

Учебные материалы по Электродинамике конденсированных сред Факультет физики ВШЭ

Текст скомпилирован 5 марта 2022 г., 09:04

Учебные материалы (программа курса по неделям с задачами на семинар и домашнее задание, конспект лекций и дополнительная литература) и текущая ведомость успеваемости находятся на google.drive:

папка с учебными материалами

Домашнее задание сдаётся каждую неделю. Домашние задания прошлых недель, по каким-то причинам не(до)выполненные, можно доносить, но баллы будут выставляться с понижающим коэффициентом (около 0.5).

Домашние задания и контрольные желательно выполнять на листах А4. Сдавать домашние задания и контрольные лучше и желательно в электронном виде. Такой порядок позволяет более оперативно производить проверку работ и установить обратную связь. Для изготовления скана работы в требуемом виде на смартфоне следует использовать программы

android: **Genius Scan**
iphone: **tapScanner** или **Adobe Scan**

Эта программа даёт возможность изготовить из фотографии *вычищенный pdf-документ в чёрно-белом* формате. Разумеется, допустимы и некоторые другие программы. Но сканы в шкале серого, или с полями, или с грязным фоном сильно не приветствуются. Совершенно невозможен приём архивов с фотографиями отдельных страниц.

У некоторых студентов есть touch-планшеты с пером, благодаря чему они могут подготавливать свои рукописные работы непосредственно в электронном виде.

Это приветствуется. В этом случае студент может использовать несколько цветов за исключением красного цвета, которым преподаватель будет выделять свои пометки при проверке работ.

Оформляя лист, следует выделить сверху информационное поле горизонтальной чертой. В этом поле указывается *Фамилия Имя* автора, *тип работы* (домашнее задание №2, контрольная №1 и т.д.), *номер листа*. Название pdf-файла надо составлять по шаблону:

Ларина Татьяна - дз03.pdf
Ларина Татьяна - дз03 - доделки.pdf
Ларина Татьяна - кр2.pdf

Шаблон определяет, в том числе, пробелы, дефисы, строчные и прописные буквы. Совершенно не допускается машинное название pdf-файла, автоматически сгенерированное при его первичном создании.

Высылать домашние задания надо с корпоративной почты ВШЭ. Высылать с другой почты не желательно и можно только в том случае, если по названию почтового адреса ясно можно понять фамилию и первую букву имени отправителя, а в реквизитах почтового адреса указаны полностью Фамилия и Имя. Адреса преподавателей:

- Вергелес Сергей Сергеевич:
ssvergeles@yandex.ru
- Воинцев Иван Алексеевич:
ivointsev@hse.ru

Глава 1

ПРОГРАММА КУРСА

Темы лекций и семинаров по курсу “Электродинамика конденсированных сред”

1-1 Уравнения Максвелла в среде; плоские волны

Уравнения Максвелла в среде. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость. Принцип причинности; соотношения Крамерса-Кронига. Две простейшие модели электромагнитного отклика сред: идеальная плазма и среда с фоновым резонансом. Плоские монохроматические волны. Волновые пакеты — фазовая и групповая скорость, дисперсия. Граничные условия для уравнений Максвелла.

1-2 Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом

Поток энергии в электромагнитной волне; вектор Умова-Пойнтинга. Плотность энергии переменного электромагнитного поля; формула Бриллюэна. Тепловые потери при распространении электромагнитной волны.

1-3 Анизотропные среды. Магнитооптика

Установление симметрии тензора диэлектрической и магнитной восприимчивости. Обобщение выражений для плотности энергии и мощности тепловых потерь для анизотропной среды. Феноменологическое рассмотрение магнитооптических эффектов. Эффект Фарадея. Нахождение тензора диэлектрической восприимчивости для идеальной плазмы с постоянным наложенным магнитным полем. Циклотронный резонанс.

1-4 Скин-эффект

Скин-эффект: запись граничных условий в форме Леонтовича; условие применимости описания отражения волны от поверхности в терминах скин-эффекта. Нормальный скин-эффект. Связь поверхностного импеданса с тепловым излучением; скорость излучения нагретой поверхности в пустоту (через ФДТ).

1-5 Волноводы с металлическими стенками

Распространение волн в полых волноводах с идеально проводящими стенками. Волноводы с односвязными полостями. Дисперсия мод, частота отсечки. Определение длины распространения мод в полых металлических волноводах с учётом потерь на стенках. Коаксиальный волновод.

1-6 Диэлектрические волноводы

Плоские диэлектрические волноводы. Аксиально-симметричные диэлектрические волноводы. Оптоволокно.

1-7 Поверхностные электромагнитные волны

Поверхностные электромагнитные волны. Поверхностные плазмоны: условия существования, фазовая и групповая скорости. Структура поля и плотности потока энергии. Дисперсия поверхностных плазмонов для модели Друде.

1-8 Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах.

Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Двумерный и трёх-мерный случаи. Оптическая теорема. Сечения рассеяния, поглощения и взаимодействия. Предел идеального металла, предел малых длин волн. Предел рассеяния на тонком стержне и на малом шаре субволнового диаметра; оценки по порядку величины для амплитуд рассеяния и поглощения. Прохождение света через коллоидные растворы металлических наночастиц. Одномерное рассеяние.

1-9 Электростатика

Однородный эллипсоид во внешнем однородном поле.

1-10 Магнитостатика магнетиков. Доменная структура магнетиков.

Магнитное поле ферромагнетика. Магнитная энергия ферромагнетиков, различные формы её записи. Энергия одноосного магнетика: энергии анизотропии и неоднородности. Доменная структура в одноосном кристалле, ширина и энергия доменной стенки.

§1-1. Уравнения Максвелла в среде; плоские волны.

Уравнения Максвелла в среде. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость. Уравнения Максвелла в вакууме. Разделение полного тока на поляризационный ток (ток связанных зарядов), циркулирующий ток (ток, связанной с намагниченностью среды) и ток свободных зарядов. Получение уравнений Максвелла в среде из уравнений Максвелла в пустоте. Диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость: понятие о временной и пространственной дисперсии. Литература: § 2-2.

В ходе решения физических задач часто бывает полезным иметь возможность проводить описание отклика среды на электромагнитное поле, переходя от уравнений Максвелла в среде к уравнениям Максвелла в пустоте и обратно. Этот переход может прояснить физическую суть явления.

Симметрия тензоров диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости. Литература: Глава 8,

Принцип причинности; соотношения Крамерса-Кронига. Связь между электрической индукцией и электрическим полем в частотном представлении в случае нетривиальной временной дисперсии и отсутствии пространственной дисперсии. Аналитические свойства функции отклика в частотном представлении; физический смысл полюсов функции отклика. Соотношение Крамерса-Кронига. Литература: Ландау и Лифшиц (1982, §82).

• **Задача 1:** Вычислить диэлектрическую проницаемость в частотном представлении $\epsilon(\omega)$, если известно, что коэффициент поляризуемости (диэлектрическая восприимчивость) во временном представлении имеет зависимость $\chi(t) = A \exp(-t/\tau)$.

Две простейшие модели электромагнитного отклика сред: плазма с затуханием и среда с фоновым резонансом. Модель Друде для электронной плазмы в τ -приближении: запись кинетического уравнения в τ -приближении, выражение проводимости σ при конечной частоте ω через проводимость σ_0 при нулевой частоте. Плазменная частота, предел низких частот $\omega\tau \ll 1$; связь диэлектрической проницаемости с проводимостью. Модель диэлектрика как среды,

состоящей из лорентцевых осцилляторов. Литература: Памятных и Туров (2000, §15, §17)

• **Задача 2:** Найти диэлектрическую проницаемость $\epsilon(\omega)$ для среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов.

Плоские монохроматические волны. Уравнение Гельмгольца (волновое уравнение) для свободного электромагнитного поля в среде. Разложение электромагнитного поля по временным и пространственным гармоникам. Связь закона дисперсии с дисперсией диэлектрической восприимчивости и магнитной проницаемости. Показатели преломления и поглощения. Прозрачные среды.

Волновые пакеты – фазовая и групповая скорость, дисперсия. Понятие о волновом пакете, спектральная ширина волнового пакета. Плоской волновой пакет. Фазовая скорость. Групповая скорость. Огибающая волнового пакета. Вторая дисперсия. Сопровождающая система координат. Уравнение Шредингера на волновой пакет в сопровождающей системе координат.

Литература: §2-3.

• **Задача 3:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость: $\Psi(z, t = 0) = A \exp(-z^2/2\zeta^2)$, где ζ/v_g – длительность импульса, v_g – групповая скорость, A – начальная амплитуда импульса. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия β_2 .

• **Задача 4:** Получить закон дисперсии для волн, распространяющихся в плазме, отклик которой даётся моделью Друде.

1-1.1 Домашнее задание

• **Задача 5:** Получите уравнение на огибающую в лабораторной запаздывающей системе координат, в которой одной из координат является $t_{\text{ret}} = t - z/v_g$, а другой – z .

• **Задача 6:** Пусть изотропная среда характеризуется диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$ и магнитной восприимчивостью $\mu(\omega)$. Найдите обобщённую диэлектрическую проницаемость $\epsilon_{\text{full}}(\omega)$ (2.11).

§1-2. Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом.

Поток энергии в электромагнитной волне; вектор Умова-Пойнтинга. Условие непрерывности потока энергии на границе раздела; связь этого условия с граничными условиями для уравнений Максвелла в среде. Выражение для потока энергии через комплексные амплитуды полей.

Литература: § 3-2

Плотность энергии переменного электромагнитного поля; формула Бриллюэна. Запись выражения для плотности электромагнитной энергии через комплексные амплитуды. Условие применимости формулы Бриллюэна – малые потери.

• **Задача 1:** Показать, что в прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$u\bar{W} = \bar{S}, \quad (1.1)$$

где u – групповая скорость, \bar{W} – средняя по времени плотность запасённой электромагнитной энергии, \bar{S} – среднее по времени абсолютное значение вектора Умова-Пойнтинга.

Тепловые потери при распространении электромагнитной волны. Запись выражения для объёмной плотности тепловых потерь через комплексные амплитуды полей. Выражение для полного количества выделившегося тепла для импульса конечной длительности.

• **Задача 2:** Показать, что в почти прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$\frac{\bar{S}}{\bar{Q}} = \frac{\lambda_0}{4\pi k}, \quad (1.2)$$

где $k = \text{Im} \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель поглощения среды, λ_0 – длина волны в вакууме, а \bar{Q} – средняя по времени объёмная плотность потерь волны, уходящих в тепло.

1-2.1 Домашнее задание 2

• **Задача 3:** Покажите, для системы свободных зарядов при наличии трения диэлектрическая проницае-

мость, как функция частоты, может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}, \quad (1.3)$$

где ω_p – плазменная частота (и для модели плазмы n_e – концентрация зарядов, m_e – масса зарядов), а γ – декремент затухания.

Найдите диэлектрическую восприимчивость $\chi(\tau)$ (2.6d), соответствующую проницаемости (9.3). Объясните качественно поведение функции $\chi(\tau)$ при малых и больших временах.

• **Задача 4:** Рассмотрите нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$\left(-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\right)\Phi = \gamma|\Phi|^2\Phi, \quad \Phi = \Phi(t, x), \quad (1.4)$$

в котором коэффициент нелинейности положителен, $\gamma > 0$, а коэффициент второй дисперсии β_2 для может быть как положительным, так и отрицательным.

- Плоские волны $\exp(ikz - i\omega t)$ по-прежнему являются решением уравнения, как и в линейном пределе. Исследуйте, как зависит дисперсия плоских волн $k(\omega, P)$ в зависимости от волнового числа и интенсивности $P = |\Phi|^2$.
- Рассмотрите устойчивость плоских волн на плоскости двух параметров – второй дисперсии β_2 и интенсивности волны P . Для этого надо рассмотреть начальные условия $\Phi_{\omega, P}(1 + \epsilon)$, где $\Phi_{\omega, P}(z, t)$ – решение для плоской волны, а $\epsilon(z, t)$ – произвольная малая добавка; после этого надо установить линеаризованное уравнение на добавку ϵ и рассмотреть её эволюцию по координате z . В каких областях волна оказывается устойчивой (т.е. при любом начальном $\epsilon_0(t)$ поправка $\epsilon(z, t)$ не растёт по амплитуде со временем), а в каких нет? Нарисуйте эти области на графике.

§1-3. Анизотропные среды. Магнитооптика.

Обобщение выражений для плотности энергии и мощности тепловых потерь для анизотропной среды. Запись выражений для плотности энергии и мощности тепловых потерь для электромагнитной волны в анизотропной среде: физический смысл эрмитовой и анти-эрмитовой частей тензоров диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости.

Распространение плоских электромагнитных волн в анизотропной прозрачной среде. Уравнение на дисперсионное соотношение в виде уравнений Френеля (в неявном виде). Геометрическая интерпретация поверхности постоянной частоты в волновом пространстве. Групповая скорость, лучевой вектор. Симметрия уравнений Максвелла для лучевого вектора и вектора $\mathbf{n} = \mathbf{ck}/\omega$. Литература: Ландау и Лифшиц, 1982, § 97.

Распространение плоских электромагнитных волн в одноосных кристаллах. Обыкновенная и необыкновенная поляризации. Законы дисперсии для поляризаций. Лучевой вектор для необыкновенной поляризации. Литература: там же, § 98.

• **Задача 1:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением. Также обсудить ситуацию, когда исходно изотропное тело помещено в однородное электрическое поле (эффект Керра).

1-3.1 Семинар

Феноменологическое рассмотрение магнитооптических эффектов. Эффект Фарадея. Нахождение тензора диэлектрической восприимчивости для идеальной плазмы с постоянным наложенным магнитным полем. Циклотронный резонанс.

• **Задача 2:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением, обусловленным наложенным постоянным магнитным полем (в отсутствие магнитного поля среда изотропна). Литература: §2-7.

• **Задача 3:** Показать, что при распространении линейно поляризованной волны в изотропной среде

вдоль наложенного на неё магнитного поля плоскость её поляризации испытывает равномерное вращение по мере распространения (эффект Фарадея).

• **Задача 4:** Найти явный вид диэлектрической проницаемости для идеальной классической плазмы, находящейся в однородном магнитном поле, рассмотрев распространение линейных волн вдоль магнитного поля (обе поляризации) и поперёк него (с линейной поляризацией направленной вдоль магнитного поля).

1-3.2 Домашнее задание

• **Задача 5:** Показать, что при распространении радиоволн в ионосфере следует ожидать резонансных явлений близки длины волны $\lambda \approx 210$ м. Принять напряжённость магнитного поля земли $H = 0.5$ э.

• **Задача 6:** Определите величину эффекта Фарадея для плазмы в слабом магнитном поле, вычислив разность волновых векторов для двух круговых поляризаций (2.45). Пусть магнитное поле направлено вдоль оси Oz и в этом же направлении распространяется электромагнитная линейно поляризованная волна. В каком направлении (по или против часовой стрелки) будет вращаться поляризация этой волны по мере её распространения, если смотреть со стороны больших значений координаты z ?

• **Задача 7:** Главная ось одноосного кристалла направлена вдоль оси Oz декартовой системы координат. Диэлектрические проницаемости кристалла равны $\varepsilon_{\perp} = 2$, $\varepsilon_{\parallel} = 2.2$. Боковая поверхность этого кристалла совпадает с плоскостью Oxz , кристалл находится в области $y < 0$. Луч линейно поляризованного монохроматического света падает на поверхность в плоскости Oyx под углом $\pi/4$ (направление распространения $\mathbf{k}_{\text{in}} \propto (1, -1, 0)$). Направление поляризации в падающей волне таково, что комплексная амплитуда вектора электрического поля в ней $\mathbf{E}_{\text{in}} \propto (1, 1, \sqrt{2})$. Найдите в каком направлении будут распространяться прошедшие обыкновенная и необыкновенная волны. Нарисуйте чертёж, который бы демонстрировал найденные углы распространения. Указание: в качестве граничных условий на поверхности надо требовать сохранения частоты и касательной к поверхности компоненты волнового вектора.

§1-4. Скин-эффект.

Граничные условия в форме Леонтовича позволяют решать задачу об отражении электромагнитных волн от поверхности тела, избегая рассмотрения того, что происходит внутри самого этого тела. Отражательные свойства поверхности характеризуются только поверхностным импедансом. Практическое применение этого подхода весьма обширно и включает в себя радиолокацию, распространения переменного тока по проводам, и другие области электротехники.

Скин-эффект: запись граничных условий в форме Леонтовича; условие применимости описания отражения волны от поверхности в терминах скин-эффекта. *Связь тангенциальных компонент электрического и магнитных полей на границе оптически плотного материала. Глубина скин-слоя. Условие применимости локальной связи между полями: малая величина глубины проникновения в материал (длины волны в материале) по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве и радиусом кривизны поверхности. Принцип причинности для поверхностного импеданса; принцип причинности для обратного поверхностного импеданса. Физический смысл поверхностного импеданса: связь между электрическим полем и поверхностным током.*

Литература: Ландау и Лифшиц (там же, §87), §5-2.

Нормальный скин-эффект. Поверхностный импеданс. Глубина проникновения.

1-4.1 Семинар

• **Задача 1:** Выразить поверхностный импеданс через диэлектрическую проницаемость ε и магнитную восприимчивость μ отражающего материала в случае нормального скин-эффекта. Связать между собой глубину скин-слоя δ , частоту волны ω и поверхностный импеданс ζ .

• **Задача 2:** Вычислить закон дисперсии поверхностного импеданса для почти идеального металла,

дисперсия проводимости которого соответствует модели Друде.

• **Задача 3:** Определить коэффициент отражения от поверхности металла как функцию угла падения и поляризации, зная поверхностный импеданс металла.

• **Задача 4:** Определить площадь полезного сечения для рутов диаметром 10 см, сделанных из меди и из стали, по которым течёт переменный ток с частотой 50 Гц. Принять, что сопротивление меди равно $\sigma_{Cu} = 580$ ксим/см, магнитная восприимчивость $\mu_{Cu} = 1$, сопротивление стали $\sigma_{Fe} = 100$ ксим/см, магнитная восприимчивость стали $\mu_{Fe} = 1000$. *Указание:* найти поверхностный импеданс для обоих материалов, и через него определить глубину скин-слоя на данной частоте. Определить поверхностные импедансы для обоих материалов. *Пояснение:* для указанных параметров глубина скин-слоя в меди — $\delta_{Cu} = 9.34$ мм, в стали — $\delta_{Fe} = 0.74$ мм.

Обсуждение области существования в частотном представлении нормального скин-эффекта для металла через рассмотрение кинетического уравнения Больцмана: длина свободного пробега должна быть меньше чем масштаб, на котором изменяется электрическое поле, т.е. глубина проникновения. Литература: Абрикосов (1987, §7.2).

1-4.2 Домашнее задание

Связь поверхностного импеданса с тепловым излучением Скорость излучения нагретой поверхности в пустоту.

• **Задача 5:** Определите интенсивность теплового излучения, производимую поверхностью металла, характеризующуюся поверхностным импедансом $\zeta(\omega)$. А именно, найдите спектральную плотность интенсивности в малый телесный угол $d\omega$, $dI_\omega/d\omega$.

Указание: Пусть R — коэффициент отражения, $dI_\omega^b/d\omega$ — величина, соответствующая чёрному излучению. Искомая величина есть $dI_\omega/d\omega = (1 - R)dI_\omega^b/d\omega$, это соотношение называется законом Кирхгофа.

§1-5. Волноводы с металлическими стенками

Распространение волн в полых волноводах с идеально проводящими стенками. Волноводы с односвязными полостями. Дисперсия мод, частота отсечки. Определение длины распространения мод в полых металлических волноводах с учётом потерь на стенках. Практическое применение волноводов. Выражение всех компонент полей \mathbf{E} и \mathbf{H} через компоненты, направленные вдоль оси волновода, E_z и H_z ; классификация мод. Достаточные граничные условия для ТМ- и ТЕ-волн. Получение дисперсионного соотношения, минимальная частота распространения. Конечность длины распространения мод: выражение коэффициента затухания через поверхностный импеданс металла (граничные условия Леонтовича). Литература: Пункт 6-2.1, Ландау и Лифшиц (1982, §91), Топтыгин (2005, §14.1).

• **Задача 1:** Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода. Найти коэффициенты затухания α разных типов волн в случае, если поверхностный импеданс стенок равен ζ . Литература: Топтыгин (там же, стр. 628, задачи 14.12 и 14.13).

Коаксиальный волновод. Рассмотрение коаксиального волновода на языке уравнений Максвелла. Существование в коаксиальном волноводе полностью поперечной моды, не имеющей частоты отсечки. Литература: Ландау и Лифшиц (1982, §91).

Описание коаксиального волновода в терминах линии Лехера: погонные ёмкость и индуктивность волновода, волновое уравнение на напряжение и ток. Эк-

вивалентность описания моды в терминах уравнений Максвелла и линии Лехера. Литература: Д.В. (2004, §143), Kuphaldt (2007, Ch. 14).

• **Задача 2:** Учесть затухание сигнала в коаксиальном волноводе за счёт потерь в скин-слое, и вычислить длину распространения главной моды. Внутренний радиус коаксиального волновода равен a , внешний – b , частота сигнала – ω , глубина скин-слоя – δ (предполагается нормальный скин-эффект)

1-5.1 Домашнее задание

• **Задача 3:** Найти ТЕ- и ТМ-моды, имеющие наиболее низкие частоты отсечки в волноводе с круглым поперечным сечением радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить частоты отсечки ω_c для этих мод. Найти коэффициенты затухания α для этих мод, если поверхностный импеданс стенок равен $\zeta \ll 1$.

• **Задача 4:** В § 6-3 изложена теория двухпроводной линии. Рассмотрим коаксиальный провод (SAT 703): Обе жилы линии сделаны из меди, диаметр центральной жилы равен 1.13 мм, внутренний диаметр обмотки (вторая жила) равен 4.8 мм. Пространство между жилами заполнено вспененным полиэтиленом, у которого диэлектрическая проницаемость (частота сигнала 2 ГГц) равна 1.6. Найдите волновое сопротивление (в омах), ёмкость C и индуктивность L (определены в § 6-3). Учтя потери, найдите длину распространения сигнала. Поверхностное сопротивление (см. (5.15,5.16)) меди при указанной частоте равно 0.011 Ом. Чему равна величина ζ' в (5.15)?

§1-6. Диэлектрические волноводы

Связанные моды в плоских волноводах. Классификация связанных мод в плоском волноводе, ТЕ- и ТМ-волны. Разделение ТЕ-мод на чётные и нечётные, структура поля и собственные значения. Отсутствие частоты отсечки для чётной ТЕ-моды низшего порядка. Аналогия с круглым волноводом. Литература: Маркузе (1974, §8.3).

• **Задача 1:** Определить дисперсию чётных и нечётных связанных ТЕ-волн плоского симметричного волновода.

• **Задача 2:** Отдельно рассмотреть некоторые моды в плоском симметричном волноводе.

i) Моду, не имеющую частоты обрезки: определить пространственную структуру электромагнитного поля и

вектора поляризации для предела, когда частота много меньше самой низкой частоты отсечки.

ii) Рассмотреть моду с высоким номером: обсудить, как можно описать моду в квази-классическом приближении.

Цилиндрический волновод. Оптоволокно. Волноводы со ступенчатым радиальным профилем показателя преломления. Классификация мод. Слабоволноводящие волноводы. Линейно-поляризованные моды. Литература: там же, Гл.8, а также SS 6-5,6-6

1-6.1 Домашнее задание

• **Задача 3:** Найти ТМ-моды в плоском диэлектрическом волноводе с симметричными обкладками.

• **Задача 4:** Исходя из квази-классического приближения показать, что оценка для количества направленных мод N_{modes} (6.34) в аксиально симметричном волноводе со ступенчатым радиальным профилем показателя преломления действительно справедлива. *Указание:* при подсчёте количества доступных состояний

учесть требование полного внутреннего отражения для поля связанной волны внутри сердцевины и воспользоваться правилом квантования Бора-Зоммерфельда.

• **Задача 5:** Для аксиально симметричного волновода со ступенчатым радиальным профилем в пределе малого изменения показателя преломления выяснить (параметры даны в абзаце с формулой (6.44)), можно ли описывать дисперсию фундаментальной моды приближённым уравнением (6.43).

§1-7. Поверхностные электромагнитные волны

Поверхностные электромагнитные волны. Поверхностные плазмоны: условия существования, фазовая и групповая скорости. Структура поля и плотности потока энергии. *Исследование структуры электромагнитного поля связанной волны (поверхностного плазмона), распространяющейся вдоль границы раздела металл-диэлектрик. Получить условие существования поверхностного плазмона: $\epsilon_m < -\epsilon_d$, где ϵ_m – диэлектрическая проницаемость металла, а ϵ_d – диэлектрика. Исследовать распределение потока энергии для плоского плазмона в случае, если в металле происходят слабые потери ($\epsilon_m'' > 0$)*

• **Задача 1:** Пусть теперь в металле присутствуют малые потери, так что $\epsilon_m'' \ll |\epsilon_m'|$. Введём декартову систему координат $Oxyz$, в которой поверхность раздела есть плоскость Oxy . Пусть поверхностный плазмон возбуждается синфазным движением сторонних зарядов с частотой ω в плоскости Oyz , тогда при $x > 0$ возбуждённая плоская поверхностная волна распространяется в направлении возрастающих x . Найти распределение среднего по времени потока энергии в пространстве. Нарисовать соответствующую картину в плоскости Oxz .

Дисперсия поверхностных плазмонов для модели Друде. Частота, ограничивающая сверху спектр плазмонов. Направление потоков энергии в диэлектрике и металле.

Поверхностный плазмонный резонанс на металлическом шарике субволнового размера. Задача о диэлектрическом шаре в однородном электрическом поле, *Литература:* Пункт 4-1.1. Интерпретация

плазмонных колебаний на шарике как связанных колебаний электрического поля и электронов металла.

• **Задача 2:** Определите дипольную восприимчивость α маленького металлического шарика вблизи плазменной частоты, если потерями на излучение можно пренебречь. Используйте общее выражение (4.6) и модель Друде (6.46) для диэлектрической проницаемости металла. Сравните положение резонансной частоты с верхней границей частотной области, где существуют поверхностные плазмоны.

1-7.1 Домашнее задание

• **Задача 3:** Рассмотреть границу раздела металла и диэлектрической среды, имеющих коэффициенты диэлектрической проницаемости ϵ_m и ϵ_d соответственно, так что $\epsilon_m < -\epsilon_d$, а $\epsilon_d > 0$ (при этом потери в обоих материалах отсутствуют). Выразить поверхностную плотность энергии \mathcal{E} в плоском поверхностном плазмоне через амплитуду электрического поля на поверхности раздела и диэлектрические проницаемости соприкасающихся сред. То же самое сделать для потока энергии отдельно в каждой среде и в целом. Непосредственно показать, что

$$v_g \mathcal{E} = S, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta},$$

где S – полная поверхностная плотность потока энергии, v_g – групповая скорость, а $\beta(\omega)$ – закон дисперсии поверхностного плазмона.

§1-8. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах.

Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Сечения рассеяния, поглощения и взаимодействия. Двумерный и трёхмерный случаи. Оптическая теорема.

Асимптотический вид электромагнитного поля вдали от рассеивающего тела: понятие амплитуды рассеяния; парциальные амплитуды рассеяния. Сечения взаимодействия, поглощения и рассеяния. Связь сечения рассеяния с амплитудой рассеяния. Трёхмерный случай: оптическая теорема. Литература: §5-3, Топтыгин (2005, стр. 480, Задача 12.77).

Предел идеального металла, предел малых длин волн.

Рассеяние на малом шаре субволнового диаметра. Оценки по порядку величины для амплитуд рассеяния и поглощения. Прохождение света через коллоидные растворы металлических нано-частиц. *Рассеяние на тонком стержне. Литература:* Пункт 5-4.

- **Задача 1:** Вычислить сечения поглощения σ_a и рассеяния σ_s монохроматической электромагнитной волны на металлическом шаре, размер которого a мал по сравнению с глубиной скин-слоя, $a \ll \delta$, полагая, что частота падающей волны ω близка к резонансной частоте дипольной поверхностной плазмонной моды шарика. *Литература:* §5-4.

- **Задача 2:** Для предыдущей задачи рассмотреть рассеяние белого света на таком шаре: полагать, что спектр падающей волны плоский в диапазоне $[\omega_r - \Delta/2, \omega_r + \Delta/2]$, где ширина спектра Δ велика по сравнению с шириной резонанса. Показать, что сечение взаимодействия не зависит от ширины резонанса (т.е. его добротности).

- **Задача 3:** Рассмотреть двумерный вариант За-

дачи, когда происходит рассеяние плоской монохроматической волны на бесконечном цилиндре с круговым сечением. Рассмотреть случай TE -волны, когда электрическое поле падающей волны ортогонально оси.

1-8.1 Домашнее задание

- **Задача 4:** Вычислить сечение поглощения σ_a монохроматической электромагнитной волны проводящим шаром с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + \zeta''$. Радиус шара мал по сравнению с длиной волны λ , но велик по сравнению с глубиной скин-слоя.

- **Задача 5:** Рассмотрим гранулу сферической формы радиуса a , находящуюся в вакууме и имеющую температуру T . Радиус гранулы мал по сравнению с глубиной скин-слоя δ на частоте $\omega_T = T/\hbar$, соответствующей температуре, $a \ll \delta$, при этом задана дисперсия диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ материала частицы, а его магнитная восприимчивость равна единице (предполагается, что радиус гранулы всё же достаточно велик для того, чтобы возможно было пользоваться приближением локальной связи между электрическим полем и плотностью тока). Найти в общем виде интенсивность теплового излучения гранулы, выразив её через $\varepsilon(\omega)$. Провести окончательное вычисление для модели Друде, приняв $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b - \omega_p^2/(\omega(\omega + i\omega_T))$, считая, что температура мала, так что $\omega_T \ll \omega_p$.

Указание: Найдите гамилтониан взаимодействия между полем электромагнитной волны и дипольным моментом гранулы, имеющий общий вид (8.1a). В соответствии с условием задачи, следует считать длину волны большой по сравнению с размером гранулы.

§1-9. Электростатика

Граничные условия для уравнений Максвелла в среде. Вывод, физическая интерпретация граничных условий для уравнений Максвелла в среде. Поверхностные заряды. Поверхностные токи. Методы измерения электрического поля \mathbf{E} , электрической индукции \mathbf{D} , магнитной индукции \mathbf{B} и магнитного поля \mathbf{H} .

- **Задача 1:** Оценить по порядку величины распределение поля вокруг удлинённого и сплюснутого эллипсоидов вращения, сделанных из оптически плотного диэлектрика и помещённых во внешнее постоянное электрическое поле. *Литература:* §4-2

1-9.1 Домашнее задание

- **Задача 2:** Найти факторы деполяризации для диэлектрического длинного цилиндра, являющимся в поперечном сечении эллипсом с полуосями $b \geq a$. *Указание:* Поскольку задача эффективно двумерная, то решение значительно упрощается благодаря тому, что уравнение Лапласа инвариантно относительно конформных преобразований. Совершите такое конформное преобразование комплексной плоскости $z = x + iy$, которое переведёт эллипс (границу сечения цилиндра) в круг. *Литература:* Пункт 4-2.3.

§1-10. Магнитостатика магнетиков. Доменная структура магнетиков.

Магнитное поле ферромагнетика. Базовые соотношения для статической энергии магнетиков. Бездивергентность магнитной индукции. Потенциальность магнитного поля, уравнение на потенциал. Литература: Ландау и Лифшиц, 1982, § 40.

• **Задача 1:** Найти поле \mathbf{B} для точечного диполя $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mu\delta(\mathbf{r})$.

• **Задача 2:** Найти поля \mathbf{B} и \mathbf{H} для шара с однородной намагниченностью: $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}_0$, $r < R$, $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$, $r > R$. Найти поля во всем пространстве (внутри и вне шара).

• **Задача 3:** Найти поля \mathbf{B} и \mathbf{H} для бесконечного цилиндра с однородной намагниченностью \mathbf{M}_0 вдоль и поперек оси цилиндра.

• **Задача 4:** Найти поля \mathbf{B} и \mathbf{H} для бесконечной пластины с однородной намагниченностью \mathbf{M}_0 вдоль и поперек плоскости пластины.

Магнитная энергия ферромагнетиков, различные формы её записи.

Литература: §7-2.1, там же, § 40.

• **Задача 5:** Доказать теорему взаимности: если поле $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ создается намагниченностью $\mathbf{M}_1(\mathbf{r})$ и поле $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$ – намагниченностью $\mathbf{M}_2(\mathbf{r})$, то:

$$\int \mathbf{M}_1 \mathbf{B}_2 \, d\mathbf{r} = \int \mathbf{M}_2 \mathbf{B}_1 \, d\mathbf{r}. \quad (1.5)$$

• **Задача 6:** Внутри шара радиуса R с однородной намагниченностью \mathbf{M}_0 вырезали шаровую же область радиуса $a < R$, в которой вектор намагниченности повернули на некоторый угол θ по отношению к \mathbf{M}_0 , сохранив его модуль. Найти изменение магнитной энергии за счет поворота, считая расположение области внутри шара произвольным.

• **Задача 7:** В условиях предыдущей задачи разворот намагниченности был осуществлен в двух непере-

крывающихся шаровых областях. Найти изменение магнитной энергии, задав параметры областей и изменения намагниченности.

Энергия одноосного магнетика: энергии анизотропии и неоднородности. Энергия магнитной анизотропии, ее релятивистская природа. Энергия магнитной неоднородности, ее обменная природа. Феноменологические выражения для энергии анизотропии и энергии неоднородности. Связь структуры этих выражений с инвариантностью энергии по отношению к операции обращения времени.

• **Задача 8:** Показать, что с точностью до слагаемых, пропорциональных M^2 , практически постоянных в ферромагнетиках, энергия (7.10) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_M^2 \, d\mathbf{r} - \int \mathbf{M} \mathbf{B}_0 \, d\mathbf{r} - \frac{\beta}{2} \int M_z^2 \, d\mathbf{r}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{H}_M = \mathbf{B}_M - 4\pi\mathbf{M}$.

Доменная структура в одноосном кристалле, ширина и энергия доменной стенки. Причина образования доменов в ферромагнетике. Примеры доменных структур. Однодоменные частицы, критерий однодоменности. Определение структуры доменной границы в одноосном кристалле (блеховская доменная стенка). Выражения для ширины и энергии доменной границы.

Литература: Ландау и Лифшиц (там же, §43, 45), Гуревич и Мелков (1994, Стр. 242), §7-2

• **Задача 9:** Найти пороговое значение \mathbf{B}_0 , направленного перпендикулярно плоскости ферромагнитной пластины, выше которого образование доменов энергетически невыгодно.

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§2-1. Уравнения Максвелла в среде

В пустоте уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{b} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{e} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{e} – напряжённость электрического поля, \mathbf{b} – напряжённость магнитного поля, ρ – плотность электрического заряда, а \mathbf{j} – плотность электрического тока.

2-1.1 Разделение на составляющие плотности заряда ρ и плотности тока \mathbf{j} .

Исследуя распространения электромагнитного поля в среде, удобно записывать уравнения Максвелла (2.1) в изменённой форме.

Под действием проникшего в среду электромагнитного поля в ней начинают циркулировать токи. Величины этих токов определяется самим электромагнитным полем и свойствами среды. В среде могут быть посторонние заряды, которые при движении также создают электрический ток. Происхождение посторонних зарядов определяется не свойствами среды, а внешними условиями. В соответствии с этим физическим пониманием разделим заряды и токи, на заряды и токи, которые являются результатом отклика среды на электромагнитное поле, и на внешние заряды и токи:

$$\rho = \rho_{\text{med}} + \rho_{\text{ext}}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{med}} + \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (2.2a)$$

2-1.1.1 Плотность заряда ρ

Ненулевая плотность зарядов ρ_{med} , появляющихся при отклике среды на электромагнитное поле, означает, что среда под действием электромагнитного поля приобретает ненулевую поляризацию. Поэтому мы вводим переобозначение

$$\rho_{\text{med}} \equiv \rho_p. \quad (2.2b)$$

Вследствие изначальной электро-нейтральности среды интеграл по объёму от величины ρ_p равен нулю.

2-1.1.2 Разделение плотности тока \mathbf{j} на составляющие

Электрический ток \mathbf{j}_{med} , в отличие от поляризационных зарядов ρ_p , имеет более сложную структуру. Дело в том, что часть тока среды \mathbf{j}_{med} является чисто соленоидальным и не приводит к появлению поляризованных зарядов, но приводит, с другой стороны, к возбуждению дополнительного магнитного поля. Выделим в электрическом токе два вклада:

$$\mathbf{j}_{\text{med}} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_m, \quad (2.2c)$$

Вклад \mathbf{j}_p появляется из-за движения поляризационных зарядов. Введём поле \mathbf{P} , которое задаёт дипольный момент единицы объёма среды. Поле \mathbf{P} связано с плотностью ρ_d и током \mathbf{j}_d уравнениями

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \partial_t \mathbf{P} = \mathbf{j}_p. \quad (2.2d)$$

Второй вклад \mathbf{j}_m возникает из-за движения зарядов внутри атомов или элементарных ячеек среды. Природа \mathbf{j}_m отличается от \mathbf{j}_p тем, что в \mathbf{j}_m вносит вклад орбитальное движение электронов в элементарных ячейках. В токе \mathbf{j}_m нет дивергентной составляющей, поскольку дивергентную составляющую мы выделили в токе \mathbf{j}_p . Поэтому ток \mathbf{j}_m представляется в виде

$$\mathbf{j}_m = c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (2.2e)$$

Если ограничиться этим определением величины \mathbf{M} , то она оказывается не полностью зафиксированной, поскольку к ней можно добавить градиент любой скалярной величины при неизменном токе \mathbf{j}_m . Удобно зафиксировать \mathbf{M} , положив эту величину равной магнитному моменту единицы объёма. Это становится осмысленным, если понимать материальные уравнения в усреднённом смысле, а именно, на масштабах много больших размера ячейки среды.

