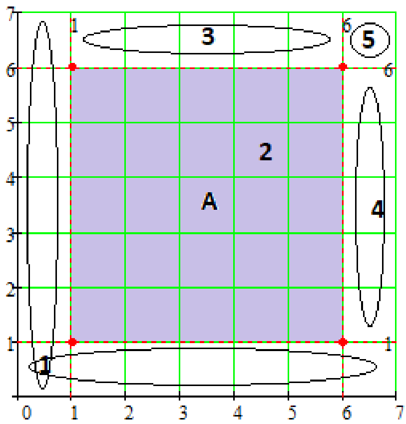
Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей для НФИбд-02-20 (2 модуль).

Вариант №28

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(1;1),(1;6),(6;1),(6;6)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси Х и У точки падения частицы.

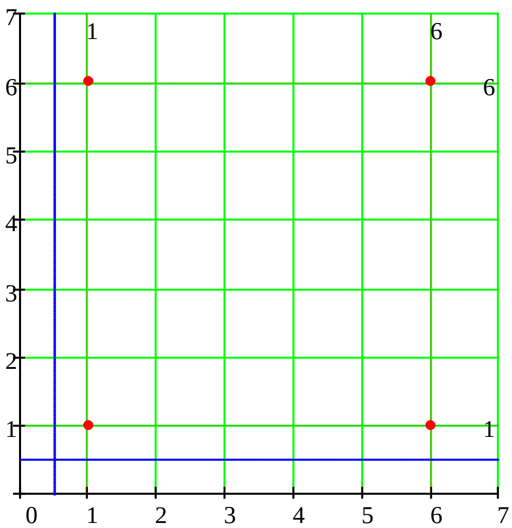
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).



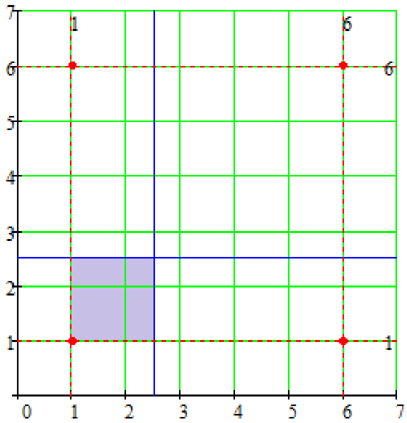
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x<1)$или $(y<1)$:



Пересечения с четырёхугольником нет, $F_{\xi\eta}(x,y)=0$.

Область 2: $(x, y) \in D$:

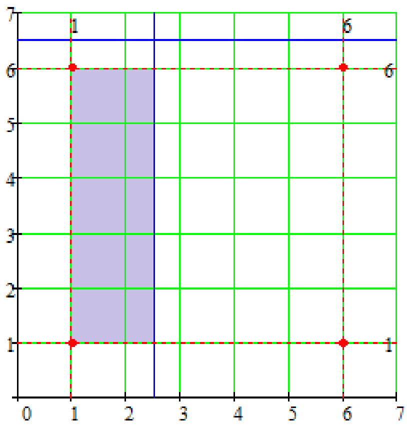


$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-3}^{x}\int_{-1}^{y} dxdy$$

$$S_D = 25 - \text{площадь области.}$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25}\int_{1}^{x} dx \int_{1}^{y} dy = \frac{(x-1)(y-1)}{25}.$$

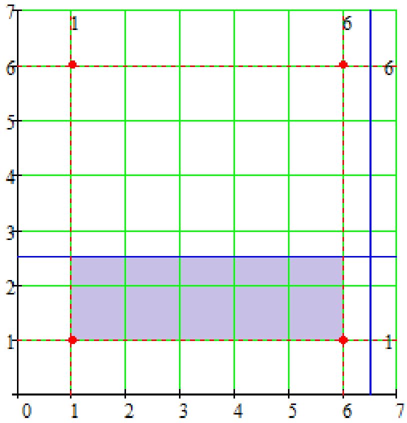
Область 3: $(1 < x \le 6)$и$(y > 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{S_D}\int_{-3}^{x}\int_{-1}^{4} dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{25}\int_{1}^{x} dx \int_{1}^{6} dy = \frac{x-1}{5}.$$

