МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

**КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ**

**Г.А.Нефедова**

### Н.Г.Зуева

Н.И.Мишустина

Теория вероятностей и математическая статистика

**Контрольные работы**

**для студентов заочной формы обучения**

**Новосибирск 2004**

УДК 537

Содержание

Стр.

1. Теория вероятностей. Контрольная работа №1 5
2. Математическая статистика Контрольная работа №2 8
   1. Задание 1. Вероятностно-статистический анализ материалов наблюдений (Проверка согласия эмпирического распределения с нормальным) 8
   2. Методические указания к выполнению задания 1 8
   3. Пример выполнения задания 1 13
3. Задание 2. Корреляционный анализ (Определение корреляционной зависимости между рядами наблюдений) 16
   1. Методические указания и рабочие формулы к заданию 2. 17
   2. Пример выполнения задания №2 19
4. Приложение 1 22
5. Приложение 2 23
6. Приложение 3 24
7. Приложение 4 25
8. Литература 26

Контрольные работы по теории вероятностей и математической статистике выполняются студентами заочной формы обучения с целью закрепления теоретических знаний по соответствующим дисциплинам.

Студент должен выполнить две контрольные работы:

Контрольная работа 1 - по теории вероятностей (ТВ) - заключается в решении задач по ТВ.

Контрольная работа 2 - по математической статистике (МС) - состоит из двух заданий: Задание 1. Вероятностно-статистический анализ материалов наблюдений (Проверка согласия эмпирического распределения с нормальным);

Задание 2. Корреляционный анализ (Определение корреляционной зависимости между рядами наблюдений)

Задания и задачи контрольных работ подобраны таким образом, чтобы студент мог проверить степень усвоения им изучаемого курса. Если при самостоятельном решении отдельных задач и заданий встречаются серьезные затруднения, то следует вновь проработать соответствующие теоретические вопросы по рекомендуемой литературе, обратив особое внимание на разбор помещенных там примеров и задач.

Каждую контрольную работу необходимооформить в Word, подписав на титульном листе, например:

**Контрольная работа № 1**

По теории вероятностей и математической статистике

Студента 2 курса заочного факультета

Специальности “ Прикладная геодезия”

Алексеева В.А.

Шифр П-99061

Адрес: г. Новосибирск – 64,

Ул. Новогодняя, 10, кв.158.

Контрольные работы должны быть высланы в систему ЭИОС одним файлом в Word.

К рецензии принимается **только полностью выполненная работа**.

Обращаем ***особое внимание*** на то, что:

**- все контрольные работы должны быть набраны в редакторе Word;**

**- не принимаются рукописные работы;**

**- не принимаются сканированные работы;**

**- не принимаются фотографии страниц рукописной работы;**

**- не принимаются работы из графических редакторов;**

**- не принимаются архивы;**

**- задания нужно высылать только полностью выполненные, а не по частям, иначе пересдача гарантирована;**

**- в названии отправляемого файла нужно указать свою фамилию и группу;**

**- результаты вычислений выражать в десятичных дробях!**

**- при решении задач пользуйтесь таблицами, указанными в приложении;**

**- ВНИМАТЕЛЬНО ФОРМИРУЙТЕ СВОЙ ВАРИАНТ ЗАДАНИЯ!**

По получении рецензированной контрольной работы необходимо внимательно изучить замечания рецензента и внести в работу рекомендуемые исправления.

**Если рецензентом работа не зачтена**, то после исправлений необходимо **снова выслать ее в ЭИОС**

Часть 1. Теория вероятностей

Студент должен усвоить и научиться применять на практике основные определения и теоремы теории вероятностей. Должен уметь построить основные формы законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин и вычислять их численные характеристики, уметь вычислять вероятность попадания случайной величины в интервал. Иметь понятие о системе случайных величин, о зависимых и независимых случайных величинах, знать структуру ковариационной матрицы.

Перед решением задач контрольной работы №1, студент должен изучить следующие разделы:

**Раздел 1**

**Случайное событие**

1. События и их виды: достоверные, невозможные, случайные.
2. Простые и сложные события, пространство элементарных событий.
3. Виды случайных событий: равновозможные, совместные, несовместные, противоположные, равносильные, зависимые, независимые.
4. Операции над случайными событиями: 1) отрицание, сложение, разность; 2) пересечение, умножение, включение; 3) объединение.
5. Частотное определение вероятности.
6. Классическое определение вероятности, формулы комбинаторики.
7. Условная вероятность.
8. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
9. Многократные испытания, формула Бернулли, вероятнейшее число появления события.
10. Формула полной вероятности, формула Байеса.

**Раздел 2**

**Случайная величина**

1. Случайная величина и закон распределения ее вероятностей.
2. Основные формы закона распределения дискретной случайной величины: аналитический, табличный, графический.
3. Функция распределения вероятностей - универсальная форма закона распределения.
4. Плотность распределения вероятностей - закон распределения для непрерывной случайной величины.
5. Определение вероятности попадания случайной величины в заданный интервал с помощью функции распределения и плотности вероятности.
6. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты,.
7. Равномерное распределение непрерывной случайной величины.
8. Биномиальное распределение.
9. Нормальный закон распределения и его параметры. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал для случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Раздел 3

**Системы случайных величин**

1. Основные понятия о системах случайных величин и законах распределения вероятностей системы.
2. Понятие о зависимости компонент системы случайных величин.
3. Числовые характеристики системы двух случайных величин: начальные и центральные моменты, ковариация, коэффициент корреляции.
4. Числовые характеристики n-мерного случайного вектора: ковариационная и корреляционная матрицы, структура этих матриц.

#### Контрольная работа №1

**Решение задач по теории вероятностей**

***У к а з а н и е : номер варианта - последняя цифра учебного шифра студента. Если последняя цифра “ 0”, то номер варианта принять равным 10.***

**Задача №1**

Монета подбрасывается три раза подряд. Под исходом опыта будем понимать события :

А ={ выпадение “герба”},

**** ={ выпадение “ решетки”}.

1. Построить пространство **Ω** элементарных событий опыта.