Отметим, что в общем случае разделение тока среды (2.2c) является неоднозначным с математической точки зрения. Поэтому при произведении разделения (2.2c) надо пользоваться физическими соображениями.

2-1.1.3 Материальные уравнения Максвелла

Теперь усредним поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{P} и \mathbf{M} на расстояниях, много больших межатомного расстояния в среде. Введём электрическое поле \mathbf{E} , поле электрической индукции \mathbf{D} , магнитное поле \mathbf{H} и поле магнитной индукции \mathbf{B} согласно равенствам

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \langle \mathbf{e} \rangle, & \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \langle \mathbf{P} \rangle \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{b} \rangle, & \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi \langle \mathbf{M} \rangle.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по расстояниям, много большим межатомных. В дальнейшем под \mathbf{P} и \mathbf{M} мы будем понимать усреднённые $\langle \mathbf{P} \rangle$ и $\langle \mathbf{M} \rangle$. Тогда уравнения (2.1-2.1) можно переписать в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{ext}} \quad (2.4a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4b)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_{\text{ext}} \quad (2.4c)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (2.4d)$$

К уравнениям (2.4) нужно добавить связь между полями \mathbf{H} , \mathbf{B} и \mathbf{E} , \mathbf{D} , иначе нет выгоды от произведённого разделения зарядов и токов.

§2-2. Линейный электромагнитный отклик однородной среды

Рассмотрим однородную среду. Будем предполагать, что электромагнитное поле слабое, так что отклик среды на него является линейным. В этом случае электрическая и магнитная индукция линейно зависят от электрического и магнитного полей,

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}. \quad (2.6a)$$

Здесь *диэлектрическая проницаемость* (*dielectric permittivity*) $\hat{\varepsilon}$ и *магнитная восприимчивость* $\hat{\mu}$ в общем случае являются линейными операторами, нелокальными как по времени, так и в пространстве. Кроме того, эти величины являются тензорами второго ранга. Таким образом, например, индукция электрического поля

$$\begin{aligned}D^i(t, \mathbf{r}) &= (\hat{\varepsilon} \mathbf{E})^i(t, \mathbf{r}) = \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' \varepsilon^{ij}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') E^j(t', \mathbf{r}').\end{aligned}\quad (2.6b)$$

При записи интеграла по времени мы учли принцип причинности, выражающий собой то, что диэлектрическая поляризация

$$\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi = \hat{\chi} \mathbf{E} \quad (2.6c)$$

2-1.2 Граничные условия

Пусть есть граница раздела, на которой меняются скачком свойства среды. Кроме того, вдоль границы раздела может течь поверхностный ток \mathbf{i}_{ext} и на ней может находиться ненулевая плотность заряда σ_{ext} : эти величины являются частями величин \mathbf{j}_{ext} и ρ_{ext} соответственно, сконцентрированными на поверхности раздела. Обозначим единичную нормаль к поверхности n^i . Примем соглашение, что нормаль направлена из среды с номером 1 в среду с номером 2. Разность значения произвольной величины f на разных сторонах границы раздела, а именно разность “2-1”, будем обозначать как $[f]$. Тогда из уравнений (2.4) следует

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}] = 4\pi \mathbf{i}_{\text{ext}} \quad \text{from eq. (2.4a)}$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}] = 0 \quad \text{from eq. (2.4b)}$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}] = 4\pi \sigma_{\text{ext}} \quad \text{from eq. (2.4c)}$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = 0 \quad \text{from eq. (2.4d).}$$

(2.5)

(2.3) может определяться только значением электрического поля в более ранние моменты времени. Мы ввели *диэлектрическую восприимчивость*, или *диэлектрическую поляризуемость* (*electric susceptibility*), среды

$$\hat{\chi} = \frac{\hat{\varepsilon} - 1}{4\pi}. \quad (2.6d)$$

В результате эволюция электромагнитного поля описывается системой уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \hat{\mu} \mathbf{H}. \quad (2.6e)$$

Мы приняли, что свободные заряды и их ток отсутствуют. В этом случае два скалярных уравнений Максвелла

$$\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \hat{\varepsilon} \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \hat{\mu} \mathbf{H} = 0$$

являются следствием двух векторных (2.6e).

Для неограниченной однородной среды удобно перейти к Фурье-представлению. Для этого положим, что электромагнитное поле зависит от времени и координат как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Тогда уравнения Максвелла (2.6e) приобретают вид

$$\varepsilon^{ijk} k^j \mathbf{H}^k = -\frac{\omega}{c} \varepsilon^{ij} \mathbf{E}^j, \quad \varepsilon^{ijk} k^j \mathbf{E}^l = \frac{\omega}{c} \mu^{ij} \mathbf{H}^j, \quad (2.7)$$

где $\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu^{ij} = \mu^{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Например,

$$\varepsilon^{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int dt d^3r e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varepsilon^{ij}(t, \mathbf{r}). \quad (2.8)$$

Обобщённая диэлектрическая проницаемость.

Как и в статике, см. Пункт 2-1.1.2, разделение полного электрического тока на магнитную и поляризационную части

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P}, & 4\pi \mathbf{M} &= \mathbf{B} - \hat{\mu}^{-1} \mathbf{B}, \\ & & 4\pi \mathbf{P} &= (\hat{\varepsilon} - 1) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

в общем случае является неоднозначной процедурой. Может так оказаться, что и физических соображений не достаточно для того, чтобы добиться однозначности. Если это так — однозначность установить не удаётся — имеет смысл отказаться от введения магнитной восприимчивости $\hat{\mu}$, определив весь ток как отклик на электрическое поле. Такой вариант записи не накладывает ограничений на вид линейного отклика среды, поскольку магнитное поле связано с электрическим симим уравнениями Максвелла.

Обозначим сейчас оператор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}_{\text{full}}$ в случае, когда по определению $\hat{\mu} = 1$, и выразим его через $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$. Тем самым мы покажем, что с помощью одного $\hat{\varepsilon}_{\text{full}}$ можно описать все виды линейного отклика среды. Электрический ток

$$4\pi \mathbf{j} = c \operatorname{rot} ((1 - \hat{\mu}^{-1}) \mathbf{B}) + \partial_t (\hat{\varepsilon} - 1) \mathbf{E},$$

а магнитная индукция

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}].$$

Снова переписывая ток, получаем

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{j} &\equiv -i\omega (\hat{\varepsilon}_{\text{full}} - 1) \mathbf{E} = \\ &= \frac{ic^2}{\omega} \left[\mathbf{k} \times ((1 - \hat{\mu}^{-1}) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]) \right] - i\omega (\hat{\varepsilon} - 1) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

то есть

$$\varepsilon_{\text{full}}^{ij} = \varepsilon^{ij} + \frac{c^2}{\omega^2} \varepsilon^{ikm} \varepsilon^{jln} k^k k^l (\delta^{mn} - (\hat{\mu}^{-1})^{mn}). \quad (2.11)$$

2-2.1 Симметрии диэлектрической проницаемости

Поскольку во временно-координатном представлении диэлектрическая проницаемость связывает два веще-

ственных векторных поля, она сама должна быть вещественной. В частотно-волновом представлении этот факт записывается в виде

$$\varepsilon^{ik}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon^{*ik}(\omega, \mathbf{k}).$$

Расширив теперь это равенство на всю комплексную плоскость частоты, получим что действительная и мнимая части $\varepsilon^{ik}(\omega)$ являются, соответственно, чётной и нечётной функциями относительно действительной части частоты:

$$\varepsilon^{ik}(-\omega^*, -\mathbf{k}) = \varepsilon^{*ik}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.12)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение.

В дальнейшем удобно разложить тензора $\varepsilon^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mu^{ij}(\omega, \mathbf{k})$ на эрмитову и антиэрмитову части. Например,

$$\varepsilon^{ik} = \varepsilon_h^{ik} + i\varepsilon_a^{ik}, \quad \varepsilon_h^{*ki} = \varepsilon_h^{ik}, \quad \varepsilon_a^{*ki} = \varepsilon_a^{ik}. \quad (2.13)$$

Ниже будет показано, см. § 3-2, что анти-эрмитова часть определяет скорость диссипации энергии электромагнитного поля в тепло. Эрмитова часть (при относительно малой анти-эрмитовой) определяет дисперсию электромагнитных волн и запасённую в веществе энергию электромагнитных колебаний.

Обращение времени. Обобщённая восприимчивость обладает симметрией, вытекающей из симметрии связываемых ею величин по отношению к операции обращения времени, см. Пункт 8-1.3. Электрическое поле \mathbf{E} сохраняет знак при изменении знака времени, тогда как магнитное поле \mathbf{B} изменяет знак. Поэтому, будучи применённым к диэлектрической проницаемости, эта симметрия даёт:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ik}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{B}) &= \varepsilon^{ki}(\tau, -\mathbf{r}, -\mathbf{B}), & \text{или} \\ \varepsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{B}) &= \varepsilon^{ki}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отметим, что изменение знака радиус-вектора \mathbf{r} стоит в том же ряду, что и перестановка векторных индексов 'i' и 'k'. Магнитное поле \mathbf{B} есть среднее по времени значение магнитного поля, которое предполагается также и однородным в пространстве.

§2-3. Плоская электромагнитная волна в изотропной среде

Рассмотрим изотропную среду, для которой тензора диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости диагональны,

$$\varepsilon^{ik}(\mathbf{k}, \omega) = \delta^{ik} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega), \quad \mu^{ik}(\mathbf{k}, \omega) = \delta^{ik} \mu(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.15a)$$

В этом случае уравнения Максвелла упрощаются до

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \partial_t \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mu \mathbf{H}, \quad (2.15b)$$

Скалярными уравнения Максвелла являются $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$.

В случае металлов для описания отклика среды на электрическое поле вместо диэлектрической проницаемости используют проводимость σ , которая определяет электрический ток смещения:

$$\mathbf{j}_p = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.15c)$$

Подставляя эту связь в уравнение Максвелла, получаем, что в частотном представлении диэлектрическая проницаемость есть

$$\varepsilon = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma. \quad (2.15d)$$

Перепишем материальную связь между полями и их индукциями через обобщённую диэлектрическую восприимчивость $\varepsilon_{\text{full}}$ (2.10). Согласно (2.11),

$$\varepsilon_{\text{full}}^{ij} = \varepsilon \delta^{ij} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\mu - 1}{\mu} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right).$$

Поскольку $\varepsilon_{\text{full}}^{ij}$ действует на электрическое поле, дивергенция которого равна нулю, то в выписанном уравнении мы можем заменить круглую скобку на единицу, так что имеем окончательно

$$\varepsilon_{\text{full}} = \varepsilon + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \frac{\mu - 1}{\mu}. \quad (2.15e)$$

2-3.1 Дисперсионное соотношение

Исследуем теперь распространение плоских волн в изотропной среде. При исследовании линейных волн в неоднородной среде естественно перейти в Фурье-представление по времени и координате. Мы представляем электромагнитное поле в виде комплексной амплитуды, которая зависит от времени и координаты как $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$.

Установим связь между волновым вектором \mathbf{k} и частотой волны ω , которая называется дисперсионным уравнением. Возьмём ротор от уравнения Максвелла на индукцию электрического поля (2.15b) и воспользуемся

бездивергентностью электрического поля. В результате получим

$$\left(\Delta - \frac{\partial_t^2 \varepsilon \mu}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

В Фурье пространстве это уравнение переписывается в виде

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0.$$

Для электрического поля существует нетривиальное (отличное от нуля) решение, если выполняется дисперсионное уравнение, а само поле удовлетворяет требованию поперечности

$$\mathbf{k}^2 - \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = 0. \quad (2.16)$$

В общем случае при действительной частоте волновой вектор волны оказывается комплексным. Разделим его действительную и мнимую части, представив волновой вектор волны в виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'', \quad (2.17)$$

где \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' – действительные векторы. Разделяя действительную и мнимую части в (2.16), получаем систему уравнений

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re}(\varepsilon \mu), \quad 2\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}(\varepsilon \mu). \quad (2.18)$$

2-3.2 Распространяющаяся плоская монохроматическая волна

Чаще всего под плоской волной подразумевают волну, в которой поле зависит только от одной координаты, так что $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$. Введём действительный единичный вектор \mathbf{n} , сонаправленный волновому вектору \mathbf{k} . Дисперсионное соотношение (2.16) часто записывают в виде

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \quad k = k' + ik'' = \beta(\omega), \quad \beta^2(\omega) = \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (2.19)$$

где $\beta(\omega)$ называется *постоянной распространения*, а k' и k'' суть действительная и мнимая части волнового вектора.

2-3.2.1 Показатели преломления и поглощения

Для описания распространения волн в среде вместо непосредственно ε и μ (которое, будучи комплексными, содержат в себе 4 действительных параметра) часто выбирают пару действительных параметров – *показатель преломления* n (*refractive index*, или *index of refraction*) и *показатель поглощения* (*extinction coefficient*) k , которые определяются через формулу

$$n + ik = \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad \beta = (n + ik) \frac{\omega}{c}. \quad (2.20)$$

Полное комплексное число $n + ik$ называется *комплексным показателем преломления* (*complex refractive index*). Особенно такая параметризация удобна, если известно, что среда немагнитная, т.е. $\mu = 1$. Тогда по n и k можно однозначно восстановить ε .

В частности, длина волны в среде λ и глубина проникновения δ_p (*penetration depth*) равны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \delta_p = \frac{1}{2k''} = \frac{\lambda_0}{4\pi k} = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{4\pi}, \quad (2.21)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ – длина волны в вакууме на данной частоте. В определении δ_p мы добавили фактор 2, при таком определении интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды поля, на расстоянии δ_p падает в e раз; обратная величина $\alpha = 1/\delta_p$ [см⁻¹] называется *коэффициентом поглощения* (*absorption (attenuation) coefficient*). Если $k \ll n$, то волна по мере распространения в среде успевает претерпеть много пространственных колебаний, прежде чем заметно ослабеть по интенсивности; в этом случае среда называется *прозрачной*.

Обычно прозрачные среды имеют положительные $\varepsilon, \mu > 0$, тогда показатель преломления также положителен, $n > 0$. Однако в редких случаях возможен вариант, при котором прозрачная среда имеет отрицательные коэффициенты $\varepsilon, \mu < 0$. С учётом того, что у обоих коэффициентов малая мнимая часть положительна, то для того, чтобы показатель преломления k был положительным, показатель преломления должен быть отрицательным, $n < 0$.

2-3.2.2 Поляризации плоской волны

Из уравнений Максвелла получаем, что связь между компонентами электрического и магнитного полей задаётся равенствами

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = Z\mathbf{H}, \quad (n + ik)[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (2.22)$$

где $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ называется волновым импедансом. Если ε и μ действительны, то это равенство справедливо не только для комплексных амплитуд, но и для самих действительных полей, см., например, Рис. 2.1. Если среда немагнитная, $\mu = 1$, то волновой импеданс равен обратному комплексному коэффициенту преломления, $Z = (n + ik)^{-1}$.

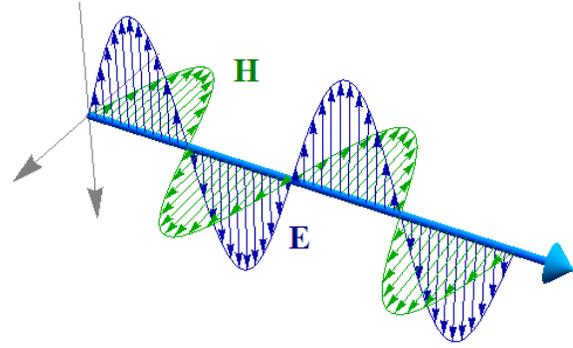


Рис. 2.1 Электромагнитное поле в линейно поляризованной плоской волне в случае прозрачной среды.

2-3.3 Аналитические свойства диэлектрической проницаемости

Соотношения Крамерса-Кронига (8.9b, 8.9d) для диэлектрической проницаемости следует формулировать в терминах обобщённой восприимчивости $\alpha(\omega) = \varepsilon(\omega) - 1$, поскольку именно эта функция стремится к нулю на больших частотах. То же самое относится к магнитной восприимчивости, в качестве обобщённой восприимчивости следует брать $\mu(\omega) - 1$. Функция $\varepsilon\mu - 1$ также обладает свойствами обобщённой восприимчивости.

2-3.3.1 Среда с низким поглощением

Пусть в рассматриваемом диапазоне частот среда имеет низкое поглощение, так что мнимые части восприимчивостей можно принять равными нулю, $\varepsilon'' = 0$ и $\mu'' = 0$. Возьмём в качестве обобщённой восприимчивости $\alpha = \varepsilon - 1$ и вычислим полусумму общих неравенств (8.9f, 8.9g) для бездиссипативной среды. Получим

$$0 < \frac{d((\varepsilon - 1)\omega)}{d\omega} = \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} - 1. \quad (2.23a)$$

Таким образом, коэффициент, стоящий формуле Бриллюэна (3.30) перед квадратом электрического поля не просто положителен, а

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 1. \quad (2.23b)$$

Аналогичные вычисления применимы для магнитной части запасённой энергии в (3.30).

2-3.3.2 Прозрачные среды

Для прозрачной среды можно получить ограничение на групповую скорость (2.26d), используя общие свойства обобщённой восприимчивости, установленные в § 8-2.

Если в качестве обобщённой восприимчивости взять $\alpha = \varepsilon\mu - 1$, то соотношения (8.9f, 8.9g) приводятся к неравенствам на групповую скорость

$$\frac{c}{v_g} \equiv \frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \quad \frac{c}{v_g} > \frac{1}{n}. \quad (2.23c)$$

соответственно (групповая скорость есть скорость перемещения групповых пакетов, см. § 2-4). В (2.23c) предполагается, что показатель преломления положителен, $n > 0$. Таким образом, групповая скорость всегда не

превосходит скорость света,

$$v_g < c \cdot \min(n, n^{-1}) = \min\left(v_{ph}, \frac{c^2}{v_{ph}}\right). \quad (2.23d)$$

• **Задача 1:** Непосредственными вычислениями покажите, что неравенства (2.23c) на групповую скорость действительно следуют из общих неравенств (8.9f, 8.9g) на обобщённую восприимчивость, если взять $\alpha(\omega) = \varepsilon\mu - 1$.

§2-4. Распространение волнового пакета в среде с дисперсией

Предположим, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси Oz . Волновое уравнение, учитывающее временную дисперсию среды, имеет вид

$$\partial_z^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') \mathbf{E}(t-t') + f(t, z) \quad (2.24)$$

Для краткости записи мы приняли, что магнитная восприимчивость равна единице, $\mu = 1$, что в данном случае не ограничивает общности рассуждений. Сила \mathbf{f} играет роль внешнего источника, возбуждающего волну; свободное электромагнитное поле соответствует $\mathbf{f} = 0$. В частности, в силу \mathbf{f} можно включить нелинейную по электрическому полю часть поляризации P^{NL} , положив таким образом $\mathbf{f} = 4\pi \partial_t^2 \mathbf{P}^{NL}$. В Фурье-представлении уравнение (11.1) переписывается в виде

$$(k^2 - \beta^2(\omega)) \mathbf{E}_{\omega, k} = -\mathbf{f}_{\omega, k}, \quad (2.25)$$

где волновой вектор определяется дисперсионным соотношением (2.19). Для определённости мы предполагаем, что волна распространяется вправо, так что следует выбирать решение $\text{Re } \beta > 0$.

В этом параграфе мы будем рассматривать импульсы с малой относительной спектральной шириной. Это означает, что нам не нужно знать всю зависимость $\beta(\omega)$ волнового вектора от частоты, а необходимо знать только несколько первых производных на несущей частоте $\omega = \omega_0$. Приняты следующие обозначение для этих производных:

$$\beta_m = \left. \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (2.26a)$$

Фазовая скорость. Фазовая скорость v_{ph} показывает, с какой скоростью движется гребень монохроматической волны:

$$v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0} = nc, \quad k_0 = \beta(\omega_0), \quad (2.26b)$$

где n – коэффициент преломления.

Групповая скорость. Если мы удержим в дисперсии $\beta(\omega)$ только первую производную по частоте, то $\beta(\omega)$ представляется в виде

$$\beta(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}, \quad (2.26c)$$

где групповая скорость

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \equiv \frac{1}{\beta_1}. \quad (2.26d)$$

В англоязычной литературе также используется параметр *group index* n_g , который определяется как

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}, \quad v_g = \frac{c}{n_g}. \quad (2.26e)$$

В силу волнового уравнения неопределённости в волновом векторе Δk и $\Delta \omega$ связаны между собой через групповую скорость, так что верна оценка

$$\Delta \omega \sim v_g \Delta k.$$

Групповая скорость, как будет показано ниже, определяет скорость движения волнового пакета.

Вторая дисперсия. Параметр β_2 [с²/см] называется *дисперсией групповой скорости*, в англоязычной литературе – *group delay dispersion*. Если на интересующей частоте он положителен, $\beta_2 > 0$, то говорят о нормальной дисперсии (*normal dispersion*). Если $\beta_2 < 0$, говорят об аномальной дисперсии (*anomalous dispersion*).

Часто вместо коэффициента β_2 пользуются другим коэффициентом D [с/см²],

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}, \quad (2.26f)$$

называемым коэффициентом хроматической дисперсии (*group delay parameter*). Как будет показано ниже, дисперсия групповой скорости определяет скорость расплывания волнового пакета.

2-4.1 Выделение огибающей

Волновым пакетом называется такая волна, распределение поля в которой слабо отличается от распределения поля в монохроматической волне с некоторой частотой ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 , которые связаны между собой законом дисперсии в среде,

$$\omega_0 = \omega_0(\mathbf{k}_0)$$

Для волнового пакета ω_0 называется *несущей частотой*, а \mathbf{k}_0 — *несущим волновым вектором*. Таким образом, динамика поля в волновом пакете в первом приближении такая же, как и динамика поля в монохроматической волне. Тем не менее, обычно представляет интерес слабое отличие от этой динамики, которое возникает из-за слабого отличия волнового пакета от плоской волны (его слабой немонахроматичности). При этом часто оказывается удобным рассматривать волновой пакет как единое целое, не раскладывая его заранее по плоским волнам.

Для простоты изложения мы рассматриваем распространение плоского волнового пакета с фиксированной линейной поляризацией.

Рассмотрим волновой пакет и введём понятие огибающей. Любое поле, скажем, электрическое, можно представить в частотно-пространственном представлении,

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.27)$$

где в силу вещественности поля $\mathbf{E}(t)$ выполняется $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_\omega^*$. Почти монохроматичность означает, что характерное время изменения *временной огибающей* $\tilde{\mathbf{E}}(t)$

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) = \int_0^{+\infty} (d\omega) \mathbf{E}_\omega e^{-i(\omega - \omega_0)t}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(t) e^{-i\omega_0 t} + \tilde{\mathbf{E}}^*(t) e^{i\omega_0 t} = 2 \operatorname{Re}[\tilde{\mathbf{E}}(t) e^{-i\omega_0 t}]$$

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_{\omega - \omega_0}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{E}}_{\omega + \omega_0}^*(\mathbf{r})$$

является большим по сравнению с периодом колебания поля $2\pi/\omega_0$. Как следует из определения, огибающая имеет только положительные Фурье-гармоники, в том смысле, что $\tilde{\mathbf{E}}_{\omega < \omega_0} = 0$ (Фурье-образ огибающей определяется аналогично (2.27)). Время изменения огибающей $\tilde{\mathbf{E}}(t)$ оценивается как $1/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — характерная частота, на которой убывает $\tilde{\mathbf{E}}_{\Delta\omega}$; она называется *спектральной шириной пакета*. Почти монохроматичность волнового пакета означает, что

$$\Delta\omega \ll \omega_0.$$

Если все волны в пакете распространяются почти в одну сторону, то можно ввести вместо временной

пространственно-временную огибающую. Электрическое поле в частотно-волновом представлении определяется согласно равенству

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} (d^3k) \int_{-\infty}^{\infty} (d\omega) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} \exp\{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}\}, \quad (2.29)$$

где например, $(dk) \equiv dk/2\pi$. По аналогии с (2.28) представим Фурье-компоненту электрического поля в виде

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0} + \Phi_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \omega + \omega_0}^*,$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2 \operatorname{Re} [e^{-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r})],$$

где Фурье-образ огибающей $\Phi_{\omega, \mathbf{k}}$ имеет один максимум при нулевых значениях волнового вектора и частоты, и убывает на $k \sim \Delta k$, $\omega \sim \Delta\omega$. В силу нашего предположения о том, что все волны в волновом пакете распространяются почти в одну сторону, ширина по волновому вектору также должна быть малой, так что

$$\Delta k \ll k_0.$$

2-4.2 Уравнение на огибающую

Запишем волновое уравнение (2.25) в терминах огибающей Φ :

$$[(k_0 - i\partial_z)^2 - (\beta(\omega_0 + i\partial_t))^2] \Phi(t, z) = -f_+, \quad (2.30)$$

где мы у силы f выделили огибающую f_+ ,

$$f = 2 \operatorname{Re}[f_+(t, z) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 z)],$$

предполагая, что в Фурье-представлении $f_{\omega, \mathbf{k}}$ имеет узкие максимумы там же, где и $E_{\omega, \mathbf{k}}$. При получении уравнения (2.30) мы пользовались соотношениями типа

$$\partial_z e^{ik_0 z} \Phi(z) = e^{ik_0 z} (ik_0 + \partial_z) \Phi(z),$$

$$\beta(i\partial_t) e^{-i\omega_0 t} \Phi(t) = e^{-i\omega_0 t} \beta(\omega_0 + i\partial_t) \Phi(t),$$

$$\Phi(t - \tau) = e^{-\tau\partial_t} \Phi(t).$$

В силу узости спектральной ширины волнового пакета, производные по времени и координате в (2.30) следует воспринимать как малые поправки к ω_0 и k_0 соответственно.

Разложимся до первого порядка по этим поправкам и положим внешний источник нулём, $f = 0$. В результате получим уравнение

$$(v_g \partial_z + \partial_t) \Phi(t, z) = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, если огибающая зависит от времени и координаты только через комбинацию $z - v_g t$, то есть $\Phi = \Phi(z - v_g t)$. Таким образом, в этом, первом, приближении мы установили, что волновой пакет движется вправо со групповой скоростью v_g (2.26с).

Тем не менее, сделанное приближение не улавливает изменения формы огибающей со временем. Поэтому наша цель — переписать волновое уравнение (2.30) в таком

виде, который был бы удобен для описания эволюции волнового пакета. Для этого от лабораторной системы координат $\{t, z\}$ имеет смысл перейти в такую систему координат, у которой одной из координат является комбинация $z - v_g t$; так мы будем рассматривать волновые пакеты, двигающиеся ‘вправо’, то есть в сторону увеличения координаты z и исключим их равномерное движение с групповой скоростью v_g . Вторая координата может быть выбрана в виде суммы исходных координат z, t с произвольными коэффициентами, конкретный выбор которых зависит от физической постановки задачи. Мы рассмотрим два варианта такого выбора: *сопровождающую систему координат*, см. Пункт 2-4.2.2, и *лабораторную запаздывающую систему координат*, см. Пункт 2-4.2.1.

2-4.2.1 Переход в лабораторную запаздывающую систему координат

Лабораторная запаздывающая система координат $\{z_{\text{new}}, t_{\text{ret}}\}$ определяется согласно равенствам:

$$t_{\text{ret}} = t - z/v_g, \quad z_{\text{new}} = z.$$

Смысл введённых новых координат следующий. Мы фиксируем положение приёмника, иными словами, координату z_{new} . Время же мы начинаем отсчитывать не от абсолютного значения, а от момента, когда в точку расположения приёмника придёт импульс, распространяющийся со скоростью v_g и пущенный из начала координат в нулевой момент времени по абсолютному его отсчёту. В итоге получаем, что форма волнового пакета определяется зависимостью огибающей от t_{ret} при

фиксированном z_{new} , тогда как его эволюция происходит с ростом координаты z_{new} . Стоит также заметить, что при выводе уравнения типа (11.12), описывающего эволюцию волнового пакета, удобно записывать закон дисперсии в виде $\beta = \beta(\omega)$.

2-4.2.2 Сопровождающая (движущаяся) система координат

Сопровождающая система координат $\{t_{\text{new}}, z_{\text{rel}}\}$

$$t_{\text{new}} = t, \quad z_{\text{rel}} = z - v_g t = -v_g t_{\text{ret}}$$

является более интуитивно понятной: в этой системе координат мы наблюдаем изменение со временем пространственной структуры волнового пакета, двигаясь вместе с пакетом с групповой скоростью v_g . При использовании сопровождающей системы координат, наоборот, удобно записывать закон дисперсии в виде $\omega = \omega(\beta)$.

Вторые производные преобразуются по правилам

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_{\text{new}}} - v_g \frac{\partial}{\partial z_{\text{rel}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_{\text{rel}}}.$$

Продельвая ту же процедуру, что и в Пункте 2-4.2.1, приходим к уравнению

$$\left[-i\partial_t + \frac{v_g^3 \beta_2}{2} \partial_z^2 \right] \Psi = -\frac{v_g}{2k_0} f_+, \quad (2.31)$$

аналогичному уравнению (11.12). В главном порядке по ширине пакета, как мы видим, уравнения (11.12, 2.31) отличаются с точностью до простых замен $v_g t_{\text{new}} \leftrightarrow z_{\text{new}}$ и $v_g t_{\text{ret}} \leftrightarrow -z_{\text{rel}}$.

§2-5. Электромагнитные волны в анизотропных средах

Рассмотрим распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в анизотропной однородной прозрачной среде. В прозрачных средах отсутствует поглощение, то есть тензора диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости являются эрмитовыми матрицами,

$$\varepsilon^{*ik} = \varepsilon^{ki}, \quad \mu^{*ik} = \mu^{ki}, \quad (2.32a)$$

см. Пункт 3-2.2. Из симметрии кинетических коэффициентов (2.14) следует, что в тензорах (2.32a) симметричная часть, которая действительна вследствие эрмитовости (2.32a), чётна по среднему магнитному полю, а антисимметричная часть, которая является мнимой вследствие эрмитовости (2.32a), нечётна по магнитному полю. В частности, если среда является немагнитной, мнимая часть тензоров (2.32a) отсутствует, то есть тензора являются симметричными действительными мат-

рицами:

$$\varepsilon^{*ik} = \varepsilon^{ik} = \varepsilon^{ki}, \quad \mu^{*ik} = \mu^{ik} = \mu^{ki}, \quad (2.32b)$$

В этом параграфе мы главным образом будем изучать немагнитные среды. Магнитные среды будут отдельно рассмотрены в § 2-7. Для немагнитных сред обычно и магнитная восприимчивость рана единице, то есть отклик среды на электромагнитное поле определяется исключительно симметричной действительной матрицей диэлектрической проницаемости ε^{ik} . Для этой матрицы можно так выбрать ориентацию декартовой системы координат, что она примет диагональный вид:

$$\hat{\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon^{(x)}, \varepsilon^{(y)}, \varepsilon^{(z)}). \quad (2.32c)$$

Снова положим, что электромагнитное поле зависит от времени и координат как $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. Введём стан-

дартное обозначение

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}. \quad (2.33)$$

Поскольку мы интересуемся прозрачными средами и распространяющимися волнами, то вектор \mathbf{n} является чисто действительным. Обратим внимание, что длина вектора \mathbf{n} не равняется единице; в изотропной среде его длина равнялась бы коэффициенту преломления. Перепишем уравнения Максвелла (2.7) для плоской волны в векторном виде:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (2.34a)$$

или

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = -\mathbf{D}, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \mathbf{B}, \quad (2.34b)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = 0.$$

В результате исключения магнитного поля, получаем *волновое уравнение*

$$\left(\epsilon^{imk} \epsilon^{jnl} (\hat{\mu}^{-1})^{mn} k^k k^l - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon^{ij} \right) E^j = 0. \quad (2.35a)$$

записанное в данном случае в Фурье-пространстве. В частном случае, когда среда не обладает магнитными свойствами, магнитная индукция равна магнитному полю, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Тогда волновое уравнение (2.35a) упрощается до

$$\left(k^2 \delta^{ik} - k^i k^k - \epsilon^{ik}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E^k = 0. \quad (2.35b)$$

Уравнение (2.35b) верно и в общем случае произвольных магнитных свойств среды, если в качестве диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ подразумевать величину $\hat{\epsilon}_{\text{full}}$, описывающую полный линейный электромагнитный отклик среды на поле волны (2.11).

2-5.1 Уравнение Френеля

Рассматриваем немагнитную среду.

Зафиксируем частоту в уравнении (2.35b) и поделим круглую скобку на ω^2/c^2 . Тем самым, мы перейдем к записи в терминах вектора \mathbf{n} (2.33). Потребуем существование нетривиального решения для электрического поля, то есть найдём дисперсионное уравнение. В терминах вектора \mathbf{n} дисперсионное уравнение имеет вид

$$\det(n^2 \delta^{ij} - n^i n^j - \epsilon^{ij}(\omega, \omega \mathbf{n}/c)) = 0. \quad (2.36)$$

Вычислить детерминант удобно в координатах, где тензор диэлектрической проницаемости является диагональным, см. (2.32c). В этой системе координат компоненты вектора \mathbf{n} удовлетворяют уравнению

$$\sum_i \epsilon^{(i)} |\mathbf{n}_i|^2 \left(|\mathbf{n}|^2 - \sum_{j \neq i} \epsilon^{(j)} \right) + \epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)} = 0. \quad (2.37)$$

Это — уравнение 4-го порядка относительно компонент вектора \mathbf{n} , если не принимать во внимание возможную зависимость от него тензора диэлектрической восприимчивости. Уравнение (2.37) называется *уравнением Френеля (Fresnel equation)*. Вообще говоря, при фиксированных направлении вектора \mathbf{n} и частоте ω у уравнения Френеля существует два положительных решения для абсолютного значения вектора $|\mathbf{n}|$, соответствующие двум поляризациям (а два решения с противоположным знаком соответствуют волнам, распространяющимся в противоположном направлении). То, что шестой порядок в (2.37) сократился, не является случайностью и говорит об отсутствии волны с третьей поляризацией.

2-5.2 Распространение лучей

Существует в общем случае две функции $\omega = \omega_{1,2}(\mathbf{k})$ для описания законов дисперсии двух поляризаций. Рассмотрим одну из них, опуская индекс '1,2'. Групповая скорость

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \quad (2.38)$$

направлена ортогонально поверхности $\omega = \text{const}$ в пространстве компонент волнового вектора.

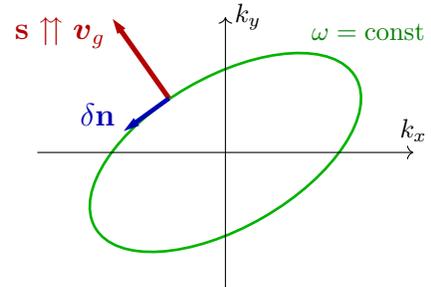


Рис. 2.2 Поверхность постоянной частоты в пространстве волновых векторов для некоторой фиксированной поляризации.

2-5.2.1 Вектор Умова-Пойнтинга

В этом пункте 2-5.2.1 рассмотрение применимо на любые прозрачные среды, включая магнитные.

Продemonстрируем, что поток энергии в волне, который определяется вектором Умова-Пойнтинга (3.22)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (2.39a)$$

действительно сонаправлен групповой скорости \mathbf{v}_g (2.38). Проварьируем уравнения Максвелла (2.34b), удерживая постоянной частоту ω . Тогда вариацию можно проводить над уравнениями (2.34b), записанными в терминах вектора \mathbf{n} , причём его вариация $\delta \mathbf{n}$ направлена по касательной к поверхности $\omega = \text{const}$, см. Рис. 2.2.

Результат вариации

$$\begin{aligned} [\delta \mathbf{n} \times \mathbf{H}] + [\mathbf{n} \times \delta \mathbf{H}] &= -\delta \mathbf{D}, \\ [\delta \mathbf{n} \times \mathbf{E}] + [\mathbf{n} \times \delta \mathbf{E}] &= \delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.39b)$$

Посчитаем теперь комбинацию, пропорциональную изменению запасённой энергии (3.21) при реальном изменении полей:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left((\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}^*) + (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}^*) \right) &= \\ = 2(\delta \mathbf{n} \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]) + \operatorname{Re} \left((\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E}^*) + (\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{H}^*) \right) \end{aligned} \quad (2.39c)$$

В процессе преобразований мы снова пользовались (2.34b), а также тем, что вектор \mathbf{n} является действительным. Теперь, в правой части (2.39c) во втором слагаемом будем полагать, что тензора $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ зависят только от частоты, но не от волнового вектора. Тогда их вариация равна нулю. В силу прозрачности среды (2.32a)

$$(\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E}^*) = \varepsilon^{ik} E^k \delta E^{*i} = E^k \varepsilon^{*ki} \delta E^{*i} = (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}^*), \quad (2.39d)$$

и то же самое для магнитного поля. Таким образом, второе слагаемое в правой части (2.39c) равно всей левой части, т.е. первое слагаемое в правой части (2.39c) равно нулю:

$$\delta \mathbf{n} \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = 0. \quad (2.39e)$$

Значит, вектор Пойнтинга \mathbf{S} направлен нормально по отношению к поверхности $\omega = \text{const}$, т.е. вдоль вектора групповой скорости \mathbf{v}_g .

2-5.2.2 Лучевой вектор

Введём *лучевой вектор* \mathbf{s} , который по определению сонаправлен групповой скорости, а его амплитуда удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = 1, \quad \mathbf{s} \uparrow \uparrow \mathbf{v}_g. \quad (2.40a)$$

Лучи в кристалле распространяются вдоль направления групповой скорости, т.е. и вдоль лучевого вектора. Длина же вектора $|\mathbf{s}|$ имеет смысл обратного показателя преломления $1/n$ для данного волнового вектора и поляризации. Действительно, набег фазы ψ в результате пробега волной расстояния $\mathbf{l} \uparrow \uparrow \mathbf{s}$ есть

$$n(\omega/c)l \equiv \psi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) = \frac{\omega}{c} \frac{l}{|\mathbf{s}|} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = \frac{(\omega/c)l}{|\mathbf{s}|}. \quad (2.40b)$$

Подчеркнём, что в общем случае эффективный показатель преломления n не равен модулю вектора \mathbf{n} .