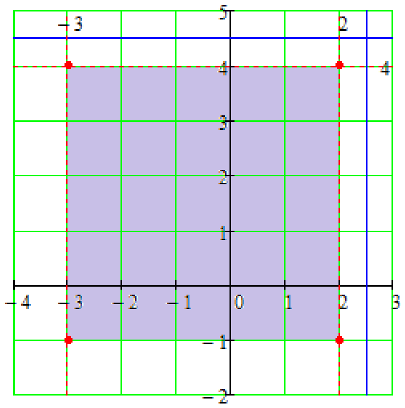
Область 4: $(x > 6)$и$(1 < y \le 6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int_1^6\int_1^y dxdy$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{25}\int_1^6 dx\int_1^y dy=\frac{y-1}{5}.$$

Область 5: $(x>6)$и$(y>6)$:



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\frac{1}{S_D}\int_1^6\int_1^6 dxdy=\frac{1}{25}\int_1^6\int_1^6 dxdy=1.$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & (x<1)\text{ или }(y<11)\\ \dfrac{(x-1)(y-1)}{25}, & (x,y)\in D\\ \dfrac{x-1}{5}, & (1<x\le 6)\text{и}(y>6)\\ \dfrac{y-1}{5}, & (x>6)\text{и}(1<y\le 6)\\ 1, & (x>6)\text{и}(y>6)\end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 25, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_{\xi}(x) = \int_1^6 p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{25}\int_1^6 1\,dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, x \in [1;6] \\ 0, x \notin [1;6] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_1^x p_{\xi}(x)\,dx = \frac{x-1}{5}, \qquad 1 < x \le 6$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{x-1}{5}, & 1 < x \le 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_1^6 p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{25}\int_1^6 1\,dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & y \in [1;6] \\ 0, & y \notin [1;6] \end{cases}.$$

$$F_{\eta}(y) = \int_1^y p_{\eta}(y)\,dy = \frac{y-1}{5}, 1 < y \le 6$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \frac{y-1}{5}, & 1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

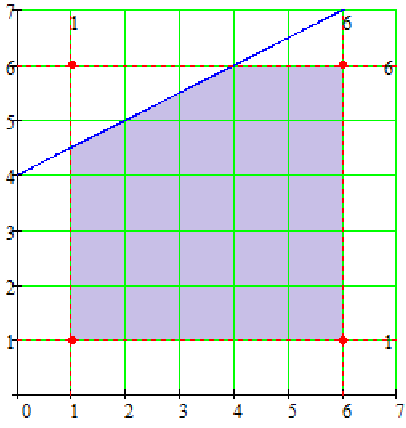
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{5}, & 1 < x \le 6; \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{5}, & 1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = -\xi + 2\eta$ в точке $z = 8$.



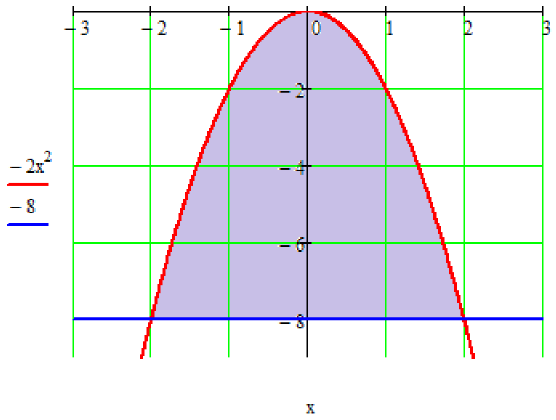
$$F_\mu(8) = P(-\xi + 2\eta < 8) = P\left(\eta < 4 + \frac{\xi}{2}\right) = \frac{S_D}{S} = \frac{25 - \dfrac{3 \cdot 1.5}{2}}{25} = 0.91$$

12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x,y) = C(x^2 - 2y), (x,y) \in D,$$

где область D: $\{(x,y):, y = -8; y = -2x^2\}$. Найдите:

а) Постоянную C.