2. Описать событие ***В***, состоящее в том, что:

|  |  |
| --- | --- |
| **№ варианта** | С о б ы т и е *В* |
| **1** | {“герб” выпал один раз} |
| **2** | {“герб” выпал два раза} |
| **3** | {“герб” выпал три раза} |
| **4** | {“герб” выпал не менее одного раз} |
| **5** | {“герб” выпал не менее двух раз} |
| **6** | {“герб” выпал не более двух раз} |
| **7** | {“герб” не выпал ни разу} |
| **8** | {“решетка” выпала не менее двух раз} |
| **9** | {“решетка” выпала не менее одного раза} |
| **10** | {“решетка” выпала не более двух раз} |

3. Вычислить теоретическую вероятность события ***В* .**

**Задача № 2 .**

Для 100 чисел, взятых из исходных данных **Контрольной работы № 2**, определить относительную частоту и вероятность события, состоящего в появлении

|  |  |
| --- | --- |
| **№варианта** |  |
| **1** | {последней цифры кратной трем} |
| **2** | { последней цифры кратной четырем} |
| **3** | { последней цифры четной} |
| **4** | { последней цифры нечетной) |
| **5** | { последней цифры кратной пяти} |
| **6** | { последней цифры семь } |
| **7** | { последней цифры пять} |
| **8** | { последней цифры три} |
| **9** | { последней цифры четыре} |
| **10** | { последней цифры два} |

**Задача № 3**

В ящике имеется  ***n***  деталей, среди которых ***a*** окрашенных. Наугад вынимают две детали. Найти вероятность того, что:

1. обе извлеченные детали окажутся окрашенными ;
2. одна деталь окрашенная, а другая неокрашенная (порядок появления деталей не учитывается);
3. хотя бы одна из двух деталей окажется окрашенной.

У к а з а н и е : значения ***n*** и ***a*** взять из следующей таблицы согласно номеру варианта:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Номер**  **варианта** | Число деталей | | **Номер**  **варианта** | Число деталей | |
| ***i*** | ***n*** | ***a*** | ***i*** | ***n*** | ***a*** |
| **1** | 10 | 6 | **6** | 25 | 19 |
| **2** | 13 | 7 | **7** | 27 | 20 |
| **3** | 16 | 10 | **8** | 29 | 22 |
| **4** | 20 | 15 | **9** | 30 | 24 |
| **5** | 23 | 16 | **10** | 18 | 12 |

Задача №4

Имеются три одинаковые с виду урны. Каждая урна содержит ***n j***белых и ***m*** *j* черных шаров, где *j*= 1, 2, 3 – номер урны.

1. Найти вероятность того, что вынутый из наудачу взятой урны шар окажется белым.

2. Из наудачу выбранной урны вынули белый шар. Какова вероятность того, что шар вынут из а) первой, б) второй, в) третьей урны ?

У к а з а н и е : значения ***n*** и ***m*** сформировать по данным следующей таблицы (***i*** - номер варианта ).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1-я урна** | **2-я урна** | **3-я урна** |
| ***n 1 = 1*** ***i***  ***m 1 = 1+ i*** | ***n 2 = 1***  ***i***  ***m 2 = 20 − i*** | ***n 3 = 5***  ***i***  ***m 3 = 8 + i*** |

**Задача №5**

Батарея произвела 6 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна  (***i*** - две последние цифры шифра студента,например, ***i=*27**, ***P=*0.627**).

1. Определить вероятность того, что:

а) объект будет поражен к = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 раз;

б) число попаданий в объект будет не менее трех;

в) число попаданий в объект не более трех;

г) объект будет поражен хотя бы один раз.

2. Получить ряд распределения и построить многоугольник распределения случайной величины ***X-*** **числа попаданий в объект**.

3. Получить функцию распределения случайной величины ***X*** и построить ее график.

4. Определить вероятнейшее число попаданий в объект по графику и по формуле.

5. Определить вероятность того, что число попаданий в объект будет заключено в пределах от 2 до 5.

6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа попаданий в объект.

**Задача №6**

Функция распределения случайной величины **Х** задана выражением:



Найти:

1. плотность вероятности ***f(x)***;
2. математическое ожидание ***M****X* ;
3. среднее квадратическое отклонение ;
4. вероятность попадания в интервал ***( 0 ; i/2 ),***  (***i*** *−* номер варианта).

**Задача№ 7**

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины ***Х*** соответственно равны **10** мм и **2** мм. Найти вероятность того, что:

1. в результате испытания случайная величина Х примет значение, заключенное в интервале **(*α ,β* )**;
2. величина **Х** примет значение меньше, чем **β**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№варианта*** | ***α (мм)*** | ***β (мм)*** | ***№ вар.*** | ***α (мм)*** | ***β (мм)*** |
| **1** | 12 | 14 | **6** | 6 | 10 |
| **2** | 10 | 15 | **7** | 4 | 8 |
| **3** | 8 | 12 | **8** | 6 | 12 |
| **4** | 8 | 14 | **9** | 6 | 14 |
| **5** | 10 | 14 | **10** | 4 | 10 |

## **Задача № 8**

Для случайного вектора ,

образующего систему случайных величин, известна ковариационная матрица **,** элементы которой каждому студенту следует сформировать на основе матрицы , **-**  вычеркнув из нее ***i*-ю строку** и ***i*-й столбец** (***i —*** номер варианта***).***



1.Определить, чему равны средние квадратические отклонения случайных величин ***X i***, входящих в систему.

2. Установить, какие случайные величины **X *i*** системы коррелированны, а какие не коррелированы.

3. Получить матрицу коэффициентов корреляции вектора ***Х91*.**

### Часть 2. Математическая статистика

**Контрольная работа №2**

Контрольная работа №2 состоит из двух заданий.

Перед выполнением задания 1 нужно изучить следующие вопросы:

1. Задачи математической статистики. Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность. Выборка. Выборочный метод статистики.
2. Группировка данных. Способы группировки. Статистический группированный ряд. Многоугольник распределения.
3. Гистограмма. Выдвижение гипотезы о виде распределения случайной величины в генеральной совокупности.
4. Оценивание параметров статистического распределения. Требования, предъявляемые к оценкам параметров: несмещенность, состоятельность, эффективность. Несмещенные и состоятельные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения, начальных и центральных моментов, их вычисление по данным выборки и по данным статистического группированного ряда. Асимметрия и эксцесс эмпирической кривой распределения, их оценки.
5. Статистическая гипотеза. Принцип проверки статистических гипотез. Критерий проверки, его критическое значение. Доверительная вероятность и уровень значимости. Число степеней свободы. Статистические гипотезы о законе распределения, об асимметрии и эксцессе, их проверка. Критерий Пирсона. Ошибки 1-го рода, ошибки 2-го рода.
6. Задача выравнивания статистических рядов и ее решение на основе метода моментов. Расчет теоретических (гипотетических ) частот.