Преимущество вычислений в терминах \mathbf{s} по сравнению с групповой скоростью состоит в том, что вектор \mathbf{s} можно найти непосредственно, не прибегая к дифференцированию закона дисперсии. При этом, разумеется, величина групповой скорости остаётся не найденной.

Вернёмся к ограничению нашего рассмотрения на немагнитные среды. Уравнение на лучевой вектор \mathbf{s} аналогично уравнению Френеля (2.37). Действительно, поскольку лучевой вектор сонаправлен вектору Пойнтинга, то он ортогонален векторам электрического и магнитного полей,

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{E} = \hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1} \mathbf{B}. \quad (2.40c)$$

Далее, домножив векторно уравнения Максвелла (2.34b) на лучевой вектор \mathbf{s} и воспользовавшись (2.40c) и условием (2.40a), получим

$$[\mathbf{s} \times \mathbf{D}] = \mathbf{H}, \quad [\mathbf{s} \times \mathbf{B}] = -\mathbf{E}. \quad (2.40d)$$

Мы видим, что уравнения (2.40c, 2.40d) воспроизводят уравнения Максвелла записанные в форме (2.34b), если совершить замены

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{s}, \quad \hat{\varepsilon} \leftrightarrow \hat{\varepsilon}^{-1}, \quad \hat{\mu} \leftrightarrow \hat{\mu}^{-1}. \quad (2.40e)$$

В частности, уравнение Френеля (2.37) в терминах лучевого вектора переписывается в виде

$$\sum_i |s_i|^2 \left(\prod_{j \neq i} \varepsilon^{(j)} |s|^2 - \sum_{j \neq i} \varepsilon^{(j)} \right) + 1 = 0. \quad (2.40f)$$

2-5.3 Поляризации волн в немагнитных средах

Для немагнитных сред собственные вектора симметричной действительной матрицы в волновом уравнении (2.35a) могут быть всегда выбраны чисто действительными. Таким образом, в немагнитных средах поляризации волн всегда являются линейными. Отметим, что для частного случая изотропной среды возможные эллиптические поляризации плоской волны являются следствием вырождения и могут быть представлены как линейная комбинация линейных поляризаций.

§2-6. Одноосный кристалл

Литература: Ландау и Лифшиц, 1982, § 98.

В одноосном кристалле тензор диэлектрической проницаемости обладает аксиальной симметрией. Ось симметрии называют *оптической осью*. Введём декартову систему координат $Oxyz$, ось Oz которой совпадает с оптической осью. В этой системе координат тензор ди-

электрической проницаемости записывается в виде

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

§2-7. Магнитооптика

Рассмотрим среду, которая является изотропной в состоянии покоя. В частности, в состоянии покоя тензор диэлектрической проницаемости среды пропорционален единичной матрице. Наложим внешнее постоянное магнитное поле на эту среду. В результате изотропия окажется нарушенной, поскольку в среде теперь есть выделенное направление — направление магнитного поля.

Zvezdin и Kotov (1997)

2-7.1 Феноменология

Предположим, что среда в отсутствии магнитного поля при интересующих нас частотах является прозрачной. Тогда можно ожидать, что при наложении магнитного поля среда по-прежнему останется прозрачной. В этом случае диэлектрическая проницаемость ϵ^{ij} в присутствии магнитного поля имеет следующую структуру

$$\epsilon^{ij} = \epsilon_t (\delta^{ij} - h^i h^j) + \epsilon_l h^i h^j + i \epsilon_a \epsilon^{ijk} \mathbf{H}_0^k, \quad (2.42)$$

где коэффициенты ϵ_t , ϵ_l и ϵ_a являются функциями квадрата магнитного поля \mathbf{H}_0^2 , а единичный вектор $h^i = \mathbf{H}_0^i / H_0$ направлен вдоль постоянного магнитного поля (таким образом, размерность ϵ_a отлична от размерностей $\epsilon_{t,l}$). Вид (2.42) продиктован обобщённым принципом симметрии кинетических коэффициентов (см. Пункт 8-1.3)

$$\epsilon^{ji}(-\mathbf{H}_0) = \epsilon^{ij}(\mathbf{H}_0)$$

и предположением об отсутствии диссипации, которое выражается условием (3.26):

$$\epsilon^{*ji} = \epsilon^{ij}.$$

При этом в записи (2.42) мы выделили чётную и нечётную по магнитному полю части. Если выбрать декартову систему координат, у которой ось Oz направлена вдоль (или против) магнитного поля, то (2.42) в матричном виде будет иметь вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_t & i\epsilon_a H_0 & 0 \\ -i\epsilon_a H_0 & \epsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_l \end{pmatrix},$$

где H_0 есть z -компонента магнитного поля

2-7.2 Эффект Фарадея

Продольный магнитооптический эффект Фарадея заключается в том, что линейно поляризованный свет, распространяющийся вдоль магнитного поля, испытывает вращение плоскости поляризации при прохождении через среду, обладавшую изотропией в отсутствии магнитного поля. Это означает, что две круговые поляризации света распространяются с разными фазовыми скоростями.

Найдём связь этих эффектов с константами ϵ_t и ϵ_a . Направим ось Oz декартовой системы координат по магнитному полю \mathbf{H}_0 . Для волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, компонента электромагнитной индукции $D^z = 0$. В силу вида тензора диэлектрической проницаемости (2.42) электрическое поле волны также направлено нормально к полю. Поэтому волновое уравнение (2.35b) для нашего частного случая переписывается в виде

$$[(ck)^2 - \omega^2 \epsilon_t] \delta^{ik} - i\omega^2 \epsilon_a H_0 \epsilon^{ik}] E^k = 0, \quad (2.43)$$

где единичный антисимметричный тензор определён согласно равенствам $\epsilon^{ik} = -\epsilon^{ki}$, $\epsilon^{12} = 1$. Решением этого уравнения являются две круговые поляризации $\mathbf{E}_{\omega\pm}$, распространяющиеся с волновыми векторами k_{\pm} :

$$\mathbf{E}_{\omega\pm} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}, \quad k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_t \pm H_0 \epsilon_a}, \quad (2.44)$$

где для вектора поляризации приведены только xy -компоненты.

Если исходно (в точке $z = 0$) поляризация поля была линейной и направленной по оси Ox , то в ходе распространения волны получаем, что её поляризация меняется согласно закону

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega}(z) &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{ik_+ z} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{ik_- z} \propto \\ &\propto e^{ikz} \begin{pmatrix} \cos(\delta k z) \\ \sin(\delta k z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где средний волновой вектор $k = (k_+ + k_-)/2$, а разность волновых векторов $\delta k = (k_+ - k_-)/2$. Таким образом, поляризация линейно поляризованного света действительно поворачивается в процессе прохождения через рассматриваемую среду.

При относительно слабом магнитном поле можно считать, что антисимметричная добавка в тензор диэлектрической проницаемости мала, $H_0 \varepsilon_a \ll \varepsilon_t$, а сама величина ε_t слабо отличается от величины диэлектрической проницаемости ε_0 в отсутствие магнитного поля.

Тогда обратный период поворота вектора поляризации даётся выражением,

$$\delta k = \frac{\omega \varepsilon_a H_0}{c 2\sqrt{\varepsilon_0}}. \quad (2.46)$$

Если справедливо предположение, что при уменьшении магнитного поля ε_a стремится к постоянному значению, то из (2.46) следует, что период поворота вектора поляризации волны обратно пропорционален магнитному полю.

Глава 3

ТЕРМОДИНАМИКА ТЕЛА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

§3-1. Термодинамика тела во внешнем электрическом и магнитном полях

Статистическая сумма

$$Z = \text{tr} \exp \left\{ -\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} \right\} \quad (3.1)$$

3-1.1 Гамильтониан тела во внешнем электромагнитном поле

Предположим, что мы изучаем поведение некоторого образца, помещённого во внешнее электромагнитное поле. Этот образец описывается гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}(A^\mu)$, где $A^\mu(\mathbf{r}, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля. Электромагнитное поле создаётся как внешними источниками, имеющими плотность зарядов ρ_{src} и плотность тока \mathbf{j}_{src} , так и зарядами и токами в самом образце.

Полный гамильтониан системы, состоящей из исследуемого образца и электромагнитного поля, возбуждаемого источниками, складывается из трёх частей:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{H}}(A^\mu) + \hat{\mathcal{H}}_f + \hat{\mathcal{H}}_{f, \text{src}}, \quad (3.2)$$

В (3.2) гамильтониан собственно исследуемого образца

$$\hat{\mathcal{H}}(\{\hat{A}^\mu\}) = \sum_a \int d^3r \hat{\Psi}_a^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\mathcal{H}}_a(\mathbf{r}; \hat{A}^\mu) \hat{\Psi}_a(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

где $\hat{\Psi}_a(\mathbf{r})$ – оператор уничтожения частицы сорта a в точке \mathbf{r} , а локальная плотность гамильтониана для частиц сорта a

$$\hat{\mathcal{H}}_a(\mathbf{r}; \hat{A}^\mu) = \frac{1}{2m_a} \left(\hat{\mathbf{p}}_a - \frac{e_a}{c} \mathbf{A}_a \right)^2 + e_a \varphi_a - (\hat{\boldsymbol{\mu}}_a \mathbf{B}_a), \quad (3.4)$$

где $\hat{\mathbf{A}}_a$, $\hat{\mathbf{B}}_a$ и φ_a означают локальные значения вектор-потенциала, магнитного поля и скалярного потенциала в точке положения частицы a . Шляпки над этими величинами означают, что электромагнитное поле само является функцией состояния исследуемой системы. Далее, гамильтониан электромагнитного поля

$$\hat{\mathcal{H}}_f = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 - 2\varphi \text{div} \mathbf{E}). \quad (3.5)$$

Каноническими сопряжёнными переменными являются \mathbf{A} – обобщённые координаты, и $\mathbf{E}/(4\pi)$ – обобщённые импульсы; обобщённый импульс, канонически

сопряжённый обобщённой координате φ , тождественно равен нулю. Наконец, часть гамильтониана, отвечающая за возбуждение внешними источниками электромагнитного поля

$$\hat{\mathcal{H}}_{f, \text{src}} = \int d^3r \left(\varphi \rho_{\text{src}} - \frac{1}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{src}}) \right). \quad (3.6)$$

Сейчас мы считаем, что электромагнитное поле классично и, соответственно, подчиняется классическим уравнениям Гамильтона. Кроме того, мы полагаем, что тепловые флуктуации электромагнитного поля незначительны.

3-1.1.1 Электромагнитное поле

Уравнения Гамильтона для электромагнитного поля выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= -4\pi \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{\delta \mathbf{A}}, \\ \partial_t \mathbf{A} &= 4\pi \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{\delta \mathbf{E}}, \quad 0 = -4\pi \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}}}{\delta \varphi}, \end{aligned}$$

Можно проверить, что если подставить магнитное поле $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, то эти уравнения воспроизводят уравнения Максвелла ...

3-1.1.2 Стационарная ситуация

Пусть внешние источники φ_{src} и \mathbf{j}_{src} постоянны во времени. Положим по определению

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{\text{src}} &= -4\pi \rho_{\text{src}}, \quad \mathbf{E}_{\text{src}} = -\nabla \varphi_{\text{src}}, \\ \text{rot rot} \mathbf{A}_{\text{src}} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{src}}, \quad \mathbf{B}_{\text{src}} = \text{rot} \mathbf{A}_{\text{src}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поскольку мы рассматриваем стационарную ситуацию, электромагнитное поле может быть найдено из приравнивания его временных производных нулю:

из которых следует

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{tot}}. \quad (3.8)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi, \quad \text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_{\text{tot}}.$$

Индекс ‘tot’ у плотности зарядов ρ_{tot} и электрического тока \mathbf{j}_{tot} означает, что эти величины являются суммой

вкладов от рассматриваемой системы и внешних источников:

$$\rho_{\text{tot}} = \hat{\rho} + \rho_{\text{src}}, \quad \mathbf{j}_{\text{tot}} = \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{j}_{\text{src}}, \quad (3.9)$$

где индекс 'src' означает внешние источники. Из уравнений движения, записанных в форме Лагранжа, следует, что операторы плотности зарядов $\hat{\rho}$ и тока $\hat{\mathbf{j}}$ системы равны

$$\hat{\rho} = \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}}{\delta \varphi}, \quad \hat{\mathbf{j}} = -c \frac{\delta \hat{\mathcal{H}}}{\delta \mathbf{A}}. \quad (3.10)$$

Равенство нулю канонического импульса, сопряжённого обобщённой координате φ , является связью. Поэтому полный гамильтониан системы можно переписать с учётом этой связи, после чего получим:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} &= \hat{\mathcal{H}}(\varphi, \mathbf{A}) + \int d^3r \left(\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right) + \\ &+ \int d^3r \left(\varphi \rho_{\text{src}} - \frac{1}{c} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{src}}) \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

причём электрическое поле удовлетворяет уравнению связи

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho_{\text{tot}}. \quad (3.12)$$

С учётом определений (3.7) гамильтониан можно переписать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{H}}(\varphi, \mathbf{A}) + \quad (3.13)$$

$$+ \int d^3r \left[\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}_{\text{src}}}{4\pi} \right] - \int d^3r \left[\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{E} \mathbf{E}_{\text{src}}}{4\pi} \right].$$

3-1.2 Термодинамические потенциалы

3-1.2.1 Фиксированное распределение зарядов и токов вокруг исследуемого тела.

Свободная энергия для такой системы является функцией внешних источников ρ_{src} и \mathbf{j}_{src} . Её вариацию по этим параметрам можно переписать в следующих видах:

$$\begin{aligned} \delta F(\rho_{\text{src}}, \mathbf{j}_{\text{src}}) &= \int d^3r \left(\varphi \delta \rho_{\text{src}} - \frac{1}{c} \mathbf{A} \delta \mathbf{j}_{\text{src}} \right) = \\ &= \int d^3r \left[\frac{\mathbf{E} \delta \mathbf{D}}{4\pi} - \frac{\mathbf{B} \delta \mathbf{H}}{4\pi} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

При выводе мы пользовались тем, что

$$\text{div } \mathbf{D} = -4\pi \rho_{\text{src}}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{src}}. \quad (3.15)$$

Можно исследовать несколько другую величину, обозначим её F_{in} : разность свободной энергии F (3.14) и

энергии поля, которая была бы в отсутствии тела. Вариация потенциала F_{in} записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta F_{\text{in}}(\rho_{\text{src}}, \mathbf{j}_{\text{src}}) &= \delta [F(\rho_{\text{src}}, \mathbf{j}_{\text{src}}) - \mathcal{H}_{f,\text{src}}] = \quad (3.16) \\ &= - \int d^3r [\mathbf{P} \delta \mathbf{E}_{\text{src}} + \mathbf{M} \delta \mathbf{B}_{\text{src}}], \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{H}_{f,\text{src}} = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\varphi_{\text{src}} \rho_{\text{src}} - \frac{1}{c} \mathbf{A}_{\text{src}} \mathbf{j}_{\text{src}} \right).$$

Отметим, что интегрирование в последнем выражении (3.16) производится только по объёму образца.

3-1.2.2 Фиксированное значение поля вокруг исследуемого тела.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда фиксированы не внешние источники, а значение электромагнитного потенциала на поверхности проводников. Свободная энергия для такого процесса получается из свободной энергии (3.14) преобразованием Лежандра:

$$\tilde{F}(\varphi, \mathbf{A}) = \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} &= F(\rho_{\text{src}}, \mathbf{j}_{\text{src}}) - \int d^3r \left(\varphi \rho_{\text{src}} - \frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{j}_{\text{src}} \right) = \\ &= F(\rho_{\text{src}}, \mathbf{j}_{\text{src}}) - \int d^3r \left(\frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{4\pi} - \frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{j}_{\text{src}} \right). \end{aligned}$$

где определением φ и \mathbf{A} является выражение для вариации (3.14). Гамильтониан для такой системы записывается в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{H}}(\varphi, \mathbf{A}) + \int d^3r \left[\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} \right].$$

Вариация свободной энергии равна

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F}(\varphi, \mathbf{A}) &= \int d^3r \left(-\rho_{\text{src}} \delta \varphi + \frac{1}{c} \mathbf{j}_{\text{src}} \delta \mathbf{A} \right) = \\ &= \int d^3r \left(-\frac{\mathbf{D} \delta \mathbf{E}}{4\pi} + \frac{\mathbf{H} \delta \mathbf{B}}{4\pi} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Точно так же можно рассмотреть часть свободной энергии, которая относится именно к исследуемой системе

$$\begin{aligned} \delta \tilde{F}_{\text{in}}(\varphi, \mathbf{A}) &= \delta [\tilde{F}(\varphi, \mathbf{A}) + \mathcal{H}_{f,\text{src}}] = \quad (3.19) \\ &= \int d^3r [\mathbf{E}_{\text{src}} \delta \mathbf{P} + \mathbf{B}_{\text{src}} \delta \mathbf{M}] = \\ &= \int d^3r \left[\mathbf{E}_{\text{src}} \delta \mathbf{P} + \frac{1}{c} \mathbf{A}_{\text{src}} \delta \mathbf{j}_{\text{body}} \right]. \end{aligned}$$

Опять, последний интеграл производится только по внутренности образца.

§3-2. Энергия поля в диспергирующих средах

Рассмотрим неподвижную непрерывную среду, в которой возбуждено переменное электромагнитное поле. В этом параграфе мы изучим поток и плотность энергии, связанные с электромагнитным полем, а также скорость диссипации этой энергии в тепло.

Прежде всего запишем плотность потока энергии — вектор Пойнтинга (или Умова-Пойнтинга) \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (3.20a)$$

В справедливости этого выражения можно убедиться, рассмотрев границу раздела рассматриваемой среды с вакуумом. Нормальная компонента потока энергии должна быть непрерывна при переходе через границу, и выражение (3.20a) — единственное, удовлетворяющее этому условию, поскольку на границе раздела остаются непрерывными тангенциальные компоненты именно электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} .

В случае, когда речь идёт о почти монохроматическом электромагнитном поле, имеющем частоту близкую к ω_0 , можно переписать формулу (3.20a), усреднив её по периоду колебаний поля. Выделим у всех полей огибающую по времени (например, для электрического поля — $\tilde{\mathbf{E}}(t)$), как это было сделано в Пункте 2-4.1, см. (2.28). В результате усреднения исчезают слагаемые, осциллирующие с двойной частотой $2\omega_0$, и мы получаем

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*]. \quad (3.20b)$$

В частном случае плоской монохроматической волны, распространяющейся в изотропной среде, вектор Пойнтинга направлен по её направлению распространения \mathbf{n} ,

$$\mathbf{S} = \frac{c|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2\pi} \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon/\mu} \mathbf{n}. \quad (3.20c)$$

Мы воспользовались соотношениями (2.22) для полей в воле.

3-2.1 Мощность, выделяемая в единице объёма

Мгновенное значение дивергенции от потока энергии должно быть равно мощности W , передаваемой единице объёма со знаком минус:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Используя уравнения Максвелла в среде, получаем, что

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{S} &= \frac{\mathbf{E} \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B}}{4\pi} = \\ &= \frac{\partial_t (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)}{4\pi} + \mathbf{E} \partial_t \mathbf{P} - \mathbf{M} \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

При выводе мы полагали, что внешние заряды отсутствуют, $\mathbf{j}_{\text{ext}} = 0$.

Для почти монохроматического поля результат усреднения (3.21) по периоду колебаний есть

$$\partial_t W = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\tilde{\mathbf{E}} [(\partial_t - i\omega_0) \tilde{\mathbf{D}}]^* + \tilde{\mathbf{H}} [(\partial_t - i\omega_0) \tilde{\mathbf{B}}]^* \right). \quad (3.22)$$

3-2.2 Скорость диссипации энергии

Для того, чтобы посчитать скорость диссипации Q электромагнитной энергии в тепло, следует рассмотреть постоянную монохроматическую волну. Тогда скорость диссипации

$$Q = \partial_t W = -\operatorname{div} \mathbf{S},$$

поскольку при постоянстве амплитуды колебаний поля вся уходящая в единицу объёма мощность переходит в тепло. Из (3.22) получаем

$$\partial_t W = \frac{\omega}{2\pi} \operatorname{Im} \left((\tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{D}}) + (\tilde{\mathbf{H}}^* \cdot \tilde{\mathbf{B}}) \right). \quad (3.23)$$

Пусть теперь среда обладает линейным откликом (2.6a). Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} Q &= \\ &= \frac{\omega}{4\pi i} \left((\varepsilon^{*ki} - \varepsilon^{ik}) \tilde{E}^{*k} \tilde{E}^i + (\mu^{*ki} - \mu^{ik}) \tilde{H}^i \tilde{H}^{*k} \right) = \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \left(\varepsilon_a^{ik} \tilde{E}^{*i} \tilde{E}^k + \mu_a^{ik} \tilde{H}^{*i} \tilde{H}^k \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где разложение тензоров на эрмитову и анти-эрмитову части определено в (2.13). Если среда изотропна, так что имеет место (2.15a), то выражение для скорости диссипации (3.24) упрощается до

$$Q = \frac{\omega}{2\pi} \left(\varepsilon'' |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \mu'' |\tilde{\mathbf{H}}|^2 \right). \quad (3.25)$$

Для того, чтобы колебания электромагнитного поля на частоте ω не испытывали диссипации в среде, необходимо, чтобы анти-эрмитовы части диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости на данной частоте были нулевыми, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\varepsilon^{*ki}(\omega) = \varepsilon^{ik}(\omega), \quad \mu^{*ki}(\omega) = \mu^{ik}(\omega). \quad (3.26)$$

Отметим, что условие (3.26) является только необходимым, но не достаточным для того, чтобы среда оказалась прозрачной, см. Пункт 2-3. При выполнении условий (3.26) произведение $\varepsilon\mu$ может оказаться действительной отрицательной величиной — в этом случае среда не будет прозрачной, хотя поглощение в ней будет отсутствовать.

Наконец рассмотрим случай волнового пакета, когда время действия электрического поля конечно. Тогда имеет смысл говорить об объёмной плотности полного тепла W , выделившегося в единице объёма. Для упрощения записи возьмём частный случай изотропной среды, тогда

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \left(\omega \varepsilon''(\omega) |\mathbf{E}_\omega|^2 + \omega \mu''(\omega) |\mathbf{H}_\omega|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

3-2.2.1 Неравенство для диэлектрической проницаемости

Требование неотрицательности диссипации накладывает ограничение на анти-эрмитову часть диэлектрической проницаемости

3-2.3 Энергия электромагнитных волн

Рассмотрим почти монохроматическую волну с несущей частотой ω_0 . Будем предполагать, что амплитуда электромагнитного поля медленно увеличивается во времени, причём при $t \rightarrow -\infty$ она была равна нулю. Для удобства выкладок положим, что она возрастала экспоненциально, пропорционально $\exp(\gamma t)$ с малым положительным γ . В этом случае огибающая (2.28)

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) + \mathbf{E}_0^* \exp(i\omega^* t), \quad \omega = \omega_0 + i\gamma,$$

где \mathbf{E}_0 – константа. Поскольку частота ω лежит на комплексной плоскости в верхней полуплоскости, то мы можем взять аналитическое продолжение для диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{ik}(\omega)$ и написать

$$\partial_t D^i(t) = -i \left(\omega \varepsilon^{ik}(\omega) E_0^k e^{-i\omega t} - \omega^* \varepsilon^{*ik}(\omega) E_0^{*k} e^{i\omega^* t} \right),$$

Согласно выражению для дивергенции вектора Умова-Пойнтинга (3.21), работа A , затраченная внешними источниками к моменту времени $t = 0$ и усреднённая по

периоду колебаний с частотой ω_0 , равна

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4\pi} \left\langle \int_{-\infty}^0 dt (\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{D}) \right\rangle = \\ &= -i \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2\gamma t}}{4\pi} E_0^{*k} E_0^i \left(\omega \varepsilon^{ki}(\omega) - \omega^* \varepsilon^{*ik}(\omega) \right) \end{aligned}$$

Теперь произведём разложение в ряд Лорана полученного выражения по малому γ до нулевой степени:

$$A = \frac{1}{4\pi\gamma} E_0^{*k} E_0^i \omega_0 \varepsilon_a^{ki}(\omega_0) + \frac{1}{4\pi} E_0^{*k} E_0^i \left. \frac{d(\omega \varepsilon_h^{ki})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (3.28)$$

Первое слагаемое соответствует диссипативным потерям (3.24) и определяют часть затраченной работы, перешедшей в тепло. Остальная часть работы оказалась запасённой в колебаниях электромагнитного поля.

Говорить об запасённой энергии электромагнитных колебаний как о самостоятельной физической величине имеет смысл только тогда, когда γ может быть выбрано так, чтобы в (3.28) первое диссипативное слагаемое было мало по сравнению со вторым. Иными словами, анти-эрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости должна быть мала по сравнению с эрмитовой, $\hat{\varepsilon}_a \ll \hat{\varepsilon}_h$

Для магнитной части запасённой энергии рассуждения будут совершенно аналогичными. Поменяем теперь обозначения, заменив в (3.28) $\mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{H}_\omega$, и напишем окончательное выражение для энергии электромагнитных колебаний волны:

$$E = \frac{1}{4\pi} \int (d\omega) \left(\frac{\partial(\omega \varepsilon_h^{ki})}{\partial\omega} E_\omega^{*k} E_\omega^i + \frac{\partial(\omega \mu_h^{ki})}{\partial\omega} H_\omega^{*k} H_\omega^i \right). \quad (3.29)$$

Выражение (3.29) называется формулой Бриллюэна. Если среда изотропна, то выражения для плотности запасённой энергии упрощается до

$$E = \frac{1}{4\pi} \int (d\omega) \left(\frac{\partial(\omega \varepsilon')}{\partial\omega} |\mathbf{E}_\omega|^2 + \frac{\partial(\omega \mu')}{\partial\omega} |\mathbf{H}_\omega|^2 \right). \quad (3.30)$$

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§4-1. Простейшие электростатические задачи

Если в электростатической задаче известно распределение диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$, то распределение электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, которое потенциально, определяется уравнением

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (4.1)$$

Если в уравнении (4.1) диэлектрическую проницаемость поделить на константу, то решение потенциал останется неизменен.

4-1.1 Шар в электрическом поле

Рассмотрим шар, изготовленный из однородного материала, находящийся в некоторой однородной среде. Далеко от шара электрическое поле становится однородным в пространстве и равным \mathbf{E}_{ext} . Диэлектрическая проницаемость материала шара равна ε_2 , диэлектрическая проницаемость среды равна ε_1 . радиус шара равен a .

Наша задача состоит в нахождении распределения поля вблизи шара и внутри него. Поскольку в общем уравнении на распределение электрического поля (4.1) диэлектрическая проницаемость может быть поделена на константу без изменения распределения поля, то примем, что снаружи шара диэлектрическая проницаемость равна 1, а внутри, соответственно, $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Как оказывается, поле внутри шара является однородным, направленным (или противонаправленным) внешнему электрическому полю \mathbf{E}_{ext} . Снаружи шара поле есть суперпозиция внешнего поля \mathbf{E}_{ext} и поля диполя, образованного поляризованностью зарядов в шаре и в среде.

Задача обладает аксиальной симметрией. Выберем декартову систему координат $Oxyz$, начало которой находится в центре шара, ось Oz сонаправлена полю \mathbf{E}_{ext} . Кроме того, введём сферические координаты $\{r, \theta, \phi\}$. Поле внутри шара равно

$$\mathbf{E}_{\text{in}} \mathbf{e}_z, \quad (4.2)$$

а поле снаружи шара есть

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{d} = - \int d^3r \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{3} a^3 \mathbf{E}_{\text{in}}.$$

Обратим внимание, что дипольный момент шара не равен дипольному моменту среды, заполняющей шар, поскольку электрическое поле снаружи определяется в

том числе и поляризацией окружающей шар среды. Граничные условия на поверхности шара дают условия на непрерывность касательной компоненты поля E_θ (т.е. непрерывность потенциала φ),

$$E_{\text{in}} \sin \theta = (E_{\text{ext}}^z - d^z/a^3) \sin \theta, \quad (4.4)$$

и на непрерывность нормальной компоненты электрической индукции D_n ,

$$\varepsilon E_{\text{in}} \cos \theta = E_{\text{ext}}^z \cos \theta + \frac{3d^z \cos \theta}{a^3}, \quad (4.5)$$

Уравнения (4.3,4.4,4.5) совместны, что означает соответствие действительности распределения поля, которое было заявлено в начале решения задачи.

Дипольный момент и поле внутри шара равны

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}_{\text{ext}}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3. \quad (4.6)$$

Величина α , связывающая полный дипольный момент тела со внешним электрическим полем, называется его поляризуемостью. В общем случае поляризуемость, связывая два вектора, является тензором второго ранга, однако для шара она является скаляром в силу его симметрии.

Дипольный момент шара сонаправлен электрическому полю, если диэлектрическая проницаемость материала шара больше, чем диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Такой случай реализуется, например, для капли воды или любого другого шара из диэлектрика, находящиеся в воздухе (пустоте). Металлический шар, у которого формально диэлектрическая проницаемость на низких частотах чисто мнимая и большая по амплитуде, см. (2.15d), также подходит под этот случай; его поляризуемость равна $\alpha = a^3$. Наоборот, дипольный момент направлен противоположно электрическому полю, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Например, так происходит для пузырька в воде или для любого вкрапления материала с диэлектрической проницаемостью меньше чем у среды.

4-1.2 Заряд над границей раздела

4-1.3 Заряд рядом с металлическим шаром

§4-2. Эллипсоид во внешнем электрическом поле

Задача об однородном эллипсоиде, помещённом в однородное электрическое поле, может быть решена полностью аналитически, см., например, Ландау и Лифшиц (1982, §8).

4-2.1 Удлиненное тело вращения во внешнем параллельном электрическом поле: приближённое описание

Рассмотрим тело, представляющее из себя фигуру вращения, помещённое во внешнее электрическое поле, направленное вдоль оси вращения тела. Выберем систему координат, в которой ось Oz направлена вдоль оси вращения тела. Плоскость Oxy даёт круговое сечение тела с радиусом $\rho = \rho(z)$. Для эллипсоида вращения $\rho = a\sqrt{1 - z^2/b^2}$. Тело выполнено из некоторого материала, имеющего диэлектрическую проницаемость ε . Если речь идёт о квази-стационарном поле, то может быть более удобно характеризовать электрический отклик материала тела проводимостью σ ,

$$\sigma = -\frac{i\omega(\varepsilon - 1)}{4\pi}.$$

В этом пункте мы полагаем тело вращения сильно удлиненным, так что его длина $b \gg \rho$. Кроме того, мы полагаем, что поперечное сечение тела меняется не очень быстро, так что $d\rho/dz \ll 1$, т.е. на расстоянии $z \sim \rho$ поперечное сечение изменяется слабо. Это позволяет нам считать, что электрическое поле внутри тела однородно в поперечном направлении.

Полное электрическое поле описывается внешним полем \mathbf{E}_{ext} и наведённым потенциалом Φ , так что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \text{grad } \Phi.$$

Поскольку в нашем приближении электрическое поле в поперечном направлении однородно, то

$$\frac{4\pi P}{\varepsilon - 1} = \frac{j}{\sigma S_z} = E_{\text{ext}} - \partial_z \Phi, \quad (4.7)$$

где сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной длинной оси, равно $S_z = \pi\rho^2(z)$, P — z -компонента поляризации материала тела, а j — ток через полное сечение, $j = -i\omega S_z P$.

Найдём теперь связь потенциала Φ с погонной плотностью заряда $q(z)$. В пределе $b \gg \rho$ эта связь записывается в виде

$$\Phi(z) \approx \int_{-b}^b \frac{q(z') dz'}{|z - z'|}, \quad (4.8)$$

где интеграл берётся по области $|z' - z| \gtrsim \rho(z)$. Преобразуем это выражение

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\approx q(z) \int_{-b}^b \frac{dz'}{|z - z'|} + \int_{-b}^b \frac{(q(z') - q(z)) dz'}{|z - z'|} \approx \\ &\approx \frac{q(z)}{C_z}, \quad \frac{1}{C_z} = \ln \frac{b^2 - z^2}{\rho^2} = \ln \frac{b^2 - z^2}{S_z/\pi}, \end{aligned}$$

где последний переход в цепочке равенств для $\Phi(z)$ верен, когда $q(z')$ не возрастает сильно при удалении z' от z . Таким образом, с логарифмической точностью, то есть в пределе $\ln(b/\rho) \gg 1$, получаем локальную связь между зарядом и потенциалом. Наконец, ток и погонная плотность зарядов связаны между собой уравнением непрерывности:

$$\partial_z j - i\omega q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_z(S_z P) = -q \quad (4.9)$$

В результате получаем уравнение, записанное в терминах поляризации P :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon - 1} P - \partial_z \frac{1}{C_z} \partial_z(S_z P) = E_{\text{ext}}(z). \quad (4.10)$$

Если помножить это уравнение на S_z и продифференцировать его по z , мы получим уравнение на заряд q :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon - 1} q - \partial_z S_z \partial_z \frac{q}{C_z} = -\partial_z(S_z E_{\text{ext}}). \quad (4.11)$$

Рассмотрим теперь частный случай эллипсоида вращения. Связь (4.9) между погонной плотностью заряда и наведённым потенциалом переписывается упрощается, поскольку ёмкость C перестаёт зависеть от z :

$$\Phi(z) = \frac{q(z)}{C}, \quad C = \frac{1}{2 \ln(b/a)}. \quad (4.12)$$

Если внешнее поле E_{ext} однородно, то P также однородно вдоль оси Oz : действительно, из (4.10) получаем, что однородное решение для поляризации допустимо этим уравнением, её величина определяется равенством

$$\left(\frac{1}{\varepsilon - 1} + L_b \right) 4\pi P = E_{\text{ext}}, \quad (4.13)$$

где фактор деполяризации L_b в пределе сильно вытянутого эллипсоида определён в (4.16). Решение (4.13) совпадает с точным ответом (4.14).

• **Задача 1:** Оценить по порядку величины распределение поля вокруг удлиненного и сплюснутого эллипсоидов вращения, сделанных из оптически плотного диэлектрика и помещённых во внешнее постоянное электрическое поле. *Литература:* §4-2

4-2.2 Эллипсоид вращения в однородном внешнем поле: точное решение

Рассмотрим эллипсоид вращения, главная ось которого равна b , а две другие равны a . Эллипсоид помещён во внешнее однородное электрическое поле и его материал имеет диэлектрическую проницаемость равную ε . Диэлектрическая проницаемость окружающего пространства равна единице. Выберем декартову систему координат, в которой главная ось эллипса направлена по оси z . Обозначим факторы деполяризации эллипсоида $L_{a,b}$: поскольку они удовлетворяют равенству $2L_a + L_b = 1$, то достаточно знать только один из них.

Поле внутри цилиндра однородно и покомпонентно равно (см. Ландау и Лифшиц (1982, §8, Ур.(8.9))).

$$E_{\text{in}}^z = \frac{1/L_b}{\varepsilon - \varepsilon_{\text{res},b}} E_{\text{ext}}^z, \quad E_{\text{in}}^\perp = \frac{1/L_a}{\varepsilon - \varepsilon_{\text{res},a}} E_{\text{ext}}^\perp, \quad (4.14)$$

Положение резонансов

$$\varepsilon_{\text{res},a} = -\frac{1}{L_a} + 1, \quad \varepsilon_{\text{res},b} = -\frac{1}{L_b} + 1. \quad (4.15)$$

Для вытянутого эллипсоида, когда $b > a$, эксцентриситет сечения эллипсоида плоскостью Oxz равен $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$, а фактор деполяризации для главной оси есть (см. Ландау и Лифшиц (там же, §4, ур. (4.32)))

$$L_b = \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right).$$

В пределе сильно вытянутого эллипсоида, когда $b \gg a$, получаем приближённо, что

$$L_b = \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{2b}{a}. \quad (4.16)$$

4-2.3 Эллиптический цилиндр во внешнем однородном поле

• **Задача 2:** Найти факторы деполяризации для диэлектрического длинного цилиндра, являющимся в поперечном сечении эллипсом с полуосями $b \geq a$. *Указание:* Поскольку задача эффективно двумерная, то решение значительно упрощается благодаря тому, что уравнение Лапласа инвариантно относительно конформных преобразований. Совершите такое конформное преобразование комплексной плоскости $z = x + iy$, которое переведёт эллипс (границу сечения цилиндра) в круг. *Литература:* Пункт 4-2.3.

Рассмотрим эллиптический цилиндр, у которого $c = \infty$, и, для определённости, $b \geq a$ (b соответствует направлению по Oy). Тогда

$$L_a = \frac{b}{a+b}, \quad L_b = \frac{a}{a+b}. \quad (4.17)$$

Резонансные значения диэлектрической проницаемости равны

$$\varepsilon_{\text{res},a} = -\frac{a}{b}, \quad \varepsilon_{\text{res},b} = -\frac{b}{a} \quad (4.18)$$

Электрическое поле на острие вытянутого эллипса (вне его) равно (если поле направлено по оси y)

$$E_{\text{out},b} = \frac{(1+b/a)\varepsilon}{\varepsilon + b/a} E_{\text{ext}}. \quad (4.19)$$

Решение задачи. Конформное отображение пространства вне эллипса произведём на внешность круга единичного радиуса (область $|\zeta| > 1$)

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{b}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta. \quad (4.20)$$

Введём также обозначение для области $|\zeta| > 1$

$$\zeta = (1 + \rho)e^{i\phi}, \quad \rho > 0.$$

Вблизи границы раздела, при $\rho \ll 1$

$$x + iy = P + \frac{Q}{ab}\rho + \mathcal{O}(\rho^2), \quad \begin{aligned} P &= a \cos \phi + ib \sin \phi, \\ Q &= b \cos \phi + ia \sin \phi. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Сделаем здесь несколько общих замечаний, касающихся комплексного анализа.

