

## ЛЕКЦИЯ 2. Системы линейных алгебраических уравнений

## 1.1. Системы линейных алгебраических уравнений

Множество прикладных и чисто математических задач приводят к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Без преувеличения можно утверждать, что это одна из важнейших задач вычислительной математики.

Значимость задачи породила целый ряд методов ее решения. Среди этих методов есть универсальные и специализированные (т.е. применимые лишь к системам, имеющим некоторые специальные свойства). Методы отличаются друг от друга эффективностью, требованиями к объемам машинной памяти (при реализации на ЭВМ), закономерностями накопления ошибок в ходе расчетов. Не существует одного метода, который можно было бы во всех случаях предпочесть всем остальным, и поэтому знакомство с некоторыми методами является обязательным для квалифицированного вычислителя.

Итак, перед нами система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

(3.1) Запись ее в такой форме достаточно громоздка. Будем использовать матричную форму записи, совершенно равносильную (3.1):  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ,

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Методы решения СЛАУ вида (3.1) можно разделить на два класса: *точные и итерационные*.

К точным методам относятся:

1. метод определителей (метод Крамера), хорошо известный из курса линейной алгебры;
2. матричное решение:  $X=A^{-1}B$  (если известна обратная матрица);
3. различные варианты метода исключения неизвестных (метод Гаусса).

Чаще всего такие методы реализуются на ЭВМ, и в процессе вычислений ошибки определения и погрешности арифметических действий

неизбежно. В силу этого название «точный» не соответствует действительности.

К итерационным методам относятся приближённые методы решения СЛАУ, основанные на применении принципа сжимающих отображений (метод Зейделя, метод простой итерации).

## 1.2. Использование метода единственного деления

### *Метод Гаусса решения систем уравнений*

Под названием «метод Гаусса» фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Наиболее популярным является метод, основанный на так называемой схеме *единственного деления*; этот метод имеет также и ряд модификаций.

Сам по себе метод Гаусса относится к точным методам. Это означает, что если точно выполнять все требуемые действия, получено точное решение, поскольку погрешность метода в данном случае равна нулю.

Будем считать матрицу системы (3.1) невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю. Рассмотрим алгоритм, который получил название схемы единственного деления. Подвергнем систему (3.1) следующим преобразованиям.

Считая, что  $a_{11} \neq 0$  (ведущий элемент), разделим на  $a_{11}$  коэффициенты первого уравнения:

$$x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1 \quad (3.2)$$

Используя уравнение (3.2), легко исключить неизвестное  $x_1$  из остальных уравнений системы (достаточно из каждого уравнения вычесть первое уравнение, умноженное на соответствующий коэффициент при  $x_1$ ).

Над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное  $x_2$ .

Повторяя этот процесс, получим систему с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1; \\ \quad x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \beta_2; \\ \quad \quad \quad x_n = \beta_n. \end{cases} \quad (3.3)$$

Из системы (3.3) последовательно находим значения неизвестных  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

Отметим, что последовательное исключение неизвестных называется *прямым ходом метода Гаусса*. Нахождение значений неизвестных – *обратным ходом*.

**Пример 1.** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41; \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44; \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

*Решение.* Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 14,41 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & -6,44 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 55,56 \end{array} \right)$$

Так как,  $a_{11} = 2,34 \neq 0$ , разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 19,685 & 40,161 & -55,951 \\ 0 & -0,938 & 27,819 & 31,42 \end{array} \right).$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 29,732 & 28,756 \end{array} \right).$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,156 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 1 & 0,967 \end{array} \right).$$

Получаем треугольную матрицу. Решая ее, начиная с последней строки, найдем значения неизвестных:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0,967, \\ x_2 + 2,04x_3 &= -2,842, \\ x_2 &= -2,842 - 2,04 \cdot 0,962, \\ x_2 &= -4,816, \\ x_1 - 1,799 \cdot x_2 - 4,962 \cdot x_3, \\ x_1 &= 6,156 + 4,962 \cdot 0,967 + 1,799 \cdot (-4,816), \\ x_1 &= 2,293. \end{aligned}$$

Так как в процессе решения выполнялись округления, то решение содержит вычислительную ошибку.



Если отображение  $F$  является сжимающим, то эта последовательность сходится и её предел является решением системы (4.2), следовательно, и решением исходной системы (4.1).

**Замечание.** Отображение является *сжимающим*, если расстояние между образами меньше, чем расстояние между исходными точками.