Задание 1. Вероятностно-статистический анализ материалов наблюдений (проверка согласия эмпирического распределения с нормальным)

**Исходные данные**: результаты измерений ( *i =* 1,2,.., *n*) некоторой случайной величины Х, рассматриваемые как случайная выборка объема *n* из генеральной совокупности; *n* = 100.

У к а з а н и е : Для получения **индивидуального варианта**  задания каждый студент должен вычеркнуть из **Т а б л и ц ы**  ***строку***, номер которой совпадает с **последней** цифрой его учебного шифра, указанного в зачетной книжке***, и столбец***, номер которого совпадает с **предпоследней**  цифрой учебного шифра.

Т а б л и ц а

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| П П р е д п о с л е д н я я ц и ф р а у ч е б н о г о ш и ф р а | | | | | | | | | | | | |
| П оследняя цифра учебного шифра |  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **0** | -0.09 | 0.15 | 0.41 | 0.80 | -1.62 | 1.11 | -0.76 | -1.59 | 1.10 | 0.13 | 0.51 |
| **1** | -0.75 | 1.37 | -0.98 | -0.40 | -0.11 | 0.75 | 1.63 | 1.30 | 0.50 | 0.80 | -1.90 |
| **2** | 0.18 | -1.63 | -1.34 | 1.01 | 0.43 | -0.48 | 0.09 | -0.37 | 1.28 | 0.64 | 0.73 |
| **3** | 0.25 | -1.33 | 1.16 | 1.88 | -1.22 | 1.24 | 1.47 | -0.06 | 0.25 | 0.38 | -1.54 |
| **4** | 0.51 | 0.45 | 0.79 | -0.08 | 1.77 | 1.22 | 0.47 | 0.16 | 0.23 | 2.37 | 0.54 |
| **5** | 0.53 | 0.61 | -1.14 | -1.00 | 0.56 | -0.12 | -0.70 | -0.44 | -0.15 | -0.06 | 1.27 |
| **6** | -2.02 | 0.97 | -1.33 | 0.43 | 0.26 | -0.32 | -1.46 | -0.62 | -1.21 | 0.51 | 0.29 |
| **7** | -0.43 | 0.40 | 1.24 | 0.34 | -0.12 | 0.03 | 1.18 | -1.36 | 0.31 | -0.12 | -1.52 |
| **8** | 0.98 | 0.16 | 1.23 | -1.42 | -0.54 | -0.28 | 0.92 | 0.47 | 0.07 | 0.65 | -2.42 |
| **9** | 0.62 | -0.29 | 0.60 | -0.57 | 0.75 | -0.54 | -0.40 | -0.53 | 0.87 | -0.29 | -1.05 |
| **10** | 1.31 | 0.38 | -0.18 | -0.43 | 2.12 | -0.06 | -0.51 | 0.28 | 0.12 | -0.53 | 0.00 |

**План**

1. Преобразовать исходную выборку в статистический группированный ряд, построить график эмпирических частот (многоугольник распределения) и выдвинуть гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности. Выдвинуть гипотезы об асимметрии и эксцессе кривой распределения.
2. Вычислить теоретические (гипотетические) частоты для каждого интервала группированного ряда. Построить график теоретических частот и вычислить эмпирическое значение критерия согласия Пирсона (критерийχ2)**.**
3. Проверить все выдвинутые гипотезы, составить сводную таблицу проверки гипотез и дать заключение по результатам анализа.

Методические указания к выполнению задания 1

1. Преобразование исходной выборки в группированный статистический ряд выполняется в следующем порядке:

а). Определить размах выборки , где - максимальный, а  - минимальный элементы выборки;

б) .Вычислить длину интервала (группы)  где ***k*** - принятое число интервалов. Принять ***k*** **= 10**.

в). Рассчитать границы интервалов :

, ;  ***С*** , где ***i* = 1, 2, … , *k***;.

Номера интервалов и данные расчета их границ занести втаблицу 1 (графы 1 и 2).

Вычисление эмпирических характеристик Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№***  ***инт.***  ***i*** | ***Границы***  ***интерв.*** | ***Фиксация***  *частот в интервалах* |  |  | ***i*** |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** |  |  |  | *ξ 1* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **2** |  |  |  | *ξ 2* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **...** | **...** | **...** | **...** | ***...*** | **...** | **...** | **...** | **...** | **...** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***k*** |  |  |  | *ξ k* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

г). Для определения эмпирических частот **** *( i=1,2,..,k )* попадания значений (*i*=1,2,..,*n*)случайной величины *X* в намеченные интервалы выполнить их фиксацию в интервалах следующим образом: произвести **последовательный просмотр** всех элементов исходной выборки − от первого до последнего − и, **ориентируясь на границы интервалов**, одновременно с просмотром заносить отметку ( например, вертикальную черту или точку) в **подходящий интервал**, т.е. в тот интервал, в который по своему значению попадает данный элемент:

****, **(** *i* = 1, 2, .., *k* *; j* = 1, 2, .., *n* ).

Все отметки заносить последовательно в графу 3 таблицы 1.

По завершении фиксации, подсчитав количество отметок в каждом интервале, получим **эмпирические частоты**  попадания случайной величины *X* в намеченные интервалы ( графа 4 таблицы1), при этом



В графе 5 Таблицы 1 зафиксируем середины интервалов **ξ *i :***

 ( *i*  =1, 2, ... , *k*).

Данные графы 5 и графы 4 составляют **статистический группированный ряд**, в который преобразована исходная выборка.

д). По данным статистического группированного ряда построить **график эмпирических частот** (**многоугольник распределения**), для чего в прямоугольной системе координат отметить точки с координатами (****) и соединить их последовательно отрезками прямой линии.

е). По внешнему виду графика эмпирических частот выдвинуть **нулевую гипотезу** **Н0**  **о законе распределения** генеральной совокупности значений случайной величины *X***,** например:

**Н0 = {Распределение нормальное}.**

2. По данным статистического группированного ряда вычислить:

а) статистическую оценку  математического ожидания случайной величины − среднее арифметическое:

** ;**

б) несмещенную статистическую оценку  среднего квадратического отклонения :

 ;

в) статистические оценки и  центральных моментов третьего и четвертого порядков соответственно:

,

 ;

г) оценку  асимметрии кривой распределения



и выдвинуть **нулевую гипотезу Н0 об асимметрии**:

**Н0 = {  };**

д) оценку  эксцесса кривой распределения



и выдвинуть **нулевую гипотезу Н0 об эксцессе**:

**Н0 ={= 0}.**

Вспомогательные вычисления поместить в графы 6 - 10 Таблицы 1.