- i) Каждому комплексному числу, скажем P , соответствует вектор с координатами $\{\text{Re } P, \text{Im } P\}$. Если два вектора, скажем, $v = \partial_\phi P$ и $u = Q$ (4.21) ортогональны друг другу и составляют правую двойку $\{v, u\}$, то их произведение v^*u является чисто мнимым с положительной мнимой частью.
- ii) Домножение некоторого вектора v на фазовый множитель, $e^{i\theta}v$, есть его поворот на угол θ .
- iii) Далее, конформное преобразование сохраняет углы между векторами. Действительно, преобразование векторов при переходе от z к ζ производится с помощью матрицы

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, конформное преобразование (4.20) даёт связь

$$dz = I e^{i\theta} d\zeta, \quad I = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|, \quad e^{i\theta} = \frac{dz/d\zeta}{I}, \quad (4.22)$$

что означает, что матрица $\hat{D} = I^{-1} \cdot \hat{O}(-\theta)$, где $\hat{O}(\theta)$ — ортогональная матрица поворота на угол θ .

- iv) Частные производные по координатам

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{z^*}, \quad \partial_y = i\partial_z - i\partial_{z^*}.$$

v) Оператор Лапласа

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_z^2 = 4\partial_z\partial_{z^*}$$

после конформного преобразования становится равным

$$\Delta = \frac{4}{I^2}\partial_\zeta\partial_{\zeta^*},$$

то есть уравнение Лапласа после конформного преобразования не изменяет своего вида.

Определим геометрические характеристики выбранного конформного преобразования на поверхности эллипса. Поверхность эллипса задаётся уравнением

$$f = 1, \quad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Нормаль к поверхности есть

$$n = \frac{\partial_x f + i\partial_y f}{\sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}} = \frac{Q}{ab|Q|}. \quad (4.23)$$

На поверхности эллипса производная конформного преобразования, фигурирующая в (4.22), равна

$$\frac{dz}{d\zeta} = Ie^{i\theta} = e^{-i\phi}Q.$$

Наконец, на больших расстояниях, при $|z| \rightarrow \infty$, конформное преобразование стремится к тождественному, $\zeta \approx z$.

Вне цилиндра электрический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, поэтому может быть только суммой аналитической и анти-аналитической функцией,

$$\varphi = \varphi_+(z) + \varphi_-(z^*).$$

Для внешнего потенциала φ_{ext} выберем первый вариант, $\varphi_{\text{ext}} = \varphi_{\text{ext}}(z)$. То, что внешнее поле однородно в пространстве означает, что можно принять

$$\varphi_{\text{ext}} = -z.$$

(если поле единичной напряжённости направлено по оси X , то в окончательном ответе надо будет взять действительную часть, если по Y — то, соответственно, мнимую). Поскольку на больших расстояниях конформное преобразование стремится к тождественному, то граничным условием на бесконечности в координатах ζ является

$$\varphi|_{|\zeta| \rightarrow \infty} \rightarrow -\zeta. \quad (4.24)$$

Приступим к постановке граничных условий на поверхности цилиндра. Производная по нормали от потенциала на границе раздела

$$\begin{aligned} \partial_n \varphi &= (n^x \partial_x + n^y \partial_y) \varphi = \frac{Q \partial_z \varphi + Q^* \partial_{z^*} \varphi}{ab|Q|} = \\ &= \frac{e^{i\phi} \partial_\zeta \varphi + e^{-i\phi} \partial_{\zeta^*} \varphi}{ab|Q|} \Big|_{|\zeta|=1}, \quad (4.25) \\ \partial_n \varphi_{\text{ext}} &= \frac{-(a+b)e^{i\phi} + (a-b)e^{-i\phi}}{2ab|Q|}. \end{aligned}$$

Числитель в выражении для $\partial_n \varphi_{\text{ext}}$ в (4.25) такой, какой был бы в случае круглого сечения цилиндра: он содержит только ± 1 гармонику по углу ϕ , что соответствует однородному внешнему полю в координатах $\zeta = \xi + i\eta$. Отметим, что сам вид числителя в (4.25) соответствует дифференцированию по нормали к линии круга в ζ -координатах: это следствие того, что углы между векторами (в данном случае касательным вектором и вектором нормали) при конформном преобразовании сохраняются. Множитель Q в знаменателе имеет своим происхождением (4.23), то есть также должен возникнуть и в производной потенциала на внутренней стороне поверхности раздела. Таким образом, мы можем заключить, что внутри цилиндра электрическое поле однородно также, как и в задаче о цилиндре круглого сечения в однородном поле. Поэтому для внутренности совершим следующее (не конформное) линейное преобразование координат

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b. \quad (4.26)$$

Производная по нормали от потенциала на внутренней стороне границы

$$\begin{aligned} \partial_n \varphi_{\text{in}} &= \left(\frac{n^x}{a} \partial_\xi + \frac{n^y}{b} \partial_\eta \right) \varphi_{\text{in}} = \\ &= \frac{b^2 \cos \phi \partial_\xi + ia^2 \sin \phi \partial_\eta}{a^2 b^2 |Q|} \varphi_{\text{in}} = \\ &= \frac{(b^2 \alpha_\xi + a^2 \alpha_\eta) e^{i\phi} + (b^2 \alpha_\xi - a^2 \alpha_\eta) e^{-i\phi}}{2a^2 b^2 |Q|}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Мы подставили линейную зависимость потенциала

$$\varphi_{\text{in}} = \alpha_\xi \xi + \alpha_\eta \eta = \frac{(\alpha_\xi - i\alpha_\eta)\zeta + (\alpha_\xi + i\alpha_\eta)\zeta^*}{2} \quad (4.28)$$

Потенциал снаружи ищем в виде

$$\varphi = \varphi_{\text{ext}} + \frac{\beta_+}{\zeta} + \frac{\beta_-}{\zeta^*}. \quad (4.29)$$

Теперь осталось провести вычисления. Непрерывность потенциала на границе раздела (равенство (4.29) и (4.29)) даёт два уравнения (приравниваем коэффициенты при $e^{i\phi}$ и $e^{-i\phi}$ нулю)

$$\alpha_\xi - i\alpha_\eta = \beta_- - \frac{a+b}{2}, \quad \alpha_\xi + i\alpha_\eta = \beta_+ - \frac{a-b}{2}. \quad (4.30)$$

Непрерывность нормальной компоненты электрической индукции (равенство (4.25) и помноженного на ε (4.27)) на границе раздела даёт ещё два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(b^2 \alpha_\xi + a^2 \alpha_\eta)}{2a^2 b^2} &= -\frac{\beta_-}{ab} - \frac{a+b}{2ab}, \\ \frac{\varepsilon(b^2 \alpha_\xi - a^2 \alpha_\eta)}{2a^2 b^2} &= -\frac{\beta_+}{ab} - \frac{b-a}{2ab}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Глава 5

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§5-1. Отражение и преломление волн на плоской поверхности раздела

Пусть плоская монохроматическая волна, имеющая частоту ω , падает из изотропной среды 'i', характеризующейся ε_i, μ_i , на плоскую границу раздела с изотропной средой 't', характеризующейся константами ε_t, μ_t . Наша задача здесь описать поведение волны после взаимодействия с границей раздела.

Определим комплексные показатели преломления и импедансы сред согласно определениям (2.20, 2.22)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \quad (5.1)$$

Для того, чтобы постановка задачи имела смысл, среда 'i' должна быть прозрачной, $n_i > 0$. Угол падения (угол между нормалью и направлением распространения) обозначим θ_i . В результате преломления на границе раздела падающая волна разделится на две волны — отражённую и прошедшую, см. Рисунок 5.1. Отражённая волна будет распространяться в среде 'i' от границы раздела под тем же углом θ_i , что будет легко увидеть из формул, написанных ниже. Прошедшая волна распространяется под некоторым углом θ_t в материале 't' от границы раздела.

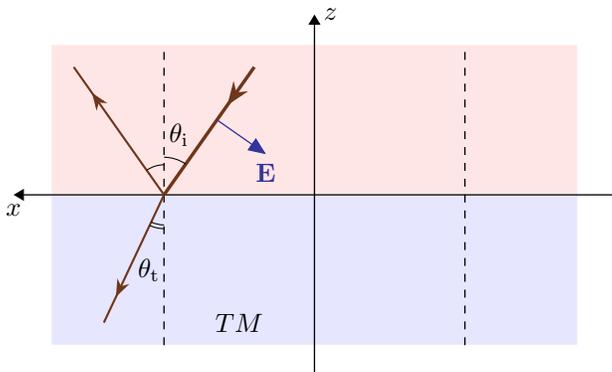


Рис. 5.1 Отражение и преломление TE и TM волн на границе раздела.

Введём декартову систему координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена по нормали (из среды 't' в среду 'i'), а граница раздела совпадает с плоскостью Oxy . Мы будем полагать, что волновой вектор падающей волны лежит в плоскости Oxz . Тогда из симметрии задачи следует, что в этой же плоскости лежат волновые вектора отражённой и прошедшей волн.

5-1.1 Закон Снелла; полное внутреннее отражение

Пусть \mathbf{k}_i — волновой вектор падающей волны, \mathbf{r}_r — волновой вектор отражённой волны, а \mathbf{k}_t — волновой вектор прошедшей волны. Абсолютные значения волновых векторов в среде 'i', откуда приходит падающая волна, и квадрат волнового вектора в среде 't' суть

$$k_i = k_r = n_i \frac{\omega}{c}, \quad \mathbf{k}_t = n_t^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (5.2)$$

Периодичность $\propto \exp(ik_i x \sin \theta_i)$ поля вдоль оси Ox накладывается падающей волной, то есть x -компонента всех волновых векторов равна $k_i \sin \theta_i$. Отсюда следует, что для отражённой волны $k_r^z = k_i \cos \theta_i$, поскольку она распространяется от границы раздела. Компоненты волнового вектора прошедшей волны равны

$$k_t^x = k_i \sin \theta_i, \quad k_t^z = \sqrt{k_t^2 - k_i^2 \sin^2 \theta_i}. \quad (5.3)$$

Должна быть выбрана та ветвь корня, которая имеет неотрицательную мнимую часть с тем, чтобы прошедшая волна не возрастала по амплитуде при удалении от границы раздела. У отражённой волны z -компонента волнового вектора

5-1.1.1 Падение на прозрачную среду

В частности, если среда 't' прозрачная, и $k_t^z > 0$, то это означает, что прошедшая волна является распространяющейся волной. В таком случае имеет место закон Снелла

$$\sin \theta_t = \frac{n_t}{n_i} \sin \theta_i. \quad (5.4)$$

Полное внутреннее отражение ...

5-1.2 Граничные формулы Френеля

Кроме того, из симметрии также следует, что независимыми поляризациями надо выбрать TE -поляризацию, в которой электрическое поле имеет только y -компоненту, а магнитное поле лежит в Oxz плоскости, и TM -поляризацию, в которой, наоборот, магнитное поле имеет только y -компоненту, а электрическое поле лежит в Oxz плоскости.

Примем, что амплитуда падающей волны равна единице. Распределение электромагнитного поля в двух

возможных поляризациях, ТЕ и ТМ-волнах, полностью определяется y -компонентами полей.

$$\begin{aligned} TE: \quad E_y &= e^{ik_i \sin \theta_i x} (e^{-ik_i \cos \theta_i z} + r e^{ik_i \cos \theta_i z}), \\ TM: \quad H_y &= e^{ik_i \sin \theta_i x} (e^{-ik_i \cos \theta_i z} + r e^{ik_i \cos \theta_i z}), \end{aligned}$$

при $z > 0$, и

$$\begin{aligned} TE: \quad E_y &= e^{ik_i \sin \theta_i x} \cdot t e^{-ik_i z}, \\ TM: \quad H_y &= e^{ik_i \sin \theta_i x} \cdot t e^{-ik_i z} \end{aligned}$$

при $z < 0$. Комплексные амплитуды r и t называются амплитудами отражения и прохождения.

Для ТЕ-волны амплитуды прохождения и отражения равны

$$t = \frac{2Z_t \cos \theta_i}{Z_t \cos \theta_i + Z_i \cos \theta_t}, \quad r = \frac{Z_t \cos \theta_i - Z_i \cos \theta_t}{Z_t \cos \theta_i + Z_i \cos \theta_t}, \quad (5.5)$$

тогда как для ТМ-волны эти амплитуды равны (из выражений для ТЕ-волны могут получены путём замены $Z \rightarrow 1/Z$)

$$t = \frac{2Z_i \cos \theta_i}{Z_i \cos \theta_i + Z_t \cos \theta_t}, \quad r = \frac{Z_i \cos \theta_i - Z_t \cos \theta_t}{Z_i \cos \theta_i + Z_t \cos \theta_t}. \quad (5.6)$$

см. Сивухин (2005, Ур. (67.13))

§5-2. Падение волны на непрозрачную среду

В § 5-1 были получены общие формулы, описывающие отражение и преломление света при падении из прозрачной изотропной среды на границу раздела с некоторой другой изотропной средой. Однако в деталях был изучен только случай, когда вторая среда также является прозрачной. Здесь мы рассмотрим падение электромагнитной волны из вакуума на плоскую поверхность непрозрачной среды. Среда может быть анизотропной. Введём декартову систему координат, как это показано на Рисунке 5.1.

5-2.1 Граничные условия в форме Леонтовича: общая форма

Граничные условия в форме Леонтовича выглядят следующим образом:

$$E^\alpha(t, \mathbf{r}^\perp) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^2 r'^\perp K^{\alpha\beta}(t-t', \mathbf{r} - \mathbf{r}'^\perp) H^\beta(t', \mathbf{r}'^\perp) \quad (5.7)$$

на поверхности материала, т.е. при $z = 0$, где $\{\alpha, \beta\} = \{x, y\}$. Ядро \hat{K} имеет в общем случае как временную, так и пространственную дисперсию. Граничными условиями (5.7) полностью задаются отражательные свойства поверхности материала.

Покажем, что запись граничных условий в виде (5.7) действительно возможна. Для этого проинтегрируем уравнение Максвелла в пустоте $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}/c$ на интервале $(-\infty, +0)$ по нормальной координате z . Мы полагаем, что при $z = +0$ магнитное поле и магнитная индукция совпадают, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$; кроме того, мы считаем, что при $z \rightarrow -\infty$ все поля исчезают. В результате получим:

$$E^\alpha(t) = -\frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \partial_t H^\beta(t, z) + \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+0} dz E^z(t, z), \quad (5.8)$$

где единичный антисимметричный тензор второго ранга задаётся условиями $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$ и $\epsilon^{xy} = 1$. В равенстве (5.8) стоят поля, взятые ниже точки $z = +0$, при $z \leq 0$. Поскольку источник электромагнитных волн у нас предполагается находящимся сверху, при $z > 0$, то величины в области $z < 0$ причинно зависят от величин в точке $z = +0$; всё же поле задаётся двумя скалярными величинами, в качестве которых могут быть выбраны в т.ч. две касательные компоненты магнитного поля. Не смотря на то, что при $z = +0$ есть вклад волн, отражённых поверхностью, и потому причинно зависящих от величин при $z < 0$, можно показать, что учёт (бесконечно слабого) затухания в отражающем материале окончательно доказывает правомочность формулы (5.7), см. Пункт 5-2.1.1.

Если мы теперь проинтегрируем уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}/c + 4\pi \mathbf{j}/c$ на интервале $(-\infty, +0)$, то получим уравнение, эквивалентное уравнению (5.8):

$$\begin{aligned} H^\alpha(t) &= \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+0} dz H^z(t, z) + \\ &+ \frac{\epsilon^{\alpha\beta}}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \left(\partial_t E^\beta(t, z) + 4\pi j^\beta(t, z) \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Таким образом, граничные условия в форме Леонтовича (5.7) могут быть переписаны и в обратном виде, когда касательные компоненты магнитного поля считаются откликом на касательные компоненты электрического поля.

5-2.1.1 Приложение: проверка выполнения принципа причинности в граничном условии Леонтовича

Рассмотрим скалярное поле $A(t, z) = A_+(t, z) + A_-(t, z)$, где \pm соответствует волнам, распространяющимся соответственно в сторону больших и меньших z ; $z = 0$ мы

по-прежнему считаем границей раздела, область $z > 0$ заполнена однородной средой. Источник находится при некотором большом $z = L$, поэтому волна от источника, которая распространяется к нему в сторону меньших z , доходит до границы и частично отражается, после чего распространяется в обратном направлении. Поэтому для величин вблизи поверхности мы можем написать

$$A_+(t, +0) = \int_0^{\infty} d\tau K(\tau) A_-(t, +0),$$

Перепишем то же самое в частотном представлении, также при $z = +0$

$$A_{+, \omega} = K_{\omega} A_{-, \omega}$$

Для дальнейшего важно заметить, что помимо отсутствия полюсов у K_{ω} в верхней части комплексной плоскости ω , в этой области K_{ω} также удовлетворяет условию

$$\text{Abs } K_{\omega} < 1, \quad \text{Im } \omega > 0. \quad (5.10)$$

Действительно, ситуация $\text{Im } \omega > 0$ соответствует экспоненциально растущей во времени волне, и по принципу причинности амплитуда отражённой волны не может быть больше амплитуды падающей. Учёт потерь при отражении, которые, вообще говоря, всегда присутствуют в веществе, делает неравенство строгим.

Равенство можно переписать в виде

$$A_{+, \omega} = \tilde{K}_{\omega} A_{\omega}, \quad \tilde{K}_{\omega} = \frac{K_{\omega}}{1 + K_{\omega}}, \quad (5.11)$$

причём в силу неравенства (5.9) у комплексной функции \tilde{K}_{ω} в верхней полуплоскости также нет полюсов. Равенство (5.11) показывает возможность постановки граничных условий при отражении волны от поверхности в форме (5.7).

5-2.2 Граничные условия Леонтовича в случае скин-эффекта

• **Задача 1:** Выразить поверхностный импеданс через диэлектрическую проницаемость ϵ и магнитную восприимчивость μ отражающего материала в случае нормального скин-эффекта. Связать между собой глубину скин-слоя δ , частоту волны ω и поверхностный импеданс ζ .

В случае, когда поля проникают в материал на малую глубину δ , много меньшую длины λ падающей волны, $\delta \ll \lambda$, связь между касательными компонентами электрического и магнитного полей на поверхности материала можно считать локальной в пространстве, так что

$$\mathbf{E}^{\alpha}(t) = \int^t dt' \zeta^{\alpha\beta}(t-t') \mathbf{H}^{\beta}(t'), \quad (5.12)$$

где $\hat{\zeta}$ называется поверхностным импедансом. Если же материал изотропен в поперечной плоскости, то связь можно переписать в виде

$$\mathbf{E}_t = \int^t dt' \zeta(t-t') [\mathbf{H}_t(t'), \mathbf{n}], \quad (5.13)$$

где индекс ‘t’ означает проекцию на поперечную плоскость, а \mathbf{n} – нормаль к поверхности.

Смысл именованного параметра ζ “поверхностным импедансом” может быть прояснён, если установить связь между значением касательной компоненты \mathbf{E}_t электрического поля и поверхностного тока \mathbf{J}_t . Для этого в уравнении Максвелла $\text{rot } \mathbf{B} = -\partial_t \mathbf{E}/c + 4\pi \mathbf{j}/c$ на продольные компоненты опустим малое слагаемое $\partial_t \mathbf{E}/c$ и проинтегрируем его по области $z < +0$:

$$\hat{\zeta}^{-1} \mathbf{E}_t = [\mathbf{H}_t, \mathbf{n}] = \frac{4\pi}{c} \int_{-\infty}^{+0} dz \mathbf{j}_t \equiv \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t. \quad (5.14)$$

Таким образом, ζ есть (с точностью до множителя $4\pi/c$) коэффициент пропорциональности между поверхностным током и касательной компонентой электрического поля (т.е., удельным падением напряжения на единицу длины), что и оправдывает именование ζ поверхностным импедансом.

Посчитаем мощность Q , которая поглощается единицей поверхности в единицу времени. Эта мощность равна нормальной компоненте потока энергии на поверхности и её мгновенное значение равно

$$Q = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t]).$$

Если волна (почти) монохроматическая, так что её можно представить в виде (2.28), то выделяющаяся мощность записывается в виде

$$Q = \frac{c}{2\pi} \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{t,\omega}|^2}{\zeta'_{\omega}} = \frac{c}{2\pi} \zeta'_{\omega} |\tilde{\mathbf{H}}_{t,\omega}|^2 \quad (5.15)$$

Величину ζ'_{ω} также называют *поверхностным сопротивлением* (*surface resistance*). В системе СИ поток мощности (5.15) переписывается в виде

$$Q = \frac{1}{2} R |\tilde{\mathbf{H}}_{t,\omega}|^2, \quad (5.16)$$

где величина R измеряется в Ом.

5-2.2.1 Идеальный металл

Пределу идеального металла соответствует нулевой поверхностный импеданс, $\zeta = 0$. Граничными условиями для поля на поверхности идеального металла является, во-первых, равенство нулю касательной компоненты электрического поля, $\mathbf{E}_t = 0$, см. (5.14). Из этого равенства и из уравнения Максвелла на нормальную компоненту магнитной индукции следует, что она равна нулю,

$V^n = 0$. Кроме того, из уравнения Максвелла на касательную компоненту электрической индукции следует, что производная по нормали от касательной компоненты магнитного поля равна нулю, $\partial_n V_t = 0$. Собирая всё вместе, получаем:

$$\Gamma: \quad \mathbf{E}_t = 0, \quad V^n = 0, \quad \partial_n V_t = 0. \quad (5.17)$$

5-2.3 Поверхностный импеданс металлов

Металлы характеризуются большой по амплитуде диэлектрической проницаемостью, имеющей либо большую по амплитуде мнимую часть, или большую отрицательную действительную часть. В результате закон дисперсии

$$\frac{ck}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu} \gg 1 \quad (5.18a)$$

даёт в правой части большую положительную мнимую часть. Это означает, что волны в металле не распространяются.

Длина волны (или длина, на котором поле существенно затухает) $\sqrt{|\varepsilon\mu|}/k$ мала по сравнению с характерным масштабом модуляции поля в падающей и отражённой волнах. Это означает, что волновой вектор у прошедшей (и затухающей) в металл волне направлен (почти) ортогонально поверхности, и поэтому тангенциальные компоненты поля вблизи поверхности в металле имеют связь согласно (2.22):

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} [\mathbf{B}_t \times \mathbf{n}] = \frac{1}{Z} [\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}], \quad (5.18b)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности, смотрящая в металл. Таким образом, поверхностный импеданс согласно определению (5.13) есть

$$\zeta = Z = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (5.18c)$$

Знак корня должен быть выбран таким образом, чтобы обеспечить положительность действительной части ζ' , поскольку она определяет поток энергии внутрь металла (5.15). Если диэлектрическая проницаемость связана с проводимостью соотношением (2.15d), то поверхностный импеданс

$$\zeta = (1 - i) \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}. \quad (5.18d)$$

5-2.3.1 Проникновение магнитного поля в металл

Магнитное поле в металле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t \exp((1 - i)|z|/\delta), \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}, \quad (5.18e)$$

где глубина скин-слоя δ вследствие определений в два раза больше глубины проникновения δ_p (2.21).

Из выражений для (5.18d, 5.18e) следует, что с ростом магнитной восприимчивости поверхностный импеданс растёт, а глубина проникновения падает. По этой причине ферромагнетики нерационально использовать в качестве материала для проводов в электротехнике.

• **Задача 2:** Вычислить закон дисперсии поверхностного импеданса для почти идеального металла, дисперсия проводимости которого соответствует модели Друде.

• **Задача 3:** Определить коэффициент отражения от поверхности металла как функцию угла падения и поляризации, зная поверхностный импеданс металла.

• **Задача 4:** Определить площадь полезного сечения для прутков диаметром 10 см, сделанных из меди и из стали, по которым течёт переменный ток с частотой 50 Гц. Принять, что сопротивление меди равно $\sigma_{Cu} = 580$ ксим/см, магнитная восприимчивость $\mu_{Cu} = 1$, сопротивление стали $\sigma_{Fe} = 100$ ксим/см, магнитная восприимчивость стали $\mu_{Fe} = 1000$. *Указание:* найти поверхностный импеданс для обоих материалов, и через него определить глубину скин-слоя на данной частоте. Определить поверхностные импедансы для обоих материалов. *Пояснение:* для указанных параметров глубина скин-слоя в меди — $\delta_{Cu} = 9.34$ мм, в стали — $\delta_{Fe} = 0.74$ мм.

• **Задача 5:** Определите интенсивность теплового излучения, производимую поверхностью металла, характеризующуюся поверхностным импедансом $\zeta(\omega)$. А именно, найдите спектральную плотность интенсивности в малый телесный угол $d\omega$, $dI_\omega/d\omega$.

Указание: Пусть R — коэффициент отражения, $dI_\omega^b/d\omega$ — величина, соответствующая чёрному излучению. Искомая величина есть $dI_\omega/d\omega = (1 - R)dI_\omega^b/d\omega$, это соотношение называется законом Кирхгофа.

§5-3. Рассеяние электромагнитных волн на частицах

Теория рассеяния в скалярном случае (когда поле скалярно и потому волна не имеет различных поляризацій) подробно изложена в Ландау и Лифшиц (1989). Нет смысла здесь повторять изложение общих вещей, верных и для частного случая рассеяния электромагнитных волн. С другой стороны, векторная структура уравнений Максвелла привносит дополнительные особенности в процесс рассеяния. Главным образом этим особенностям будет посвящено наше изложение.

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, рассеивающуюся на некотором центре рассеяния. Для определённости будем полагать, что падающая волна распространяется в вакууме. Перейдём к комплексным амплитудам, введя огибающую $\tilde{\mathbf{E}}$ поля \mathbf{E} , см. (2.28). В дальнейшем знак ‘ \sim ’ для краткости мы будем опускать. В этом случае усреднённые по периоду колебаний значения потока и плотности энергии даны в Пункте 3-2. Падающее поле представим в виде $\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_{\text{in},0} \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{r}]$. Тогда абсолютное значение плотности потока в падающей волне равно

$$J = \frac{c|\mathbf{E}_{\text{in},0}|^2}{2\pi}. \quad (5.19)$$

Полное сечение рассеяния σ (*сечение взаимодействия*) определяется как отношение суммы мощности I_s , рассеивающейся на центре рассеяния, и мощности I_a , поглощающейся им, к плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_s, \quad \sigma_s = \frac{I_s}{J}, \quad \sigma_a = \frac{I_a}{J}. \quad (5.20)$$

Таким образом, мощность I есть мощность, отбираемая из падающей волны; σ_s называется *сечением рассеяния*, σ_a – *сечением поглощения*.

Рассмотрим сначала трёхмерный случай. Вдалеке от рассеивающего центра электромагнитное поле представляет из себя совокупность плоской и сферической расходящейся волн,

$$\begin{aligned} E^i &= E_{\text{in}}^i + E_s^i \rightarrow \\ &\rightarrow E_{\text{in},0}^i \exp[i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{r}] + \frac{f^{ij} E_{\text{in},0}^j}{r} \exp[ikr], \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $|\mathbf{k}_{\text{in}}| = k$, а f^{ij} – амплитуда рассеяния; среди 9-ти пространственных матричных элементов амплитуды рассеяния есть только 4 независимых, поскольку у электромагнитных волн есть только две поляризации. Рассеянная центром рассеяния мощность I_s равна

$$\begin{aligned} I_s &= \int d\Omega \frac{d\sigma_s}{d\Omega}, \quad d\sigma_s = r^2(\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{n})d\Omega, \quad (5.22) \\ \mathbf{S}_s &= \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*], \end{aligned}$$

где интегрирование производится по сфере радиуса r , единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Мы ввели *дифференциальное сечение рассеяния* $d\sigma_s$, которое есть отношение мощности рассеянной волны, уходящей от рассеивателя в телесный угол $d\Omega$, к плотности потока энергии падающей волны. Поглощаемая рассеивателем мощность равна

$$I_a = - \int r^2 d\Omega (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]. \quad (5.23)$$

5-3.1 Оптическая теорема

Оптическая теорема связывает амплитуду рассеяния вперёд с полным сечением рассеяния, что может быть использовано для упрощения вычисления сечения рассеяния.

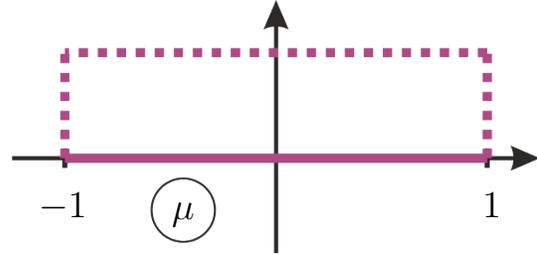


Рис. 5.2 Контур интегрирования по переменной $\mu = \cos \theta$. Сплошной линией обозначен исходный контур, пунктирной – изменённый.

Полный поток через поверхность большого радиуса r , нормированный на плотность падающего потока, по определению равен сечению поглощения, см. (5.23, 5.20). Преобразуем это выражение, используя разложение поля (5.21):

$$\sigma_a = -\sigma_s - \frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r^2 d\Omega ([\mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{\text{in}}^*]) \cdot \mathbf{n},$$

где квадратичный вклад по полю падающей волны опущен, поскольку даёт нуль. Первое слагаемое в правой части соответствует излучению, производимому рассеивателем; второе слагаемое есть результат интерференции рассеянной волны с падающей. Теперь, используя равенства

$$\mathbf{H}_s = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_s], \quad \mathbf{H}_{\text{in}} = [\mathbf{n}_{\text{in}}, \mathbf{E}_{\text{in}}], \quad (5.24)$$

верные для плоских волн, см. (2.22), где $\mathbf{n}_{\text{in}} = \mathbf{k}_{\text{in}}/k$, получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_s + \sigma_a = \\ &= -\frac{c}{2\pi J} \text{Re} \int r d\Omega f^{*ij} \left(E_{\text{in},0}^i E_{\text{in},0}^{*j} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}})) - \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{E}_{\text{in},0} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E}_{\text{in},0}^* \cdot \mathbf{n}) \right) \exp(i(\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n} - k)r). \end{aligned} \quad (5.25)$$

В процессе выкладок мы раскрыли двойное векторное произведение и использовали то, что $\mathbf{E}_{\text{in},0} \perp \mathbf{n}_{\text{in}}$.

Для того, чтобы взять интеграл по телесному углу в (5.25), перейдём к сферическим координатам $\{r, \theta, \varphi\}$, направив ось Oz по волновому вектору \mathbf{k}_{in} падающей волны, и введём переменную $\mu = \cos \theta$; тогда $\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{n} = kr\mu$. Интеграл в правой части (5.25) имеет вид и при $r \rightarrow \infty$ оценивается как

$$r \int_{-1}^1 d\mu e^{ikr(\mu-1)} g(\mu) = \frac{1}{ik} (g(1) - g(-1) \exp^{-2ikr}), \quad (5.26)$$

где $g(\mu)$ – функция, независящая от r . Действительно, поскольку $g(\mu)$ предполагается аналитической функцией, не имеющей особенностей на отрезке $[-1, 1]$, то мы можем деформировать контур интегрирования так, как показано на Рис. 6.2. При этом, в силу великости r , вклад в интеграл будут давать только боковые участки контура; в пределе большого r длина вертикальных

участков контура может быть сколь угодно малой, будучи пропорциональна $1/r$. Таким образом, приходим к правой части (5.26).

Вклад в (5.26), соответствующий отражению назад, т.е. когда $\mu = -1$, равен нулю, поскольку $g(-1) = 0$. Действительно, первое слагаемое в фигурной скобке (5.25) равно нулю, поскольку $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\text{in}}) = \mu$, а второе слагаемое равно нулю, поскольку $\mathbf{n} \perp \mathbf{E}_{\text{in},0}$ при $\mu = \pm 1$. Для оставшегося вклада интегрирование по углу φ даёт множитель 2π , поскольку интеграл определяется окрестностью направления $\theta = 0$. Поэтому (5.25) с учётом выражения для плотности падающего потока (5.19) сводится к

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} [f^{ij}(0) e^{*i} e^j], \quad e^i = \frac{E_{\text{in},0}^i}{|\mathbf{E}_{\text{in},0}|}. \quad (5.27)$$

Равенство (5.27) составляет содержание *оптической теоремы*: полное сечение рассеяния определяется мнимой частью амплитуды рассеяния вперёд.

§5-4. Рассеяние света на малых частицах

Рассмотрим общие свойства рассеяния света частоты ω на частицах, размер a которых мал по сравнению с длиной волны света λ , так что $ka \ll 1$, где k – волновое число падающего света. В этом пределе основным механизмом взаимодействия частицы с электромагнитным полем является дипольное взаимодействие и, в отдельных случаях, магнито-дипольное взаимодействие. *Литература*: Ландау и Лифшиц (1982, §92).

Рассмотрим простейший случай, когда доминирующим является дипольное излучение, а поляризуемость (дипольная восприимчивость) α частицы изотропна, так что вектор дипольного момента и поле налетающей волны сонаправлены,

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}_{\text{in}}.$$

В терминах дипольной восприимчивости α оптическая теорема (5.27) для дипольно излучающего рассеивающего центра переписывается в виде

$$\sigma = 4\pi k \text{Im}[\alpha]. \quad (5.28)$$

Отметим, что рассмотрение Ландау и Лифшиц (там же, §93) верно только в случае, когда сечение поглощения велико по сравнению с сечением рассеяния, $\sigma_a \gg \sigma_s$, в общем же случае верно соотношение 5.28.

Зная дипольную восприимчивость, можно также отдельно вычислить сечение рассеяния, воспользовавшись выражением для интенсивности гармонически колеблющегося дипольного момента:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{c |\mathbf{E}_{\text{in},0}|^2} \frac{4\omega^4 |\mathbf{d}|^2}{3c^3} = \frac{8\pi \omega^4 |\alpha|^2}{3 c^4}. \quad (5.29)$$

5-4.1 Резонансное рассеяние света

Установим некоторые общие свойства рассеивания волн на резонансных частицах: будем интересоваться случаем, когда частота падающей волны близка к частоте ω_0 некоторого резонанса частицы, который может быть возбуждён электрическим полем падающей волны. Пока величина отстройки $\delta\omega = \omega - \omega_0$ не велика, дипольная восприимчивость может быть представлена в виде

$$\alpha = Ba^3 - \frac{A\omega_0^2 a^3}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (5.30)$$

где A, B – некоторые действительные безразмерные константы порядка или меньше единицы. Константа $\gamma > 0$ определяет ширину резонанса; для определённости мы предполагаем его хорошую добротность, так что $\gamma \ll \omega_0$. Структура знаменателя в (5.30) выбрана таким образом, чтобы обеспечить принцип причинности и действительность величины $\alpha(\tau)$ во временном представлении, см. (8.9b, 8.1g) соответственно. Константа A должна быть положительной, $A > 0$, для того, чтобы обеспечить положительность мнимой части восприимчивости α . Величина B соответствует вкладу от всех прочих резонансов и может считаться константой, пока отстройка $\delta\omega$ мала по сравнению с расстоянием до другого ближайшего резонанса.

5-4.1.1 Сложение скоростей распада

Второе слагаемое в правой части (5.30) означает, что существует вклад в полный дипольный момент частицы, который удовлетворяет уравнению гармонических

колебаний с затуханием

$$\partial_t^2 \mathbf{d} + \omega_0^2 \mathbf{d} + \gamma \partial_t \mathbf{d} = A \omega_0^2 a^3 \mathbf{E}_{\text{in}} \quad (5.31)$$

Из этого уравнения следует, что ширина резонанса есть то же самое, что скорость затухания свободных гармонических колебаний дипольного момента на резонансной частоте.

Существует по крайней мере два источника затухания амплитуды колебаний. Во-первых, энергия колебаний может излучаться путём дипольного излучения. Во-вторых, эта энергия может поглощаться внутри частицы, переходя в тепло. Поскольку эти два механизма диссипации являются независимыми, то скорости диссипации подчиняются закону сложения: полная скорость диссипации содержит два вклада,

$$\gamma = \gamma_{\text{loss}} + \gamma_{\text{rad}}.$$

Поглощение частицей энергии падающей волны соответствует части γ_{loss} и сечению поглощения σ_a ; величина этого поглощения определяется внутренними свойствами частицы. Переизлучение электромагнитной волны частицей не зависит от внутренних свойств частицы, оно даёт вклад γ_{rad} и соответствует сечению рассеяния σ_a .

5-4.1.2 Сечение рассеяния

Будем по-прежнему интересоваться окрестностью резонанса, когда отстройка по частоте от резонанса мала, $\delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$. В ситуации общего положения константы A, B имеют одинаковый порядок, поэтому вблизи резонанса первым слагаемым можно пренебречь, положив $B = 0$. Тогда дипольная восприимчивость может быть записана в более простом виде

$$\alpha = -\frac{(A/2)\omega_0}{\delta\omega + i\gamma} a^3. \quad (5.32)$$

Вычислим вклад γ_{rad} в ширину резонанса, вызываемого рассеянием света. Для этого предположим, что частота падающей монохроматической волны совпадает с частотой резонанса частицы, $\omega = \omega_0$, а внутренние потери в частице отсутствуют, $\gamma_{\text{loss}} = 0$. В этом случае дипольная восприимчивость $\alpha = iA\omega_0 a^3 / 2\gamma_{\text{rad}}$, а полное сечение и сечение рассеяния совпадают, $\sigma = \sigma_s$. Вычисляя полное сечение двумя способами – через излучение (5.29) и через оптическую теорему (5.28), – находим, что полное сечение σ_{max} , дипольная восприимчивость и ширина γ_{rad} резонанса равны:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{3i}{2} \frac{1}{k^3}, \quad \gamma_{\text{rad}} = \frac{1}{3} A \omega_0 (ka)^3. \quad (5.33)$$

В частности, мы видим, что сечение рассеяния определяется длиной волны, а не размером частицы, и потому оказывается значительно больше её геометрического сечения πa^2 . Наконец, посчитаем добротность резонанса в этом случае:

$$Q_{\text{max}} = \frac{3}{2A} \frac{1}{(ka)^3} \gg 1.$$

• **Задача 1:** Определите дипольную восприимчивость α маленького металлического шарика вблизи плазмонной частоты, если потерями на излучение можно пренебречь. Используйте общее выражение (4.6) и модель Друде (6.46) для диэлектрической проницаемости металла. Сравните положение резонансной частоты с верхней границей частотной области, где существуют поверхностные плазмоны.