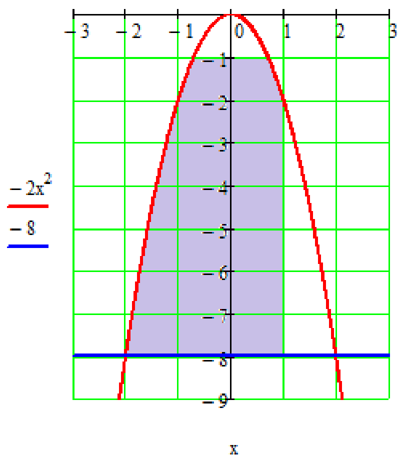
По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = 1,$$

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-8}^{-2x^2} C\left(x^2 - 2y\right) dy = C\int_{-2}^{2} \left(x^2 y - y^2\right)\Big|_{-8}^{-2x^2} dx =$$

$$= C\int_{-2}^{2} (8x^2 - 6x^4 + 64)dx = C\left(\frac{8x^3}{3} - \frac{6x^5}{5} + 64x\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{3328}{15}C \Longrightarrow C = \frac{15}{3328}.$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (1;-1)$



$$y = -2x^2 = -1, \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F_{\xi\eta}(1,-1) = P(\xi < 1, \eta < -1) = 1 - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-1}^{-2x^2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy$$

$$-\int_{1}^{2} dx \int_{-8}^{-2x^2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = 1 - \frac{15}{3328}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-1}^{-2x^2} (x^2 - 2y)\,dy -$$

$$-\frac{15}{3328}\int_{1}^{2} dx \int_{-8}^{-2x^2} (x^2 - 2y)\,dy = 1 - \frac{15}{3328}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x^2y - y^2)|_{-1}^{-2x^2} dx -$$

$$-\frac{15}{3328}\int_{1}^{2} (x^2y - y^2)\big|_{-8}^{-2x^2} dx = 1 - \frac{15}{3328}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x^2 - 6x^4 + 1)dx -$$

$$-\frac{15}{3328}\int_{1}^{2} (8x^2 - 6x^4 + 64)dx = 1 - \frac{15}{3328}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{6x^5}{5} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -$$

$$-\frac{15}{3328}\left(-\frac{8x^3}{3} - \frac{6x^5}{5} + 64x\right)\Bigg|_{1}^{2} = 1 - \frac{15}{3328}\cdot\frac{13\sqrt{2}}{15} - \frac{15}{3328}\cdot\frac{682}{15} = \frac{\sqrt{2}}{256} + \frac{341}{1664}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-8}^{-2x^2} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{15}{3328}\int\limits_{-8}^{-2x^2} (x^2 - 2y)\,dy = \frac{15}{3328}(x^2y - y^2)|_{-8}^{-2x^2} =$$

$$= \frac{15}{52} - \frac{45x^4}{1664} + \frac{15x^2}{416};$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{52} - \dfrac{45x^4}{1664} + \dfrac{15x^2}{416}, x \in [-2;2] \\ \qquad 0, \qquad x \notin [-2;2] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-2}^{x}\left(\frac{15}{52} - \frac{45x^4}{1664} + \frac{15x^2}{416}\right)dx = \left(\frac{15x}{52} - \frac{9x^5}{1664} + \frac{5x^3}{416}\right)\Bigg|_{-2}^{x} =$$

$$= \frac{15x}{52} - \frac{5x^3}{416} - \frac{9x^5}{1664} + \frac{1}{2}.$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{15x}{52}-\dfrac{5x^3}{416}-\dfrac{9x^5}{1664}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

$$y=-2x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{y}{2}}$$

$$p_\eta(y)=\int_{-\sqrt{-\frac{y}{2}}}^{\sqrt{-\frac{y}{2}}} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\frac{15}{3328}\int_{-\sqrt{-\frac{y}{2}}}^{\sqrt{-\frac{y}{2}}}(x^2-2y)\,dx=\frac{15}{3328}\left(\frac{x^3}{3}-2yx\right)\Bigg|_{-\sqrt{-\frac{y}{2}}}^{\sqrt{-\frac{y}{2}}}=$$

