)$$

Оценка погрешности вычисления интеграла (7.17) проводится по формуле:

$$|I - I_r| \leq \frac{1}{35} \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 \cdot \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)| \quad (7.19)$$

Для повышения точности результата отрезок  $[a;b]$  разделим на  $n$  частей и применим формулу (7.18) на каждой части.

Получим формулу для вычисления интеграла:

$$I_r = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left( f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right) \quad (7.20)$$

Формула для оценки погрешности примет вид:

$$|I - I_r| \leq \frac{1}{4320 \cdot n^4} (b-a)^5 \max_{[a;b]} |f^{(4)}(x)| \quad (7.21)$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 x^2 \sin x dx$  по формуле Гаусса при  $n = 10$ .

*Решение:* Имеем  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $f(x) = x^2 \sin x$ . Тогда  $h = \frac{b-a}{n} = 0,1$ .

Составим таблицу значений, входящих в формулу (7.20)

$x_i$	$x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}$	$x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}$	$y_i$
0	0,02113249	0,078868	0,00000944 0,00049005
0,1	0,121132249	0,178868	0,00177304 0,00569215
0,2	0,22113249	0,278868	0,01072537 0,02140672
0,3	0,32113249	0,378868	0,03255086 0,05309115
0,4	0,42113249	0,478868	0,07250071 0,10566206
0,5	0,52113249	0,578868	0,13520907 0,18331848
0,6	0,62113249	0,678868	0,22452206 0,28938023
0,7	0,72113249	0,778868	0,34334373 0,42614496
0,8	0,82113249	0,878868	0,49350196 0,59476723
0,9	0,92113249	0,978868	0,67563779 0,795162236
1,0			
			$\sum 4,46488894$

Подставляя найденное значение суммы значений функции  $y_i$ , в формулу (7.20) получим:

$$I_r = \frac{0,1}{2} \cdot 4,46488894 = 0,22324447.$$

### **Задание 7.2. Вычисление интегралов по формуле Гаусса**

Вычислить интеграл по формуле Гаусса от заданной функции  $f(x)$  (табл. 7.1) на отрезке  $[a;b]$  при делении отрезка на 10 равных частей. Вычисления провести в программе *Excel*.

## **Контрольные вопросы**

1. На какой идее основывается построение квадратурных формул Гаусса?
2. Запишите формулу Гаусса.
3. Как строятся квадратурные формулы Гаусса, какова их погрешность (остаточный член)?

## **РАЗДЕЛ 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)**

### **Цель занятия:**

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме;
- получить навык приближенно находить решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера, методом Рунге-Кутты.

### **8.1. Постановка задачи Коши**

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y) \quad (8.1)$$

Эта задача известна, как задача Коши, в которой необходимо найти решение уравнения (8.1) в виде функции  $y(x)$ , удовлетворяющей начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (8.2)$$

Геометрически это условие означает, что требуется найти интегральную кривую  $y = y(x)$ , проходящую через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$ , при выполнении равенства (8.1).

Существует несколько классов дифференциальных уравнений 1-го порядка, для которых решение может быть найдено аналитически. Но даже для таких уравнений решение не всегда удается довести до вида  $y = y(x)$ . Многие дифференциальные уравнения, которые получаются при рассмотрении математических моделей реальных процессов, не могут быть решены аналитически. По этой причине разработаны многочисленные методы приближенного решения дифференциальных уравнений.

Эти методы подразделяются на три основные группы:

- 1) *аналитические методы*, применения которых дает приближенное решение дифференциальных уравнений в виде формулы;
- 2) *графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика;

3) *численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Далее рассмотрим два приближенных метода решения задачи Коши: метод Эйлера и Метод Рунге-Кутты.

## 8.2. Метод Эйлера

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения. Однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (8.1) с начальным условием (8.2), т.е. поставлена задача Коши.

Вначале найдем простейшим способом приближенное значение решения в некоторой точке  $x_1 = x_0 + h$ , где  $h$  – достаточно малый шаг.

Заметим, что уравнение (8.1) с учетом начального условия (8.2) задает направление касательной к искомой интегральной кривой в точке  $M_0(x_0, y_0)$ . Двигаясь вдоль этой касательной, получим приближенное значение решения в точке  $x_1$ :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) \quad (8.3)$$

Аналогично, найдем приближенное значение решения в точке  $x_2 = x_1 + h$ , и т.д. Продолжая эту процедуру, построим систему равностоящих точек  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i=0, \dots, n$  и решения в этих точках  $y_i$ .

Получение таблицы значений искомой функции  $y(x)$  по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= hf(x_i; y_i); \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \end{aligned} \quad (8.4)$$

Геометрическая иллюстрация метода Эйлера показана на рис. 8.1.

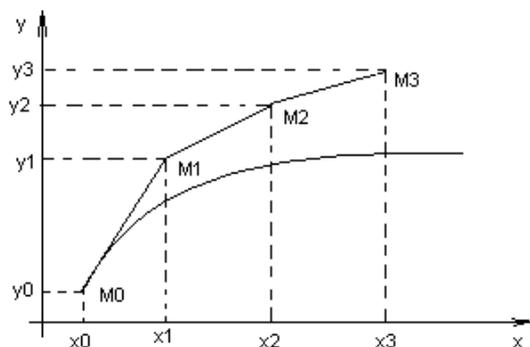


Рис 8.1. Построение ломаной Эйлера. Интегральная кривая заменяется ломаной линией

Вместо кривой в реальности получается совокупность отрезков – ломаная Эйлера.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, в которых решение получается при переходе от одного узла к другому, называются *пошаговыми*. Метод Эйлера – простейший пошаговый метод.

Отметим, что оценка погрешности метода при таком элементарном рассмотрении невозможна даже на первом шаге. Кроме того, особенностью любого пошагового метода является то, что, начиная со второго шага, исходное значение  $y_i$  в формуле (8.4) само является приближенным, т.е. погрешность на каждом шаге систематически возрастает.

Часто для оценки точности результата, полученного методом Эйлера, является *способ двойного прохождения заданного отрезка с шагом  $h$  и с шагом  $h/2$* . Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает основание считать их верными.

**Пример 1.** Решить методом Эйлера обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)  $y' = \cos y + 3x$  при начальном условии  $y(0) = 1,3$  на отрезке  $[0;1]$ , выбрав шаг равный  $h=0,2$  и  $h=0,1$ .

*Решение.* Дано дифференциальное уравнение  $y' = \cos y + 3x$ , следовательно  $f(x, y) = \cos y + 3x$ . По формулам (8.4) вычислим  $y_i$  дважды, учитывая разные значения шага  $h$ . Составим таблицу (табл.8.1) значений функции  $y_i$  с шагом  $h$  и  $h/2$ .

Таблица 8.1

$x$	$y_i (h=0.2)$	$y_i (h=0.1)$
0	1.3	1.3
0.1		1.33
0.2	1.35	1.38
0.3		1.46
0.4	1.52	1.56
0.5		1.68
0.6	1.77	1.82
0.7		1.98
0.8	2.09	2.15
0.9		2.33
1	2.47	2.53

При составлении табл. 8.1 проводились следующие вычисления:

Если  $h=0,2$ , то получаем  $y_i$  по формулам (8.4):

- 1)  $x_0=0, y_0=1,3$  из начального условия;
- 2)  $x_1=0,1$ ,

$$\Delta y_0 = h(\cos y_0 + 3x_0) = 0.2(\cos 1.3 + 3 \cdot 0) = 0.054;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1.3 + 0.054 = 1.35$$

3)  $x_2=0,2$ ,

$$\Delta y_1 = h(\cos y_1 + 3x_1) = 0.2(\cos 1.35 + 3 \cdot 0,2) = 0.16;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1.35 + 0.16 = 1.52.$$

И т.д.

Аналогичные вычисления проводились и для шага  $h=0,1$ . Таким образом, приближенное решение ОДУ получаем в виде точечных значений. Построим ломаную Эйлера для  $h=0,2$  и  $h=0,1$  в одной системе координат (рис.8.2).

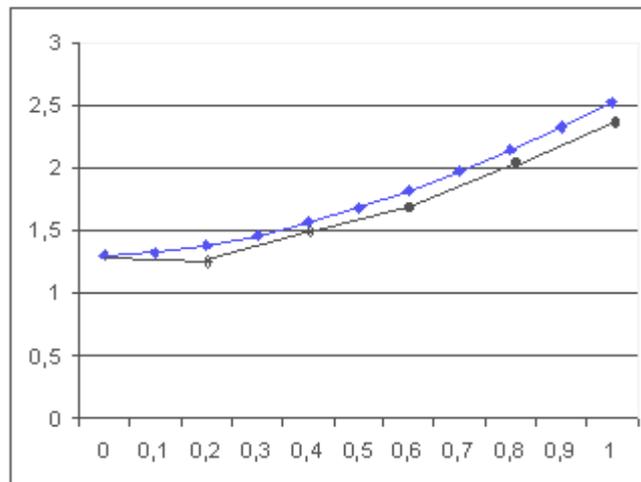


Рис. 8.2. Результаты расчета

Погрешность метода Эйлера имеет порядок малости  $O(h)$ , при уменьшении шага погрешность уменьшается.