1. На основе **метода моментов**, т.е. полагая параметры ***МX*** (математическое ожидание) и  ( среднее квадратическое отклонение) теоретического распределения, равными их статистическим оценкам (**и **), выполнить расчет **теоретических частот**  ***n****i* (*i* = 1, 2, … , *k* ) попадания случайной величины во все намеченные интервалы по формуле

*ni = pi n* ***,***

где ***:*** **  - вероятность попадания случайной величины  **Х**  в ***i***-й интервал;

 ; 

-нормированные центрированные значения границ интервалов (*i* =1, 2, .., *k* );

 - функция нормального распределения (см. приложение 1):

.

Вычисления поместить в графы 1 - 6 Таблицы 2 .

Построить **график теоретических частот**, совместив его с графиком эмпирических частот. Вычислить в графе 9 Таблицы 2 слагаемые эмпирического значения **критерия согласия Пирсона** (иначе критерия - «хи-квадрат») :

,

необходимого для проверки гипотезы о распределении

Проверку выдвинутых гипотез осуществить на уровне значимости ***q* = 0.05 (5%)** сравнением эмпирического значения *****-* критерия проверки (или **теста**) - с допустимым в рамках нулевой гипотезы критическим его значением .

Для проверки гипотезы о распределении **, а  ****  , где  выбирается из таблиц распределения  ( см. приложение 2 ) по уровню значимости ***q*** и числу степеней свободы ν  ***= k - s; s –*** число связей, накладываемых на расчет теоретического распределения. При проверке гипотезы о нормальном распределении ***s =* 3 *.***

Вычисление теоретических характеристик Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **интервалов**  ***i*** | **Границы**  **интервалов** |  |  |  |  |  |  | **()2** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  | ()2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  | ()2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | ()2 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

При проверке гипотезы об асимметрии критерий проверки **,** а  **=** 3**,** где *−*- оценка среднего квадратического отклонения асимметрии.

При проверке гипотезы об эксцессе критерий проверки  **,** а , где  − оценка среднего квадратического отклонения эксцесса.

Результаты проверки гипотез занести в **сводную таблицу проверки гипотез** − таблицу 3.

**Сводная таблица проверки гипотез**

Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№№ гипотез** | **Нулевая гипотеза Н0** | **Условная запись нулевой  гипотезы** | **Проверка  гипотез** | | **Заключение по гипотезе** |
| ***tЭ*** | ***tT*** |
| **1** | ***о нормальности распределения*** |  |  |  |  |
| **2** | ***о не значимости асимметрии*** | **Н0={=0}** |  |  |  |
| **3** | ***о не значимости эксцесса*** | **Н0={ =0 }** |  |  |  |

Работа завершается  **общим выводом**  по результатам анализа.

Пример выполнения Задания 1

Задание 1. Вероятностно-статистический анализ материалов наблюдений (проверка согласия эмпирического распределения с нормальным)

**Исходные данныe :**

0.30 -1.24 0.59 -1.79 0.24 0.27 1.73 0.45 0.34 -0.09

1.09 -2.04 0.93 -0.07 -1.81 0.20 -0.71 1.58 -0.33 -2.18

0.98 0.45 -0.47 -0.13 1.01 0.66 -1.61 -0.88 0.15 -0.86

-0.28 0.23 1.16 -0.13 -0.88 1.05 0.03 0.12 -1.45 0.85

-0.76 -1.27 -1.44 -0.43 -0.99 -0.68 -0.40 0.10 -2.46 0.58

-0.80 -0.52 0.28 0.48 1.28 0.19 -1.83 -0.44 0.36 -0.62

-0.12 -0.85 -1.18 0.13 -0.94 -0.36 -0.84 -1.32 -1.39 -0.29

-0.76 -0.27 -1.07 0.60 -0.46 -0.39 -0.87 -1.67 -0.61 0.62

0.34 -1.99 0.25 0.21 -1.11 -0.99 0.93 -0.74 0.64 0.28

-1.14 0.33 -0.84 -0.45 1.32 1.91 1.01 0.61 -1.27 -1.36

**План выполнения задания**

1. Преобразовать исходную выборку в статистический группированный ряд, построить график эмпирических частот (многоугольник распределения) и выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности. Выдвинуть гипотезы об асимметрии и эксцессе кривой распределения.
2. Вычислить теоретические (гипотетические) частоты для каждого интервала группированного ряда. Построить график теоретических частот и вычислить эмпирическое значение критерия согласия Пирсона.
3. Проверить все выдвинутые гипотезы и дать заключение по результатам анализа.

**Решение**

** - объем выборки;

 - максимальный элемент выборки;

 - минимальный элемент выборки;

 - размах выборки;

Примем ***k = 10*** - число интервалов (групп).

Вычислим ***С = R/k =0.44*** - длина интервала (группы).

Вычисление эмпирических характеристик

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№№**  **интер.** | **Границы**  **интерв.** | **Фиксация частот**  **в интервалах** |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | **-2.46** |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1** |  | ⎢⎢⎢ | 3 | -2.24 | -6.725 | -1.975 | 11.705 | -23.120 | 45.667 |
|  | -2.02 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **2** |  | ⎣⎣⎣⎢⎢ | 6 | -1.80 | -10.827 | -1.538 | 14.197 | -21.839 | 33.593 |
|  | -1.59 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **3** |  | ⎟⎦⎦⎦⎥⎥⎥⎥ | 9 | -1.37 | -12.307 | -1.101 | 10.915 | -12.020 | 13.236 |
|  | -1.15 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **4** |  | ⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥⎥ | 17 | -0.93 | -15.818 | -0.664 | 7.501 | -4.982 | 3.309 |
|  | -0.71 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **5** |  | ⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥ | 16 | -0.49 | -7.896 | -0.227 | 0.826 | -0.188 | 0.043 |
|  | -0.27 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **6** |  | ⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥ | 11 | -0.06 | -0.621 | 0.210 | 0.484 | 0.102 | 0.021 |
|  | 0.16 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **7** |  | ⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥⎥⎥⎥⎥ | 19 | 0.38 | 7.23 | 0.647 | 7.948 | 5.140 | 3.324 |
|  | 0.60 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **8** |  | ⎥⎦⎦⎦⎥⎦⎦⎦⎥ | 11 | 0.82 | 8.99 | 1.084 | 12.920 | 14.002 | 15.175 |
|  | 1.04 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **9** |  | ⎥⎦⎦⎦ | 5 | 1.26 | 6.273 | 1.521 | 11.564 | 17.585 | 26.743 |
|  | 1.47 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **10** |  | ⎥⎥⎥ | 3 | 1.69 | 5.075 | 1.958 | 11.498 | 44.072 | 44.072 |
|  | **1.91** |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | 100 |  | -26.626 |  | 89.568 | -2.807 | 185.184 |

Нулевая гипотеза о раcпределении:



*Н0=* {*Распределение нормальное* }*.*

### Числовые характеристики и гипотезы:

 = *- 26.626/100 = - 0.266* **-** оценка математического ожидания (среднее арифметическое);

=  - оценка среднего квадратического отклонения

** -** оценка центрального момента 3-го порядка ;

****  - оценка центрального момента 4-го порядка;

 **-** асимметрия эмпирической кривой;

***Н0 ={А = 0}***  − нулевая гипотеза об асимметрии.

 - оценка среднего квадратического отклонения асимметрии;

- эксцесс эмпирической кривой;

***Н0 =* {*E = 0*} −** нулевая гипотеза об эксцессе;

 - оценка среднего квадратического отклонения эксцесса.