5-4.1.3 Взаимодействие частиц со светом в различных экспериментальных ситуациях

Теперь восстановим потери внутри частицы и исследуем параметры рассеяния и поглощения. Предположим, что мы рассматриваем рассеяние и прохождение световой волны через прозрачную среду, заполненную рассматриваемыми рассеивателями.

Положим, как это часто бывает на практике, что внутренние потери доминируют, так что полная ширина резонанса $\gamma \gg \gamma_{\text{rad}}$. Учтём также возможную отстройку частоты падающей волны от резонанса, полагая $\delta\omega \neq 0$. Сечение взаимодействия (5.28) и сечения рассеяния (5.29) в условиях резонанса, когда $\delta\omega = 0$, равны

$$\sigma = \frac{\pi A \cdot ka \cdot \omega_0 \gamma}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} a^2 = \frac{\gamma_{\text{rad}} \gamma}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} \sigma_{\text{max}}, \quad (5.34)$$

$$\sigma_s = \frac{2\pi A^2 \cdot (ka)^4 \cdot \omega_0^2}{3((\delta\omega)^2 + \gamma^2)} a^2 = \frac{\gamma_{\text{rad}}^2}{(\delta\omega)^2 + \gamma^2} \sigma_{\text{max}},$$

то есть малы по сравнению с теоретически максимально возможным сечением рассеяния σ_{max} .

Предположим, что рассеиваемая световая волна является монохроматической. В соответствии с нашими выводами, при увеличении внутренних потерь интенсивность прошедшей волны возрастает, тогда как интенсивность рассеянной волны падает. Возрастание коэффициента прохождения называют *эффектом просветления*.

Пусть теперь на частице рассеивается белый свет со спектральной шириной Δ , большой по сравнению с шириной резонанса, но малой по сравнению с расстоянием по частоте до соседнего резонанса. Усреднённое сечение взаимодействия равно

$$\sigma = \frac{1}{\Delta} \int \sigma(\delta\omega) d\delta\omega = \frac{\pi \gamma_{\text{rad}}}{\Delta} \sigma_{\text{max}}, \quad (5.35)$$

то есть не зависит от ширины резонанса. Сечение рассеяния

$$\sigma_s = \frac{\pi \gamma_{\text{rad}}^2}{\Delta \gamma} \sigma_{\text{max}}, \quad (5.36)$$

то есть уменьшается обратно пропорционально внутренним потерям. Таким образом, интенсивность прошедшего белого света не изменяется при увеличении потерь, тогда как интенсивность рассеянного света уменьшается.

§6-1. Волноводы

Волноводами называются конструкции из различных материалов, вдоль которых распространяются электромагнитные волны. Мы рассматриваем прямые волноводы, однородные вдоль своего направления. Вдоль этого направления выберем ось Oz декартовой системы координат $Oxyz$. Отклик среды на электромагнитное поле определяется диэлектрической проницаемостью ε , которая зависит только от поперечных координат, то есть $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ при указанном выборе системы координат (если явно не оговорено противное, рассматриваем немагнитные среды). Операторы градиента и Лапласа в поперечной плоскости обозначим как

$$\nabla_{\perp} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}, \quad \Delta^{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2. \quad (6.1)$$

Будем искать монохроматические волны, распространяющиеся вдоль волновода. Для этого будем предполагать, что в монохроматической волне все поля от времени t и продольной координаты z зависят как

$$\exp(-i\omega t + i\beta z), \quad (6.2)$$

где β называется постоянной распространения. В общем случае β может иметь ненулевую мнимую часть, что будет означать потери при распространении волны. Мы также будем обозначать волновой вектор на частоте волны $k = \omega/c$.

Целью исследования является определение набора связанных мод, поддерживаемых волноводов на данной частоте. Интерес представляет законы дисперсии мод $\beta(\omega)$, а также поперечная структура электромагнитного поля в каждой моде.

6-1.1 Уравнения Максвелла и волновые уравнения

Векторные уравнения Максвелла (2.6e) для поперечных компонент с учётом зависимости (6.2) приобретают вид

$$\nabla_{\perp} E^z - i\beta \mathbf{E}^{\perp} = -\frac{i\omega\mu}{c} \tilde{\mathbf{H}}^{\perp} \quad (6.3a)$$

$$\hat{\varepsilon} \nabla_{\perp} H^z - i\beta \tilde{\mathbf{H}}^{\perp} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}^{\perp} \quad (6.3b)$$

где мы ввели стандартные для раздела про волноводы обозначения для двумерных вектор-столбцов — проек-

ций векторов на поперечную плоскость

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\perp} = \hat{\varepsilon} \mathbf{H}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^x \\ H^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^y \\ -H^x \end{pmatrix}. \quad (6.3c)$$

Проекция векторных уравнений Максвелла на продольное направление суть

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}}^{\perp} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} E^z, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}}^{\perp} = \frac{i\omega\mu}{c} H^z. \quad (6.3d)$$

Мощность P , передаваемая через всё сечение волновода, определяется интегралом

$$P = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} \int dx dy (\tilde{\mathbf{H}}^{\perp*} \cdot \mathbf{E}^{\perp}). \quad (6.3e)$$

Отталкиваясь от этого равенства, определим скалярное произведение двух, вообще говоря комплексных, поперечных векторных полей $\tilde{\mathbf{H}}^{\perp}$ и \mathbf{E}^{\perp} следующим образом:

$$\text{scalar product : } \int dx dy (\tilde{\mathbf{H}}^{\perp*} \cdot \mathbf{E}^{\perp}). \quad (6.3f)$$

6-1.1.1 Параметризация поля через поперечные компоненты

Покажем, как все компоненты поля могут быть параметризованы через поперечные компоненты магнитного поля \mathbf{H}^{\perp} . Для этого параметризуем сначала электромагнитное поле через вектор-потенциалом \mathbf{A} , имеющем ненулевыми только поперечные компоненты, $A^z = 0$. Тогда из определения

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (6.3g)$$

следует, что

$$\mathbf{A}^{\perp} = -\frac{i}{\beta} \tilde{\mathbf{H}}^{\perp}, \quad H^z = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}}^{\perp} = \frac{i}{\beta} \operatorname{div} \mathbf{H}^{\perp}. \quad (6.3h)$$

Выражения для компонент электрического поля следуют из уравнений Максвелла (6.3b, 6.3d):

$$\mathbf{E}^{\perp} = \frac{\beta c}{\varepsilon\omega} \tilde{\mathbf{H}}^{\perp} - \frac{c}{\omega\beta\varepsilon} \hat{\varepsilon} \nabla_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{H}^{\perp}, \quad E^z = \frac{ic}{\varepsilon\omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}}^{\perp}. \quad (6.3i)$$

6-1.1.2 Волновые уравнения для поперечных компонент поля

Волновые уравнения на электрическое и магнитное поля для среды не обладающей магнитными свойствами

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}. \quad (6.3j)$$

Волновые уравнения (6.3j), спроектированные на поперечную плоскость, суть

$$\left((\Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2) - \mathbf{g} \nabla_\perp^T \right) \tilde{\mathbf{H}}^\perp = 0, \quad (6.3k)$$

$$\left((\Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2) + \nabla_\perp \mathbf{g}^T \right) \mathbf{E}^\perp = 0 \quad (6.3l)$$

где логарифмический градиент диэлектрической проницаемости

$$\mathbf{g} = \nabla_\perp \ln \varepsilon, \quad (6.3m)$$

а верхний индекс ‘ T ’ означает транспонирование (в данном случае переводящее вектор-столбец в вектор-строку).

Дифференциальные операторы, фигурирующие в уравнениях (6.3k,6.3l), переходят в друг друга при операции транспонирования в смысле скалярного произведения (6.3f). Если же рассматривать только среды без поглощения, то дифференциальные операторы в (6.3k,6.3l) являются чисто действительными, и поэтому операция эрмитова сопряжения также переводит эти операторы друг в друга. Таким образом, поля моды $\mathbb{N}n$ \mathbf{E}_n^\perp и $\tilde{\mathbf{H}}_n^{\perp*}$, являющиеся решением этих уравнений при $\beta^2 = \beta_n^2$, оказываются левыми и правыми собственными векторами одного и того же оператора. Поскольку величину β^2 в этих уравнениях следует назвать собственным значением этого оператора, то поля разных мод

ортогональны друг другу в смысле скалярного произведения (6.3f):

$$\int dx dy (\tilde{\mathbf{H}}_m^{\perp*} \cdot \mathbf{E}_n^\perp) = \delta_{nm}. \quad (6.3n)$$

Мы нормировали амплитуды мод на фиксированную ‘единичную мощность’. Отметим, что возможно выбрать чисто действительными поля \mathbf{E}_n^\perp и $\tilde{\mathbf{H}}_n^\perp$ (то есть множители при бегущей экспоненте (6.2)) в силу действительности операторов в (6.3k,6.3l), однако в дальнейшем такой выбор не предполагается реализованным.

6-1.2 Интегральные соотношения между полями

Используя t - и z -зависимости для монохроматической волны, получаем, что в усреднённой форме это уравнение записывается в виде

$$\beta \int dx dy \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \int dx dy \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Краткая запись этого уравнения следующая:

$$n_{\text{eff}} \varepsilon^{\alpha\beta} \langle E^\beta \rangle = \langle B^\alpha \rangle, \quad n_{\text{eff}} = \frac{c\beta}{\omega}, \quad (6.5)$$

сравни с (2.22), где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по поперечной плоскости Oxy . Аналогичным способом из уравнения на магнитное поле \mathbf{H} получаем

$$n_{\text{eff}} \varepsilon^{\alpha\beta} \langle H^\beta \rangle = \langle D^\alpha \rangle. \quad (6.6)$$

Если все среды, из которых изготовлен волновод, немагнитные, то $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, а импеданс $Z = \langle E \rangle / \langle H \rangle = 1/n_{\text{eff}}$.

§6-2. Волноводы с металлическими стенками

Рассмотрим прямой волновод с металлическими стенками. Поперечное сечение такого волновода представляет собой некоторую фигуру с металлической границей.

6-2.1 Волноводы с односвязным поперечным сечением

В этом пункте мы предполагаем, что фигура поперечного сечения не имеет полостей, т.е. является односвязной. Предположим для простоты, что внутри фигуры пустота.

Сперва мы будем считать металл идеальным. Тогда потери отсутствуют и постоянная распространения β является действительной величиной.

В таких волноводах все моды делятся на TE -моды

и TM -моды, в которых равны нулю z -компоненты соответственно электрического и магнитного поля. В любой моде каждая компонента поля удовлетворяет волновому уравнению

$$(\Delta^\perp - \beta^2 + k^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0, \quad (6.7)$$

На границе идеального металла Γ должны быть равны две касательные компоненты электрического поля и нормальная компонента магнитного поля.

6-2.1.1 ТМ-моды

Рассмотрим TM -моду. Волновое уравнение (6.7) на z -компоненту электрического поля есть

$$\Delta^\perp E^z = (k^2 - \beta^2) E^z, \quad E^z|_\Gamma = 0. \quad (6.8a)$$

На границе E^z как касательная компонента поля должна обращаться в нуль. Уравнение (6.8a) есть уравнение на структуру моды, задающее её дисперсию $\beta(\omega)$. Математически это уравнение эквивалентно квантовомеханической задаче о нерелятивистской массивной частице, помещённой в двумерную потенциальную яму с плоским дном и бесконечно высокими стенками, имеющую форму поперечного сечения волновода.

Выразим остальные компоненты электромагнитного поля через E^z . Из z -компоненты уравнения на индукцию магнитного поля ($B^z = 0$) заключаем, что электрическое поле в поперечной плоскости потенциально,

$$E^\alpha = -\partial_\alpha \varphi. \quad (6.8b)$$

Условие на бездивергентность электрического поля даёт связь между z -компонентой электрического поля и потенциалом:

$$\Delta^\perp \varphi = -i\beta E^z. \quad (6.8c)$$

Поскольку на поверхности металла касательное электрическое поле отсутствует, то граничным условием для потенциала является $\varphi|_\Gamma = \varphi_0 \exp(i\beta z)$. Константу φ_0 можно положить равной нулю, поскольку в односвязной области у уравнения $\Delta^\perp \varphi = 0$ с такими граничными условиями не существует нетривиального (отличного от $\varphi = \varphi_0 \exp(i\beta z)$) решения. Это означает, что потенциал φ удовлетворяет тому же волновому уравнению (6.8a), и в силу (6.8c)

$$\varphi = \frac{i\beta}{k^2 - \beta^2} E^z. \quad (6.8d)$$

Наконец, уравнение на α -компоненты электрической индукции даёт

$$B^\alpha = \frac{\omega}{c\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi. \quad (6.8e)$$

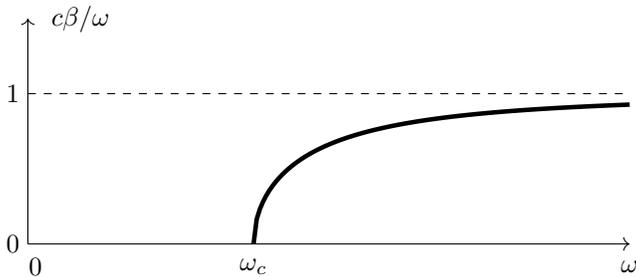


Рис. 6.1 Закон дисперсии моды в волноводе с металлическими стенками.

Вернёмся теперь к волновому уравнению (6.8a). При фиксированной геометрии поперечного сечения функция $E^z(x, y)$ является собственной функцией оператора Лапласа Δ^\perp , так что

$$\Delta^\perp E_n^z = -\frac{\omega_{c,n}^2}{c^2} E_n^z, \quad E_n^z|_\Gamma = 0 \quad (6.8f)$$

независимо от значения частоты волны. Существует бесконечное счётное количество решений (6.9c), так что

$n \geq 0$ в (6.9c). Эти решения характеризуются в общем случае разными собственными значениями, то есть разными $\omega_{c,n}$. Закон дисперсии моды N^n есть

$$\beta_n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,n}^2}{c^2}. \quad (6.8g)$$

При частоте $\omega < \omega_{c,n}$ мода N^n не распространяется по волноводу. Частота ω_c называется частотой отсечки (*cutoff frequency*) для данной моды. Закон дисперсии (6.8g) изображён на Рис. 6.1. В волноводах рассматриваемого типа все моды имеют ненулевую частоту отсечки. Среди частот отсечки есть минимальная $\omega_{c,0}$. Если характерный размер поперечного сечения равен a , то самая низкая частота отсечки определяется оценкой $\omega_{c,0} \sim c/a$.

Групповая скорость для моды N^n есть

$$v_{gn} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \frac{c^2}{v_{ph,n}}, \quad v_{ph,n} = \frac{\omega}{\beta_n}, \quad (6.8h)$$

то есть соотношение групповой скорости v_{gn} и фазовой скорости $v_{ph,n}$ лежит на границе теоретически допустимого значения, см. (2.23d).

6-2.1.2 ТЕ-моды

В *ТЕ*-волне компонента $E^z = 0$, поэтому поперечная часть магнитного поля потенциальна,

$$B^\alpha = -\partial_\alpha \varphi_B, \quad (6.9a)$$

сравни с (6.8b). Аналоги (6.8c, 6.8d, 6.8e) суть

$$\varphi_B = \frac{i\beta}{k^2 - \beta^2} B^z, \quad E^\alpha = \frac{\omega}{c\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi_B. \quad (6.9b)$$

В уравнении (6.9c) надо заменить граничные условия в соответствии с (5.17):

$$\Delta^\perp B_n^z = -\frac{\omega_{c,n}^2}{c^2} B_n^z, \quad \partial_n B_n^z|_\Gamma = 0. \quad (6.9c)$$

В результате мы приходим к формально тому же закону дисперсии (6.8g), но с другими частотами отсечки.

• **Задача 1:** Среди всех *ТЕ*- и *ТМ*-мод волновода с идеально-металлическими стенками, имеющем квадратное сечение, найдите моду с минимальным значением частоты отсечки.

• **Задача 2:** Среди всех *ТЕ*- и *ТМ*-мод волновода с идеально-металлическими стенками, имеющем круглое сечение, найдите моду с минимальным значением частоты отсечки.

6-2.2 Волноводы с неодносвязным поперечным сечением

Рассмотрим волновод с металлическими стенками, у которого поперечное сечение не является односвязным. Примером такого волновода является металлическая полая трубка, в которую помещён металлический цилиндр меньшего радиуса. Сечение такого волновода является двусвязной фигурой: граница этой фигуры состоит из двух замкнутых несвязанных друг с другом линий.

В общем случае у волновода может быть N несвязанных друг с другом частей металлической поверхности. В волноводах такого типа помимо TE - и TM -мод есть ещё $N - 1$ штук TEM -мод. Дисперсия этих мод совпадает (в пределе идеального металла) с дисперсией электромагнитных волн в пустоте, и эти моды не имеют частоты отсечки. Такие свойства TEM -мод делают их весьма привлекательными для использования в электротехнике.

Покажем, что TEM -моды действительно существуют и разберём из свойства. Название этих мод предполагает, что в них и электрическое и магнитное поля являются чисто поперечными, то есть $E^z = 0$, $H^z = 0$. Тогда электрическое поле является потенциальным в поперечной плоскости, см. (6.8b). Потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа,

$$\Delta^+ \varphi = 0. \quad (6.10)$$

сравни с (6.8с). От случая односвязной волноведущей полости сейчас нас отличает то, что теперь существует $N > 1$ участков поверхности металла Γ_α , $\alpha = \{0, N - 1\}$, не связанных между собой. Вдоль каждого участка гра-

ницы Γ_α значение потенциала должно быть постоянным, но от участка к участку это значение может меняться:

$$\varphi|_{\Gamma_\alpha} = \varphi_\alpha. \quad (6.11)$$

В результате у уравнения (6.10) существует $N - 1$ нетривиальное решение.

Закон дисперсии TEM -мод можно найти, используя (6.10) в уравнении (6.7), написанном для E^α . Получаем, что

$$\beta = k = \frac{\omega}{c}. \quad (6.12)$$

Магнитное поле теперь найдём как частный случай (6.8e):

$$B^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \varphi. \quad (6.13)$$

В § 6-3 разбирается волновод с $N = 2$ металлическими границами, представляющий собой отдельный интерес в связи с использованием в электротехнике.

• **Задача 3:** Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода. Найти коэффициенты затухания α разных типов волн в случае, если поверхностный импеданс стенок равен ζ . *Литература:* Топтыгин (2005, стр. 628, задачи 14.12 и 14.13).

• **Задача 4:** Найти TE - и TM -моды, имеющие наиболее низкие частоты отсечки в волноводе с круглым поперечным сечением радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить частоты отсечки ω_c для этих мод. Найти коэффициенты затухания α для этих мод, если поверхностный импеданс стенок равен $\zeta \ll 1$.

§6-3. Работа двухпроводных линий (линий Лехера) в электрических цепях

Рассмотрим распространение электромагнитной волны по тонкому волноводу, в котором, несмотря на его тонкость, хорошо локализовано электромагнитное поле. Общий принцип локализации поля состоит в существовании более чем одной металлической жилы в волноводе, см. Пункт 6-2.2. При этом глубина скин-слоя в металле должна быть мала по сравнению с толщиной сечения самих металлических элементов и с расстоянием между ними. Такие волноводы называются также *линиями Лехера (Lecher line)*.

Примерами такого сорта волноводов являются коаксиальный кабель и два параллельных близко расположенных металлических провода; для определённости мы будем ниже иметь ввиду именно эти два случая. Мы работаем в обозначениях § 6-1.

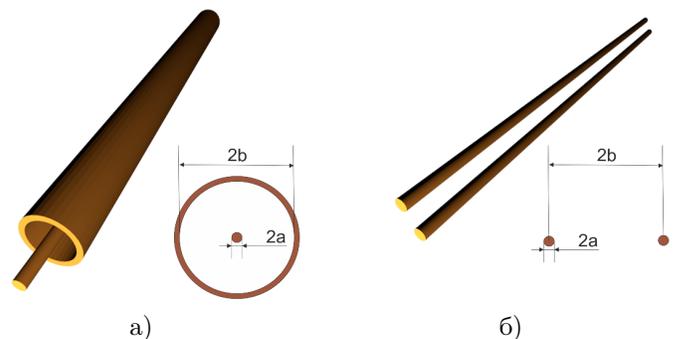


Рис. 6.2 а) коаксиальный волновод; б) двух-проводная линия

В главном приближении металл можно считать иде-

альным. Тогда, согласно Пункту 6-2.2, электрическое поле является чисто поперечным и потенциальным в плоскости Oxy , причём потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа в поперечной плоскости,

$$E^\alpha = -\partial_\alpha \varphi, \quad \Delta^\perp \varphi = 0, \quad E^z = 0.$$

см. (6.8b, 6.10). Магнитное поле также поперечно, его компоненты равны (см. (6.13))

$$\mathbf{B}^\alpha = \epsilon^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \varphi.$$

Задачей этого параграфа является переписать волновые уравнения в двухпроводных линиях терминах электрических цепей, тем самым упростив описание подключения к таким линиям полезных нагрузок. Это делать мы будем в пределе тонкой линии, когда её поперечный размер a мал по сравнению с длиной волны $2\pi/\lambda$, т.е. $ka \ll 1$.

Пусть $\rho_1 = \rho$ — погонная плотность заряда на одном из проводов волновода, тогда на втором проводе погонная плотность заряда будет $\rho_0 = -\rho$. В приближении идеального металла это соотношение точное для ТЕМ-волны. Также введём ток J , текущий по проводу №1; по проводу №0 течёт ток $-J$.

Теперь установим связь между электромагнитным полем в волноводе и величинами ρ, J . Поскольку провода волновода металлические, то их поверхности в поперечном являются изопотенциальными. Разность разность потенциалов V между жилами

$$V(z) = \int_0^1 (\mathbf{dr} \cdot \mathbf{E}) = \varphi|_{\Gamma_1} - \varphi|_{\Gamma_0},$$

где интегрирование производится от точки '0' на втором волноводе до точки '1'; в силу потенциальности поля не имеет значения конкретное положение точек. Функция $V(z)$ меняется на расстояниях порядка $1/\beta$ и этой зависимостью можно пренебречь, исследуя связь V с погонной плотностью заряда ρ . Эта связь зависит от геометрии и параметров материалов волновода через погонную ёмкость C , $[C] = 1$,

$$\rho = CV.$$

При известной геометрии ёмкость C может быть вычислена через законы электростатики.

Введём ещё в рассмотрение погонную плотность потока магнитного поля

$$\Phi = \int_0^1 (\mathbf{dr} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{e}_z]),$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор, направленный вдоль волновода. Этот поток создаётся током J , который также в нашем приближении следует считать слабо зависящим от z . Таким образом,

$$\Phi = \frac{LJ}{c},$$

где L — погонная индуктивность, $[L] = 1$. Погонная индуктивность также может быть вычислена по известным геометрическим параметрам волновода исходя из закона Био-Савара-Лапласа.

Наконец, установим уравнения, определяющие распространения волн. Первое уравнение следует из закона сохранения заряда,

$$\partial_x J = -\partial_t \rho.$$

Второе уравнение можно получить, домножив уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}$$

векторно на \mathbf{e}_z , и затем проинтегрировав проекцию результата на $d\mathbf{r}$ по контуру '0-1'. В результате получим

$$\frac{1}{c} \partial_t \Phi = E_z \Big|_0^1 - \int_0^1 (d\mathbf{r} \cdot \partial_z \mathbf{E}) = -\partial_z V,$$

где в последнем приближении мы опустили вклад продольного электрического поля (оно не равно нулю, если металл не идеальный). В итоге приходим к системе уравнений, связывающих напряжение и ток:

$$\begin{aligned} \partial_z J &= -\partial_t \rho = -C \partial_t V, \\ \partial_z V &= -\frac{1}{c} \partial_t \Phi = -\frac{L}{c^2} \partial_t J. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для монохроматической волны, для которой $\rho \propto \exp(i\beta z - i\omega t)$, закон дисперсии

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} LC. \quad (6.15)$$

Если пространство между жилами линии является вакуумом, то $LC = 1$, то есть $\beta = \pm\omega/k$. Отношение среднего значения электрического поля и магнитной индукции в монохроматической волне равно

$$\frac{E}{B} = \frac{V}{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega}{c\beta},$$

причём последнее равенство справедливо для любого волновода. Отношение напряжения и тока в линии

$$\frac{V}{J} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}} \equiv Z_{\text{line}},$$

где Z_{line} , $[Z_{\text{line}}] = \text{Ом}$, называется *волновым сопротивлением линии*.

Поток энергии W , передаваемый монохроматической волной $V \exp(-i\omega t + i\beta z)$, равен

$$W = \frac{c}{8\pi} \int dx dy \text{Re}(\mathbf{E}, \mathbf{B}^*, \mathbf{e}_z).$$

Используя поперечность электромагнитного поля и потенциальность электрического поля, выражение для W переписывается в виде

$$W = \frac{\omega}{8\pi\beta} \int dx dy |\nabla^\perp \varphi|^2 = \quad (6.16)$$

$$= \frac{\omega}{8\pi\beta} \oint d\Gamma \operatorname{Re}(\varphi E_n^*) = \frac{cC|V|^2}{2\beta} = \frac{|V|^2}{2Z_{\text{line}}},$$

где во втором интеграле интегрирование производится по обеим поверхностям двухпроводной линии, а затем мы воспользовались теоремой Гаусса для заряда.

• **Задача 1:** В § 6-3 изложена теория двухпроводной линии. Рассмотрим коаксиальный провод (SAT 703): Обе жилы линии сделаны из меди, диаметр центральной жилы равен 1.13 мм, внутренний диаметр обмотки (вторая жила) равен 4.8 мм. Пространство между жилами заполнено вспененным полиэтиленом, у которого диэлектрическая проницаемость (частота сигнала 2 ГГц) равна 1.6. Найдите волновое сопротивление (в омах), ёмкость C и индуктивность L (определены в § 6-3). Учтя потери, найдите длину распространения сигнала. Поверхностное сопротивление (см. (5.15, 5.16)) меди при указанной частоте равно 0.011 Ом. Чему равна величина ζ' в (5.15)?

6-3.1 Подключение нагрузки

Рассмотрим работу двухпроводной линии на частоте ω с волновым сопротивлением Z_{line} , длиной l ; постоянная распространения волны на данной частоте равна β . На конце линии подключена некоторая нагрузка, обладающая импедансом Z_L . Линия задаёт линейную связь

$$\begin{pmatrix} U_L \\ Z_{\text{line}} I_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & i \sin(\beta l) \\ i \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ Z_{\text{line}} I \end{pmatrix}$$

между входной (U, I) и выходной (U_L, I_L) парами напряжения и тока.

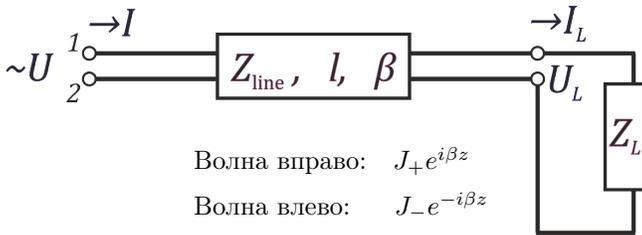


Рис. 6.3 Линия с нагрузкой на выходе.

Если на выходе известна величина импеданса Z_L нагрузки, $U_L/I_L = Z_L$, то для входных величин величина импеданса равна

$$\frac{U}{I} = \frac{Z_L - iZ_{\text{line}} \tan(\beta l)}{Z_{\text{line}} - iZ_L \tan(\beta l)} Z_{\text{line}}.$$

Предположим, что в линии потерь нет, так что её импеданс Z_{line} является чисто действительным, а нагрузка чисто реактивная, так что Z_L также чисто действительно. В этом случае мощность $W = \operatorname{Re}(UI^*)/2$, поставляется в начало линии, полностью выделяется на ‘полезной’ нагрузке Z_L . Предположим, что наша задача состоит в доставке до полезной нагрузки фиксированного значения нагрузки W . Определим необходимую величину амплитуды напряжения U для достижения этой цели. В результате вычислений получаем:

$$|U|^2 = 2 \frac{Z_L^2 \cos^2(\beta l) + Z_{\text{line}}^2 \sin^2(\beta l)}{Z_L} W.$$

Таким образом, напряжение не сильно флуктуирует с изменением длины линии, если волновое сопротивление линии не сильно отличается от сопротивления нагрузки, $Z_{\text{line}} \approx Z_L$; в этом случае говорят, что сопротивление линии согласовано с сопротивлением нагрузки. В противном случае амплитуда напряжения при фиксированной передаваемой мощности резко изменяется при вариации длины на $\delta l = \pi/(2\beta)$.

Представим теперь распределение тока (напряжения) в линии как совокупность двух волн, распространяющихся вправо и влево соответственно:

$$J(t, z) = (J_+ e^{i\beta z} + J_- e^{-i\beta z}) e^{-i\omega t},$$

где z – координата вдоль линии, отсчитываемая от положения полезной нагрузки Z_L . Если известна амплитуда набегающей волны, J_+ , (т.е. мощность, передаваемая к нагрузке, равна $W = |J_+|^2 \operatorname{Re} Z_{\text{line}}/2$) то напряжение U_L на нагрузке и амплитуда обратной волны J_- равны

$$U_L = \frac{2Z_L}{Z_{\text{line}} + Z_L} Z_{\text{line}} J_+, \quad J_- = \frac{Z_{\text{line}} - Z_L}{Z_{\text{line}} + Z_L} J_+. \quad (6.17)$$

Если $Z_{\text{line}} = Z_L$, то есть волновое сопротивление линии точно согласовано с сопротивлением нагрузки, то амплитуда отражённой волны J_- равна нулю: вся подводимая мощность в полезной нагрузке на ней и выделяется. В противном случае, когда не достигнуто согласование, амплитуда отражённой волны оказывается порядка амплитуды падающей, $|J_-| \sim |J_+|$, так что большая часть подводимой к нагрузке мощности отражается обратно.

6-3.2 Потери в линии из-за конечной проводимости металла

• **Задача 2:** Учтёшь затухание сигнала в коаксиальном волноводе за счёт потерь в скин-слое, и вычислить длину распространения главной моды. Внутренний радиус коаксиального волновода равен a , внешний – b , частота сигнала – ω , глубина скин-слоя – δ (предполагается нормальный скин-эффект)

6-3.3 Трансформатор

Для трансформатора всегда выполняется условие

$$L_{12}^2 \leq L_1 L_2, \quad L_{12} = L_{21}.$$

Последнее равенство называется также теоремой взаимности.

6-3.3.1 Нагрузка за трансформатором

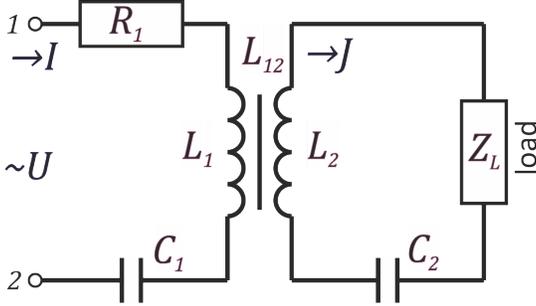


Рис. 6.4 Нагрузка за трансформатором.

Рассмотрим схему, изображённую на Рис. 6.4. Схема содержит полезную нагрузку Z_L , подключённую к источнику переменного напряжения U через трансформатор; ёмкости C_1 и C_2 на относятся к полезной нагрузке и в дальнейшем могут быть выбраны с целью оптимизации того или иного параметра схемы. Уравнениями, определяющими токи в схеме, являются

$$U = IZ_1 - i\omega J L_{12}, \quad Z_1 = R_1 - i\omega L_1 + \frac{iC_1}{\omega},$$

$$0 = JZ_2 - i\omega I L_{12}, \quad Z_2 = Z_L - i\omega L_2 + \frac{iC_2}{\omega}.$$

В результате получаем, что с точки зрения внешнего источника импеданс всей цепи как целого равен

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{Z_1 Z_2 + \omega^2 L_{12}^2}{Z_2}. \quad (6.18)$$

§6-4. Плоские диэлектрические волноводы

Рассмотрим распространение направленной моды вдоль однородной пластины. Обозначения § 6-1 нуждаются в уточнении: мы будем предполагать, что вдоль оси Oy поле является однородным. Соответственно, ось Ox направлена поперёк пластины.

Пластина занимает область $-a/2 < x < a/2$. Диэлектрическая проницаемость материала пластины равна ε_c . Диэлектрическая проницаемость окружающей пласти-

6-3.3.2 Двухпроводная линия, питающая нагрузку за трансформатором

Рассмотрим подключение нагрузки 'load' к двухпроводной линии через трансформатор. Мы предполагаем, что в двухпроводной линии фиксирована амплитуда падающей волны J_+ . Импеданс Z_L нагрузки предполагается малой и почти действительной величиной вследствие близости к резонансу. Наша цель – достигнуть максимального значения выделения тепла на нагрузке 'load' при фиксированном значении волнового сопротивления линии Z_{line} .

При этом разумно предположить, что ёмкости перед и за трансформатором подобраны так, что $L_1 C_1 = L_2 C_2 = \omega^2$ (т.е. соответствующие замкнутые контура являются резонансными), а сопротивление перед трансформатором пренебрежимо мало, так что можно принять $R_1 = 0$. В результате выделяющуюся мощность W на нагрузке 'load' остаётся максимизировать по силе связи трансформатора L_{12} . В результате получаем, что $Z_1 = 0$, $Z_2 = Z_L (\equiv R_L)$, эффективная величина нагрузки

$$Z = \frac{\omega^2 L_{12}^2}{Z_L}$$

а выделяющаяся мощность на полезной нагрузке

$$W = |J_+|^2 \frac{2Z Z_{\text{line}}^2}{(Z_{\text{line}} + Z)^2} = \frac{2\omega^2 L_{12}^2 Z_{\text{line}}^2 R_L}{(R_L Z_{\text{line}} + \omega^2 L_{12}^2)^2} |J_+|^2.$$

см. (6.17); мы предположили, что в линии потерь нет, так что её волновой импеданс Z_{line} чисто действителен. Тогда максимум мощности W достигается, когда

$$L_{12} = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z_{\text{line}} R_L},$$

то есть достигается условие согласования, $Z = Z_{\text{line}}$. В этом случае выделяющаяся мощность оказывается равной $W = Z_{\text{line}} |J_+|^2 / 2$, как и следовало ожидать, поскольку в условиях согласования отражённая волна линии отсутствует. Отметим, что если сопротивление нагрузки R_L мало (т.е. резонансный контур $R_L - L_2 - C_2$ обладает высокой добротностью), то и величина связи L_{12} также оказывается малой.

ну с обеих сторон среды равно ε_{cl} . Для краткости записи введём обозначение волнового вектора в окружающем пространстве k и контраста диэлектрической проницаемости между пластиной и окружающей средой ε :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}, \quad k = \sqrt{\varepsilon_{cl}} \frac{\omega}{c}.$$

Среди направленных мод в волноводах с плоской

геометрией (т.е. однородных вдоль оси Oy) можно выделить ТЕ- и ТМ-моды. В ТЕ-моду у электрического поля ненулевой является только E^y компонента, B^y -компонента магнитного поля равна нулю. Всё поле параметризуется одной компонентой E^y . В ТМ-моду, соответственно, наоборот: всё электромагнитное поле параметризуется единственной ненулевой B^y -компонентой магнитного поля, тогда как $E^y = 0$.

6-4.1 ТЕ-моды

• **Задача 1:** Определить дисперсию чётных и нечётных связанных ТЕ-волн плоского симметричного волновода.

• **Задача 2:** Отдельно рассмотреть некоторые моды в плоском симметричном волноводе.

i) Моду, не имеющую частоты обрезки: определить пространственную структуру электромагнитного поля и вектора поляризации для предела, когда частота много меньше самой низкой частоты отсечки.

ii) Рассмотреть моду с высоким номером: обсудить, как можно описать моду в квази-классическом приближении.

Электромагнитное поле ТЕ-волны полностью определяется поперечной компонентой электрического поля E^y . Остальные компоненты электрического поля равны нулю, а компоненты магнитного поля можно найти из уравнения Максвелла на магнитную индукцию:

$$B^z = \frac{ic}{\omega} \partial_x E^y, \quad B^x = \frac{c\beta}{\omega} E^y. \quad (6.19a)$$

Уравнение на электрическое поле

$$-\partial_x^2 E^y + \left(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \right) E^y = 0 \quad (6.19b)$$

совпадает с уравнением квантовой механики на стационарные волновые функции частицы, совершающей одномерное движение в потенциале прямоугольной ямы конечной глубины, см. например Флюгге, 1974а. Поиск направленных мод соответствует нахождению связанных состояний в квантово механической задаче.