Для ОДУ в комплексе *SciLab* есть встроенная готовая подпрограмма  $z=ode(y_0, x_0, x, f)$ , с помощью которой проверим результат примера 1, приняв шаг  $h=0,1$  (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Решение примера 1 в подпрограмме  $ode(y_0, x_0, x, f)$

```
function w=f(x, y),w=cos(y)+3*x,endfunction;
x0=0;y0=1.3;x=0:0.1:1.0;
z=ode(y0,x0,x,f),
plot2d(x,z);
xgrid(5)
Результаты
y_i= 1.3  1.3400256  1.4049178  1.4922797  1.5999089  1.725864  1.8685651  2.0269138
2.2004267  2.3893776  2.5949631
```

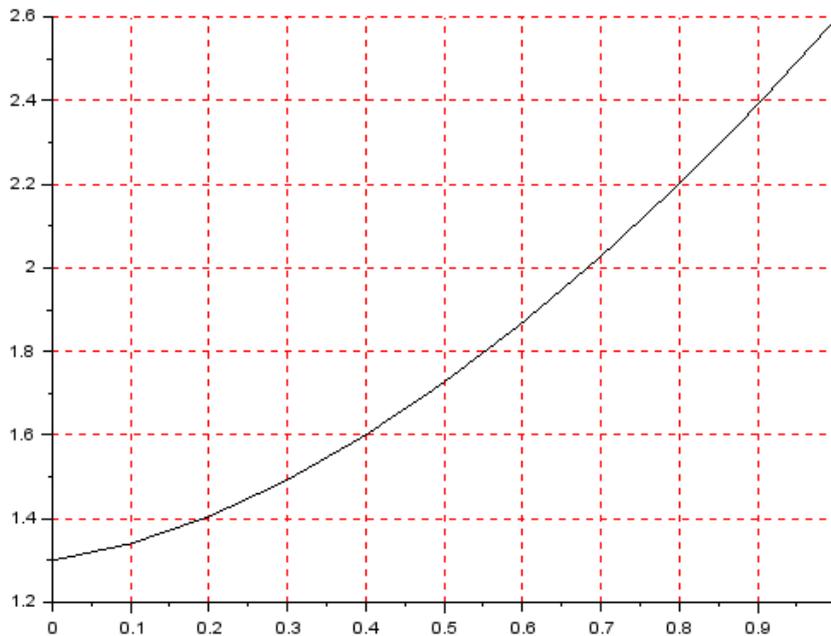
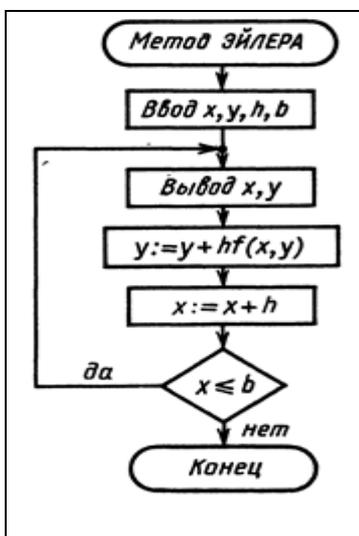


Рис. 8.3. Решение обыкновенного дифференциального уравнения

Программа может быть написана самостоятельно. В следующем примере 2 покажем решение с помощью ЭВМ, для чего составим алгоритм (рис.8.4), следуя которому запишем программу для примера 2 (табл. 8.3)



**Пример 2.** Решить ОДУ  $y' = 3\sin 2y + x$  при  $y(0) = 2$  на отрезке  $[0;1]$  с шагом 0.1.

Таблица 8.3

Листинг программы для данного примера

```

a=0; b=1; h=0.1;
n=(b-a)/h;
x(1)=a; y(1)=2;
for i=1:n-1
x(i+1)=a+i*h;
y(i+1)=y(i)+h*(3*sin(2*y(i))+x(i));
end
x
y
plot2d(x,y);
  
```

Рис. 8.4. Алгоритм программы

Полученное решение показано графически в виде ломаной Эйлера на рис. 8.5 и приведены соответствующие точечные значения  $x$  и  $y$ .

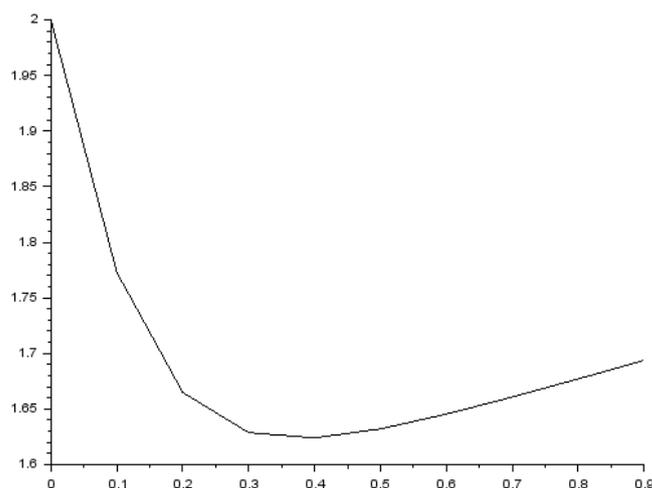


Рис. 8.5. Ломаная Эйлера

Точечные значения  $x$  и  $y$ :

$x =$	0.	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y =$	2	1.7729593	1.6649395	1.6287868	1.6240705	1.6321664	1.6454368	1.6608186	1.6770966	1.6937958	1.7107382

### Задание 8.1. Решение дифференциальных уравнений методом Эйлера

Решить обыкновенное дифференциальное уравнение с шагом  $h$  и  $h/2$  методом Эйлера. Выполнить «ручной» счет и проверить результат с помощью программ. Варианты заданий приведены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

#### Варианты заданий для решения ОДУ

Вариант	$f(x)$	$a$	$b$	$y_0$	$h$
1	$(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0$	3	5	1	0.2
2	$y' = \frac{y}{x} - 1$	2.6	4.6	1	0.2
3	$yy' + (x - 2y) = 0$	0	2	1	0.2
4	$(x - y)y - x^2y' = 0$	1	3	1	0.2
5	$xy' - y = y^3$	1	3	0.1	0.2
6	$xyy' = 1 - x^2$	0.1	1	1	0.1
7	$yy' + x = 1$	0.1	1	1	0.1
8	$y - xy' = 1 + x^2y'$	0.2	2.2	2	0.2
9	$xy + (x + 1)y' = 0$	1	3	2	0.2
10	$2x^2yy' + y^2 = 2$	3	5	1	0.2
11	$(xy - x^2)y' = y^2$	0.2	2.4	1	0.2

12	$y - xy' = x + yy'$	1	3	1	0.2
13	$y + 2 = (2x + y - 4)y'$	2.6	4,6	2	0.2
14	$(3x - 1)y' + y^2 = 0$	1.5	3,5	1	0.2
15	$xy' + 2y = 2xyy'$	2.1	4.1	1	0.2
16	$(x + y^2) - 2xy' = 0$	2	4	1	0.2
17	$xy' = 3y^2 - x$	1.6	3.6	1	0.2
18	$3yy' + (x - 2y) = 0$	0	2	1	0.2
19	$(x^2 - y)y - xy' = 0$	1	3	1	0.2
20	$x^2y' - y = y^2$	1	3	0.1	0.2
21	$xy^2y' = 1 - x$	0.1	1	1	0.1
22	$2yy' + x^2 = 1$	0.1	1	1	0.1
23	$xy + y' = 1 + x^2y$	0.2	2.2	2	0.2
24	$x^2y + (x + 1)y' = 0$	1	3	2	0.2
25	$2xyy' + y^2 = 2$	3	5	1	0.2
26	$(xy + x^2)y' = y^2$	0.2	2.4	1	0.2
27	$y - xy' = x + y^2y'$	1	3	1	0.2
28	$y + 1 = (x + 2y - 1)y'$	2.5	4,5	2	0.2
29	$(3x - 1)y' + y^2 = 0$	1.6	3,6	1	0.2
30	$-x^2y' + 2y = 2xy'$	2.1	4.1	1	0.2

### 8.3 Метод Рунге-Кутта

Если к методу Эйлера подойти другим путем, не используя геометрических построений, то необходимо рассматривать производные функции  $f(x,y)$  и раскладывать эту функцию в степенной ряд. Но нахождение производных не является стандартной задачей, применяемой при решении математических задач систем программирования.

Альтернативный путь открывает метод Рунге-Кутта, названный по имени его создателей.