**Вычисление теоретических характеристик**

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№*  *интерв.* | *Границы*  *интерв.* |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|  | **-2.46** | -2.32 | 0.010 |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  | 0.021 | 2.2 | 3 | 0.8 | 0.34 |
|  | -2.02 | -1.86 | 0.032 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  | 0.050 | 5.0 | 6.0 | 1.0 | 0.21 |
|  | -1.59 | -1.40 | 0.082 |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  | 0.094 | 9.4 | 9 | -0.4 | 0.02 |
|  | -1.15 | -0.93 | 0.175 |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  | 0.143 | 14.3 | 17 | 2.7 | 0.50 |
|  | -0.71 | -0.47 | 0.319 |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  | 0.177 | 17.7 | 16 | -1.8 | 0.17 |
|  | -0.27 | -0.01 | 0.496 |  |  |  |  |  |
| 6 |  |  |  | 0.178 | 17.8 | 11 | -6.8 | 2.61 |
|  | 0.16 | 0.45 | 0.675 |  |  |  |  |  |
| 7 |  |  |  | 0.145 | 14.5 | 19 | 4.5 | 1.38 |
|  | 0.60 | 0.91 | 0.820 |  |  |  |  |  |
| 8 |  |  |  | 0.096 | 9.6 | 11 | 1.4 | 0.21 |
|  | 1.04 | 1.38 | 0.916 |  |  |  |  |  |
| 9 |  |  |  | 0.051 | 5.1 | 5 | -0.1 | 0.00 |
|  | 1.47 | 1.84 | 0.967 |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  | 0.022 | 2.2 | 3 | 0.8 | 0.27 |
|  | **1.91** | 2.30 | 0.989 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | **=** | **5.70** |

** -** эмпирическое значение критерия согласия Пирсона (критерия **χ2**);

** -** критическое значение критерия Пирсона, полученное для доверительной вероятности  (т.е. на уровне значимости =5%) и числа степеней свободы из таблицы приложения 2.

##### Сводная таблица проверки гипотез Таблица 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№№ гипотез** | **Нулевая гипотеза Н0** | **Условная запись нулевой  гипотезы** | **Проверка  гипотез** | | **Заключение**  **по гипотезе** |
|  |  |
| 1 | ***о нормальности распределения*** |  | 5.70 | 14.1 | Гипотеза  не отвергается |
| 2 | ***о незначимости асимметрии*** |  | 0.030 | 0.72 | Гипотеза  не отвергается |
| 3 | ***о незначимости эксцесса*** |  | 0.69 | 1.27 | Гипотеза  не отвергается |

**Вывод:** Анализ результатов проверки статистических гипотез позволяет сделать вывод о том, что рассматриваемая случайная величина подчиняется нормальному закону распределения с параметрами: математическое ожидание ***MX* = 0.27** , среднее квадратическое отклонение ***σX*= 0.95.**

### Задание 2. Определение корреляционной зависимости между рядами наблюдений (Регрессионный анализ данных)

Перед выполнением задания 2 необходимо изучить следующие вопросы.

1. Статистическая связь (корреляция) между двумя случайными величинами. Ковариация. Линейная и нелинейная корреляция.
2. Коэффициент корреляции, его свойства. Оценка коэффициента корреляции по выборочным данным. Оценка значимости и надежности коэффициента корреляции. Критерий Фишера.
3. Функция регрессии. Уравнение регрессии. Вычисление параметров уравнения прямой регрессии и оценка их точности. Точность регрессии.
4. Понятие о множественной корреляции.

**Задача.** В таблице №1 приведены длины сторон ****** измеренные светодальномером, и их истинные ошибки ** = .**

1. Вычислить оценку коэффициента корреляции между приведенными величинами и определить его значимость и надежность;
2. Получить уравнение регрессии (формулу прогнозов) и оценить точность регрессии;
3. Сделать вывод.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№№п/п*** | ***x i ,(км)*** | ***yi ,(см)*** | ***№№п/п***  ***i*** | ***x i ,(км)*** | ***yi ,(см)i*** |
| 1 | 7.0+ 0.1***i*** | 5.5 | 11 | 6.2 | 5.0 |
| 2 | 9.2+ 0.1***i*** | 6.5 | 12 | 8.5 | 5.0 |
| 3 | 8.5+ 0.1***i*** | 7.0 | 13 | 6.5 | 6.5 |
| 4 | 7.4+ 0.1***i*** | 4.5 | 14 | 2.0 | 2.0 |
| 5 | 5.6+ 0.1***i*** | 2.5 | 15 | 5.3 | 5.0 |
| 6 | 3.0 | 3.5 | 16 | 8.5 | 5.0 |
| 7 | 3.5 | 2.5 | 17 | 4.5 | 2.5 |
| 8 | 8.1 | 6.0 | 18 | 6.7 | 4.0 |
| 9 | 7.2 | 7.0 | 19 | 4.7 | 3.0 |
| 10 | 5.7 | 5.5 | 20 | 7.5 | 5.5 |

***У к а з а н и е:*** ***i*** − последняя цифра учебного шифра студента.

Например, для варианта 7: 0.1***i*** = 0.7.

