Теоретическое задание №1

Задание 1

Количество баллов: 1

Найдите градиент

$$\nabla_{X_0} \mathrm{tr} \left(AX^2BX^{-T} \right)$$

Задание 2

Количество баллов: 1

Пусть X — матрица $m \times n$ ранга n, Ω — положительно определённая матрица $n \times n$, W — матрица размера $k \times n$. Найдите матрицу G размера $k \times m$, для которой функция $f(G) = \mathrm{tr} \left(G\Omega G^T \right)$ принимает минимальное значение на подмножестве, задаваемом условием $GX = W$.

Задание 3

Количество баллов: 1.5

Задана выборка $x_1, x_2 \dots x_n$ из распределения с плотностью

$$\rho(x) = \frac{4x^3}{\theta^4} I[x \in [0, \theta])$$

с неизвестным параметром θ.
Предложите асимптотически нормальную оценку для

$$\tau(\theta) = \theta^2 + \theta + 1 + \frac{1}{\theta}$$

и найдите ее асимптотическую дисперсию.

Задание 4

Количество баллов: 1.5

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - выборка из экспоненциального распределения с параметрами сдвига и масштаба β и α соответственно. То есть плотность имеет вид

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{(\beta - x)/\alpha} I\{x \geq \beta\}$$

Найдите для $\theta = (\alpha, \beta)$ оценку максимального правдоподобия.

Задание 5

Количество баллов: 1.5

Пусть случайная величина x имеет распределение Бернулли с (неизвестным) параметром p, а $x_1 \ldots, x_n$ — некоторые независимые реализации этой случайной величины. Рассмотрим две оценки на параметр p:

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{и} \quad \widetilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{n+2}$$

Кстати, вы узнали, откуда взялась вторая оценка?
Ответьте также на вопросы:

1. Являются ли эти оценки несмещёнными?
2. Если они смещены, то в большую или в меньшую сторону?
3. Чему равно MSE этих оценок? Сравните эти две оценки с точки зрения MSE при $n = 10$

Задание 6

Количество баллов: 1.5

Однажды Саша собралась на пикник, и за вечер до этого она решила оценить вероятность холодной погоды. Ради простоты будем считать, что бывает только три значения температуры: жарко, тепло и холодно. Пусть вероятности того, что на пикнике будет жарко, тепло или холодно равны p_1, p_2 и p_3 соответственно, причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Жизненный опыт подсказывает Саше, что априорная плотность вероятности получить тот или иной вектор вероятностей $q\left[(p_1, p_2, p_3)\right]$ пропорциональна $q \propto p_1^2 p_2^3 p_3^9$. Поискав в интернете, Саша нашла погоду в этот день за предыдущие года: $x_1, \ldots, x_n \in \{\text{холодно, тепло, жарко}\}$. Найдите значение p_1, p_2, p_3, максимизирующие апостериорную вероятность при данных $x_1, \ldots x_n$, считая, что они независимые и одинаково распределенные с вероятностями (p_1, p_2, p_3).

Задание 7

Количество баллов: 2

Пусть $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, причем $cov(x_1, x_2) = \gamma$.
Найдите $E(e^{x_1} | x_1 + x_2 = b)$