*Основная* идея метода Рунге-Кутта такова: вместо использования в формулах частных производных функции  $f(x,y)$  использовать лишь саму эту функцию, но на каждом шаге вычислять ее значение в нескольких точках.

На практике соблюдается некоторый компромисс между высоким порядком формул и их громоздкостью с одной стороны, и объемом вычислений по ним для достижения заданной точности, с другой. Запишем самую распространенную формулу Рунге-Кутта четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (8.5)$$

где для  $r_i$  получены следующие соотношения (8.6):

$$\begin{aligned} r_1 &= hf(x_i, y_i), \\ r_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_1}{2}\right), \\ r_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{r_2}{2}\right), \\ r_4 &= hf(x_i + h, y_i + r_3). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Общий недостаток методов Рунге-Кутты – отсутствие простых способов оценки погрешности метода. Погрешность на одном шаге оценить сравнительно не трудно, гораздо труднее оценить накопление погрешностей на протяжении многих шагов. Широко используемый на практике для этих методов способ контроля точности – двойной счет: вычисляем решение дифференциального уравнение с шагом  $h$  и  $h/2$ , а потом сравниваем полученные результаты.

**Пример 3.** Решить дифференциальное уравнение  $y' = y(1-x)$  на отрезке  $[0;0.5]$  с начальным условием  $y(0)=1$  и шагом  $h=0.05$  методом Рунге-Кутты.

*Решение.*

1. Сначала решим это уравнение аналитически. Интегрируем уравнение.

$y' = y(1-x)$  - это уравнение с разделяющимися переменными. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{y} = y(1-x), \text{ интегрируя получим}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1-x)dx,$$

$$\ln y = x - \frac{x^2}{2} + C,$$

Используя начальное условие  $y(0)=1$ , вычислим константу  $C$ . Получаем следующее значение:  $\ln 1 = 0 - 0 + C$ ,  $C = 0$ .

Таким образом, частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, будет в виде  $y = e^{x - \frac{x^2}{2}}$ . Пользуясь этой формулой, можно получить таблицу «точного» решение уравнения. С этой целью в формулу надо подставить последовательно значения  $x$  с заданным шагом и получить соответствующие величины от  $y_1$  до  $y_{10}$ . Результаты аналитического расчета приведены ниже в табл. 8.6.

2. Найдем приближенное решение этого же дифференциального уравнения  $y' = y(1-x)$  по методу Рунге-Кутта «ручным» способом.

Проведем последовательные вычисления по формулам (8.5), (8.6).

Имеем:  $f(x,y)=y(1-x)$ ,  $x_0=0$ ,  $y_0=1$ ,  $h=0.05$ . Тогда получаем

$$r_1 = hf(x_0, y_0) = h \cdot y_0(1 - x_0) = 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 0.05,$$

$$r_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{r_1}{2}\right) = hf\left(0 + \frac{0.05}{2}; 1 + \frac{0.05}{2}\right) = \\ = hf(0.025; 1.025) = 0.05 \cdot 1.025 \cdot (1 - 0.025) = 0.04997,$$

$$r_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{r_2}{2}\right) = hf\left(0.025; 1 + \frac{0.04997}{2}\right) = \\ = hf(0.025; 1.02498) = 0.05 \cdot 1.02498 \cdot (1 - 0.025) = 0.049969,$$

$$r_4 = hf(x_0 + h, y_0 + r_3) = hf(0 + 0.05; 1 + 0.049969) = \\ = hf(0.05; 1.04997) = 0.05 \cdot 1.04997 \cdot (1 - 0.05) = 0.04987.$$

Подставим найденные значения в формулу (8.5) и запишем  $y_1$  следующим образом:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) = 1 + \frac{1}{6}(0.05 + 2 \cdot 0.04997 + 2 \cdot 0.04997 + 0.04987) = 1.04996.$$

Для вычисления остальных  $y_i$  повторяется процедура последовательного вычисления по формулам (8.5), (8.6). Не показывая указанную выше процедуру, приведем сразу результаты «ручного» расчета методом Рунге-Кутта в табл. 8.6.

3. Поскольку вычисления достаточно громоздки и трудоемки, то численные решения заданного уравнения предпочтительно найти с помощью программы на компьютере. С этой целью воспользуемся подпрограммой, позволяющей делать расчет по методу Рунге-Кутта  $z=ode("rkf",y0,x0,x,f)$ . Листинг программы и результаты приведены в табл. 8.5, а на рис. 8.6 показано графическое решение.

Все результаты сведены в общую табл. 8.6.

Таблица 8.5

Листинг программы. Метод Рунге-Кутта

function w=f(x, y),w=y*(1-x),endfunction;
x0=0;y0=1;x=0:0.05:0.5;
z=ode("rkf",y0,x0,x,f),
plot2d(x,z);
xgrid(5)
Результаты
y = 1. 1.0499578 1.0996589 1.1488369 1.1972174 1.2445201 1.2904616 1.334758
1.3771278 1.4172948 1.4549914

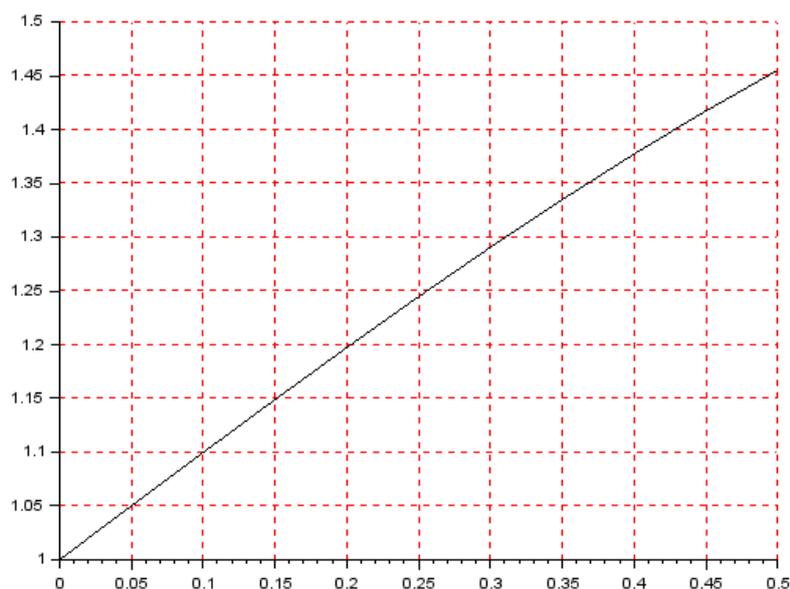


Рис. 8.6. Решение уравнения на ЭВМ

Наконец решение этого же уравнения  $y' = y(1-x)$  получено методом Эйлера, и оно также показано в табл. 8.6 для сравнения.

Таблица 8.6

Результаты решения ОДУ разными методами

X	Y		
	метод Эйлера	метод Рунге-Кутта	«точное решение»
0,00	1	1	1
0,05	1,05	1,0499	1,0499
0,10	1,0999	1,0997	1,0997
0,15	1,1494	1,1488	1,1488
0,20	1,1982	1,1972	1,1972
0,25	1,2462	1,2445	1,2445
0,30	1,2929	1,2905	1,2905
0,35	1,3381	1,3348	1,3348
0,40	1,3816	1,3771	1,3771
0,45	1,4231	1,4173	1,4173
0,50	1,4622	1,4550	1,4550

Из таблицы видно, что результаты, полученные по методу Рунге-Кутта, практически совпадают с «точным» решением уравнения  $y' = y(1-x)$ , в отличие от соответствующих значений, полученных по методу Эйлера. Метод Рунге-Кутта более точный.

Можно записать программу сравнения результатов методов Эйлера и Рунге-Кутты. Она показана в табл. 8.7 для решения уравнения  $y'=(k*x-y)/T$  двумя методами и графические результаты приведены на рис.8.7.