**План выполнения задания.**

1. Построить поле корреляции (точечную диаграмму), изобразив в прямоугольной системе координат точки с координатами, соответствующими каждой паре наблюдений 
2. На основании поля корреляции сделать предположение о наличии между случайными величинами ***X*** и ***Y*** корреляционной зависимости и о форме этой зависимости (линейная или нелинейная).
3. Вычислить оценки математических ожиданий случайных величин ***X*** и ***Y*** - средние арифметические и .
4. Вычислить оценки средних квадратических отклонений  и .
5. Вычислить оценку коэффициента корреляции - выборочный коэффициент корреляции.
6. Проверить гипотезу о не значимости коэффициента корреляции.
7. Оценить надежность коэффициента корреляции (критерий Фишера).
8. Получить уравнение регрессии случайной величины ***Y*** на ***X***. Нанести прямую линию регрессии на график.
9. Оценить точность регрессии.
10. Выполнить точечную и интервальную оценку точности параметров уравнения регрессии
11. Сделать общий вывод по результатам анализа.

Методические указания и рабочие формулы к заданию 2.

1.  - оценка математического ожидания случайной величины ***X*** (среднее арифметическое).
2.  - оценка математического ожидания случайной величины ***Y*** (среднее арифметическое).
3.  - оценка среднего квадратического отклонения случайной величины ***X*.**
4.  - оценка среднего квадратического отклонения случайной величины ***Y* .**
5.  - оценка коэффициента корреляции (выборочный коэффициент корреляции).
6.  - нулевая гипотеза о не значимости коэффициента корреляции

Эмпирическое значение критерия проверки гипотезы: .

Критическое значение критерия  находится из таблицы распределения Стьюдента (приложение 4) по доверительной вероятности и числу степеней свободы 

Если , то нулевая гипотеза отклоняется, и коэффициент корреляции значим.

1. ****** - доверительный интервал для коэффициента корреляции ***ρ*** согласно критерию Фишера, где

***β*** - принятая доверительная вероятность;

*th* - символ гиперболического тангенса;

***,*** 

 - функция Фишера;

 - среднее квадратическое отклонение величины ***Z***;

 = arg Ф() **-** аргумент функции Лапласа (приложение3), соответствующий доверительной вероятности ***β*** ( *100β%* квантиль стандартного нормального распределения)***.***

Если, то коэффициент корреляции считать надежным, а корреляционную зависимость между ***X*** и ***Y*** установленной.

8. - уравнение прямой регрессии;

 - параметры уравнения регрессии.

9. Оценка точности регрессии.

 - точность регрессии (остаточное среднее квадратическое отклонение точек поля корреляции от прямой регрессии, или иначе - средняя квадратическая ошибка измерений значений), где .

1. Оценка точности параметров прямой регрессии.

а) точечная:

 - средние квадратические отклонения (точность) параметров  и  уравнения регрессии.

б) интервальная:

 - доверительный интервал для коэффициента  функции регрессии;

 - доверительный интервал для коэффициента  функции регрессии;

 - аргумент функции Лапласа: .

Пример выполнения задания №2

**Задание 2. Определение корреляционной зависимости между рядами измерений (Регрессионный анализ данных).**

**Задача.** Даны значения ***xi***  и **y*i*** , являющиеся результатами наблюдений над случайными величинами ***X*** и ***Y***  соответственно.

1. Вычислить оценку коэффициента корреляции между ***X*** и ***Y***  и определить его значимость и надежность;
2. Получить уравнение регрессии ***Y*** на ***X*** (формулу прогнозов) и оценить точность регрессии (точность прогнозов);
3. Сделать вывод.

**Исходные данные (*n* = 15 ) :**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№№п/п***  ***i*** | ***xi*** | ***yi*** | ***№№п/п***  ***i*** | ***xi*** | ***yi*** | ***№№п/п***  ***i*** | ***xi*** | ***yi*** |
| 1 | 6.1 | 11.6 | 6 | 11.41 | 14.2 | 11 | 8.2 | 12.0 |
| 2 | 7.2 | 12.8 | 7 | 8.0 | 13.0 | 12 | 12.1 | 13.4 |
| 3 | 5.5 | 11.0 | 8 | 6.7 | 11.3 | 13 | 10.5 | 13.5 |
| 4 | 8.6 | 13.7 | 9 | 9.2 | 12.6 | 14 | 9.7 | 13.4 |
| 5 | 10.2 | 12.7 | 10 | 11.0 | 12.3 | 15 | 7.6 | 11.5 |

**План выполнения задания.**

1. Построить поле корреляции (точечную диаграмму), изобразив в прямоугольной системе координат точки с координатами, соответствующими каждой паре наблюдений 
2. На основании поля корреляции сделать предположение о наличии между случайными величинами ***X*** и ***Y*** корреляционной зависимости и о форме этой зависимости (линейная или нелинейная).
3. Вычислить оценки математических ожиданий случайных величин ***X*** и ***Y*** - средние арифметические и .
4. Вычислить оценки средних квадратических отклонений  и .
5. Вычислить оценку коэффициента корреляции - выборочный коэффициент корреляции.
6. Проверить гипотезу о не значимости коэффициента корреляции.
7. Оценить надежность коэффициента корреляции ( критерий Фишера).
8. Получить уравнение регрессии случайной величины ***Y*** на ***X***. Нанести прямую регрессии на график.
9. Оценить точность регрессии.
10. Выполнить точечную и интервальную оценку точности параметров уравнения регрессии
11. Сделать общий вывод по результатам анализа.

**Решение**

Поле корреляции



На основании поля корреляции можно предположить существование между величинами ***Х*** и ***Y*** линейной корреляционной зависимости с функцией регрессии .

**Рабочая таблица**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *№п/п*  ***i*** |  |  |  |  |  |  | **(**  **()** |  | ***i*** |
| 1 | 6.1 | 11.6 | -2.7 | -1.0 | 7.29 | 1 | 2.70 | 11.7 | 0,009 |
| 2 | 7.2 | 12.8 | -1.6 | 0.2 | 2.56 | 0.04 | -0.32 | 12.0 | 0,541 |
| 3 | 5.5 | 11.0 | -3.3 | -1.6 | 10.89 | 2.56 | 5.28 | 11.5 | 0,246 |
| 4 | 8.6 | 13.7 | -0.2 | 1.21 | 0.04 | 1.21 | -0.22 | 12.5 | 1,362 |
| 5 | 10.2 | 12.7 | 1.4 | 0.1 | 1.96 | 0.01 | 0.14 | 13.1 | 0,136 |
| 6 | 11.4 | 14.2 | 2.6 | 1.6 | 6.76 | 2.56 | 4.16 | 13.5 | 0,533 |
| 7 | 8.0 | 13.0 | -0.8 | 0.4 | 0.64 | 0.16 | -0.32 | 12.3 | 0,446 |
| 8 | 6.7 | 11.3 | -2.1 | -1.3 | 4.41 | 1.69 | 2.73 | 11.9 | 0,357 |
| 9 | 9.2 | 12.6 | 0.4 | 0 | 0.16 | 0 | 0 | 12.7 | 0,018 |
| 10 | 11.0 | 12.3 | 2.2 | -0.3 | 4.84 | 0.09 | -0.66 | 13.3 | 1,074 |
| 11 | 8.2 | 12.0 | -0.6 | -0.6 | 0.36 | 0.36 | 0.36 | 12.4 | 0,159 |
| 12 | 12.1 | 13.4 | 3.3 | 0.8 | 10.89 | 0.64 | 2.64 | 13.7 | 0,093 |
| 13 | 10.5 | 13.5 | 1.7 | 0.9 | 2.89 | 0.81 | 1.53 | 13.2 | 0,110 |
| 14 | 9.7 | 13.4 | 0.9 | 0.8 | 0.81 | 0.64 | 0.72 | 12.9 | 0,249 |
| 15 | 7.6 | 11.5 | -1.2 | -1.1 | 1.44 | 1.21 | 1.32 | 12.2 | 0,488 |
|  | 132.0 | 189.0 | 0 | 0 | 55.94 | 12.98 | 20.60 | 189.0 | 5,818 |