Поле направленной моды является симметричным или анти-симметричным по отношению к зеркальному отражению $x \rightarrow -x$. Будем обозначать волновой профиль направленной моды как $E^y = E_{n\pm}$, где нумерация моды начинается с единицы, $n \geq 1$, а симметрия

$$E_{n\pm}(-x) = \pm E_{n\pm}(x). \quad (6.19c)$$

Если мода связанная, то вне пластины, при $|x| > a/2$,

$$\begin{aligned} E_{n+} &= A \cdot \exp(-\kappa|x|), \\ E_{n-} &= A \cdot \text{sign}(x) \cdot \exp(-\kappa|x|), \\ \kappa &= \beta^2 - k^2 = \beta^2 - \varepsilon_{cl}(\omega/c)^2 > 0. \end{aligned} \quad (6.19d)$$

а внутри пластины, при $|x| < a/2$, поперечная структура поля есть стоячая волна,

$$\begin{aligned} E_{n+} &= \cos(qx), \\ E_{n-} &= \sin(qx), \\ q^2 &= \varepsilon k^2 - \beta^2 = \varepsilon_c(\omega/c)^2 - \beta^2 > 0. \end{aligned} \quad (6.19e)$$

Если снова вернуться к аналогии с квантовой механикой, положив постоянную Планка $\hbar = 1$ и массу частицы $m = 1$, то энергией связанного состояния будет $-\kappa^2/2$, глубиной прямоугольной ямы будет $(\varepsilon - 1)k^2/2$, а её шириной — a . В соответствии с этим сопоставлением и опытом решения задачи квантовой механики о прямоугольной яме конечной глубины, определим безразмерный параметр

$$V = \frac{\sqrt{\varepsilon - 1} ka}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}} \omega a. \quad (6.19f)$$

Как будет показано ниже, целая часть $(V + 1)$ есть число направленных мод в волноводе при заданной частоте с фиксированной поляризацией.

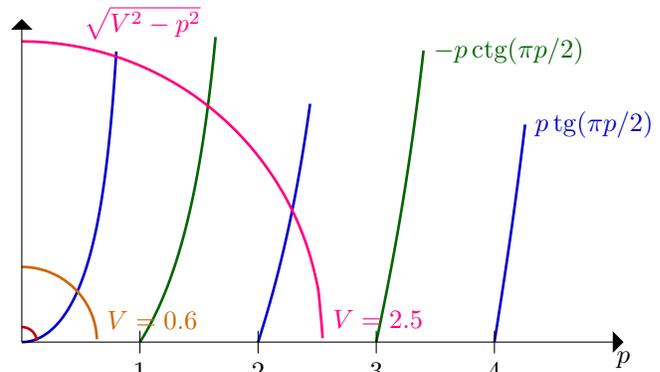


Рис. 6.5 Графический метод отыскания корней уравнений (6.19g, 6.19l), определяющих дисперсию чётных и нечётных ТЕ-мод. Красная кривая для $\varepsilon = 0.13$.

6-4.1.1 Симметричные моды

Найдём закон дисперсии и распределение электрического поля для симметричных мод. Из условия непрерывности электрического поля и его производной на границе раздела получаем, что

$$q \operatorname{tg} \frac{qa}{2} = \kappa. \quad (6.19g)$$

Графически решение этого уравнения может быть представлено в виде Рисунка 6.5, где в качестве горизонтальной оси взята безразмерная переменная p , которая появляется при переписывании соотношения (6.19g) в виде

$$p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi p}{2} = V^2 - p^2, \quad p = \frac{qa}{\pi}. \quad (6.19h)$$

Частота отсечки моды № n , $n \geq 0$, равна

$$\omega_{cn+} = \frac{2\pi nc}{a\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}}}, \quad n \geq 0. \quad (6.19i)$$

Фундаментальная мода Рассмотрим более подробно симметричную моду, не имеющую частоты отсечки. Область малых частот может быть названа пределом малой избыточной оптической толщины пластины $V \ll 1$. Такую пластину будем называть тонким волноводом (при соответствующей частоте волны). Единственный корень дисперсионного уравнения есть

$$p \approx V \quad \Rightarrow \quad \kappa \approx \frac{\pi^2}{2a} V^2 = \frac{(\varepsilon - 1)^2 k^2 a}{2}. \quad (6.19j)$$

Если мал безразмерный параметр $\varepsilon ka \ll 1$, то мода локализована на расстоянии, большом по сравнению с толщиной пластины a , то есть $\kappa a \ll 1$. Такой волновой назовём тонким. Для тонкого волновода закон дисперсии

$$\frac{\beta}{k} \approx 1 + \frac{1}{8} ((\varepsilon - 1)ka)^2. \quad (6.19k)$$

Возможен промежуточный предел, когда избыточная оптическая толщина пластины мала, но не мал параметр εka . Этот предел существует, только если $\varepsilon \gg 1$. Тогда поле моды оказывается существенно ослабленным на расстоянии $\gtrsim 1/k$ от пластины.

6-4.1.2 Антисимметричные моды

Для антисимметричной моды дисперсионное уравнение (6.19g) заменяется на

$$-q \cot \frac{qa}{2} = \kappa. \quad (6.19l)$$

Все антисимметричные моды имеют ненулевую частоту отсечки. Антисимметричная мода № n , где $n \geq 1$, определяется условием $\pi(n-1) < qa < \pi n$. Мода с самой маленькой частотой отсечки характеризуется условием $aq < \pi$. Частота отсечки моды № n

$$\omega_{cn-} = \frac{\pi(2n-1)c}{a\sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}}}, \quad n \geq 1. \quad (6.19m)$$

6-4.1.3 Предел толстого волновода

Толстый, или моноמודовый волновод соответствует пределу большой безразмерной толщины волновода $V \gg 1$ (6.19h).

Получить закон дисперсии через фазы, набегающие при полном внутреннем отражении, см. Пункт 5-1.1 ...

6-4.2 ТМ-моды

• **Задача 3:** Найти ТМ-моды в плоском диэлектрическом волноводе с симметричными обкладками.

Волновое уравнение

$$-\text{rot} \frac{1}{\varepsilon(x)} \text{rot} \mathbf{B} + \left(\beta^2 - \varepsilon(x) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{B} = 0,$$

спроектированное на y -направление, даёт

$$-\partial_x \frac{1}{\varepsilon(x)} \partial_x B^y + \left(\frac{\beta^2}{\varepsilon(x)} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) B^y = 0. \quad (6.20a)$$

Из этого уравнения, в частности, следует, что на границе раздела непрерывными должны быть само поле и его производная нормированная на диэлектрическую проницаемость:

$$\text{continuous on the boundary:} \quad B^y, \quad \varepsilon^{-1} \partial_x B^y. \quad (6.20b)$$

Остальные компоненты магнитного поля равны нулю, а компоненты электрического поля можно найти из уравнения Максвелла на электрическую индукцию:

$$E^z = -\frac{ic}{\varepsilon\omega} \partial_x B^y, \quad E^x = -\frac{c\beta}{\varepsilon\omega} B^y. \quad (6.20c)$$

Как и в случае ТЕ-волн, постоянная распространения β ограничена сверху показателем преломления сердцевины волновода, см. (6.19e). Действительно, интегральное неравенство

$$0 < \int dx \frac{(\partial_x B^y)^2}{\varepsilon(x)} = \int dx \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta^2}{\varepsilon(x)} \right) (B^y)^2, \quad (6.20d)$$

(преобразование правой части неравенства есть следствие волнового уравнения (6.20a)) говорит, что

$$\beta^2 < \varepsilon_{\max} \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (6.20e)$$

где ε_{\max} — максимальное значение диэлектрической проницаемости.

Пример кривых, изображающих закон дисперсии, показан на Рисунке 6.6. В качестве вертикальной оси взята величина β/k (эффективный показатель преломления $n_{\text{эфф}} = \sqrt{\varepsilon_{cl}} \beta/k$), поскольку для мод всех типов она ограничена пределами

$$1 < \frac{\beta}{k} < \sqrt{\varepsilon}, \quad k = \sqrt{\varepsilon_{cl}} \frac{\omega}{c}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}. \quad (6.20f)$$

По горизонтали отложена безразмерная частота $2V$ (6.19h), её также же можно назвать безразмерной толщиной волновода.

Волновые профили направленных мод $B_{n\pm}$ введём согласно тем же обозначениям, которые были использованы при определении волновых профилей ТЕ-волн, см. (6.19c, 6.19d, 6.19e).

6-4.2.1 Симметричные и антисимметричные моды

Из граничных условий (6.20b) и уравнения (6.20a) вне границы следует дисперсионное уравнение

$$q \operatorname{tg} \frac{qa}{2} = \varepsilon \kappa. \quad (6.20g)$$

для симметричных мод и соотношение

$$-q \operatorname{ctg} \frac{qa}{2} = \varepsilon \kappa. \quad (6.20h)$$

для антисимметричных мод. Частоты отсечки для симметричных и антисимметричных мод определяются теми же соотношениями (6.19i, 6.19m).

§6-5. Направленные моды в аксиально симметричном волноводе

Оптоволокнами называют длинные нити, изготовленные из диэлектрика. Такие нити используются в качестве передатчика информации, поскольку являются волноводами: вдоль оптоволоконки могут распространяться электромагнитные импульсы, электромагнитное поле в которых локализовано вблизи внутри оптоволоконки.

Мы предполагаем, что вещество волновода не магнитное, коэффициент магнитной восприимчивости $\mu = 1$. Коэффициент диэлектрической проницаемости ε отличен от единицы и может изменяться в пространстве. Мы рассматриваем случай идеального аксиально симметричного оптоволоконки, в котором диэлектрическая проницаемость является функцией только поперечной координаты. Предполагается, что вблизи оси оптоволоконки ε имеет максимум.

Основной задачей является исследование движения импульса вдоль оси волновода. Для того, чтобы получить эффективное одномерное уравнение, описывающее распространение электромагнитного импульса вдоль оптоволоконки, надо сначала найти структуру электромагнитного поля в поперечной оптоволоконки плоскости. Поэтому прежде всего требуется решить трёхмерные уравнения Максвелла в поперечной области, тем самым сведя задачу к одномерной.

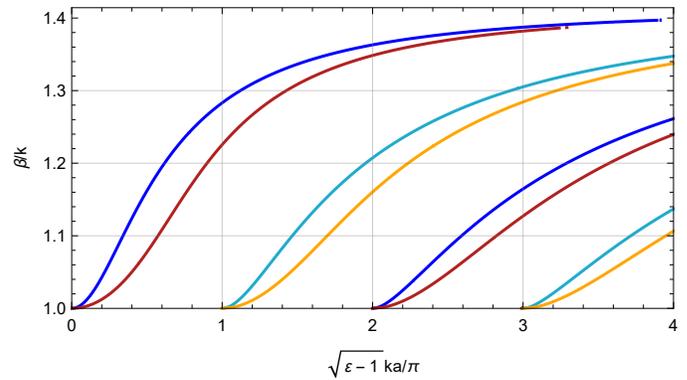


Рис. 6.6 Линии синего оттенка — TE -моды, линии красного оттенка — TM -моды; тёмные и светлые линии — симметричные и асимметричные моды соответственно. Было взято $\varepsilon = 2$.

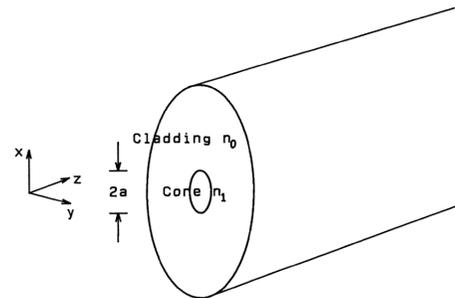


Рис. 6.7 Схематическое строение оптоволоконки и выбор системы координат

6-5.1 Основные обозначения

Введём цилиндрические координаты ρ, φ, z , связанные с оптоволоконкой. В случае, когда мы будем работать в декартовых координатах, ось Oz будет направлена по оси оптоволоконки. Индексами i, j, k, \dots мы будем обозначать все три координаты, а греческими индексами α, β, \dots поперечные координаты x, y .

Волновод представляет собой прозрачный цилиндрический стержень кругового сечения, окружённый прозрачным цилиндрическим слоем однородного материала. Цилиндрический слой будем считать достаточно толстым для того, чтобы его можно было считать формально бесконечным. Стержень называют сердцевинкой волновода (*core*), а окружающее пространство — обкладкой (*cladding*).

Физические параметры аксиально-симметричного

волновода:

- Радиус сердцевинки a
- Диэлектрическая проницаемость обкладки (*cladding*) ε_{cl}
- Профиль диэлектрической проницаемости сердцевинки (*core*) $\varepsilon_c(\rho)$.

Мы будем интересоваться самым простым случаем, когда сердцевина является оптически однородной средой, то есть во всём пространстве радиальная зависимость диэлектрической проницаемости является кусочно-постоянной (*step-index profile*):

$$\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \varepsilon_c, & \rho < a \\ \varepsilon_{cl}, & \rho > a. \end{cases} \quad (6.21)$$

Введём безразмерный параметр, равный отношению коэффициентов преломления сердцевинки оптоволокна и материала, окружающего сердцевину

$$n_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}}, \quad \Delta_n = \frac{\sqrt{\varepsilon_{cl}} - \sqrt{\varepsilon_c}}{\sqrt{\varepsilon_{cl}}}. \quad (6.22)$$

Классификация всех мод и описание их свойств такого оптического волновода можно найти в Маркузе (1974, Гл. 8).

6-5.2 Параметризация поля и волновое уравнение

6-5.2.1 Аксиальное число ν

Естественно классифицировать решения (??) по симметрии по отношению к повороту вокруг оси оптоволокна. Для нахождения собственных мод мы фиксируем аксиальное число ν , и полагаем

$$\mathbf{H}^\rho, \mathbf{H}^\varphi \propto e^{i\nu\varphi}, \quad (6.23)$$

где $\nu \in \mathbb{Z}$. При фиксированном аксиальном числе равенства (6.3h, 6.3i) для продольной компоненты магнитного поля и поперечных компонент электрического поля расписываются в виде

$$\mathbf{H}^z = \frac{i\mathbf{H}^\rho}{\beta\rho} + \frac{i}{\beta}\partial_\rho\mathbf{H}^\rho - \frac{\nu}{\beta\rho}\mathbf{H}^\varphi \quad (6.24)$$

$$E^\varphi = -\frac{i}{\varepsilon\omega}\partial_\rho H^z - \frac{\beta}{\omega\varepsilon}\mathbf{H}^\rho,$$

$$E^\rho = -\frac{\nu}{\varepsilon\omega\rho}H^z + \frac{\beta}{\omega\varepsilon}\mathbf{H}^\varphi,$$

Из (6.24) следует, что той же симметрией (6.23) обладают и z -компоненты всех полей.

6-5.2.2 Волновое уравнение для компонент поля

Волновое уравнение с учётом неоднородности оптических свойств среды в терминах вектор-потенциала имеет вид (6.3j, 6.3k). В области, где оптические свойства среды однородны, компоненты магнитного поля \mathbf{H} в декартовых координатах удовлетворяют волновому уравнению

$$(\Delta^\perp + (\varepsilon\omega^2 - \beta^2))\mathbf{H}^\perp = 0. \quad (6.25)$$

Для нахождения радиальной зависимости компонент магнитного поля $\{\mathbf{H}^\rho, \mathbf{H}^\varphi\}$, удобно воспользоваться переходом к декартовым координатам, поскольку уравнение (6.25) для декартовых координат \mathbf{H}^\perp внутри областей, с постоянным ε является уравнением Бесселя.

Связь между компонентами вектор-потенциала в декартовых и полярных координатах следующая:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^x \\ \mathbf{H}^y \end{pmatrix} = \hat{O} \begin{pmatrix} \mathbf{H}^\rho \\ \mathbf{H}^\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{O}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Разложим вектор \mathbf{H}^\perp по собственным векторам оператора поворота \hat{O} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^\rho \\ \mathbf{H}^\varphi \end{pmatrix} = \sum_{s=\pm 1, \nu} e^{i\nu\varphi} H_{\nu s}(\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

где индекс s пробегает значения ± 1 . Из (6.26) получаем, что

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}^x \\ \mathbf{H}^y \end{pmatrix} = \sum_{s=\pm 1, \mu} H_{\nu s}(\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix} e^{i(\nu+s)\varphi}. \quad (6.28)$$

то из полученной угловой зависимости (6.28) следует, что функция $H_{\nu s}(\rho)$ есть функция Бесселя порядка $|\nu + s|$, поскольку удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \left((\varepsilon\omega^2 - \beta^2) - \frac{(\nu + s)^2}{\rho^2} \right) \right) H_{\nu s}(\rho) = 0. \quad (6.29)$$

в области, где диэлектрическая проницаемость ε постоянна.

6-5.2.3 Граничные условия

Из непрерывности компоненты электрического поля E^z и всех трёх компонент магнитного поля \mathbf{H} следует, что граничными условиями является непрерывность четырёх функций

$$\mathbf{H}^\rho, \quad \partial_\rho\mathbf{H}^\rho, \quad \mathbf{H}^\varphi, \quad \frac{\operatorname{div}\tilde{\mathbf{H}}^\perp}{\varepsilon}. \quad (6.30)$$

6-5.3 Безразмерные параметры моды

Помимо материальных параметров волновода (6.21), безразмерными параметрами, определяющими структуру моды, удобно выбрать следующие:

- 1) Безразмерный радиус сердцевины оптоволокна

$$\tilde{a} = \sqrt{\varepsilon_{cl}} \omega a/c \quad (6.31)$$

- 2) безразмерная константа распространения

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta c}{\sqrt{\varepsilon_{cl}} \omega}, \quad 1 < \tilde{\beta} < n_r. \quad (6.32)$$

- 3) Аксиальное квантовое число ν .
- 4) Радиальное квантовое число μ (определяющее, сколько нулей имеет E_z^{in} и H_z^{in})
- 5) Дискретный параметр, принимающий два значения и соответствующий модам TE и TM для плоских электромагнитных волн, падающих на плоскую поверхность раздела. Только моды с $\nu = 0$ имеют чистые TM и TE поляризации, поэтому все остальные моды обозначаются EH и HE моды Маркузе (1974), в зависимости от того, какая из z-компонент поля больше.

Параметр V (общепринятое обозначение: “normalized frequency”, “V-number”):

$$V = \frac{\omega a}{c} \sqrt{\varepsilon_c - \varepsilon_{cl}}. \quad (6.33)$$

Для step-index profile: если $V < 2.4048$, то оптоволокно работает в одно-модовом режиме. Число

$$N_{\text{modes}} = \frac{V^2}{4} \quad (6.34)$$

определяет, сколько мод на данной частоте существует в оптоволокне (численный факт: хорошо работает начиная с $V > 5$).

Частота отсечки Каждая мода с фиксированными квантовыми числами имеет свою частоту отсечки: при фиксированном значении n_r мода не существует, если параметр \tilde{a} меньше некоторого критического значения (это условие аналогично тому, при прочих фиксированных параметрах есть минимально допустимая частота ω , при которой ещё существует мода). Если это критическое значение равно нулю, говорят, что эта мода не имеет частоты отсечки.

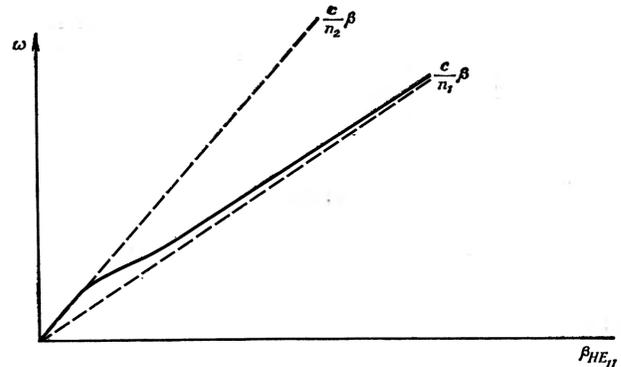
• **Задача 1:** Исходя из квази-классического приближения показать, что оценка для количества направленных мод N_{modes} (6.34) в аксиально симметричном волноводе со ступенчатым радиальным профилем показателя преломления действительно справедлива. *Указание:* при подсчёте количества доступных состояний учесть требование полного внутреннего отражения для поля связанной волны внутри сердцевины и воспользоваться правилом квантования Бора-Зоммерфельда.

Законы дисперсии волн: графическое представление Графическое изображение дисперсии направленных мод. Типичные дисперсионные кривые в переменных

- безразмерный радиус сердцевины оптоволокна (безразмерная частота) \tilde{a} – эффективный коэффициент преломления $n_{\text{эф}}$. Рисунок 6.8.
- безразмерный радиус сердцевины оптоволокна (безразмерная частота) \tilde{a} – постоянная распространения β . Рисунок 6.9.



Рис. 6.8 Дисперсия связанных мод в оптоволокне при $n_r = 1.1$. Моды с аксиальным числом $\nu = 0, 1, 2$ обозначены красным, зелёным и синим соответственно. Мода с $\nu = 1$ с наименьшим \tilde{a} есть фундаментальная мода. Все остальные моды имеют ненулевую частоту отсечки.



Ф и г. 8.2.4. Частотная диаграмма для моды HE₁₁.

Рис. 6.9 Частотная диаграмма моды HE₁₁ там же, с.

6-5.4 Получение дисперсионного соотношения

Распишем равенство (6.27), учитывая то, что радиальные функции $A_{\nu s}(\rho)$ являются функциями Бесселя, см. (6.29). Внутри сердцевинны оптоволокна

$$\mathbf{H}^\perp = e^{i\nu\varphi} \sum_s \mathcal{H}_{\nu s}^{\text{in}} \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix} J_{\nu+s}(q\rho). \quad (6.35a)$$

где поперечное волновое число в сердцевине q определено в (6.19e). Вне сердцевинны оптоволокна

$$\mathbf{H}^\perp = e^{i\nu\varphi} \sum_{s=\pm 1} \mathcal{H}_{\nu s}^{\text{out}} \begin{pmatrix} 1 \\ -si \end{pmatrix} K_{\nu+s}(\kappa\rho), \quad (6.35b)$$

где декремент затухания в радиальном направлении κ определён в (6.19d).

На четыре неизвестных коэффициента

$$\left\{ \mathcal{H}_{\nu s}^{\text{out}}, \mathcal{H}_{\nu s}^{\text{in}} \right\}, \quad s = \pm 1,$$

имеется четыре линейных уравнения, следующих из граничных условий (6.30). Связанная мода существует тогда, когда определитель матрицы этой системы уравнений равен нулю. Путём некоторых линейных преобразований эту матрицу можно преобразовать к виду там

же, с. 379

$$\begin{pmatrix} J_\nu & 0 & 0 & K_\nu \\ -\frac{\nu\beta J_\nu}{q^2 a} & \frac{\varepsilon_c \omega J'_\nu}{q} & \frac{\varepsilon_{cl} \omega K'_\nu}{\kappa} & \frac{\nu\beta K_\nu}{\kappa^2 a} \\ 0 & J_\nu & K_\nu & 0 \\ -\frac{\omega J'_\nu}{q} & \frac{\nu\beta J_\nu}{q^2 a} & -\frac{\nu\beta K_\nu}{\kappa^2 a} & \frac{\omega K'_\nu}{\kappa} \end{pmatrix} \quad (6.35c)$$

где аргумент у всех J есть qa , а у всех K он равен κa . Столбцом, на которую действует эта матрица, является

...

Дисперсионное уравнение может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J'_\nu}{qa \cdot J_\nu} + \frac{K'_\nu}{\kappa a \cdot K_\nu} \right) \left(\frac{J'_\nu}{qa \cdot J_\nu} + \frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_c} \frac{K'_\nu}{\kappa a \cdot K_\nu} \right) = \\ & = \frac{\nu^2 \beta^2}{\varepsilon_c (\omega/c)^2} \left(\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{(\kappa a)^2} \right)^2 = \\ & = \nu^2 \left(\frac{1}{(qa)^2} + \frac{1}{(\kappa a)^2} \right) \left(\frac{1}{(qa)^2} + \frac{\varepsilon_{cl}}{\varepsilon_c} \frac{1}{(\kappa a)^2} \right). \end{aligned} \quad (6.35d)$$

В этом уравнении безразмерные параметры, характеризующие физические параметры оптоволокна, исчерпываются двумя — V и Δ_n :

$$V^2 = (qa)^2 + (\kappa a)^2, \quad \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} = (1 + \Delta_n)^2. \quad (6.35e)$$

§6-6. Слабо ведущие волноводы

Среди оптических диэлектрических волноводов наиболее распространённым является *оптическое волокно* (*оптоволокно*, *optical fibre*). Оно полностью сделано из стекла, оптические свойства которого слабо изменяются от сердцевинны (*core*) к периферии, которую называют обкладкой (*cladding*). Слабость изменения оптических свойств означает, что вариация диэлектрической проницаемости мала по сравнению с единицей. На практике величина вариации составляет менее одной сотой.

В пределе отсутствующей вариации оптических свойств среды в волноводе направленные моды в нём пропадают, превращаясь в плоские поперечные волны. Если вариация ненулевая, но мала, то для плоского волновода непосредственное сравнение уравнений на закон дисперсии для TE -мод (6.19g, 6.19l) и для TM -мод (6.20g, 6.20h) приводит к заключению, что эти уравне-

ния совпадают в пределе

$$\varepsilon - 1 \ll 1. \quad (6.36)$$

При этом число мод, которое определяется параметром V (6.19f), может быть как равно единице, так и велико.

В результате приходим к выводу, что исследование структуры направленных мод в волноводе с $\varepsilon - 1 \ll 1$ можно производить в рамках теории возмущений. В главном приближении достаточно считать, что направленная мода представляет собой чисто поперечную волну, амплитуда которой медленно, то есть на расстояниях многих длин волн, меняется в поперечном направлении. При этом, как мы увидим ниже, пространственной производной от диэлектрической проницаемости в волновом уравнении можно пренебречь, так что волновое уравнение по структуре становится идентичным уравнению Шрёдингера при любой пространственной конфи-

гурации волновода в поперечной плоскости и для любой поляризации.

Такие волноводы называются *слабо-волноведущими волноводами* (*weakly guiding waveguides*), а моды в них — *линейно-поляризованными модами* (*linearly-polarized modes*). Рассмотрение слабо-ведущих волноводов можно найти, например, в Снайдер и Лав, 1987, Гл. 32 или Okamoto, 2006, 3.4. Linearly Polarized (LP) Modes.

6-6.1 Волновое уравнение

Преимущество уравнения (6.3к) для описания слабо-ведущих волноводов состоит в том, что справа стоит градиент от показателя преломления, который для слабо-ведущего волновода как раз мал. Поэтому правой частью в этом пределе пренебречь, и мы получим два скалярных независимых друг от друга уравнения

$$(\Delta^\perp + \varepsilon k^2 - \beta^2)\mathbf{H}^\perp = 0. \quad (6.37)$$

Уравнение (6.37) есть уравнение квантовой механики, описывающее связанный уровень в двумерной аксиально-симметричной потенциальной яме. Электрическое поле может быть восстановлено из магнитного поля по связи (6.3и), в которой пренебрежено градиентным вкладом, а диэлектрическая проницаемость взята постоянной и равной её значению в обкладке,

$$\mathbf{E}^\perp = \frac{\beta c}{\varepsilon_{cl} \omega} \tilde{\mathbf{H}}^\perp \quad (6.38)$$

Иными словами, электрическое поле в главном приближении удовлетворяет тому же уравнению (6.37).

6-6.1.1 Поправки, производимые градиентом показателя преломления

Пусть магнитное и электрическое поля моды, являющиеся решением уравнения (6.37) и связанные между собой (6.38), удовлетворяют условию нормировки (6.3п). Тогда поправка в постоянной распространения $\delta\beta$, связанная с отличием точного уравнения (6.3к) и приближённого уравнения (6.37), равна

$$\begin{aligned} \delta\beta &= -\frac{1}{2\beta} \int dx dy (\mathbf{E}^{\perp*} \cdot \mathbf{g}) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}}^\perp = \\ &= -\frac{c}{2\varepsilon_{cl}^2 \omega} \int dx dy (\partial_x H^y - \partial_y H^x) (H^y \partial_x \varepsilon - H^x \partial_y \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.39)$$

в рамках первого порядка теории возмущений.

• **Задача 1:** Пусть сердцевина оптоволокна со ступенчатым показателем преломления имеет небольшую эллиптичность в поперечном сечении: главные полуоси отличаются на 1%. Найдите разность фазовых скоростей двух поляризаций, предполагая, что волокно одномодовое (параметры указаны в Пункте 6-6.4. *Указание:* при решении задачи пользуйтесь выражением (6.39) для первого порядка теории возмущений.

6-6.2 Фундаментальная мода HE_{11} в круглом волноводе

Исследуем дисперсию фундаментальной моды в оптоволокне с круглым сечением с кусочно-постоянным показателем преломления предполагая, что скачок показателя преломления мал,

$$\Delta_n \ll 1. \quad (6.40)$$

Литература: там же, §3.5.

Решаем уравнение (6.37) для одной из компонент магнитного поля, скажем, для H^x . Для этой моды принято обозначения HE_{11} . Решение должно быть аксиально-симметричным, то есть

$$H^x = J_0(q\rho), \quad \rho < a, \quad H^x = h K_0(\kappa\rho), \quad \rho > a, \quad (6.41a)$$

где h — пока неизвестная константа. Требуя непрерывность самого поля и его производной на границе раздела сред,

$$J_0(qa) = h K_0(\kappa a), \quad q J_0'(qa) = h \kappa K_0'(\kappa a), \quad (6.41b)$$

и используя рекуррентные соотношения $J_0'(z) = -J_1(z)$ и $K_0'(z) = -K_1(z)$, получаем условие существования нетривиального решения

$$\frac{qa J_1(qa)}{J_0(qa)} = \frac{\kappa a K_1(\kappa a)}{K_0(\kappa a)}, \quad (qa)^2 - (\kappa a)^2 = V^2. \quad (6.41c)$$

Для стандартного одномодового волокна $V \approx 2.3$, что даёт $\kappa a \approx 1.63$ и $qa = 1.62$.

Характеристическое уравнение (6.41c) можно получить и непосредственно из точного характеристического уравнения (6.35d). Полагая в левой части (6.35d) приближённо $\varepsilon_c \approx \varepsilon_{cl}$ и вычисляя квадратный корень из обеих частей уравнения, получаем

$$\frac{J_\nu' \pm (\nu/qa) J_\nu}{qa \cdot J_\nu} + \frac{K_\nu' \pm (\nu/\kappa a) K_\nu}{\kappa a \cdot K_\nu} = 0. \quad (6.41d)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями

$$J_\nu'(z) \pm \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = \pm J_{\nu \mp 1}(z), \quad (6.41e)$$

$$K_\nu'(z) \pm \frac{\nu}{z} K_\nu(z) = -K_{\nu \mp 1}(z), \quad (6.41f)$$

приходим к двум уравнениям

$$\frac{J_{\nu-1}}{qa \cdot J_\nu} = \frac{K_{\nu-1}}{\kappa a \cdot K_\nu}, \quad \frac{J_{\nu+1}}{qa \cdot J_\nu} = -\frac{K_{\nu+1}}{\kappa a \cdot K_\nu}. \quad (6.41g)$$

При $\nu = 1$ первое уравнение в (6.41g) совпадает с (6.41c), полученным из теории слабо ведущего волновода.

6-6.2.1 Ограничения применимости теории слабо ведущего волновода

Выражение (6.39) позволяет оценить поправку к постоянной распространения β , связанную с неучтённым градиентом показателя преломления:

$$\delta\beta \sim \Delta_n^{3/2}\beta, \quad (6.41h)$$

где относительный скачок показателя преломления δn определён в (6.22) (множитель $\sqrt{\Delta_n}$ происходит из производной поля, а множитель Δ_n — из производной диэлектрической проницаемости). Величина $\delta\beta$, как поправка, должна быть мала в смысле

$$\frac{\delta\beta}{\Delta_n\beta} \sim \sqrt{\Delta_n} \ll \frac{\beta - \sqrt{\epsilon_{cl}}\omega/c}{\Delta_n\beta} \approx \frac{\kappa^2}{2\Delta_n\beta^2} \approx 0.5, \quad (6.41i)$$

$$\frac{\delta\beta}{\Delta_n\beta} \sim \sqrt{\Delta_n} \ll \frac{\sqrt{\epsilon_c}\omega/c - \beta}{\Delta_n\beta} \approx \frac{q^2}{2\Delta_n\beta^2} \approx 0.5,$$

где численные значения были взяты для стандартного одномодового оптоволокна, для которого $\sqrt{\Delta_n} \approx 0.05$ (параметры см. в абзаце с формулой (6.44)).

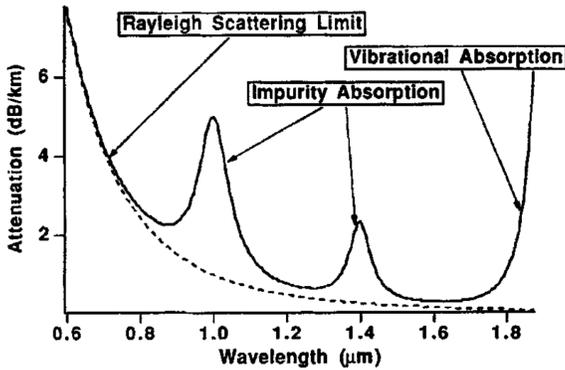


Рис. 6.10 Attenuation characteristics of a typical fiber: schematic, showing the important mechanisms of fiber attenuation. Bass и Stryland, 2002, p. 1.8

6-6.3 Предел слабо-связанной моды

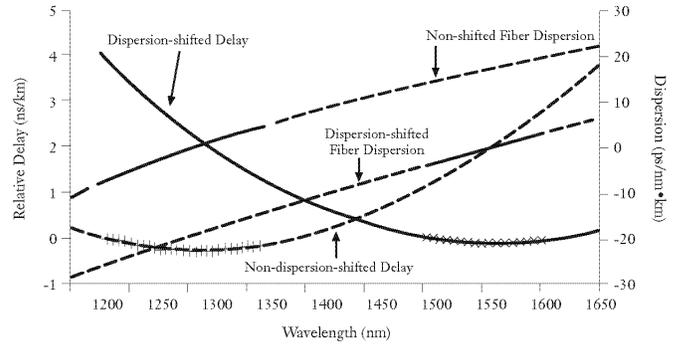
Слабо-связанной модой назовём такую моду, у которой поток энергии сосредоточен в основном вне сердцевины оптоволокна. Это означает, что слабо-связанной моде соответствует предел

$$\kappa a \ll 1. \quad (6.42)$$

В частности, слабо-связанной модой является фундаментальная мода в пределе $V \ll 1$, где параметр V определён в (6.33). Другим примером слабо-связанной моды является мода на частоте, слабо превышающей частоту отсечки этой моды.

Typical Time-Delay and Dispersion Curves
Figure 1

Typical time-delay and dispersion curves for 1310 nm optimized non-dispersion-shifted and 1550 nm optimized dispersion-shifted single-mode fibers are shown in Figure 1.



• Test Fiber Length	≥ 1 km
• Measurement Wavelengths	
<i>non-dispersion-shifted fibers</i>	Spaced across 1230 nm to 1360 nm
<i>dispersion-shifted fibers (DS & LS)</i>	Spaced across 1500 nm to 1600 nm
<i>Submarine SMF-LS™</i>	Spaced across 1550 nm to 1610 nm
<i>LEAF®, MetroCor™</i>	Spaced across 1460 nm to 1570 nm
<i>Submarine LEAF®</i>	Spaced across 1500 nm to 1625 nm

The measurement wavelengths are established to include analysis on both sides of λ_c .

References

EIA/TIA-455-169A (FOF-169), Chromatic Dispersion Measurement of Single-Mode Optical Fibers by the Phase-Shift Method

Рис. 6.11 дисперсия фундаментальной моды различных типов SMF-волокон. Источник: сайт одного из производителей оптоволокон, фирма Corning, <http://www.corning.com/>

Рассмотрим фундаментальную моду в пределе $V \ll 1$. Раскладывая детерминант (6.35с) по малому параметру (6.42), получаем следующее приближённое выражение, определяющее связь постоянной распространения и частоты связанной моды

$$\frac{\beta}{\sqrt{\epsilon_{cl}}\omega/c} - 1 = \frac{(\kappa a)^2}{2\tilde{a}^2} = \quad (6.43)$$

$$= \frac{2 \exp(-2\Gamma + 1 + \Delta_n)}{\tilde{a}^2} \exp\left(-\frac{4(1 + \Delta_n)}{V^2}\right),$$

где константа Эйлера-Маскерони $\Gamma = 0.577216$. Мы приближили $qa = V$, поскольку из (6.43) видно, что κa является экспоненциально малой величиной. При выводе (6.43) не предполагалось неравенство $\Delta_n \ll 1$. Если это неравенство предположить, то выражение (6.43) не совпадает с пределом (6.41с) при $V \ll 1$; это следовало ожидать, поскольку в этом пределе не выполняется первое неравенство (6.41i).

• **Задача 2:** Для аксиально симметричного волновода со ступенчатым радиальным профилем в преде-

ле малого изменения показателя преломления выяснить (параметры даны в абзаце с формулой (6.44)), можно ли описывать дисперсию фундаментальной моды приближённым уравнением (6.43).

6-6.4 Физические параметры некоторых типов оптоволокон

Приведём здесь физические параметры некоторых типов оптоволокон, использующихся в промышленности.

Одно-модовое волокно *Single-mode fiber*.

Диаметр сердцевины $2a = 9$ мкм, диаметр оболочки 125 мкм. Коэффициент преломления сердцевины $n_c = 1.48$, коэффициент преломления оболочки $n_{cl} = 1.475$:

стандартное обозначение

$$\Delta_n = \frac{n_c - n_{cl}}{n_{cl}} = 0.003 \quad (6.44)$$

На рабочей частоте 1550 мкм затухание 0.2 Дб/км.

Зависимость групповой скорости и второй дисперсии для стандартных волокон приведены на Рисунке 6.11. График для коэффициента затухания приведён на рисунке Рисунок 6.10.

• **Задача 3:** Оценить для поля декремент ослабления в радиальном направлении в оболочке, а также показатель экспоненты для ослабления поля на внешней границе оболочки.

Многомодовое оптоволокно Радиус сердцевины $a = 50$ мкм (или $a = 62$ мкм), радиус оболочки 125 мкм. Коэффициенты преломления те же.