Таблица 8.7

Листинг программы для сравнения результатов решения ОДУ двумя методами Эйлера и Рунге-Кутты

```
function [dy]=dydx(k, T, x, y), dy=(k*x-y)/T, endfunction
function [dy]=dy4(k, T, x, y, h)
k1=h*dydx(k,T,x,y); k2=h*dydx(k,T,x+h/2,y+k1/2);
k3=h*dydx(k,T,x+h/2,y+k2/2); k4=h*dydx(k,T,x+h,y+k3);
dy=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
endfunction
x=0;
y=1; yr=0; h=0.05;
tgr=[]; ygr=[]; yrgr=[]; i=1;
for t=0:0.05:0.5,
y=y+h*dydx(k, T, x, y); //метод Эйлера
yr=yr+dy4(k, T, x, yr, h); //метод Рунге-Кутты
tgr(i)=t; ygr(i)=y; yrgr(i)=yr;
i=i+1;
end
clf(); plot (tgr, ygr, tgr, yrgr, tgr);
```

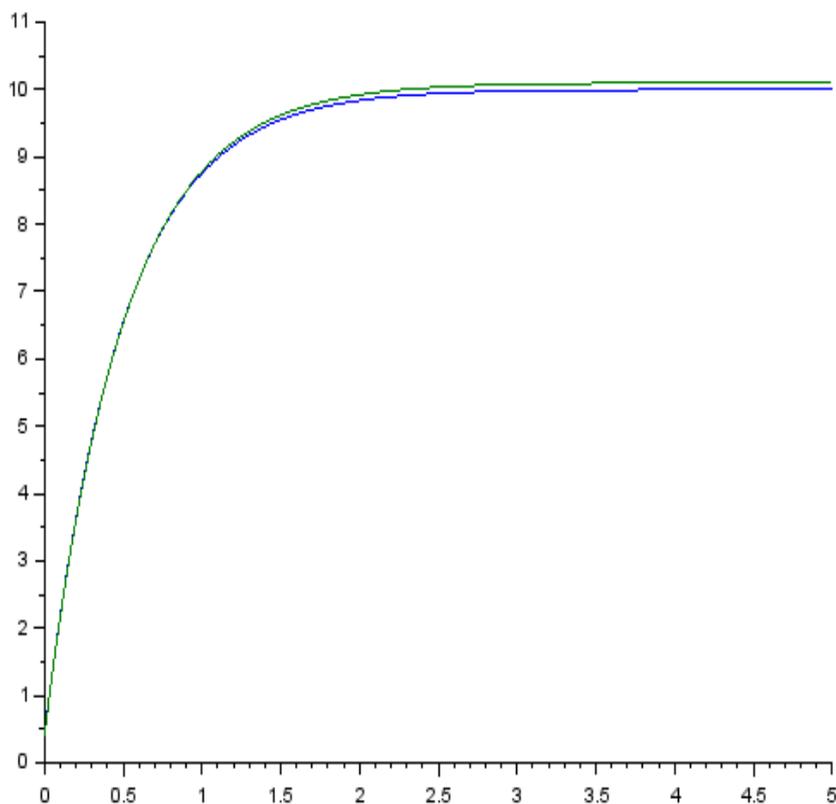
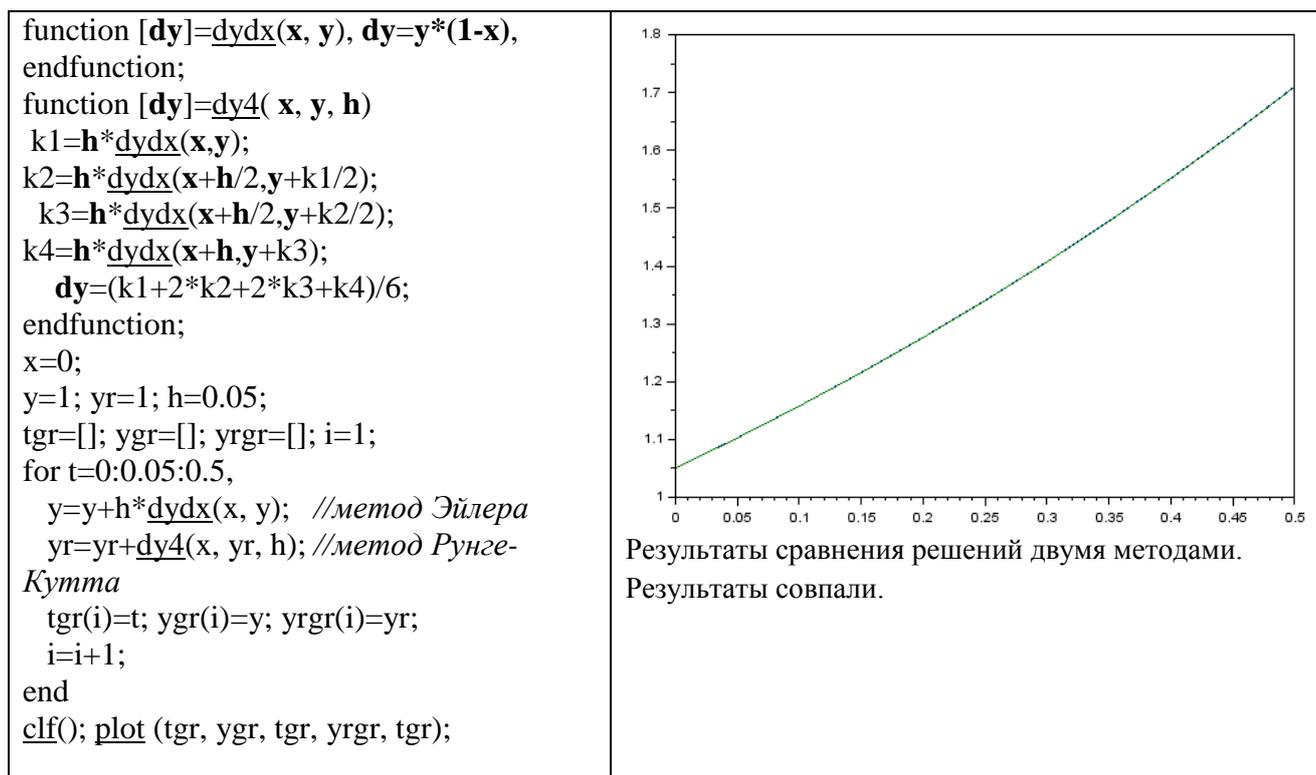


Рис. 8.7. Решение уравнения  $y'=(k*x-y)/T$  двумя методами. Нижняя кривая – метод Рунге-Кутты

Сравнивая решения двумя методами уравнения  $y' = y(1-x)$ , получаем следующее:



В приложении 4 приведены блок схемы и программы методов Эйлера и Рунге-Кутта решения дифференциальных уравнений

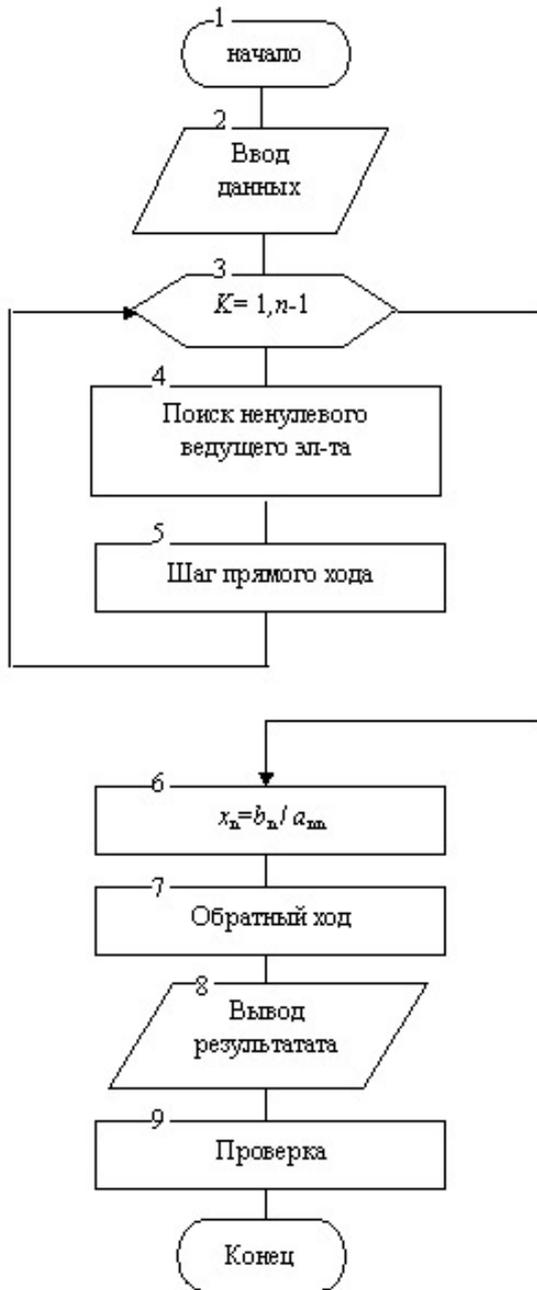
### Задание 8.2. Решение дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта и с помощью программы

Решить обыкновенное дифференциальное уравнение с шагом  $h$  и  $h/2$  методом Рунге-Кутта с помощью программы  $z=ode("rkf",y0,x0,x,f)$ . Значение  $y_1$  вычислить «ручным» способом. Варианты заданий приведены в табл. 8.4.