1.  
2.  = 
3.  =
4. =
5.  =

6***.***  - нулевая гипотеза о не значимости коэффициента корреляции.

Эмпирическое значение критерия проверки гипотезы:

Критическое значение критерия  находим из таблиц распределения Стьюдента (приложение 4) по доверительной вероятности  и числу степеней свободы.

Так как , то гипотеза о не значимости коэффициента корреляции отклоняется.

7. ******- доверительный интервал для коэффициента корреляции ***ρ .***

Из таблицы приложения 3 обратным интерполированием по *β = 0.95* находим значение ******.









Доверительный интервал для коэффициента корреляции ***ρ*** .

**.**

**.**

Т.к***.* ,** то выборочный коэффициент корреляции можно считать надежным, а линейную корреляционную зависимость между ***X*** и  ***Y*** установленной.

7**.  -** уравнение прямой регрессии;

Параметры уравнения регрессии:

.

*.*

Уравнение регрессии в числовом виде:.

Наносим прямую линию регрессии на график поля корреляции.

8.Оценка точности регрессии:

 .

9. Оценка точности параметров уравнения регрессии:

 - средние квадратические отклонения (точность) определения коэффициентов  и  соответственно.

**Вывод:**

1. Между случайными величинами ***X*** и ***Y*** существует прямая корреляционная зависимость с коэффициентом корреляции ***.***
2. Уравнение регрессии****получено с точностью .

Приложение 1

**Таблица значений функции **

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **t** | **0.00** | **0.01** | **0.02** | **0.03** | **0.04** | **0.05** | **0.06** | **0.07** | **0.08** | **0.09** |
| **0.0** | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| **0.1** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.2** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.3** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.4** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.5** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.6** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.7** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.8** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.9** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| **1.0** | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| **1.1** | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| **1.2** | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| **1.5** | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| **1.6** | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| **1.7** | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| **1.8** | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| **1.9** | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| **2.0** | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| **2.1** | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| **2.5** | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| **2.6** | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| **2.7** | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| **2.8** | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| **2.9** | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| **3.0** | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| **3.1** | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| **3.2** | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| **3.3** | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| **3.4** | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| **3.5** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| **3.6** | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.7** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.8** | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| **3.9** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **4.0** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



Приложение 2

**Значения  в зависимости от уровня значимости q и числа степеней свободы ν**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| **ν** | **0.99** | **0.95** | **0.90** | **0.10** | **0.05** | **0.01** | **0.001** |
| **2** | 0.020 | 0.103 | 0.211 | 4.604 | 5.990 | 9.200 | 13.715 |
| **3** | 0.115 | 0.352 | 0.584 | 6.250 | 7.812 | 11.333 | 16.157 |
| **4** | 0.297 | 0.711 | 1.064 | 7.778 | 9.485 | 13.265 | 18.357 |
| **5** | 0.554 | 1.145 | 1.610 | 9.235 | 11.068 | 15.074 | 20.403 |
| **6** | 0.872 | 1.635 | 2.204 | 10.643 | 12.589 | 16.799 | 22.341 |
| **7** | 1.239 | 2.167 | 2.833 | 12.016 | 14.064 | 18.462 | 24.202 |
| **8** | 1.646 | 2.733 | 3.489 | 13.360 | 15.504 | 20.077 | 26.001 |
| **9** | 2.088 | 3.325 | 4.168 | 14.682 | 16.916 | 21.652 | 27.750 |
| **10** | 2.558 | 3.940 | 4.865 | 15.986 | 18.304 | 23.195 | 29.458 |
| **11** | 3.053 | 4.575 | 5.578 | 17.273 | 19.672 | 24.710 | 31.131 |
| **12** | 3.571 | 5.226 | 6.304 | 18.548 | 21.023 | 26.202 | 32.774 |
| **13** | 4.107 | 5.892 | 7.041 | 19.810 | 22.359 | 27.673 | 34.390 |
| **14** | 4.660 | 6.571 | 7.789 | 21.062 | 23.681 | 29.125 | 35.982 |
| **15** | 5.229 | 7.261 | 8.547 | 22.305 | 24.992 | 30.562 | 37.553 |
| **16** | 5.812 | 7.962 | 9.312 | 23.540 | 26.293 | 31.983 | 39.106 |
| **17** | 6.408 | 8.672 | 10.085 | 24.767 | 27.583 | 33.392 | 40.641 |
| **18** | 7.015 | 9.390 | 10.865 | 25.987 | 28.866 | 34.788 | 42.161 |
| **19** | 7.633 | 10.117 | 11.651 | 27.202 | 30.140 | 36.173 | 43.667 |
| **20** | 8.260 | 10.851 | 12.442 | 28.410 | 31.407 | 37.549 | 45.159 |
| **21** | 8.897 | 11.591 | 13.239 | 29.613 | 32.667 | 38.914 | 46.639 |
| **22** | 9.542 | 12.338 | 14.041 | 30.811 | 33.920 | 40.271 | 48.108 |
| **23** | 10.196 | 13.090 | 14.848 | 32.005 | 35.168 | 41.620 | 49.566 |
| **24** | 10.856 | 13.848 | 15.659 | 33.194 | 36.411 | 42.961 | 51.014 |
| **25** | 11.524 | 14.611 | 16.473 | 34.379 | 37.648 | 44.295 | 52.454 |
| **26** | 12.198 | 15.379 | 17.292 | 35.561 | 38.881 | 45.622 | 53.884 |
| **27** | 12.878 | 16.151 | 18.114 | 36.739 | 40.109 | 46.943 | 55.306 |
| **28** | 13.565 | 16.928 | 18.939 | 37.914 | 41.333 | 48.258 | 56.720 |
| **29** | 14.256 | 17.708 | 19.768 | 39.085 | 42.552 | 49.568 | 58.127 |
| **30** | 14.953 | 18.493 | 20.599 | 40.254 | 43.768 | 50.872 | 59.527 |