Для отображения (4.3) необходимым и достаточным условием сжимаемости является следующее:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad (4.4)$$

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (4.2), взятых по столбцам, должна быть меньше 1. Из этого условия следует, что прежде чем начать решение системы (4.1) необходимо ее привести к нормальному виду (4.2), т.е. коэффициенты  $\alpha_{ij}$  при неизвестных в правой части системы были существенно меньше 1.

Этого можно достичь, если исходную систему (4.1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютная величина коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов, стоящих при неизвестных в соответствующих уровнях (такую систему называют *системой с преобладающими диагональными коэффициентами*). Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным 1, будет получена система (4.2), у которой все  $|\alpha_{ij}| < 1$ .

Для проверки точности решения используем условие (4.4).

**Пример 1.** Привести систему линейных уравнений к нормальному виду

$$\begin{cases} 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41, \\ 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 3,92x_1 - 7,99x_2 + 8,37x_3 = 55,56. \end{cases}$$

*Решение.* Построим систему с преобладающими диагональными коэффициентами.

В качестве 1-ого уравнения возьмем 2-ое, в качестве 3-его уравнения – 1-ое, в качестве 2-ого уравнения – сумму 1-го и 3-го уравнений. Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44, \\ 6,26x_1 - 12,2x_2 - 3,24x_3 = 69,97, \\ 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41. \end{cases}$$

Разделим каждое из полученных уравнений на диагональный коэффициент и, выразим из каждого уравнения диагональные элементы:

$$\begin{cases} x_1 = -0,649x_2 - 0,034x_3 - 0,801, \\ x_2 = 0,573x_1 - 0,266x_3 - 5,735, \\ x_3 = 0,202x_1 - 0,363x_2 - 1,241. \end{cases}$$

Система приведена к нормальному виду. Проверку условия сходимости (4.4) и точности решения можно осуществить с помощью программы.

## 4.2.Метод Зейделя

Рассмотрим систему линейных уравнений (4.1) и эквивалентную ей систему (4.2). При решении системы (4.2) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от уже имеющегося приближения значений неизвестных к новому (очередному) приближению.

Обозначим элементы имеющегося приближения через  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а элементы очередного (вычисляемого) приближения -  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Вычислительные формулы имеют вид:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении значения  $y_i$  учитываются уже полученные значения  $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$ . Выпишем соответствующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j + \beta_1, \\ y_2 &= \alpha_{21} y_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j + \beta_2, \\ y_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} y_j + \alpha_{nn} x_n + \beta_n \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение:

Если для матрицы коэффициентов системы (4.2) выполняется условие (4.4), то итерационный процесс метода Зейделя сходится к решению системы при любом выборе начального приближения  $x^{(0)}$ .

Преимущество этого метода состоит в том, что он обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

**Пример 3.** Решить СЛАУ методом Зейделя

№	Матрица системы				Правая часть
1	0,401	0,301	0,000	0,000	0,122
	-0,029	-0,500	-0,018	0,000	-0,253
	0,000	-0,050	-1,400	-0,039	-0,988

	0,000	0,000	-0,007	-2,300	-2,082
--	-------	-------	--------	--------	--------

Расширенная матрица системы имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 0,401 & 0,301 & 0,000 & 0,000 & 0,122 \\ -0,029 & -0,500 & -0,018 & 0,000 & -0,253 \\ 0,000 & -0,050 & -1,400 & -0,039 & -0,988 \\ 0,000 & 0,000 & -0,007 & -2,300 & -2,082 \end{pmatrix}$$

Приведем систему к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{0,401} (0,122 - 0,301x_2) \\ x_2 = \frac{1}{-0,500} (-0,253 + 0,018x_3 + 0,029x_1) \\ x_3 = \frac{1}{-1,400} (-0,988 + 0,050x_2 + 0,039x_4) \\ x_4 = \frac{1}{-2,300} (-2,082 + 0,007 \cdot x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,304 - 0,751x_2 \\ x_2 = 0,506 - 0,036x_3 - 0,058x_1 \\ x_3 = 0,706 - 0,036x_2 - 0,028x_4 \\ x_4 = 0,905 - 0,003x_3 \end{cases}$$

В качестве начальных приближений примем все  $x_i$  равными нулю в правой части системы  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$ .