#### Контрольные вопросы

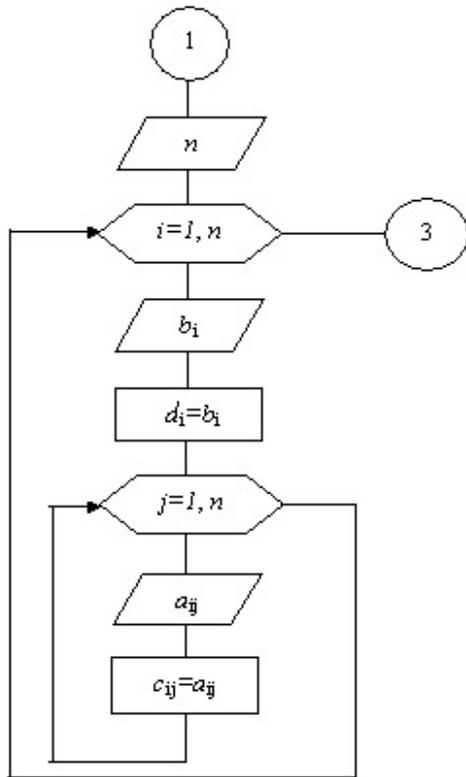
1. Что является решением дифференциального уравнения?
2. На какие группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме получается приближенное решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
4. В чем основная идея метода Рунге-Кутта? Запишите формулу Рунге-Кутта.
5. В чем отличие одношаговых методов Эйлера и Рунге-Кутта?
6. Составьте программу расчета ОДУ методом Эйлера.

# Приложение 1. Укрупнённая схема алгоритма (блок-схема) метода Гаусса



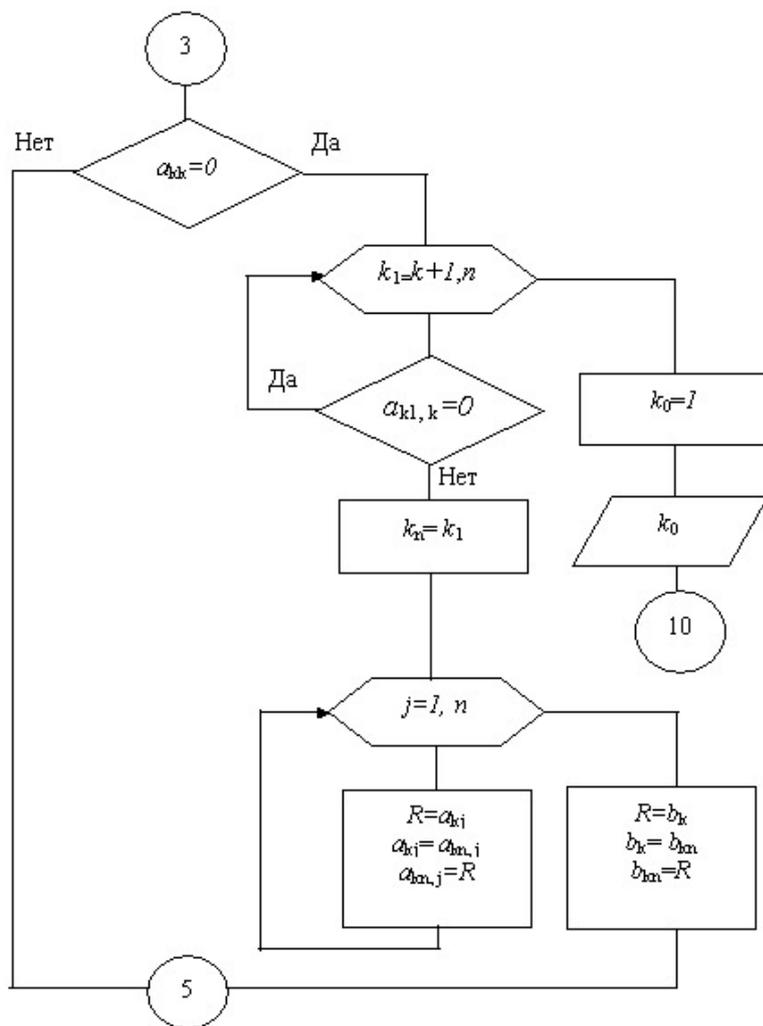
## Алгоритмы отдельных блоков метода

**Блок 2.** С помощью двух вложенных циклов с управляющими переменными  $i=1, n$  и  $j=1, k$  организуем ввод коэффициентов  $a_{ij}$  и свободных членов  $b_i$  исходной системы. Для того, чтобы в дальнейшем можно было выполнить в блоке 9 проверку результата, в алгоритме предусмотрено сохранение значений  $a_{ij}$  и  $b_i$  исходной системы с помощью переприсвоений:  $c_{ij}=a_{ij}$  и  $d_i=b_i$

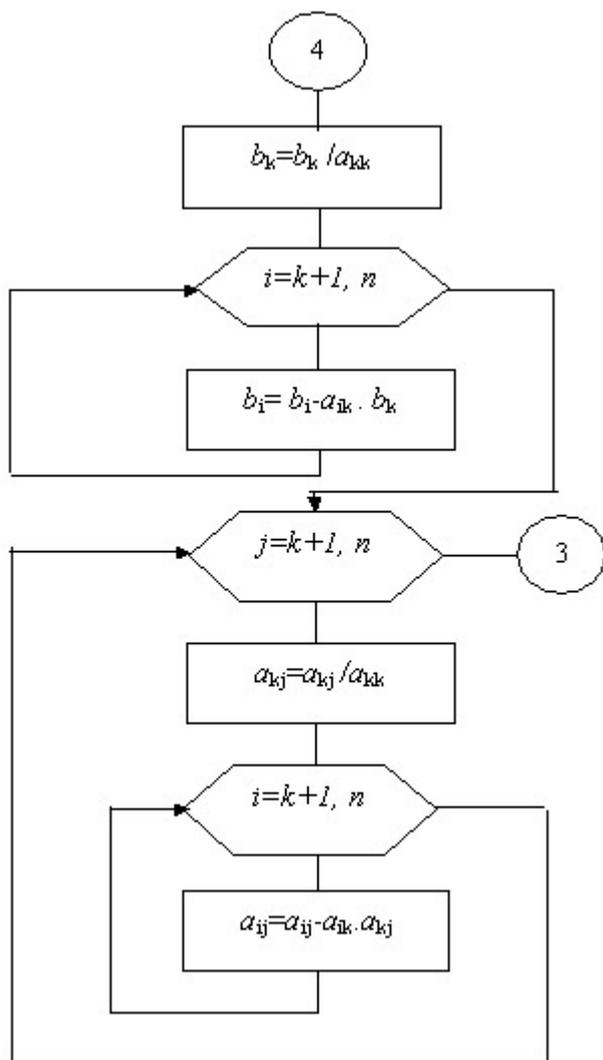


**Блок 3.** Организуем цикл по  $k$ , внутри которого производится вычисление по всем шагам прямого хода. Последний  $n$ -й шаг прямого хода выводим из цикла.

**Блок 4.** На каждом шаге прямого хода выполняем поиск ненулевого ведущего элемента.

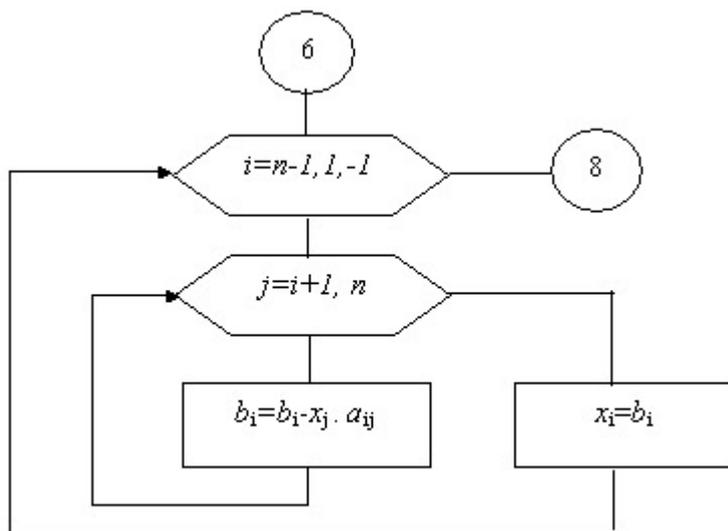


**Блок 5** - шаг прямого хода. На каждом шаге прямого хода проводим исключение неизвестных путём преобразования коэффициентов и свободных членов системы по полученным ранее рекуррентным формулам.