$$=-\frac{5\sqrt{2}y\sqrt{-y}}{512}.$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}-\dfrac{5\sqrt{2}y\sqrt{-y}}{512}, y\in[-8;0]\\ 0, y\notin[-8;0]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int_{-8}^{y}p_\eta(y)\,dy=-\frac{5\sqrt{2}}{512}\int_{-8}^{y}y\sqrt{-y}\,dy=-\frac{\sqrt{2}y^{\frac{5}{2}}}{256}\Bigg|_{-8}^{y}=1-\frac{\sqrt{2}y^2\sqrt{y}}{256}$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, y\le -8\\ 1-\dfrac{\sqrt{2}y^2\sqrt{y}}{256}, -8<y\le 0\\ 1, & y>0\end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y)=\frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y)=\frac{\frac{15}{3328}(x^2-2y)}{-\frac{5\sqrt{2}y\sqrt{-y}}{512}}=-\frac{3\sqrt{2}(x^2-2y)}{13y\sqrt{-y}} \text{ при } (x,y)\in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x) = \frac{\frac{15}{3328}(x^2-2y)}{\frac{15}{52} - \frac{45x^4}{1664} + \frac{15x^2}{416}} = \frac{x^2-2y}{2(4x^2-3x^4+32)} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

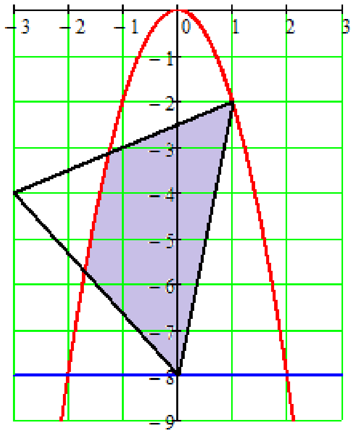
$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y) = -\int_{-2}^{x} \frac{3\sqrt{2}(x^2-2y)}{13y\sqrt{-y}}dx = \frac{\sqrt{2}(x+2)(2x-x^2+6y-4)}{13y\sqrt{-y}} \text{ при } (x,y) \in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int_{-8}^{y} \frac{x^2-2y}{2(4x^2-3x^4+32)}dy = \frac{(y+8)(x^2-y+8)}{2(4x^2-3x^4+32)} \text{ при } (x,y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(1;-2), (0;-8), (-3;-4)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$y = 6x - 8; y = -\frac{4}{3}x - 8; y = \frac{x}{2} - 2.5$$

Точки пересечения с параболой:

$$x_1 : -\frac{4}{3}x - 8 = -2x^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{37}}{3}$$

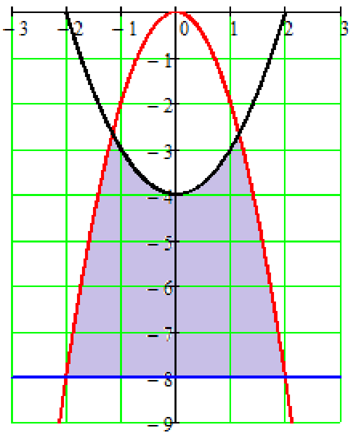
$$x_2 : \frac{x}{2} - 2.5 = -2x^2 \Rightarrow x_2 = -1.25$$

$$P = \frac{15}{3328}\int_{\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{37}}{3}}^{-1.25} dx \int_{-\frac{4}{3}x-8}^{-2x^2} (x^2-2y)\,dy + \frac{15}{3328}\int_{-1.25}^{0} dx \int_{-\frac{4}{3}x-8}^{\frac{x}{2}-2.5} (x^2-2y)\,dy +$$

$$+\frac{15}{3328}\int_{0}^{1} dx \int_{6x-8}^{\frac{x}{2}-2.5} (x^2-2y)\,dy$$

e) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = 4-\xi^2+\eta$ в точке $z=0$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(0) = P(4-\xi^2+\eta\ <0) = P(\eta<\xi^2-4)$$



$$y = x^2-4$$

$$x^2-4 = -2x^2 \Longrightarrow \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$F_\mu(0) = 1-\frac{15}{3328}\int_{-\sqrt{\frac{4}{3}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} dx \int_{x^2-4}^{-2x^2} (x^2-2y)\,dy.$$