Приложение 3

**Таблица значений интеграла вероятностей (функции Лапласа)**



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***t*** | ***Ф(t)*** | ***t*** | ***Ф(t)*** | ***t*** | ***Ф(t)*** |
| 0 | 0 | 1,1 | 0,729 | 2,2 | 0,972 |
| 0,1 | 0,08 | 1,2 | 0,77 | 2,3 | 0,978 |
| 0,2 | 0,159 | 1,3 | 0,806 | 2,4 | 0,984 |
| 0,3 | 0,236 | 1,4 | 0,838 | 2,5 | 0,988 |
| 0,4 | 0,311 | 1,5 | 0,866 | 2,6 | 0,991 |
| 0,5 | 0,383 | 1,6 | 0,89 | 2,7 | 0,993 |
| 0,6 | 0,452 | 1,7 | 0,911 | 2,8 | 0,995 |
| 0,7 | 0,516 | 1,8 | 0,928 | 2,9 | 0,996 |
| 0,8 | 0,576 | 1,9 | 0,943 | 3 | 0,997 |
| 0,9 | 0,632 | 2 | 0,954 | 3,1 | 0,998 |
| 1 | 0,683 | 2,1 | 0,964 | 3,2 | 0,999 |

Приложение 4

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | | | | | | | | |
| 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0.99 | 0,999 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0,16 | 0,33 | 0,51 | 0,73 | 1,00 | 1,38 | 2,00 | 3,1 | 6,3 | 12,7 | 31,8 | 63,7 | 636,6 |
| 2 | 0,14 | 0,29 | 0,44 | 0,62 | 0,82 | 1,06 | 1,39 | 1,89 | 2,92 | 4,3 | 6,96 | 9,92 | 31,6 |
| 3 | 0,14 | 0,28 | 0,42 | 0,58 | 0,76 | 0,98 | 1,25 | 1,64 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 12,92 |
| 4 | 0,13 | 0,27 | 0,41 | 0,57 | 0,74 | 0,94 | 1,19 | 1,53 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,6 | 8,61 |
| 5 | 0,13 | 0,27 | 0,41 | 0,56 | 0,73 | 0,92 | 1,16 | 1,48 | 2,02 | 2,57 | 3,36 | 4,03 | 6,869 |
| 6 | 0,13 | 0,26 | 0,4 | 0,55 | 0,72 | 0,91 | 1,13 | 1,44 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,959 |
| 7 | 0,13 | 0,26 | 0,4 | 0,55 | 0,71 | 0,9 | 1,12 | 1,41 | 1,89 | 2,36 | 3 | 3,5 | 5,408 |
| 8 | 0,13 | 0,26 | 0,4 | 0,55 | 0,71 | 0,89 | 1,11 | 1,4 | 1,86 | 2,31 | 2,9 | 3,36 | 5,041 |
| 9 | 0,13 | 0,26 | 0,4 | 0,54 | 0,7 | 0,88 | 1,1 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,781 |
| 10 | 0,13 | 0,26 | 0,4 | 0,54 | 0,7 | 0,88 | 1,09 | 1,37 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,587 |
| 11 | 0,13 | 0,26 | 0,4 | 0,54 | 0,7 | 0,88 | 1,09 | 1,36 | 1,8 | 2,2 | 2,72 | 3,11 | 4,437 |
| 12 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,54 | 0,7 | 0,87 | 1,08 | 1,36 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 4,318 |
| 13 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,54 | 0,69 | 0,87 | 1,08 | 1,35 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 4,221 |
| 14 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,54 | 0,69 | 0,87 | 1,08 | 1,35 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 4,14 |
| 15 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,54 | 0,69 | 0,87 | 1,07 | 1,34 | 1,75 | 2,13 | 2,6 | 2,95 | 4,073 |
| 16 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,54 | 0,69 | 0,86 | 1,07 | 1,34 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 4,015 |
| 17 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,07 | 1,33 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,9 | 3,965 |
| 18 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,07 | 1,33 | 1,73 | 2,1 | 2,55 | 2,88 | 3,922 |
| 19 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,07 | 1,33 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,883 |
| 20 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,06 | 1,33 | 1,72 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,85 |
| 21 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,06 | 1,32 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,819 |
| 22 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,06 | 1,32 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,792 |
| 23 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,69 | 0,86 | 1,06 | 1,32 | 1,71 | 2,07 | 2,5 | 2,81 | 3,768 |
| 24 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,86 | 1,06 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,8 | 3,745 |
| 25 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,86 | 1,06 | 1,32 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,725 |
| 26 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,86 | 1,06 | 1,31 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,707 |
| 27 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,86 | 1,06 | 1,31 | 1,7 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,689 |
| 28 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,85 | 1,06 | 1,31 | 1,7 | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,674 |
| 29 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,85 | 1,06 | 1,31 | 1,7 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,66 |
| 30 | 0,13 | 0,26 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,85 | 1,05 | 1,31 | 1,7 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,646 |
| 40 | 0,13 | 0,25 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,85 | 1,05 | 1,3 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,7 | 3,551 |
| 60 | 0,13 | 0,25 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,85 | 1,05 | 1,3 | 1,67 | 2 | 2,39 | 2,66 | 3,46 |
| 120 | 0,13 | 0,25 | 0,39 | 0,53 | 0,68 | 0,85 | 1,04 | 1,3 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 3,37 |
|  | 0,13 | 0,25 | 0,39 | 0,52 | 0,67 | 0,84 | 1,03 | 1,28 | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,29 |

Двусторонние границы распределения Стьюдента: значения , определяемые уравнением 

Литература

1. Нефедова Г.А., Ащеулов В.А. Теория вероятностей и математическая статистика в конспективном изложении. Новосибирск, СГГА, 2006.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1969, 4 изд.
3. Агапов Г.И Задачник по теории вероятности. - М.: ВШ., 1986.
4. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: 1975.
5. Лесных Н.Б. Основы теории вероятностей и математической статистики. Теория ошибок измерений / Учебное пособие для студентов заочного факультета.- Новосибирск, изд. СГГА, 1992.