**Блок 6.** В этом блоке выведем из цикла по  $k$  последний шаг прямого хода, т.к. на этом шаге не нужны преобразования коэффициентов и свободных членов, а реализуется только одно вычисление:  $x_n = b_n / a_{n,n}$

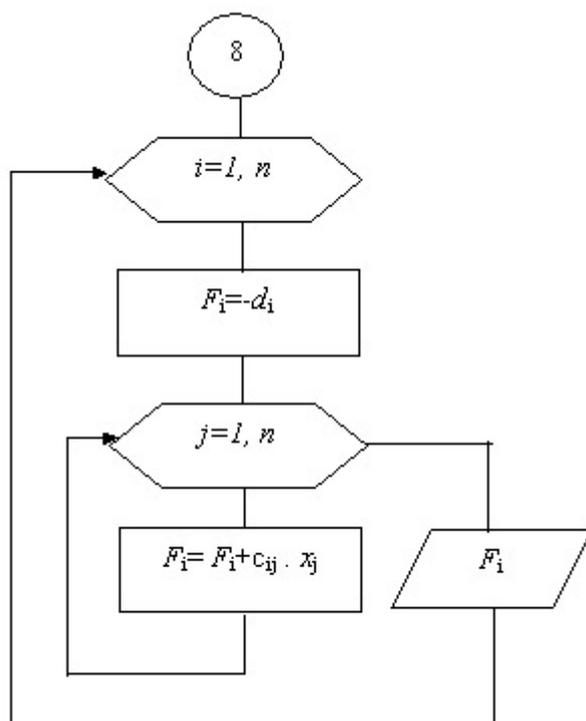
**Блок 7** - обратный ход. В процессе обратного хода метода Гаусса из системы треугольного вида последовательно в обратном порядке в цикле по  $i=(n-1), 1, -1$  находим неизвестные системы по рекуррентной формуле:  $b_i = b_i - x_j \cdot a_{i,j}$ ,  $i=(n-1), 1, j=(n+1), n$ .



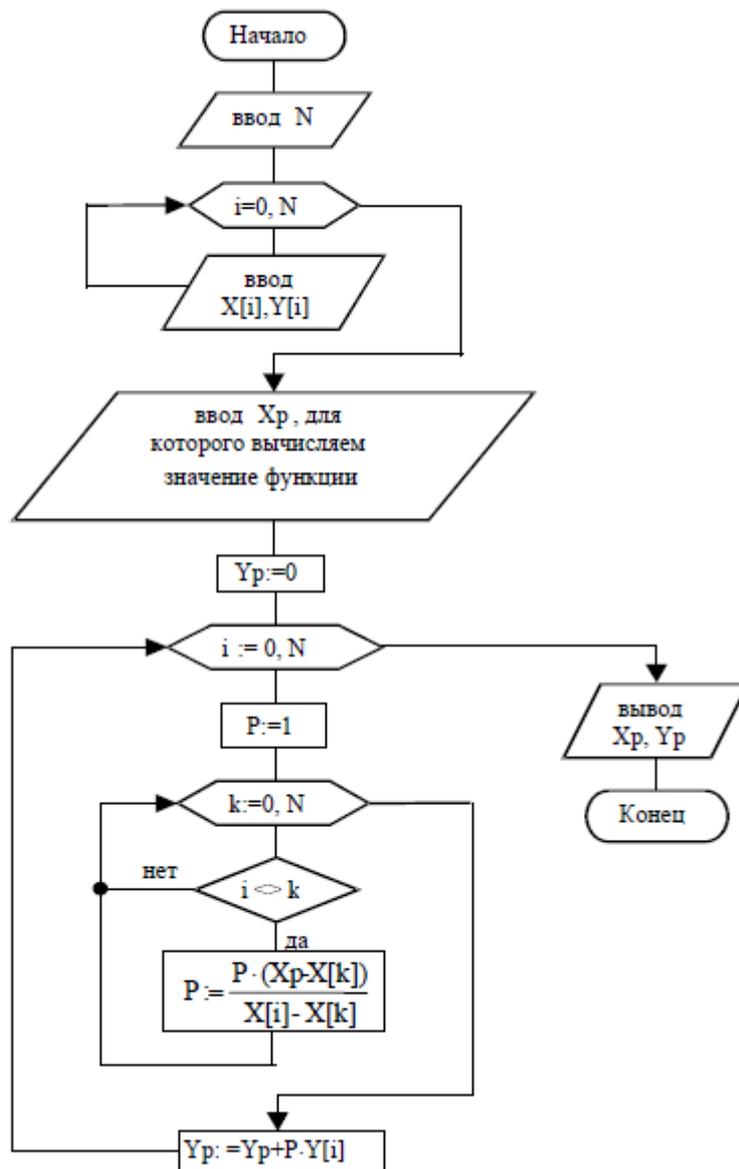
**Блок 9** - проверка результата. В этом блоке подставляя значения полученных неизвестных в исходную систему и используя сохранённые значения коэффициентов системы  $c_{ij}$  и свободных членов  $d_i$ , проводим проверку решения задачи по формуле

$$F_i = -d_i + \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot x_j$$

Блок 9 в алгоритме метода Гаусса рекомендуется использовать только в процессе отладки метода.



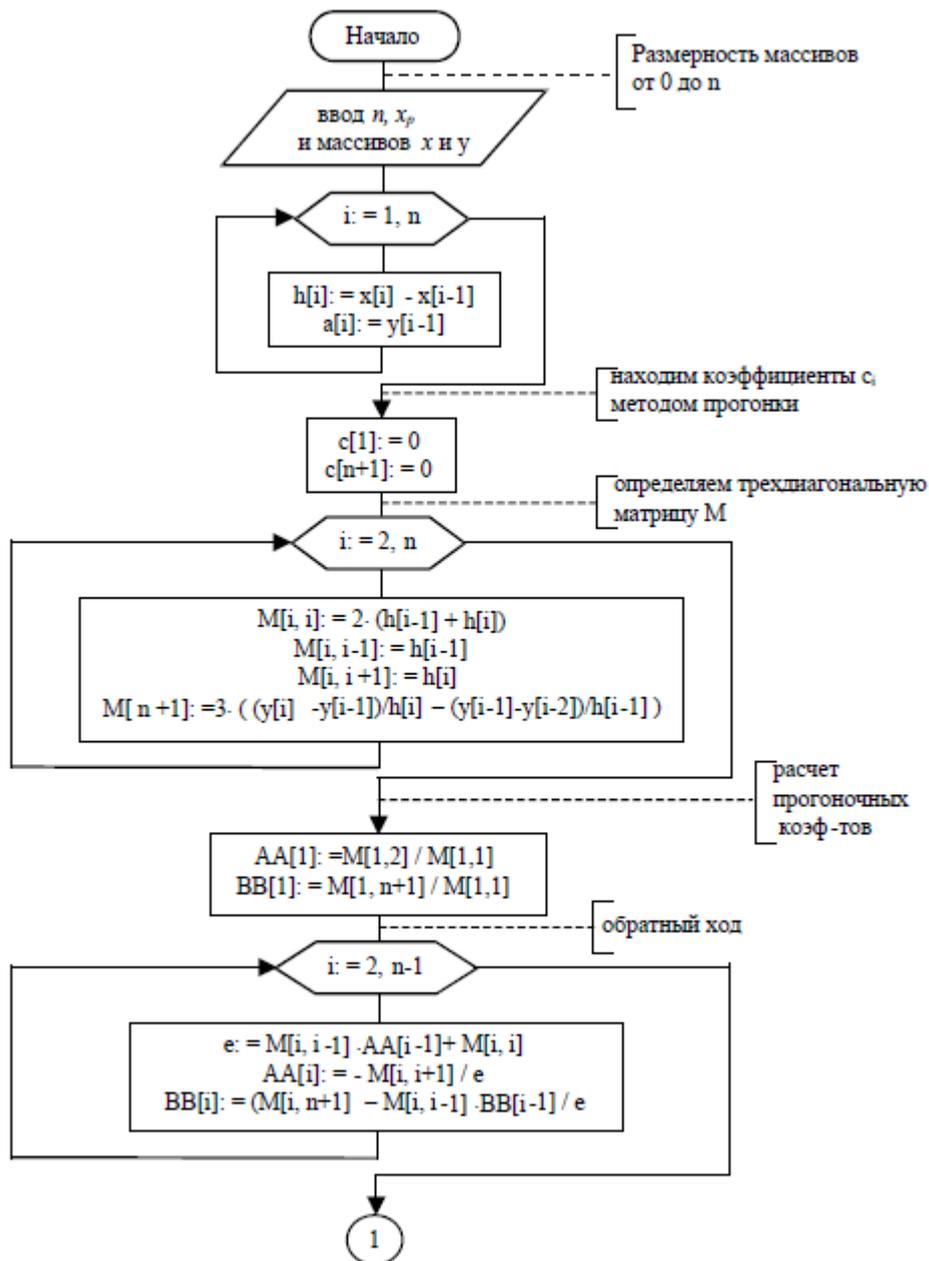
## Приложение 2. Блок схема алгоритма построения функции многочлена Лагранжа