§6-7. Поверхностные плазмоны

Рассмотрим распространение электромагнитной волны вдоль границы раздела металл-диэлектрик (Raether (1988), а также Ландау и Лифшиц (1987, задача после §88)) на частотах, близких к плазменной частоте в красной от неё области.

Введём декартову систему координат $Oxyz$. Пусть область, занимаемая металлом задаётся неравенством $z < 0$. Для определённости примем, что электромагнитная волна распространяется вдоль оси Ox . Тогда все поля при $z > 0$ содержат множитель

$$\begin{aligned} \text{при } z < 0 & \exp(i\beta x + \kappa_m z - i\omega t), \\ \text{при } z > 0 & \exp(i\beta x - \kappa_d z - i\omega t), \end{aligned} \quad (6.45a)$$

где действительные части пространственных декрементов затухания κ_m и κ_d положительны. Волновое уравнение, записанное в областях с однородным электромагнитным откликом, даёт связи

$$\beta^2 - \kappa_m^2 = \frac{\varepsilon_m \omega^2}{c^2}, \quad \beta^2 - \kappa_d^2 = \frac{\varepsilon_d \omega^2}{c^2}. \quad (6.45b)$$

Ниже мы выясним, что электрическое поле нормально оси Oy , а магнитное поле имеет только y -компоненту. Таким образом, поверхностный плазмон есть *ТМ*-волна. Всего мы имеем 6 неизвестных: κ_m , κ_d , q и $4 = (2 \text{ области}) \times (2 \text{ компоненты})$ компонент электрического поля. На эти величины наложено 2 условия (6.45b), вытекающие из волнового уравнения в объёме, и 4 условия на границе (непрерывность касательных компонент E и H , а также нормальных компонент D и B), т.е. всего 5 условий. Таким образом, существует не более чем $6 - 5 = 1$ направленная мода.

Удовлетворяя вышеперечисленным граничным условиям, приходим к тому, что

$$\begin{aligned} (\kappa_m)^2 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}, \\ (\kappa_d)^2 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d^2}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}, \\ \beta^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m} \end{aligned} \quad (6.45c)$$

что не противоречит условию связанности волны поверхностью раздела – т.е. затуханию волны в обе стороны от поверхности, если выполнено неравенство

$$\text{Re}(\varepsilon_m / \varepsilon_d) < -1. \quad (6.45d)$$

Электрическое поле поверхностной моды лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy . Если отбросить множители (6.45a), дающие зависимость от координат, то электрическое поле оказывается равным

$$\begin{aligned} \text{при } z > 0 & \mathbf{E}_0 = \{1, 0, i\beta / \kappa_d\}, \\ \text{при } z < 0 & \mathbf{E}_0 = \{1, 0, -i\beta / \kappa_m\}, \end{aligned} \quad (6.45e)$$

Магнитное поле

$$\mathbf{H}_0 = \left(0, -i \frac{\varepsilon_d \omega}{c \kappa_d}, 0 \right). \quad (6.45f)$$

Слабо связанные плазмоны. Плазмон является слабо связанным с поверхностью, если он оказывается

локализованном в поперечном направлении на масштабе, значительно превышающим длину волны света в диэлектрике, т.е. когда

$$\frac{\kappa_d}{\omega/c} \ll 1, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \ll 1.$$

Из (6.45с) следует, что такой предел достигается, когда диэлектрическая проницаемость металла становится относительно большой по абсолютному значению.

В пределе слабо связанных поверхностных волн имеет смысл переписать уравнение дисперсии в терминах поверхностного импеданса ζ (5.13): согласно его определению,

$$\zeta = \frac{E^x}{B^y} = \frac{i\varepsilon_d(\omega/c)}{\kappa_d}. \quad (6.45g)$$

В этом пределе электрическое поле поверхностного плазмона вне металла в основном направлено нормально к его поверхности, так что

$$\frac{E^x}{E^z} \approx \frac{i(\omega/c)}{\kappa_d} \ll 1. \quad (6.45h)$$

Пространственное распределение поля в плазмоне стремится к пространственному распределению поля в плоской линейно поляризованной по Oz волне.

Предел коротких волн. Их выражений (6.45с) для волновых векторов следует, при приближении к точке $\text{Re } \varepsilon_m = -\text{Re } \varepsilon_d$ величина волнового вектора q , и декрементов пространственного ослабления κ_d , κ_m начинает возрастать.

6-7.1 Дисперсия плазмонов в модели Друде

Исследуем зависимость пространственной структуры поверхностных плазмонов и их добротности от частоты, приняв простейшие модели для дисперсий диэлектрических проницаемостей. Пренебрежём диссипативными потерями в диэлектрике, так что проницаемость диэлектрика примем чисто действительной, $\text{Im } \varepsilon_d = 0$. Дисперсия диэлектрической проницаемости металла

$$\varepsilon_m = \varepsilon_b - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}, \quad (6.46)$$

где вклад $\varepsilon_b - 1$ происходит от резонансов, имеющих частоты, далёкие от интересной нам частоты ω_0 .

• **Задача 1:** Рассмотрите распространение поверхностного плазмона вдоль бесконечной плоской границы металл-диэлектрик. Проницаемость диэлектрической среды считать единицей. Проницаемость металлической среды имеет вид (6.48) с $\gamma \ll \omega_p$.

- Определите условие существования поверхностных плазмонных мод в терминах модели (9.3).

- Определите пороговую частоту и закон дисперсии коротковолновых плазмонов.

- Определите пространственную структуру электромагнитного поля в плоской поверхностно-плазмонной волне, для простоты предполагая отсутствие потерь, $\varepsilon'' = 0$.

- Определите пространственную структуру плотности потока энергии в плоской поверхностно-плазмонной волне, предполагая потери малыми, но не нулевыми (волна возбуждается на некоторой плоскости, нормальной к плоскости раздела металл-диэлектрик, и распространяется от неё). Найдите полный поток энергии в каждой из двух сред, и, наконец, полный поток энергии по всему сечению.

Решение: Дисперсию найдем, используя соотношение (6.45с):

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d(\omega_p^2 - \varepsilon_b \omega^2)}{\omega_p^2 - (\varepsilon_d + \varepsilon_b)\omega^2}}. \quad (6.47)$$

Пороговая частота (6.45d)

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_d + \varepsilon_b}} \gg \frac{1}{\tau}, \quad (6.48)$$

Пусть частота плазмона ω близка к пороговой частоте ω_0 . Тогда дисперсионное соотношение приближённо может быть записано в виде

$$\beta^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{\varepsilon_d^2}{2(\varepsilon_d + \varepsilon_b)} \frac{\omega_p}{\omega - \omega_0 + i/2\tau} \quad (6.49)$$

а обратные размеры поперечной локализации $\kappa_d = \kappa_d = \beta$.

Поток вектора Пойнтинга найдем по формуле

$$\mathbf{S} = \frac{c}{2\pi} \text{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*], \quad S^x = -\frac{c}{2\pi} \text{Re}(E^z H^y^*)$$

В диэлектрике интегральный поток энергии вдоль направления распространения

$$S^{x(d)} = \frac{|H_0|^2}{2\pi} \frac{\kappa_d/\varepsilon_d}{\beta\omega} \frac{1}{\kappa_d} e^{-2\kappa_d z} \Rightarrow \quad (6.50)$$

$$I^{(d)} = \int_0^\infty dx S^{x(d)} = \frac{|H_0|^2}{4\pi} \frac{\kappa_d/\varepsilon_d}{\beta\omega} \frac{1}{\kappa_d^2}.$$

В металле интегральный поток энергии вдоль направления распространения

$$S^{x(m)} = -\frac{|H_0|^2}{2\pi} \frac{\kappa_d/\varepsilon_d}{\beta\omega} \frac{1}{\kappa_m} e^{-2\kappa_m z} \Rightarrow \quad (6.51)$$

$$I^{(m)} = \int_0^\infty dx S^{x(m)} = -\frac{|H_0|^2}{4\pi} \frac{\kappa_d/\varepsilon_d}{\beta\omega} \frac{1}{\kappa_m^2}.$$

Суммарный поток энергии в x -направлении

$$I = I^{(d)} + I^{(m)} = \dots \quad (6.52)$$

• **Задача 2:** Рассмотреть границу раздела металла и диэлектрической среды, имеющих коэффициенты диэлектрической проницаемости ε_m и ε_d соответственно, так что $\varepsilon_m < -\varepsilon_d$, а $\varepsilon_d > 0$ (при этом потери в обоих материалах отсутствуют). Выразить поверхностную плотность энергии \mathcal{E} в плоском поверхностном плазмоне через амплитуду электрического поля на поверхности раздела и диэлектрические проницаемости соприкасающихся сред. То же самое сделать для потока энергии отдельно в каждой среде и в целом. Непосредственно показать, что

$$v_g \mathcal{E} = S, \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta},$$

где S – полная поверхностная плотность потока энергии, v_g – групповая скорость, а $\beta(\omega)$ – закон дисперсии поверхностного плазмона.

• **Задача 3:** Пусть теперь в металле присутствуют малые потери, так что $\varepsilon_m'' \ll |\varepsilon_m'|$. Введём декартову систему координат $Oxyz$, в которой поверхность раздела есть плоскость Oxy . Пусть поверхностный плазмон возбуждается синфазным движением сторонних зарядов с частотой ω в плоскости Oyz , тогда при $x > 0$ возбуждённая плоская поверхностная волна распространяется в направлении возрастающих x . Найти распределение среднего по времени потока энергии в пространстве. Нарисовать соответствующую картину в плоскости Oxz .

ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§7-1. Магнитное поле постоянных токов

Пусть по некоторому контуру протекает ток J . Выразим индуктивность L контура через его геометрические характеристики. Как известно, энергия магнитного поля в контуре может быть записана через самоиндукцию контура L :

$$U_L = \frac{LJ^2}{2c^2} \quad (7.1)$$

С другой стороны, можно записать эту энергию напрямую:

$$U_L = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 dV \quad (7.2)$$

Преобразуем это выражение следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 dV &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B}, \text{rot} \mathbf{A}) dV = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] dV + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{A}, \text{rot} \mathbf{B}) dV. \end{aligned} \quad (7.3)$$

где \mathbf{A} – вектор-потенциал, $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$. Интеграл от дивергенции исчезает, а во втором слагаемом пользуемся

уравнениями Максвелла:

$$\frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{A}, \text{rot} \mathbf{B}) dV = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV \quad (7.4)$$

Если теперь подставить квазистационарное выражение для векторного потенциала через ток в калибровке Лоренца, получим:

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2c} \int (\mathbf{A}, \mathbf{j}) dV = \\ &= \frac{1}{2c^2} \int \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}_1), \mathbf{j}(\mathbf{r}_2))}{r} dV_1 dV_2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Откуда сразу получаем:

$$L = \frac{1}{J^2} \int \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}_1), \mathbf{j}(\mathbf{r}_2))}{r} dV_1 dV_2 \quad (7.6)$$

§7-2. Магнитостатика.

Если в среде есть ненулевая плотность магнитного момента (намагниченность) $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, то уравнения Максвелла в отсутствие внешних источников в статическом пределе (уравнения магнитостатики) имеют вид:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{B} = 4\pi \text{rot} \mathbf{M}. \quad (7.7a)$$

Здесь $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ – магнитное поле (по историческим причинам называется индукцией магнитного поля). Обычно уравнения магнитостатики применяют для ситуаций, когда исследуемые эффекты происходят на масштабах, существенно превышающих межатомные расстояния в среде. В этом случае можно считать и намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, и поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ усреднёнными по флуктуациям на молекулярных масштабах. Удобно ввести векторное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad (7.7b)$$

(которое по историческим причинам называется магнитным полем), являющееся в отсутствие внешних токов потенциальным:

$$\text{div} \mathbf{H} = -4\pi \text{div} \mathbf{M}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (7.7c)$$

Последнее уравнение означает, что

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \phi, \quad (7.7d)$$

где ϕ – скалярное поле, и определение магнитного поля по данному распределению намагниченности сводится к решению уравнения типа Пуассона:

$$\Delta \phi = 4\pi \text{div} \mathbf{M}. \quad (7.7e)$$

Имеется тождество:

$$\int (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) d^3r = - \int (\text{grad} \phi \cdot \mathbf{B}) d^3r = 0, \quad (7.8a)$$

Полное поле магнитной индукции разложим на сумму поля, создаваемого магнетиком и на внешнее поле:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_M + \mathbf{B}_{\text{src}}. \quad (7.8b)$$

Фундаментальные законы в магнитостатическом пределе дают следующее выражение для магнитной энергии (гамильтониана) образца:

$$\mathcal{H}_m = \int \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} d^3r - \int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) d^3r, \quad \mathcal{H}_{m0} = \int \frac{\mathbf{B}_{\text{src}}^2}{8\pi} d^3r. \quad (7.8c)$$

Вычтем из полной магнитной энергии часть магнитной энергии \mathcal{H}_{m0} , которая осталась бы запасённой в вакууме, если изъять образец. Воспользовавшись тождеством (7.8a), получим другое выражение для магнитной энергии:

$$\mathcal{H}_m - \mathcal{H}_{m0} = -\frac{1}{2} \int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}_M) d^3r - \int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}_{\text{src}}) d^3r. \quad (7.8d)$$

Как видим, энергия взаимодействия с внешним полем \mathbf{V}_{src} входит аддитивно.

7-2.1 Ферромагнетики и их магнитная энергия.

Ферромагнетик при макроскопическом описании характеризуется некоторой намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r})$, которая не исчезает при выключении внешних полей (спонтанная намагниченность). За ее образование ответственны спины электронов и обменное взаимодействие, имеющие квантовомеханическую природу. Ниже мы будем считать, что модуль намагниченности фиксирован $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_0$, направление же определяется минимумом энергии, к которой сейчас и переходим.

Пусть на ферромагнетик не действует внешнее поле. Магнитную энергию ферромагнетика полезно переписать в ещё одном виде, прибавив к выражению (7.8c) константу, пропорциональную его объёму:

$$\mathcal{H}_m + 2\pi \int d^3r M^2 = \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} d^3r. \quad (7.9)$$

Справа интеграл берётся от существенно положительной величины, поэтому минимизация энергии требует минимизации абсолютного значения величины магнитного поля \mathbf{H} .

7-2.2 Магнитные домены: доменные стенки

Образование доменной структуры обусловлено компромиссом между различными составляющими полной энергии образца. Существует широкая область условий, в которых требование минимизации энергии ведет к распаду ферромагнетика на участки с различными направлениями вектора намагниченности \mathbf{M} . Намагниченность внутри доменов почти однородна, а переход от одного направления к другому происходит плавно и главным образом в пределах пограничного слоя - доменной стенки. Толщина областей перехода обычно мала по сравнению с размерами доменов. С термодинамической точки зрения соприкасающиеся домены представляют собой различные фазы ферромагнетика и имеет смысл к примеру говорить о поверхностном натяжении межфазных границ.

Зададимся целью определить пространственную структуру намагниченности при переходе между соседними доменами. Поскольку искомая зависимость диктуется условиями термодинамического равновесия, то

необходимо прежде всего записать выражение для полной свободной энергии ферромагнетика. Эта величина складывается из энергии магнитной анизотропии (на микроскопическом уровне обусловленной слабыми релятивистскими взаимодействиями между атомами ферромагнетика) и энергии магнитной неоднородности (главный вклад в которую дает обменное взаимодействие).

Спин-орбитальное взаимодействие в кристаллах приводит к “привязке” намагниченности к кристаллическим осям - магнитной анизотропии. Простейшим и достаточно распространённым является одноосная анизотропия, выражаемая в следующей модификации магнитного гамилтониана:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \mathbf{V}_M d^3r - \int \mathbf{M} \mathbf{V}_{\text{src}} d^3r - \frac{\beta}{2} \int M_z^2 d^3r. \quad (7.10)$$

M_z - компонента намагниченности вдоль оси анизотропии z . В равновесии при $\beta > 0$ однородная намагниченность \mathbf{M}_0 выстраивается параллельно оси z . Однако однородная по образцу намагниченность может не быть термодинамически равновесным состоянием. Данное выражение учитывает первые члены разложения энергии анизотропии в ряд по компонентам вектора \mathbf{M} . Начинается это разложение с квадратичных членов, поскольку энергия анизотропии есть чётная функция намагниченности (энергия инвариантна по отношению к обращению времени, а намагниченность меняет знак при этой операции).

С точностью до слагаемых, пропорциональных M^2 , практически постоянных в ферромагнетиках, энергия (7.10) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_M^2 d^3r - \int \mathbf{M} \mathbf{V}_{\text{src}} d^3r - \frac{\beta}{2} \int M_z^2 d^3r, \quad (7.11)$$

где $\mathbf{H}_M = \mathbf{V}_M - 4\pi\mathbf{M}$. Стремление системы к уменьшению модуля \mathbf{H}_M является причиной образования доменной структуры. Если при направлении \mathbf{M} вдоль оси анизотропии z поле \mathbf{H}_M оказывается равным нулю (такое может случиться при цилиндрической геометрии образца), то доменов не образуется. То же происходит при достаточно сильном внешнем поле \mathbf{V}_{src} .

Если в силу малого объёма магнетика магнитной энергией можно пренебречь, то отдельно объёмная плотность энергии, связанная с анизотропией, может быть записана в виде

$$U_{\text{ан}} = \frac{\beta M^2}{2} \sin^2 \theta \quad (7.12)$$

где θ - угол между \mathbf{M} и главной осью симметрии кристалла z .

Энергия неоднородности ферромагнетика феноменологически может быть записана через производные \mathbf{M} по координатам. При этом предполагается относительная малость градиента направления вектора \mathbf{M} , поскольку существенное изменение направления магнитных моментов происходит на расстояниях больших по

сравнению с межатомными. Разложение энергии неоднородности начинается с квадратичных членов по пространственным производным магнитного момента

$$U_{\text{неодн}} = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial M_l}{\partial x_i} \frac{\partial M_l}{\partial x_k} \quad (7.13)$$

Наличие членов линейных по производным запрещено в силу требования инвариантности энергии по отношению к обращению времени. В одноосном кристалле тензор α_{ik} имеет две независимые компоненты, поэтому в выбранной системе координат

$$U_{\text{неодн}} = \frac{\alpha_{\perp}}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\alpha_{\parallel}}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2. \quad (7.14)$$

Покажем теперь, что в одноосном кристалле реализуется доменная структура в виде плоских слоев, параллельных главной оси симметрии ("легкой оси") и поворот намагниченности при этом происходит в плоскости границы между слоями (блеховская доменная стенка). Направим ось x по нормали к плоскости слоев, а ось z как и в указанных выше формулах вдоль главной оси кристалла. Мы ищем решение, в котором распределение намагниченности зависит только от координаты x и для компонент вектора \mathbf{M} справедливо

$$M_x = 0, \quad M_y = M \sin \theta, \quad M_z = M \cos \theta. \quad (7.15)$$

Тогда сумма поверхностной плотности энергий анизо-

тропии и однородности может быть записана как

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (U_{\text{ан}} + U_{\text{неодн}}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\alpha_{\perp}}{2} (M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{\beta}{2} M_y'^2 \right] = \\ &= \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\alpha_{\perp} \theta'^2 + \beta \sin^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

где ' ' означает дифференцирование по x . Бесконечные пределы интегрирования выбраны в связи с предположением о малости ширины переходной области по сравнению с толщиной доменов. По этой же причине можно записать следующие граничные условия

$$\theta(+\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \pi, \quad \frac{d\theta}{dx}(\pm\infty) = 0.$$

Решая вариационную задачу о минимизации полученного функционала, приходим к уравнению

$$\alpha_{\perp} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \beta \sin \theta \cos \theta = 0$$

решение которого имеет вид

$$\cos \theta = \tanh(x/\delta) \quad (7.17)$$

где величину размерности длины $\delta = \sqrt{\alpha_{\perp}/\beta}$ следует называть шириной доменной стенки.

Выполняя интегрирование в выражении для энергии с учетом найденного распределения намагниченности, находим

$$W = 2M^2\beta\delta = 2M^2\sqrt{\alpha_{\perp}\beta} \quad (7.18)$$

Часть I

ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава 8

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА И ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

§8-1. Обобщённая восприимчивость

Пусть на некоторую систему, находящуюся в тепловом равновесии, действует возмущение, создаваемой внешними источниками. Добавка в гамильтониан от возмущения даётся квантово-механическим оператором

$$\hat{V}(t) = -\hat{x}f(t), \quad (8.1a)$$

где \hat{x} – оператор, соответствующий некоторой наблюдаемой величине в системе, а $f(t)$ – внешняя “сила”, зависящая от времени и характеризующая внешнее воздействие на систему. Если сила мала, то есть производит малое воздействие на систему, то среднее значение величины $x(t)$ линейно по этой силе,

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \alpha(t-t') dt' f(t'). \quad (8.1b)$$

В (8.1b) интегрирование производится только по временам $t' < t$, что гарантирует выполнения принципа причинности. Доопределим восприимчивость $\alpha(\tau)$ на отрицательные времена, положив $\alpha(\tau < 0) = 0$, тогда интегрирование по времени в (8.1b) можно распространить на все времена t' .

Монохроматическую силу f можно представить в виде

$$f(t) = f_{\omega} e^{-i\omega t} + f_{\omega}^* e^{i\omega t}. \quad (8.1c)$$

Если сила f не монохроматическая, но имеет некоторый спектр, то она может быть представлена в виде интеграла Фурье,

$$f(t) = \int (d\omega) f_{\omega} e^{-i\omega t}, \quad (8.1d)$$

При этом разумно предположить, что во временном представлении сила действует в течении некоторого времени τ_f .

В Фурье-представлении связь между средним значением x и силой f_{ω} имеет вид

$$x_{\omega} = \alpha_{\omega} f_{\omega}, \quad (8.1e)$$

где α_{ω} определяется равенством

$$\alpha(t) = \int (d\omega) \alpha_{\omega} e^{-i\omega t}. \quad (8.1f)$$

Из того, что во временном представлении восприимчивость является чисто действительной функцией следует симметрия её действительной и мнимой частей в частотном представлении,

$$\alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega), \quad \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega). \quad (8.1g)$$

В частности, на мнимой оси восприимчивость чисто действительна,

$$\alpha(i\omega) = \alpha'(i\omega), \quad \omega > 0. \quad (8.1h)$$

Подвижность. Пусть в (8.1a) сила f не зависит от времени. Для определённого класса систем (например, проводники в электродинамике или частица в жидкости) при постоянной силе среднее значение координаты растёт линейно со временем,

$$\frac{dx}{dt} = \mu f, \quad (8.1i)$$

где постоянная μ мы назовём подвижностью (в электродинамике она пропорциональна проводимости). Подвижность определяет поведение восприимчивости на малых частотах $\omega \rightarrow 0$:

$$\alpha \approx \frac{2i\mu}{\omega + i0} : \quad \alpha' \approx 2\pi\mu\delta(\omega), \quad \alpha'' = \frac{2\mu}{\omega}. \quad (8.1j)$$

8-1.1 Диссипация энергии в системе и энергия колебаний

Мгновенная выделяющаяся мощность в системе

$$\partial_t W = -x\dot{f}, \quad (8.2)$$

8-1.1.1 Диссипация энергии

Если сила гармоническая во времени, см. (8.1c), то средняя по времени выделяющаяся мощность $\partial_t W$ (8.2) есть скорость производства тепла Q . После усреднение по времени, большому по сравнению с периодом колебания силы $2\pi/\omega$, получим

$$Q = \alpha_\omega |f_\omega|^2 i\omega - \alpha_\omega^* |f_\omega|^2 i\omega = \quad (8.3a)$$

$$= 2\omega \alpha''_\omega |f_\omega|^2.$$

Таким образом, диссипация определяется мнимой частью восприимчивости.

Поскольку скорость диссипации в системе, которая находится в равновесии, должна быть неотрицательна, то мнимая часть диэлектрической проницаемости должна удовлетворять условию

$$\alpha''(\omega > 0) > 0. \quad (8.3b)$$

Если сила действовала в течении ограниченного времени, так что может быть представлена в виде (8.1d), то полное выделившееся тепло в системе равно

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \omega \alpha''(\omega) |f_\omega|^2. \quad (8.3c)$$

8-1.1.2 Энергия колебаний в средах с низким поглощением

Пусть теперь среда в некотором диапазоне частот может считаться бездиссипативной, так что в этом частотном диапазоне $\alpha'' \ll \alpha'$.

...

8-1.2 Формула Кубо

Пусть теперь у нас есть несколько сил f^i и сопряжённых им величин \hat{x}^i , так что гамильтониан возмущения, производимого внешними силами, равен

$$\hat{V}(t) = - \sum_i \hat{x}^i f^i(t).$$

Среднее значение $x^i(t)$ этих величин будет линейно по силам, если они малы,

$$x^i(t) = \sum_k \int_0^\infty d\tau \alpha^{ik}(\tau) f^k(t - \tau).$$

При $i \neq k$ функция отклика α^{ik} может быть названа взаимной восприимчивостью.

Для восприимчивости $\alpha^{ik}(\tau)$ может быть получена формула Кубо, обобщающая ‘золотое правило Ферми’. Общее выражение для среднего значения величины \hat{x}^i есть

$$x^i(t) = \text{tr}\{\hat{\rho}(t) \hat{x}^i(t)\}, \quad (8.4)$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности системы. Будем работать в представлении взаимодействия, так что

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho} = [\hat{\rho}, \hat{V}], \quad i\hbar \partial_t \hat{V} = [\hat{H}_0, \hat{V}],$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан невозмущённой системы. Разложим матрицу плотности в ряд по малому возмущению до первого порядка,

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [\hat{\rho}_0, \hat{V}(t')] dt'.$$

Здесь матрица плотности ρ_0 соответствует статистическому равновесию, то есть является распределением Гиббса,

$$\hat{\rho}_0 = \exp(-(\hat{H}_0 - F)/T),$$

где F — свободная энергия. Подставляя это в выражение (8.4), получаем

$$x^i(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt \text{tr}([\hat{\rho}_0, \hat{x}^k(t')] \hat{x}^i(t)) f(t').$$

Сравнивая это выражение с выражением (8.1b), определяющим восприимчивость $\hat{\alpha}(\tau)$, заключаем, что она равна

$$\alpha^{ik}(\tau > 0) = -\frac{i}{\hbar} \text{tr}([\hat{\rho}_0, \hat{x}^k(t)] \hat{x}^i(t + \tau)) =$$

$$= \frac{i}{\hbar} \text{tr}(\hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(t + \tau), \hat{x}^k(t)]). \quad (8.5)$$

Обратим внимание, что в (8.5) динамика $\hat{x}^i(t)$ определяется невозмущённым гамильтонианом \hat{H}_0 . Поэтому, в частности, время t в (8.5) может быть выбрано произвольно, поскольку $[\hat{\rho}_0, \hat{H}_0] = 0$. Это соотношение называется *формулой Кубо* (см. Ландау и Лифшиц (1995, §126, Ур.(126.9)), Левитов и Шитов (2003, §7.2, Ур.(7.25))).

8-1.3 Симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости

Для взаимных восприимчивостей выполняется равенство симметрии

$$\alpha^{ik}(\tau; \mathbf{B}) = \alpha^{ki}(\tau; -\mathbf{B}), \quad (8.6)$$

если обе величины x^i и x^k имеют одинаковую симметрию по отношению к операции обращения времени и

$$\alpha^{ik}(\tau; \mathbf{B}) = -\alpha^{ki}(\tau; -\mathbf{B}), \quad (8.7)$$

если величины x^i и x^k имеют противоположную симметрию относительно операции обращения времени. Это равенство связано с инвариантностью динамики системы по отношению к операции обращения времени, поэтому требуется изменение знака перед магнитным полем \mathbf{B} . В (8.6) мы предполагаем, что обе величины x^i и

x^k обладают одной и той же симметрией по отношению к операции обращения времени. Если же они обладают противоположной симметрией по отношению к этой операции, в (8.6) надо поставить знак минус, см. Ландау и Лифшиц (1995, §125, Ур.(125.14)).

Докажем формулу (8.6). Сперва напомним, как симметрия физической величины x по отношению к операции времени отображается на матричных элементах оператора этой величины \hat{x} . Будем работать в базисе собственных функций $|\psi_n\rangle$ гамильтониана \hat{H}_0 .

Пусть сперва гамильтониан не содержит магнитного поля. Если величина x имеет определённую симметрию по времени, то

$$\begin{aligned} \langle \psi_m | \hat{x}(-t) | \psi_n \rangle &= e^{i(\omega_n - \omega_m)t} x_{mn} = \\ &= \pm \langle \psi_n | \hat{x}(t) | \psi_m \rangle = \pm e^{i(\omega_n - \omega_m)t} x_{nm}, \end{aligned} \quad (8.8a)$$

то есть

$$x_{mn} = \pm x_{nm}. \quad (8.8b)$$

Здесь x_{mn} — матричный элемент оператора величины x в момент времени $t = 0$; выбор знака ‘+’ соответствует симметрии величины по отношению к изменению знака времени, а выбор знака ‘-’ — антисимметрии. Если теперь гамильтониан содержит магнитное поле, то при переходе от первой ко второй строчке в (8.8a) надо в гамильтониане сделать замену знака векторного потенциала, $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$. Это изменит и собственные волновые функции во второй строчке. В результате мы приходим к равенству

$$x_{mn} = x_{nm}^* = \pm x_{nm} \Big|_{\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}}, \quad (8.8c)$$

где * означает операцию комплексного сопряжения. Первое равенство в (8.8c) выражает собой то, что оператор \hat{x} соответствует физической величине и потому

эрмитов. Напомним также, что при замене $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ величина собственной энергии ω_n не изменяется.

Теперь вернёмся к формуле Кубо (8.5), которую можно переписать в виде

$$\alpha^{ki}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \text{tr} (\hat{\rho}_0 [\hat{x}^k(t), \hat{x}^i(t - \tau)]). \quad (8.8d)$$

Теперь будем проводить вычисления в базисе стационарных функций Гамильтониана, а также положим $t = 0$, и будем писать для краткости $\hat{x}(t) = \hat{x}$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \alpha^{ki}(\tau) &= \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} \rho_{0n} \left(\langle \psi_n | \hat{x}^k | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^i(-\tau) | \psi_n \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \psi_n | \hat{x}^i(-\tau) | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^k | \psi_n \rangle \right) = \\ &= \pm \frac{i}{\hbar} \sum_{m,n} \rho_{0n} \left(\langle \psi_n | \hat{x}^i(\tau) | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^k | \psi_n \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \psi_n | \hat{x}^k | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{x}^i(\tau) | \psi_n \rangle \right) \Big|_{\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (8.8e)$$

Второе равенство использует (8.8a). Знак ‘+’ соответствует одинаковой симметрии величин x^i, x^k по отношению к операции обращения времени, знак ‘-’ — противоположной. Сравниваясь с формулой Кубо (8.5), заключаем, что

$$\alpha^{ki}(\tau) = \pm \frac{i}{\hbar} \text{tr} \{ \hat{\rho}_0 [\hat{x}^i(\tau), \hat{x}^k] \} \Big|_{\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}}. \quad (8.8f)$$

В результате приходим к соотношениям (8.6,8.7).

§8-2. Аналитические свойства обобщённой восприимчивости

Из принципа причинности следует, что в Фурье-представлении у комплексной функции $\alpha(\omega)$ в верхней полуплоскости, когда $\text{Im} \omega > 0$, нет полюсов. В свою очередь, из этого факта следует равенство

$$\int d\omega' \frac{\alpha(\omega')}{\omega' - (\omega + i0)} = 2\pi i \alpha(\omega), \quad (8.9a)$$

где интегрирование производится по действительной оси. Если в выписанном интегральном равенстве выделить действительную и мнимую части, то получим соотношения Крамерса-Кронига (Kramers-Kronig relations):

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\alpha''(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (8.9b)$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\alpha'(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{2\mu}{\omega}, \quad (8.9c)$$

где интегрирование вблизи полюса происходит в смысле главного значения. В (8.9c) в действительной части восприимчивости мы выделили δ -функциональный вклад (8.1j), производимый ненулевой подвижностью — предполагается, что в $\alpha'(\omega)$ этого вклада нет. Дело в том, что экспериментально его измерить возможно только через измерение подвижности, то есть мнимой части восприимчивости.

Воспользуемся чётностью действительной и нечётностью мнимой частей восприимчивости, см. (8.1g), чтобы ограничить интегрирование в соотношениях Крамерса-

Кронига на положительные частоты:

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \alpha''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad (8.9d)$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\alpha'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} + \frac{2\mu}{\omega}. \quad (8.9e)$$

8-2.1 Комплексность восприимчивости α в верхней полуплоскости

Для обобщённой восприимчивости верно следующее утверждение: в верхней полуплоскости комплексной переменной ω восприимчивость принимает вещественные значения только на мнимой оси, см. (8.1h). На мнимой оси $\alpha(i\omega'')$ монотонно убывает как функция $\omega'' > 0$ до нуля при $\omega \rightarrow \infty$.

В частности, $\alpha(\omega)$ не обращается в ноль и не принимает отрицательных действительных значений в верхней полуплоскости.

Доказательство. Доказательство смотри в Ландау и Лифшиц, 1995, § 123.

§8-3. Флуктуации случайной величины: автокорреляционная функция

Пусть x – измеряемая величина некоторой физической системы, \hat{x} – квантовомеханический оператор, соответствующий этой величине. Эта система имеет большое число степеней свободы и/или взаимодействует с резервуаром, поэтому поведение во времени величины $x(t)$ носит случайный характер: есть вреднее по времени значение $\langle x \rangle_t$, которое для упрощения записи дальнейших формул мы считаем нулевым, $\langle x \rangle_t = 0$, и на фоне этого среднего величина $x(t)$ претерпевает случайные флуктуации.

Хотя флуктуации $x(t)$ носят случайный характер, их статистика однородна по времени, если состояние исследуемой системы во времени статистически не меняется; в таком случае $x(t)$ называется *стационарной случайной функцией*. В дальнейшем наших рассуждениях мы будем предполагать такую статистическую однородность по времени. В таком случае характер флуктуаций $x(t)$ можно описать с помощью корреляционных функций. Простейшей корреляционной функцией является парная корреляционная функция

$$F(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle, \quad (8.10)$$

8-2.2 Среды с низким поглощением

Пусть в некотором диапазоне частот среда обладает близким к нулю поглощением, то есть в этом частотном диапазоне можно принять $\alpha'' = 0$, то есть $\alpha = \alpha'$. Тогда в соотношении Крамерса-Кронига (8.9d) интеграл следует понимать в простом смысле, поскольку смысл главного значения становится избыточным. Поэтому этот интеграл можно дифференцировать по частоте ω как по параметру, в результате чего получаем

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \alpha''(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} > 0. \quad (8.9f)$$

Поскольку восприимчивость чётна, см. (8.1g), то достаточно ограничиться положительными частотами $\omega > 0$. Согласно (8.3b), справа в (8.9f) стоит положительное выражение. Таким образом, восприимчивость в области низких потерь является возрастающей функцией частоты. Если же теперь домножим обе части (8.9d) на ω^2 и снова продифференцируем, то получим

$$\frac{d(\omega^2 \alpha)}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega'^3 \alpha''(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} > 0. \quad (8.9g)$$

Неравенство (8.9g) сильнее неравенства (8.9f), если восприимчивость отрицательна, $\alpha(\omega) < 0$. В противном случае (8.9g) следует из (8.9f).

называемая также *автокорреляционной функцией*. В (8.10) угловые скобки обозначают усреднение. Это усреднение можно понимать как усреднение по времени t , так и усреднение по статистическому ансамблю рассматриваемых систем. В последнем случае левая часть не зависит от общего времени t именно в силу статистической однородности по времени.

Удобно иметь дело с Фурье-компонентами величин. Экспериментально измеренный случайный процесс представим в виде

$$x(t) = \int (d\omega) x_\omega e^{-i\omega t}, \quad (8.11)$$

также как и корреляционная функция,

$$F(\tau) = \int (d\omega) F_\omega e^{-i\omega\tau}, \quad F_\omega = \int d\tau F(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (8.12)$$

Предположим сейчас, что рассматриваемая величина x классическая, т.е. $x(t)x(t') = x(t')x(t)$. Из этого предположения, а также из статистической однородности по времени следует чётность автокорреляционной

функции, $F(-\tau) = F(\tau)$. Действительно,

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \langle x(0) x(\tau) \rangle = \langle \delta x(t) x(\tau + t) \rangle = \\ &= \langle x(0) x(-\tau) \rangle = F(-\tau). \end{aligned} \quad (8.13)$$

В процессе выкладок мы выбрали $t = -\tau$.

8-3.1 Теорема Винера-Хинчина

Связь между x_ω и F_ω можно получить, исходя из определения $F(\tau)$:

$$F_\omega = \int (d\omega')(d\omega') \langle x_\omega x_{\omega'} \rangle \exp[-it(\omega + \omega')], \quad (8.14)$$

где $\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle$ – среднее значение, которое в данном случае проще всего понимать в смысле усреднения по статистическому ансамблю. Для того, чтобы корреляционная функция зависела только от разности времен τ , надо, чтобы зависимость от абсолютного значения времени t отсутствовала. Это достигается, если среднее от Фурье-компонент случайного процесса не равно нулю только при совпадении абсолютного значения частот:

$$\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') (x^2)_\omega, \quad (x^2)_\omega = F_\omega. \quad (8.15)$$

Второе соотношение в (8.15), утверждающее, что спектр сигнала $(x^2)_\omega$ равен фурье-образу автокорреляционной функции F_ω , называется теоремой Винера-Хинчина (также известная как теорема Хинчина-Колмогорова), см. Рытов (1976, §41) и оригинальные работы Хинчин (1938).

8-3.1.1 Получение корреляционных функций путём усреднения по времени

Предположим, что случайный процесс $x(t)$ измерялся в течении некоторого (относительно продолжительного) промежутка времени T . Выпишем здесь математические соотношения, позволяющие оперировать с Фурье-компонентами случайного процесса $x(t)$ и автокорреляционной функции $F(\tau)$. Мы будем считать, что измерение проводилось во временном интервале $[-T/2, T/2]$, а процесс $x(t)$ является периодичным с периодом T . Поскольку в окончательных ответах будет предполагаться предельный переход $T \rightarrow \infty$, то принятая периодичность не должна влиять на эти окончательные ответы.