Найдем значения неизвестных на первой итерации:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,304 - 0,751x_2^{(0)} \\ x_2^{(1)} = 0,506 - 0,036x_3^{(0)} - 0,058x_1^{(1)} \\ x_3^{(1)} = 0,706 - 0,036x_2^{(1)} - 0,028x_4^{(0)} \\ x_4^{(1)} = 0,905 - 0,003x_3^{(1)} \end{cases}$$

Или после подстановки получаем

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0 = 0,304 \\ x_2^{(1)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0 - 0,058 \cdot 0,304 = 0,488 \\ x_3^{(1)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,488 - 0,028 \cdot 0 = 0,688 \\ x_4^{(1)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,688 = 0,903 \end{cases}$$

Далее произведем вторую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,304 - 0,751x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} = 0,506 - 0,036x_3^{(1)} - 0,058x_1^{(2)} \\ x_3^{(2)} = 0,706 - 0,036x_2^{(2)} - 0,028x_4^{(1)} \\ x_4^{(2)} = 0,905 - 0,003x_3^{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,488 = -0,062 \\ x_2^{(2)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,688 - 0,058 \cdot (-0,062) = 0,485 \\ x_3^{(2)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,485 - 0,028 \cdot 0,903 = 0,663 \\ x_4^{(2)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = |-0,062 - 0,304| = 0,366 \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = |0,488 - 0,485| = 0,003 \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = |0,663 - 0,688| = 0,025 \\ |x_4^{(2)} - x_4^{(1)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0,366; 0,003; 0,025; 0\} = 0,366 > 0,001$$

Точность не достигнута.

Произведем третью итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,304 - 0,751x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} = 0,506 - 0,036x_3^{(2)} - 0,058x_1^{(3)} \\ x_3^{(3)} = 0,706 - 0,036x_2^{(3)} - 0,028x_4^{(2)} \\ x_4^{(3)} = 0,905 - 0,003x_3^{(3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,485 = -0,060 \\ x_2^{(3)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,663 - 0,058 \cdot (-0,060) = 0,486 \\ x_3^{(3)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,486 - 0,028 \cdot (0,903) = 0,663 \\ x_4^{(3)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = |-0,060 - 0,062| = 0,002 \\ |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = |0,486 - 0,485| = 0,001 \\ |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = |0,663 - 0,663| = 0 \\ |x_4^{(3)} - x_4^{(2)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0,002; 0,001; 0; 0\} = 0,002 > 0,001$$

Точность не достигнута.

Произведем четвертую итерацию:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,304 - 0,751x_2^{(3)} \\ x_2^{(4)} = 0,506 - 0,036x_3^{(3)} - 0,058x_1^{(4)} \\ x_3^{(4)} = 0,706 - 0,036x_2^{(4)} - 0,028x_4^{(3)} \\ x_4^{(4)} = 0,905 - 0,003x_3^{(4)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0,304 - 0,751 \cdot 0,486 = -0,060 \\ x_2^{(4)} = 0,506 - 0,036 \cdot 0,663 - 0,058 \cdot (-0,060) = 0,486 \\ x_3^{(4)} = 0,706 - 0,036 \cdot 0,486 - 0,028 \cdot (0,903) = 0,663 \\ x_4^{(4)} = 0,905 - 0,003 \cdot 0,663 = 0,903 \end{cases}$$

Проверим точность:

$$\begin{cases} |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = |-0,060 - 0,060| = 0 \\ |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = |0,486 - 0,486| = 0 \\ |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = |0,663 - 0,663| = 0 \\ |x_4^{(4)} - x_4^{(3)}| = |0,903 - 0,903| = 0 \end{cases}$$

$$\max\{0; 0; 0; 0\} = 0 < 0,001$$

Точность достигнута.

Решение системы с точностью 0,001:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -0,060 \\ x_2^{(4)} = 0,486 \\ x_3^{(4)} = 0,663 \\ x_4^{(4)} = 0,903 \end{cases}$$

Выполним проверку с помощью программы

<pre>// решение СЛАУ методом Зейделя. Листинг // программы // ввод матрицы A A=[0.401 0.301 0 0; -0.029 -0.5 -0.018 0; 0 -0.05 -1.4 -0.039; 0 0 -0.007 -2.3] // ввод вектора B B=[0.122;-0.253;-0.988;-2.082] // формирование матриц R и T R=tril((A)) T=A-R // формирование матриц P и G P=inv(R)*T; G=inv(R)*B;</pre>	<pre>// вычисление начальных приближений X0=B; X=P*X0+G; //циклические вычисления while max(abs(X-X0))&gt;=0.00001, X0=X; X=P*X0+G; end; //вывод результата X // проверка обусловленности матрицы A cond(A) Результаты X = - 0.0602787 0.4856206 0.6632102 0.9031989</pre>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Сравнение результатов «ручного» и машинного счета

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
Ручной счет	-0.060	0.486	0.663	0.903
ЭВМ	- 0.0602787	0.4856206	0.6632102	0.9031989