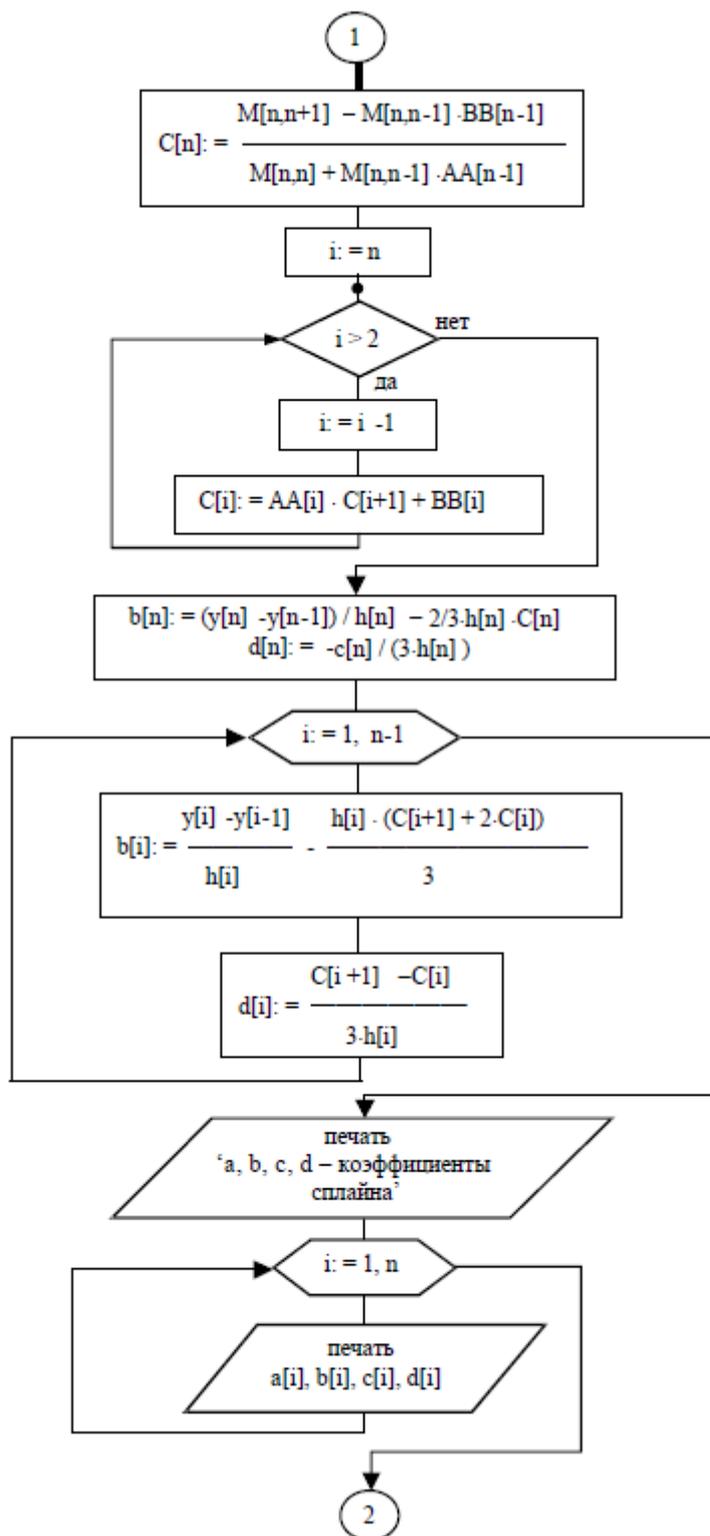


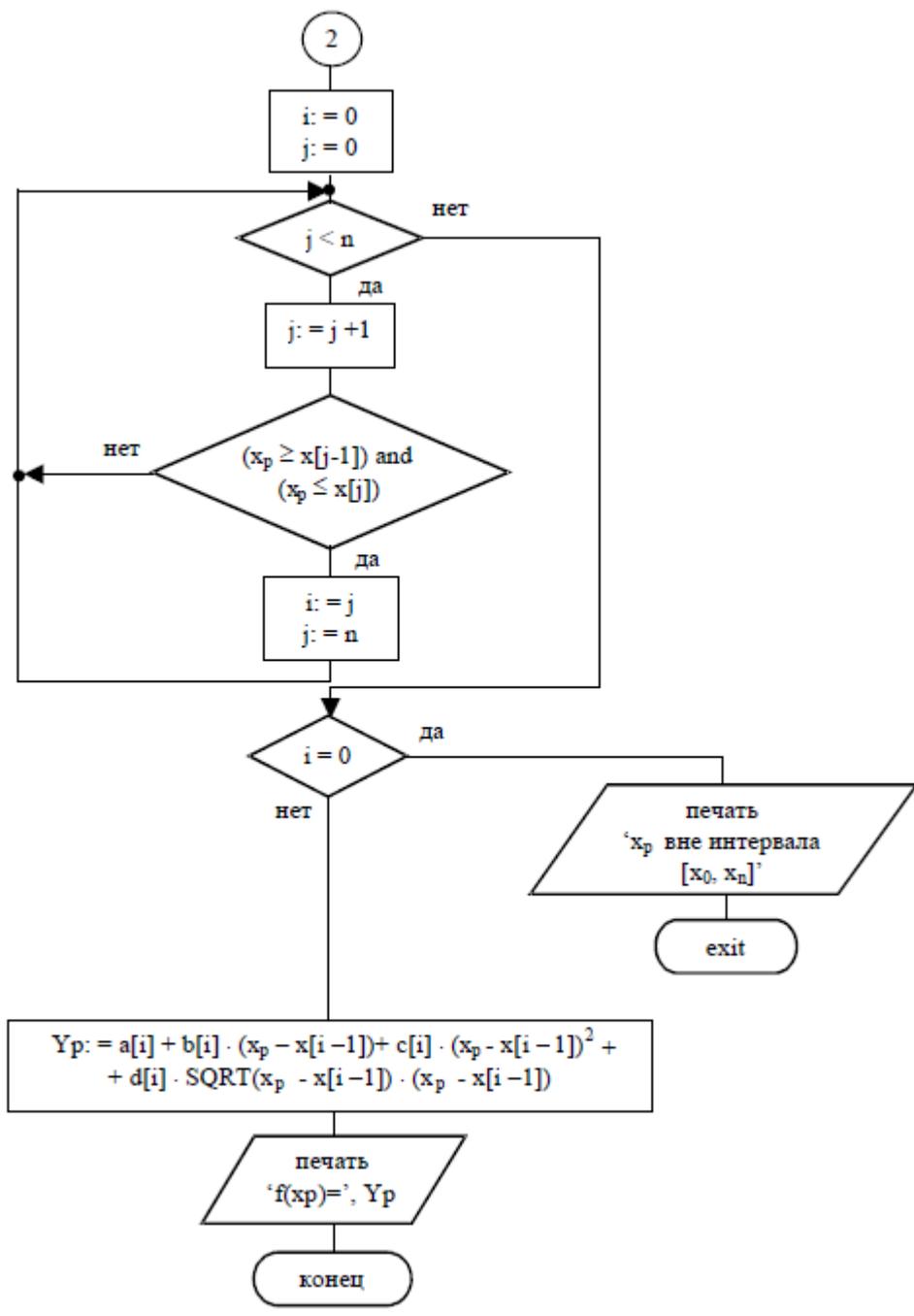
## Программа реализации построения интерполяционного многочлена Лагранжа

```
program Lagrang;  
uses crt;  
  type mus=array[0..10] of real;  
  label 1;  
  var x,y:mus; n,i,j:integer;  
  a,m,f:real;  
begin  
clrscr;  
  writeln('Задайте степень многочлена');  
  readln(n);  
  writeln('Введите значение аргумента, для которого');  
  writeln('требуется найти значение функции');  
  readln(a);  
  writeln('Введите значения x,y через пробел');  
  for i:=0 to n do read(x[i],y[i]);  
  f:=0;  
  for i:=0 to n do  
  begin  
    j:=0;  
    m:=1;  
    1: if i=j then inc(j);  
    if j<=n then  
      begin  
        m:=m*(a-x[j])/(x[i]-x[j]);  
        inc(j); goto 1;  
      end;  
    m:=y[i]*m;  
    f:=f+m;  
  end;  
  writeln('При a=',a:5:2,' f(',a:5:2,')=',f:5:2);  
  readkey;  
end.
```

### Приложение 3. Блок схема метода интерполяции сплайнами







## Программа реализации построения интерполяционного сплайна

```

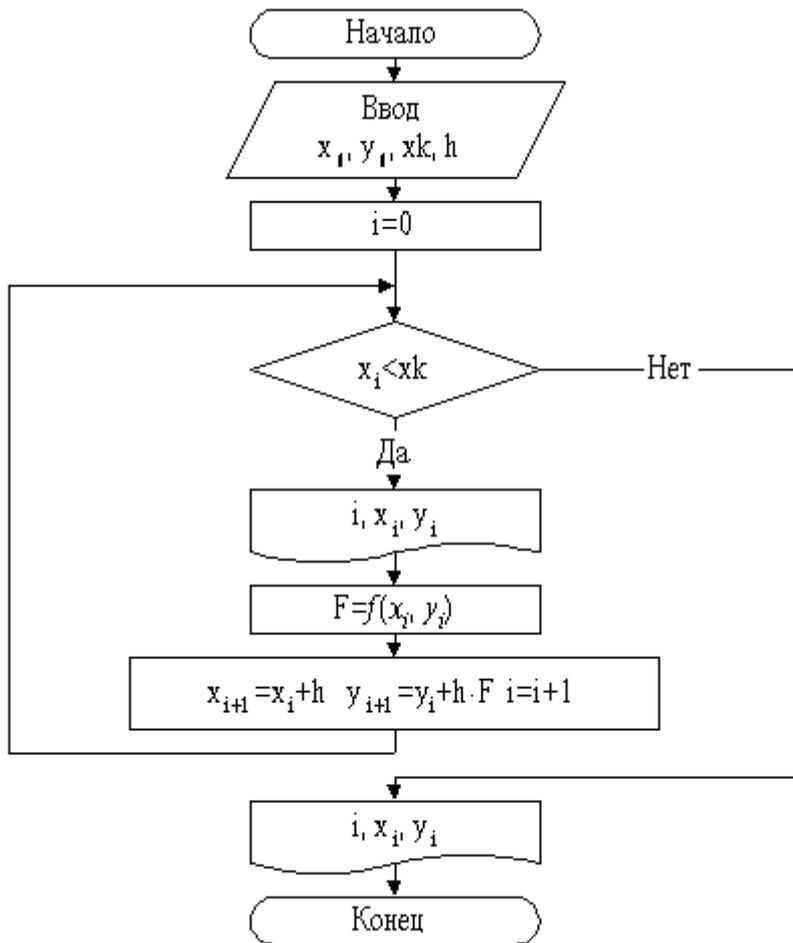
program intspline;
const maxn=50;
type  vec=array[0..maxn] of real;
var i,n:integer;
    x3,y:real;
    x,f,a,b,c,d:vec;
procedure sy(il,ir: integer; a,b,d: vec; var c: vec);
var i,j,l:integer;
    r: real;
begin
    l:=il+1;
    for i:=l to ir do begin
        r:=b[i]/d[i-1];
        d[i]:=d[i]-r*a[i-1];
        c[i]:=c[i]-r*c[i-1]
    end;
    c[ir]:=c[ir]/d[ir];
    for i:=1 to ir do begin
        j:=ir-i+il;
        c[j]:=c[j]-a[j]*c[j+1])/d[j]
    end
end;
procedure spl(n: integer; x,f: vec; var x0,y0: real);
var i,i0:integer;
    r,t: real;
    a,b,c,d: vec;
begin
    for i:=1 to n do b[i]:=x[i]-x[i-1];
    i0:=1;
    for i:=2 to n do if abs(x0-x[i])<=abs(x0-x[i0]) then i0:=i;
    writeln('i0= ',i0);
    for i:=1 to n-1 do
    begin
        d[i]:=2*(b[i]+b[i+1]);
        a[i]:=b[i+1];
        c[i]:=6*((f[i+1]-f[i])/b[i+1]-(f[i]-f[i-1])/b[i])
    end;
    sy(1,n-1,a,b,d,c); c[0]:=0; c[n]:=0;
    r:=(x[i0]-x0); t:=(x0-x[i0-1]);
    y0:=(c[i0-1]*r*r*r+c[i0]*t*t*t)/(6*b[i0]);
    y0:=y0+(f[i0-1]/b[i0]-c[i0-1]*b[i0]/6)*r;
    y0:=y0+(f[i0]/b[i0]-c[i0]*b[i0]/6)*t
end;
begin

```

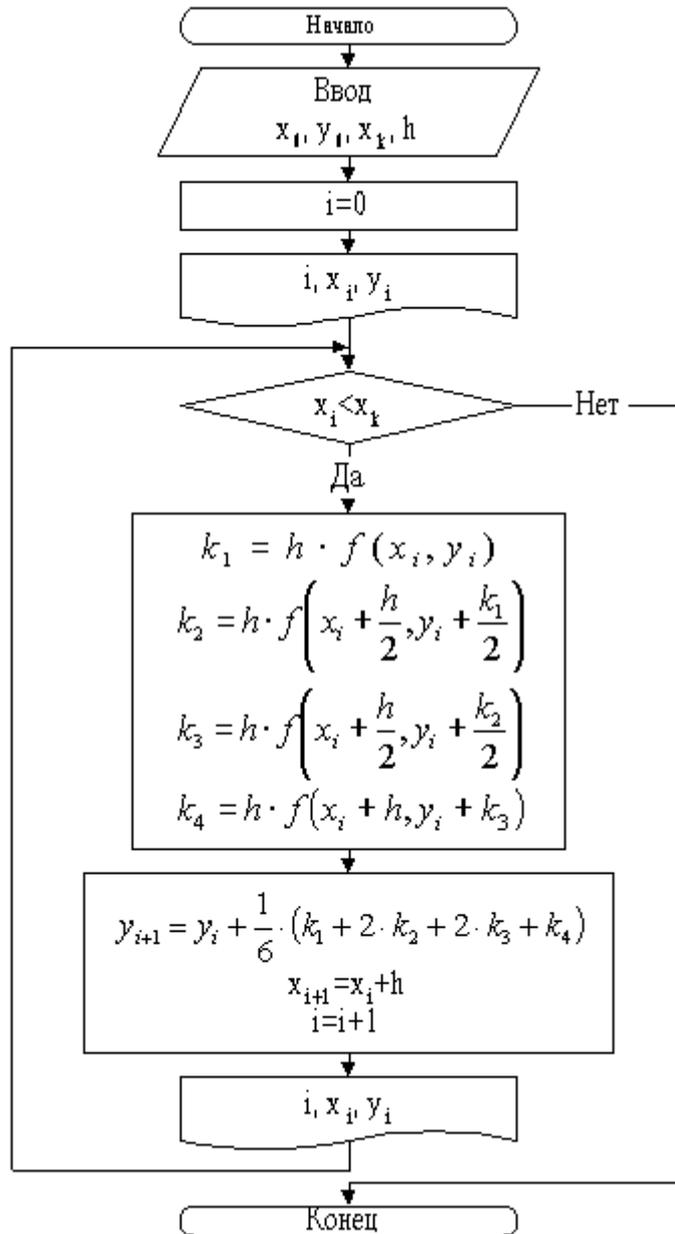
```
writeln('введите количество пар элементов таблицы');  
readln(n);  
writeln('Введите значения x,f через пробел');  
for i:=0 to n-1 do read(x[i],f[i]);  
writeln('введите точку x3'); readln(x3);  
spl(n,x,f,x3,y);  
writeln('x3=',x3,' f(x3)=',y);  
end.
```

## Приложение 4. Блок схемы методов Эйлера и Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений

### Блок схема метода Эйлера



## Блок схема метода Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений



## Программа реализации метода Эйлера. Решение дифференциальных уравнений

```
program Euler;
uses crt;
var x,y,h,b:real;
function f(x1,y1:real):real;
begin
f:={введите свою функцию}
end;
begin
  clrscr;
  writeln('Введите через пробел начальные значения x и y: ');
  readln(x,y);
  writeln('Введите величину шага интегрирования h: ');
  readln(h);
  writeln('Введите абсциссу правого конца отрезка b: ');
  readln(b);
  writeln('Таблица значений искомой функции: ');
  writeln(' x ', ' y ');
  repeat
    writeln(x:3:1, ' ', y:4:2);
    y:=y+h*f(x,y);
    x:=x+h;
  until x>=b+h/2;
  repeat until keypressed
end.
```

## Программа реализации метода Рунге-Кутта решения дифференциальных уравнений

```
program runge_kutta4;
uses crt;
var x,y,h,b,z:real; i,n:integer; r1,r2,r3,r4:real;
function f(x1,y1:real):real;
begin
f:={введите свою функцию}
end;
begin
  clrscr;
  writeln('Задайте начальные значения: ');
  read(x,y);
  writeln('Укажите шаг интегрирования: ');
  read(h);
  writeln('и правую границу отрезка интегрирования: ');
  read(b);
```

```
    repeat
    writeln(x:3:2,' ',y:4:4);
    r1:=h*f(x,y);
    r2:=h*f(x+h/2,y+r1/2);
    r3:=h*f(x+h/2,y+r2/2);
    r4:=h*f(x+h,y+r3);
    y:=y+(r1+2*r2+2*r3+r4)/6;
    x:=x+h;
    until x>=b+h/2;
end.
```

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов./В. М. Вержбицкий. –М.: Высш. шк., 2002.
2. Турчак Л. И. Основы численных методов/ Л. И. Турчак. – М.: Наука, 1987.
3. Агальцов В. П. Математические методы в программировании: учебник / В. П. Агальцов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ИД «ФОРУМ», 2010. – 240 с. (Профессиональное образование).
4. Информационно-справочная система «В помощь студентам». Форма доступа: <http://window.edu.ru>
5. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О.В.Чеснокова, Е. А.Рудченко. \_ М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. \_ 260 с. (Библиотека ALT Linux).
6. Лапчик М. П. Численные методы : учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер.— М. : Академия, 2009.— 384 с.