Фурье-разложение процесса $x(t)$ имеет вид

$$\chi_{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp[i\omega_n t] x(t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad (8.16)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[-i\omega_n t] \chi_{\omega_n},$$

где n – целое число, $n \in \mathbb{Z}$. Множитель $1/\sqrt{T}$ в правой части оставляет Фурье-компоненту x_{ω_n} конечной при

$T \rightarrow \infty$. В непрерывном пределе обратное преобразование Фурье выглядело бы как

$$x(t) = \sqrt{T} \int (d\omega) e^{-i\omega t} \chi_\omega, \quad \chi_\omega = \frac{1}{\sqrt{T}} x_\omega.$$

сравни с (8.11). Таким образом, Фурье-образы χ_ω и x_ω не равны друг другу, а связаны между собой коэффициентом пропорциональности, зависящим от времени наблюдения; отметим, что удобство использования χ_ω состоит в его конечности при увеличении времени наблюдения, при $T \rightarrow \infty$.

Корреляционная функция

$$F(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt. \quad (8.17)$$

Поскольку при $\tau \rightarrow \infty$ автокорреляционная функция стремится к нулю, то при её Фурье-преобразовании частоту ω можно по-прежнему считать непрерывной величиной, оставляя поэтому определение преобразования Фурье для $F(\tau)$ в виде (8.12). Тем не менее, для проведения вычислений, сейчас мы будем считать ω дискретной. Итак,

$$F_\omega = \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} \chi_{\omega_n} \chi_{\omega_k} \frac{\sin[(\omega - \omega_n)T/2]}{(\omega - \omega_n)T/2} \frac{\sin[(\omega_k + \omega_n)T/2]}{(\omega_k + \omega_n)T/2},$$

причём выражение типа $\sin(\omega'T)/(\omega'T)$ при $\omega' = 0$ надо считать равным 1. При $T \rightarrow \infty$ из суммы выпадают все слагаемые, кроме одного, которое определяется условием $\omega_n = \omega$, $\omega_k = -\omega$. Поэтому

$$F_\omega = |\chi_\omega|^2.$$

В этой формуле частоту ω можно уже считать непрерывным параметром: хотя величина $|\chi_{\omega_n}|^2$ как функция n флуктуирует (вообще говоря, сильно) около своего среднего значения, но если произвести усреднение этой величины по промежутку $\delta n \gg 1$, то при $T \rightarrow \infty$ таким образом полученное среднее $\langle |x_\omega|^2 \rangle$ следует считать медленно меняющейся (на масштабах $\gtrsim \delta n$ и много меньших характерного изменения частот, на которой меняется корреляционная функция F_ω) функцией ω . Таким образом, окончательно получаем, что

$$F_\omega = (x^2)_\omega = \langle |\chi_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{T} \langle |x_\omega|^2 \rangle. \quad (8.18)$$

Усреднение в этой формуле (реально происходящее по n) можно понимать и как усреднение по статистическому ансамблю: по сути, усреднив по δn , мы провели усреднение по δn почти независимых промежутков времени длительностью $T/\delta n$.

Если мы опустим в (8.17) усреднение по времени t (при этом назовём такую функцию $F(\tau, t)$), то получим, что

$$F_\omega(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{\omega_n} \chi_\omega \exp[-i(\omega_n + \omega)t].$$

Сравнивая это выражение с выражениями (8.14,8.15) ещё раз приходим к естественному выводу: усреднение по времени в этом выражении соответствует усреднению по статистическому ансамблю в выражении (8.15).

8-3.2 выражение для корреляционной функции в квантовом случае

Фурье-компонента от оператора случайной величины и его матричного элемента в представлении Гейзенберга в базисе собственных функций Гамильтониана $|n\rangle$ даётся выражениями:

$$\hat{x}_\omega = \int dt \hat{x}(t) \exp[i\omega t], \quad (8.19)$$

$$(x_\omega)_{nm} \equiv \langle n|\hat{x}_\omega|m\rangle = 2\pi\delta(\omega_{nm} - \omega) x_{nm}.$$

Матричный элемент квадрата обобщённой координаты

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{x}_\omega\hat{x}_{\omega'} + \hat{x}_{\omega'}\hat{x}_\omega)_{nn} &= \quad (8.20) \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left[(x_\omega)_{nm}(x_{\omega'})_{mn} + (x_{\omega'})_{nm}(x_\omega)_{mn} \right] = \\ &= 2\pi^2 \sum_m |x_{nm}|^2 \left[\delta(\omega_{nm} - \omega) + \delta(\omega_{nm} + \omega) \right] \delta(\omega + \omega') \end{aligned}$$

§8-4. Флуктуационно-диссипационная теорема

Согласно золотому правилу Ферми, обобщённая восприимчивость для величины x по отношению к силе, действующей на эту же величину, может быть получена из информации о матричных элементах оператора \hat{x} этой величины и о распределении по микроканоническим состояниям исследуемой системы. Эта же информация достаточна и для нахождения автокорреляционной функции величины x , а значит, и её флуктуаций. Более конкретно, и в обобщённую восприимчивость (8.25), и в автокорреляционную функцию (8.22) входит усреднение по распределению Гиббса от квадрата определённых матричных элементов оператора \hat{x} . Поэтому удаётся установить связь (8.26) между обобщённой восприимчивостью и тепловыми флуктуациями величины \hat{x} , что составляет содержание *флуктуационно-диссипационной теоремы*. Выведем эту теорему.

Рассмотрим некоторую систему, на которую действует гармоническая внешняя сила $f(t)$ (8.1с), описываемая гамильтонианом (8.1а). Согласно ‘золотому правилу Ферми’ скорость перехода dw_{nm} из состояния $|n\rangle$ в состояние $|m\rangle$ из малого фазового объёма $d\Gamma_m$ равна

$$dw_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |x_{nm}|^2 |f_\omega|^2 (\delta(\omega_{mn} - \omega) + \delta(\omega_{mn} + \omega)) d\Gamma_m, \quad (8.23)$$

где две δ -функции в скобках соответствуют тому, что в силе f формально присутствуют две гармоники – $\pm\omega$,

Здесь мы обобщили запись (8.15) на квантовый случай, симметризовав выражение $\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle$ и затем использовали выражение (8.19). Поэтому величина $(x^2)_\omega$ в случае, если система находится в состоянии $|n\rangle$, равна

$$(x^2)_\omega = \pi \sum_m |x_{nm}|^2 \left[\delta(\omega_{nm} - \omega) + \delta(\omega_{nm} + \omega) \right]. \quad (8.21)$$

Если статистика системы описывается распределением Гиббса $\rho_n = \exp[(F - E_n)/T]$, то выражение (8.21) надо усреднить по этому распределению, в результате чего получим

$$(x^2)_\omega = \pi \left[1 + \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right] \sum_{n,m} \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega) \quad (8.22)$$

разности частот $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$, и мы, как это всегда делается при применении ‘золотого правила Ферми’, предположили, что квадрат матричного элемента $|x_{nm}|^2$ слабо отличается для разных состояний $|m\rangle$ в элементе фазового объёма $d\Gamma_m$. Скорость выделения тепла в системе

$$\begin{aligned} Q &= \int d\Gamma_n d\Gamma_m \rho_n w_{nm} \hbar\omega_{nm} = \quad (8.24) \\ &= \frac{2\pi\omega}{\hbar} |f_\omega|^2 \times \\ &\quad \times \int d\Gamma_n d\Gamma_m \rho_n |x_{nm}|^2 (\delta(\omega_{mn} - \omega) - \delta(\omega_{mn} + \omega)) = \\ &= \frac{2\pi\omega}{\hbar} |f_\omega|^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right] \times \\ &\quad \times \int d\Gamma_n d\Gamma_m \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega), \end{aligned}$$

где $\rho_n = \exp[(F - E_n)/t]$ – распределение Гиббса.

Сравнивая общее выражение (8.3а) для скорости диссипации энергии при действии монохроматического внешнего возбуждения с полученным выражением (8.24), заключаем, что Фурье-компонента мнимой части

восприимчивости

$$\alpha''_{\omega} = \frac{\pi}{\hbar} \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right) \right] \sum_{n,m} \rho_n |x_{nm}|^2 \delta(\omega_{mn} - \omega) \quad (8.25)$$

В (8.25) мы перешли от интегрирования по фазовому пространству к сумме по состояниям для удобства сравнения правой части с Фурье-образом от автокорреляционной функции (8.22). В итоге получаем, что

$$(x^2)_{\omega} = \hbar \alpha''_{\omega} \operatorname{cth} \left[\frac{\hbar\omega}{2T} \right]. \quad (8.26)$$

Это равенство и называется *флуктуационно-диссипационной теоремой*.

8-4.1 Флуктуационно-диссипационная теорема в классическом пределе

Классический предел достигается, когда постоянную Планка следует считать малой, и потому соответствует высоким температурам, $T \gg \hbar\omega$. В этом пределе выра-

жение (8.26) принимает вид

$$(x^2)_{\omega} = \frac{2T\alpha''_{\omega}}{\omega}. \quad (8.27)$$

В частности, средний (одновременной) квадрат флуктуаций даётся выражением, см (8.18):

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) (x^2)_{\omega} = 2T \int_{-\infty}^{+\infty} (d\omega) \frac{\alpha''_{\omega}}{\omega} = T\alpha'_{\omega=0}, \quad (8.28)$$

где мы воспользовались соотношением Крамерса-Кронига (8.9b).

8-4.1.1 Связь подвижности и коэффициента диффузии

...

8-4.1.2 Флуктуационно-диссипационная теорема для нескольких величин

...

Часть II ЗАДАЧИ

Глава 9 ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§9-1. Линейный отклик среды

• **Задача 1:** Вычислить диэлектрическую проницаемость в частотном представлении $\varepsilon(\omega)$, если известно, что коэффициент поляризуемости (диэлектрическая восприимчивость) во временном представлении имеет зависимость $\varkappa(t) = A \exp(-t/\tau)$.

• **Задача 2:** Найти диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ для среды, состоящей из лорентцевых осцилляторов.

• **Задача 3:** Пусть в начальный момент времени огибающая плоского волнового пакета в сопровождающей системе координат имела гауссову зависимость: $\Psi(z, t = 0) = A \exp(-z^2/2\zeta^2)$, где ζ/v_g – длительность импульса, v_g – групповая скорость, A – начальная амплитуда импульса. Найти дальнейшую эволюцию огибающей, если известна вторая дисперсия β_2 .

• **Задача 4:** Получить закон дисперсии для волн, распространяющихся в плазме, отклик которой даётся моделью Друде.

• **Задача 5:** Получите уравнение на огибающую в лабораторной запаздывающей системе координат, в которой одной из координат является $t_{\text{ret}} = t - z/v_g$, а другой – z .

• **Задача 6:** Пусть изотропная среда характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной восприимчивостью $\mu(\omega)$. Найдите обобщённую диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{\text{full}}(\omega)$ (2.11).

• **Задача 7:** Показать, что в прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$u\bar{W} = \bar{S}, \quad (9.1)$$

где u – групповая скорость, \bar{W} – средняя по времени плотность запасённой электромагнитной энергии, \bar{S} – среднее по времени абсолютное значение вектора Умова-Поинтинга.

• **Задача 8:** Показать, что в почти прозрачной диспергирующей среде для плоской монохроматической волны выполняется соотношение

$$\frac{\bar{S}}{\bar{Q}} = \frac{\lambda_0}{4\pi k}, \quad (9.2)$$

где $k = \text{Im} \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель поглощения среды, λ_0 – длина волны в вакууме, а \bar{Q} – средняя по времени объёмная плотность потерь волны, уходящих в тепло.

• **Задача 9:** Покажите, для системы свободных зарядов при наличии трения диэлектрическая проницаемость, как функция частоты, может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}, \quad (9.3)$$

где ω_p – плазменная частота (и для модели плазмы n_e – концентрация зарядов, m_e – масса зарядов), а γ – декремент затухания.

Найдите диэлектрическую восприимчивость $\chi(\tau)$ (2.6d), соответствующую проницаемости (9.3). Объясните качественно поведение функции $\chi(\tau)$ при малых и больших временах.

• **Задача 10:** Рассмотрите распространение плоской электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью (9.3), предполагая потери малыми, так что $\gamma \ll \omega_p$. Найдите дисперсию такой волны, фазовую и групповую скорости, а также длину распространения.

§9-2. Магнитооптика в плазме

• **Задача 1:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением, обусловленным наложенным постоянным магнитным полем (в отсутствие магнитного поля среда изотропна). *Литература:* §2-7.

• **Задача 2:** Найти явный вид диэлектрической проницаемости для идеальной классической плазмы, находящейся в однородном магнитном поле, рассмотрев распространение линейных волн вдоль магнитного поля (обе поляризации) и поперёк него (с линейной поляризацией направленной вдоль магнитного поля).

• **Задача 3:** Показать, что при распространении линейно поляризованной волны в изотропной среде вдоль наложенного на неё магнитного поля плоскость её поляризации испытывает равномерное вращение по мере распространения (эффект Фарадея).

Рассмотрим плазму, на которую наложено постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 . Такая физическая система является частной реализацией изотропной среды, на которую наложено постоянное магнитное поле. Линейный отклик такой среды на электромагнитное поле рассматривался в §2-7.

Этот вопрос разобран в Векштейн (1966, задачи 3.27-3.29).

Полное электромагнитное поле складывается из электромагнитного поля (электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{H}) волны и магнитного поля \mathbf{H}_0 . Интенсивность волны мала, так что её магнитное поле много меньше постоянного магнитного поля, $H \ll H_{\text{cst}}$. Уравнение движение электрона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{H}_0]. \quad (9.4)$$

К этому уравнению надо добавить уравнения на электромагнитное поле:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = ne\dot{\mathbf{r}}, \quad (9.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \mathbf{H}.$$

Рассмотрим частную ситуацию, когда волновой вектор распространяющейся направлен по магнитному полю, так что все поля имеют зависимость $\exp\{-i\omega t + ikz\}$. В этом случае волна является чисто поперечной. В результате уравнения Максвелла и уравнение движения плазмы запишутся в следующем виде

$$-ick\hat{\epsilon}\mathbf{H}_\perp = -i\omega\mathbf{E}_\perp + 4\pi\mathbf{j}_\perp, \quad \mathbf{j}_\perp = -i\omega n e \mathbf{r}_\perp$$

$$-ick\hat{\epsilon}\mathbf{E}_\perp = i\omega\mathbf{H}_\perp$$

$$-m\omega^2\mathbf{r}_\perp = e\mathbf{E}_\perp - \frac{i\omega H_{\text{cst}}}{c}\hat{\epsilon}\mathbf{r}_\perp, \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Из уравнения на движение частиц плазмы можно выра-

зить вектор смещения частиц через электрическое поле,

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{m}{e}\omega(\omega - i\omega_H\hat{\epsilon})\mathbf{r}_\perp, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc},$$

$$\mathbf{r}_\perp = -\frac{e}{mc(\omega^2 - \omega_H^2)}(\omega + i\omega_H\hat{\epsilon})\mathbf{E}_\perp$$

После этого подставим этот результат в первое уравнение, выразив также магнитное поле через электрическое. В результате получим:

$$\left[c^2k^2 - \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega(\omega + i\omega_H\hat{\epsilon})}{\omega^2 - \omega_H^2} \right) \right] \mathbf{E}_\perp = 0$$

Решением этого уравнения являются две круговые поляризации, $\mathbf{E}_\perp \propto (1, \pm i)$, которым соответствуют волновые вектора

$$k_\pm = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_H)}}$$

Сравнивая общее выражение для тензора диэлектрической проницаемости для исходно изотропной среды в магнитном поле (2.42) и полученный результат, заключаем, что коэффициенты ε_s и ε_a суть

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \varepsilon_a = -\frac{\omega_p^2 \omega_H / H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}. \quad (9.6)$$

Последнюю компоненту тензора диэлектрической проницаемости легко получить заметив, что магнитное поле не влияет на движение электронов вдоль него самого. Таким образом,

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (9.7)$$

• **Задача 4:** Определите величину эффекта Фарадея для плазмы в слабом магнитном поле, вычислив разность волновых векторов для двух круговых поляризаций (2.45). Пусть магнитное поле направлено вдоль оси Oz и в этом же направлении распространяется электромагнитная линейно поляризованная волна. В каком направлении (по или против часовой стрелки) будет вращаться поляризация этой волны по мере её распространения, если смотреть со стороны больших значений координаты z ?

Если частота волны и ларморовская частота много меньше плазменной частоты, то

$$k_\pm = \frac{i\omega_p}{c} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega \pm \omega_H}}$$

Это означает, что ...

• **Задача 5:** Показать, что при распространении радиоволн в ионосфере следует ожидать резонансных явлений близи длины волны $\lambda \approx 210$ м. Принять напряжённость магнитного поля земли $H = 0.5$ э.

§9-3. Прохождение электромагнитных волн через вращающуюся среду

• **Задача 1:** Рассмотрим прозрачную изотропную среду, которая характеризуется диэлектрической проницаемостью ε и магнитной восприимчивостью μ . Среда вращается с угловой скоростью Ω , так что скорость движения среды в каждой точке пространства равна $\mathbf{v} = [\Omega \times \mathbf{r}]$. Найти дисперсию волн, которые распространяются вдоль оси вращения.

Сначала разберёмся, как устроен отклик движущейся среды. Отклик элемента среды на электромагнитное поле нам известен в системе координат K' , в которой этот элемент покоится. Пусть электромагнитное поле в системе K' есть \mathbf{E}' , \mathbf{B}' . Согласно (2.9), ток в сопровождающей системе отсчёта

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{4\pi} \left(c \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot } \mathbf{B}' + (\varepsilon - 1) \partial_t \mathbf{E}' \right). \quad (9.8)$$

Связь между полями в лабораторной и сопровождающей системами координат есть

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \quad (9.9)$$

в первом порядке по отношению v/c скорости движения элемента среды к скорости света. Теперь нам надо пересчитать ток (9.8) в лабораторной системе координат. Напомним, что 4-вектор электрического тока есть $(c\rho, \mathbf{j})$. Вообще говоря, в неоднородно движущейся среде может возникать объёмная плотность заряда ρ , а преобразование Лоренца примешивает эту плотность к току. Однако в нашем случае она будет иметь относительную малость v/c , которая будет домножена ещё на v/c при преобразовании Лоренца для тока. Поэтому этой поправкой следует пренебречь и токи в сопровождающей и лабораторной системах координат с нашей точностью оказываются совпадающими, $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$. Таким образом, уравнения Максвелла в лабораторной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} + \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot} \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right] &= \\ &= \frac{1}{c} \partial_t \left(\varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon - 1) \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right] \right), \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Введём декартову систему координат, ось Oz которой сонаправлена с осью вращения. В соответствии с условием задачи, мы предполагаем, что все поля зависят от координат и времени как $\exp(ikz - i\omega t)$. Электромагнитное поле будет лежать в плоскости Oxy . Действительно, если считать, что поле \mathbf{E} имеет нулевой z -компоненту, то

$$\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = [\Omega \times \mathbf{E}].$$

Это равенство для x - и y -компонент нам будет удобным переписать в виде

$$\frac{i \cdot \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{\omega} = \hat{\sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^x \\ \mathbf{E}^y \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\Omega}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Второе слагаемое в левой части первого уравнения (9.10) должно являться малой поправкой к первому слагаемому, чтобы мы могли действовать по теории возмущений. Значит, мы должны предполагать, что частота вращения мала по сравнению с частотой волны, $\Omega/\omega \ll 1$.

Вернёмся к уравнениям Максвелла (9.10). Как мы видим, эти уравнения, строго говоря, являются неоднородными в плоскости Oxy , поскольку скорость \mathbf{v} меняется в этой плоскости. Однако их возможно переписать в однородном виде относительно полей, которые сами являются однородными в плоскости Oxy . Примем, что индукцией электрического поля \mathbf{D} является (вообще говоря, это наш произвол, как и всегда при разделении тока на ток смещения и ток намагнитченности)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon - 1) \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right]. \quad (9.12)$$

Выразим отсюда электрическое поле \mathbf{E} и подставим обратно в (9.10), учтя (9.11). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{ic}{\omega} \text{rot } \frac{\mathbf{B}}{\mu} &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{1}{\varepsilon} \hat{\sigma} \right) \mathbf{D}, \\ -\frac{ic}{\omega} \text{rot } \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \hat{\sigma} \right) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Как видим, уравнения (9.13) действительно допускают, чтобы поля \mathbf{D} и \mathbf{B} были однородными в плоскости Oxy , т.е., в частности, чтобы электромагнитное поле представляло собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси Oz . Поля \mathbf{D} и \mathbf{B} при этом лежат в плоскости Oxy . Но тогда согласно (9.12) поле \mathbf{E} имеет ненулевой z -компоненту. Эта компонента, однако, имеет относительную малость по v/c , и поэтому не должна учитываться в левой части (9.11). С учётом этого замечания, наша схема рассмотрения остаётся верной.

Теперь обозначим за новые поля $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ стоящие в правых частях уравнений (9.13) вектора. Тогда в левых частях этих уравнений под знаком rot будут стоять комбинации

$$\tilde{\mathbf{H}} = \hat{\mu}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \hat{\varepsilon}^{-1} \tilde{\mathbf{D}}$$

соответственно, где

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \hat{\sigma} \right), \quad \hat{\mu} = \mu \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{1}{\varepsilon} \hat{\sigma} \right). \quad (9.14)$$

В результате мы привели уравнения Максвелла к их стандартному виду в среде (2.7). Поэтому уравнение дисперсии определяется условием

$$\begin{aligned} 0 &= \det(c^2 k^2 / \omega^2 - \hat{\varepsilon} \hat{\mu}) = \\ &= \det\left(\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \varepsilon \mu + (\varepsilon \mu - 1) \hat{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Мы не учли под детерминантом малый вклад, пропорциональный $\hat{\sigma}^2 = (\Omega/\omega)^2$, поскольку он незначительно изменяет слагаемое $-\varepsilon\mu$. Вообще же, исходя из окончательного ответа (9.16), нас интересовали бы только линейные по Ω/ω поправки такого рода. Таким образом, дисперсионное соотношение задаётся уравнением

$$\left(\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \varepsilon \mu\right)^2 - (\varepsilon \mu - 1)^2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} = 0 \quad (9.15)$$

В итоге, если обозначить показатель преломления среды $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, то законы дисперсии для двух поляризаций

суть

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} n \left(1 \mp \frac{n^2 - 1}{2n^2} \frac{\Omega}{\omega}\right). \quad (9.16)$$

Надо ещё найти поляризации ...

• **Задача 2:** Установите поляризации для найденных законов дисперсии (9.16) в задаче о распространении света вдоль оси вращения диэлектрика, см. § 9-3.

Таким образом, распространение плоской волны вдоль оси вращения аналогично эффекту Фарадея для волны, распространяющейся вдоль магнитного поля.

В целом же распространение света во вращающейся среде не сводится к эффекту Фарадея. Согласно Götte, Barnett и Padgett, 2007, при распространении не плоской волны вдоль оси Oz наблюдается вращение распределения интенсивности как целого.

§9-4. Анизотропные негиротропные среды

• **Задача 1:** Установить симметрию диэлектрической проницаемости в случае, если среда прозрачна и её внутренняя симметрия характеризуется выделенным направлением. Также обсудить ситуацию, когда исходно изотропное тело помещено в однородное электрическое поле (эффект Керра).

• **Задача 2:** Главная ось одноосного кристалла направлена вдоль оси Oz декартовой системы координат. Диэлектрические проницаемости кристалла равны $\varepsilon_{\perp} = 2$, $\varepsilon_{\parallel} = 2.2$. Боковая поверхность этого кристалла совпадает с плоскостью Oxz , кристалл находится

в области $y < 0$. Луч линейно поляризованного монохроматического света падает на поверхность в плоскости Oyx под углом $\pi/4$ (направление распространения $\mathbf{k}_{\text{in}} \propto (1, -1, 0)$). Направление поляризации в падающей волне таково, что комплексная амплитуда вектора электрического поля в ней $\mathbf{E}_{\text{in}} \propto (1, 1, \sqrt{2})$. Найдите в каком направлении будут распространяться прошедшие обыкновенная и необыкновенная волны. Нарисуйте чертёж, который бы демонстрировал найденные углы распространения. *Указание:* в качестве граничных условий на поверхности надо требовать сохранения частоты и касательной к поверхности компоненты волнового вектора.

ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

§10-1. Дополнительные задачи

• **Задача 1:** Рассмотрим гранулу сферической формы радиуса a , находящуюся в вакууме и имеющую температуру T . Радиус гранулы мал по сравнению с глубиной скин-слоя δ на частоте $\omega_T = T/\hbar$, соответствующей температуре, $a \ll \delta$, при этом задана дисперсия диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ материала частицы, а его магнитная восприимчивость равна единице (предполагается, что радиус гранулы всё же достаточно велик для того, чтобы возможно было пользоваться приближением локальной связи между электрическим полем и плотностью тока). Найти в общем виде интенсивность теплового излучения гранулы, выразив её через $\varepsilon(\omega)$. Провести окончательное вычисление для модели Друде, приняв $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b - \omega_p^2/(\omega(\omega + i\omega_\tau))$, считая, что температура мала, так что $\omega_T \ll \omega_p$.

Указание: Найдите гамильтониан взаимодействия между полем электромагнитной волны и дипольным моментом гранулы, имеющий общий вид (8.1a). В соответствии с условием задачи, следует считать длину волны большой по сравнению с размером гранулы.

• **Задача 2:** Вычислить сечения поглощения σ_a и рассеяния σ_s монохроматической электромагнитной волны на металлическом шаре, размер которого a мал

по сравнению с глубиной скин-слоя, $a \ll \delta$, полагая, что частота падающей волны ω близка к резонансной частоте дипольной поверхностной плазмонной моды шарика. *Литература:* §5-4 .

• **Задача 3:** Для предыдущей задачи рассмотреть рассеяние белого света на таком шаре: полагать, что спектр падающей волны плоский в диапазоне $[\omega_r - \Delta/2, \omega_r + \Delta/2]$, где ширина спектра Δ велика по сравнению с шириной резонанса. Показать, что сечение взаимодействия не зависит от ширины резонанса (т.е. его добротности).

• **Задача 4:** Рассмотреть двумерный вариант Задачи, когда происходит рассеяние плоской монохроматической волны на бесконечном цилиндре с круговым сечением. Рассмотреть случай TE -волны, когда электрическое поле падающей волны ортогонально оси.

• **Задача 5:** Вычислить сечение поглощения σ_a монохроматической электромагнитной волны проводящим шаром с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. Радиус шара мал по сравнению с длиной волны λ , но велик по сравнению с глубиной скин-слоя.

ВОЛНОВОДЫ

§11-1. Нелинейное уравнение Шредингера в оптоволокне

В этом Пункте мы не рассматриваем эффекты двулучепреломления, связанные с существованием двух поляризаций связанной моды в оптоволокне. Поэтому электрическое поле $E(t, z)$ мы представляем скалярной величиной, где z – координата вдоль оптоволокна, а t – время.

Волновое уравнение, учитывающее дисперсию среды и её нелинейность, имеет вид

$$\partial_z^2 E = \partial_t^2 \int_0^\infty dt' \varepsilon(t') E(t-t') + 4\pi \partial_t^2 P^{(3)} \quad (11.1)$$

Здесь $\varepsilon(t)$ – эффективная диэлектрическая проницаемость среды, учитывающая как собственную дисперсию материала оптоволокна, так и дисперсию связанной моды, вытекающая из геометрии задачи. Часть поляризации среды $P^{(3)}$, пропорциональная кубической степени наложенного на эту среду электрического поля E имеет вид

$$4\pi \partial_t^2 P^{(3)} = \int_0^\infty dt_1 dt_2 dt_3 \varepsilon^{(3)}(t_1, t_2, t_3) \times \\ \times E(t-t_1)E(t-t_2)E(t-t_3)$$

Мы предполагаем, что в выражении для кубической по электрическому полю части поляризации $P^{(3)}$ можно пренебречь эффектами запаздывания, т.е. зависимостью от частоты поля, положив таким образом просто

$$4\pi P^{(3)} = \varepsilon^{(3)} E^3$$

Отсутствие запаздывания объясняется тем, что кубическая нелинейность определяется деформацией электронных оболочек атомов, что происходит со значительно большей скоростью по сравнению с несущей частотой сигнала.

Отметим, что квадратичный член по электрическому полю по полю отсутствует в уравнении (11.1), поскольку он нарушал бы чётность уравнения по E . Физических же причин для такого нарушения, как мы полагаем, в рассматриваемой системе нет.

Согласно общим рассуждениям (??,2.25), уравнение на огибающую в лабораторной запаздывающей системе координат приобретает вид:

$$\left[-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \right] \Phi = \gamma |\Phi|^2 \Phi, \quad \Phi = \Phi(t, x) \quad (11.2)$$

где $\gamma = (3/2)\omega_0^3 \varepsilon^{(3)}/k_0$, причём $\gamma > 0$. Это уравнение называется нелинейным уравнением Шредингера. При получении (11.12) мы пренебрегли высшими поправками по ширине импульса в соответствии с оценкой (??).

11-1.1 Линейное уравнение со второй дисперсией

Если пренебречь нелинейностью, то уравнение (11.12) сведётся к

$$i\partial_z \Phi = \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \Phi \quad (11.3)$$

Дисперсия называется нормальной (normal dispersion), если $\beta_2 > 0$, и аномальной, если $\beta_2 < 0$.

Наличие ненулевой дисперсии приводит к расплыванию волнового пакета. Покажем это на частном примере. Пусть огибающая имеет гауссов вид,

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}} \exp \left[-\frac{t^2}{2\sigma(z)} \right] \quad (11.4)$$

Используя (11.3) получаем уравнение на величину σ ,

$$\frac{d\sigma}{dz} = i\beta_2. \quad (11.5)$$

Ширина волнового пакета равна $|\sigma|/\sqrt{\text{Re } \sigma}$, и согласно уравнению на больших временах начинает расти линейно со временем.

11-1.2 Уравнение НУШ

11-1.2.1 Канонический вид НУШ

Подходящей линейной заменой переменных полученное уравнение (11.12) может быть приведено к каноническому виду

$$i\partial_z \Phi = -\frac{1}{2} \partial_t^2 \Phi - |\Phi|^2 \Phi \quad (11.6)$$

при условии нормальности дисперсии, $\beta_2 > 0$. Если же дисперсия аномальна, $\beta_2 < 0$, то знак перед дисперсионным слагаемым в (11.6) следует заменить на обратный:

$$i\partial_z \Phi = \frac{1}{2} \partial_t^2 \Phi - |\Phi|^2 \Phi \quad (11.7)$$

11-1.2.2 Дисперсия плоских волн с учётом нелинейности

Рассмотрим простейшие эффекты, возникающие в присутствии второй дисперсии и керровской нелинейности. В этом случае уравнение на огибающую Φ записывается в виде

$$\left(i\partial_z - \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\right)\Phi = -\gamma|\Phi|^2\Phi \quad (11.8)$$

Рассмотрим непрерывную волну (cw – continuous wave), в которой огибающая

$$\Phi_{\text{cw}}(z, t) = \sqrt{P} \exp[ikz - i\omega t]. \quad (11.9)$$

где мощность P является константой. Подставляя непрерывную волну (11.9) в уравнение (11.8), получаем связь между параметрами волны

$$k = \frac{\beta_2}{2}\omega^2 + \gamma P. \quad (11.10)$$

11-1.2.3 Взаимное ослабление нелинейности и второй дисперсией.

Проанализируем качественно нелинейное уравнение Шредингера (11.12) на предмет влияния второй дисперсии и нелинейности на распыливание волнового пакета. Как было показано ранее, распыливание импульса происходит из-за того, что разные частотные компоненты импульса приобретают разную фазу при движении вдоль оптоволокна. Здесь мы показываем, что нелинейность может привести к подавлению набега разности фаз.

Предположим простую форму импульса во временном $\Phi(t)$ и в частотном $\Phi(\omega)$ пространстве – мы считаем, что это функцию, имеющие один максимум в нуле и просто убывающие при удалении от этого максимума. Тогда схематически (11.12) в Фурье-представлении можно переписать в виде

$$ik_0\partial_z\Phi \sim \left[\beta_2\omega^2/2 + (* + *\omega^2)\right]\Phi.$$

Звёздочками обозначены первые коэффициенты разложения оператора $\gamma|\Phi|^2$ по частоте в частотном представлении, которые являются положительными если $\gamma > 0$. Таким образом, при правильном подборе формы

и амплитуды импульса можно добиться того, чтобы общий коэффициент при ω^2 был равен нулю. Это и означает компенсацию второй дисперсии нелинейностью.

11-1.2.4 Односолитонные решения

Решением уравнения (11.6) является, в частности, односолитонное решение

$$\Phi = \frac{\eta \exp\{i(\eta^2 - v^2)z/2 + i\omega t + i\varphi_0\}}{\cosh(\eta(t - vz - t_0))}. \quad (11.11)$$

Параметр v можно назвать скоростью солитона, а параметр η определяет ширину и высоту солитона.

11-1.2.5 Модуляционная неустойчивость

• **Задача 1:** Рассмотрите нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$\left(-i\partial_z + \frac{\beta_2}{2}\partial_t^2\right)\Phi = \gamma|\Phi|^2\Phi, \quad \Phi = \Phi(t, x), \quad (11.12)$$

в котором коэффициент нелинейности положителен, $\gamma > 0$, а коэффициент второй дисперсии β_2 для может быть как положительным, так и отрицательным.

- Плоские волны $\exp(ikz - i\omega t)$ по-прежнему являются решением уравнения, как и в линейном пределе. Исследуйте, как зависит дисперсия плоских волн $k(\omega, P)$ в зависимости от волнового числа и интенсивности $P = |\Phi|^2$.
- Рассмотрите устойчивость плоских волн на плоскости двух параметров – второй дисперсии β_2 и интенсивности волны P . Для этого надо рассмотреть начальные условия $\Phi_{\omega, P}(1 + \epsilon)$, где $\Phi_{\omega, P}(z, t)$ – решение для плоской волны, а $\epsilon(z, t)$ – произвольная малая добавка; после этого надо установить линейризованное уравнение на добавку ϵ и рассмотреть её эволюцию по координате z . В каких областях волна оказывается устойчивой (т.е. при любом начальном $\epsilon_0(t)$ поправка $\epsilon(z, t)$ не растёт по амплитуде со временем), а в каких нет? Нарисуйте эти области на графике.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- absorption coefficient, 16
- Christoffel symbols, 58
- continuous wave (cw), 84
- convolution, 58
- extinction coefficient, 15
- group delay parameter, D , 17
- index of refraction, 15
- Запаздывающее время, 19
- Крамерса-Кронига соотношения, 53
- Кристоффеля символ, 58
- Критическая частота (частота отсечки), 41
- Кубо
 - формула, 52
- Лехера линия, 80
- Показатель
 - поглощения, k , 15
 - преломления комплексный, $n + ik$, 16
 - преломления, n , 15
- Френеля
 - уравнение, 20
- Частота отсечки (критическая частота), 41
- волновое сопротивление линии, 81
- волновой пакет, 18
- восприимчивость
 - дипольная, 33
 - обобщённая, 51
- двухпроводная линия, 80
- дисперсия
 - аномальная, 17
 - нормальная, 17
- импеданс
 - волновой, 16
- коэффициент
 - поглощения, 16
- оптическая теорема, 33
- поверхностное сопротивление, 30
- свёртка, 58
- сечение
 - взаимодействия, 32
 - поглощения, 32
 - рассеяния, 32
 - дифференциальное, 32
- система координат
 - лабораторная запаздывающая, 19
 - сопровождающая, 19
- среда прозрачная, 16, 26
- уравнение
 - волновое, 20
- функция
 - автокорреляционная, 54
 - стационарная случайная, 54
- эффект просветления, 34

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

- Векштейн, Е. Г. (1966). Сборник задачи по электродинамике. Высшая школа.
- Гуревич, А.Г. и Г.А. Мелков (1994). Магнитные колебания и волны. Физматлит. ISBN: 5-02-014366-9.
- Ландау, Л. Д. и Е. М. Лифшиц (1982). Теоретическая физика, том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука.
- Маркузе, Д. (1974). Оптические волноводы. М.: МИР.
- Памятных, Е. А. и Е. А. Туров (2000). Основы электродинамики материальных сред в переменных и неоднородных полях. Физматлит.
- Топтыгин, И. Н. (2005). Современная электродинамика, часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва-Ижевск: РХД.

Отдельные вопросы электродинамики

- Zvezdin, A. K. и V. A. Kotov (1997). Modern magneto-optics and magneto-optical materials. CRC Press.

Оглавление

Глава 1		
Программа курса		2
1-1	Уравнения Максвелла в среде; плоские волны	4
1-1.1	Домашнее задание	4
1-2	Термодинамика и кинетика переменного электромагнитного поля в среде с линейным откликом	5
1-2.1	Домашнее задание 2	5
1-3	Анизотропные среды. Магнитооптика	6
1-3.1	Семинар	6
1-3.2	Домашнее задание	6
1-4	Скин-эффект	7
1-4.1	Семинар	7
1-4.2	Домашнее задание	7
1-5	Волноводы с металлическими стенками	8
1-5.1	Домашнее задание	8
1-6	Диэлектрические волноводы	8
1-6.1	Домашнее задание	9
1-7	Поверхностные электромагнитные волны	9
1-7.1	Домашнее задание	9
1-8	Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах	10
1-8.1	Домашнее задание	10
1-9	Электростатика	10
1-9.1	Домашнее задание	10
1-10	Магнитостатика магнетиков. Доменная структура магнетиков	11
Глава 2		
Линейные волны в однородной среде		12
2-1	Уравнения Максвелла в среде	12
2-1.1	Разделение на составляющие плотности заряда ρ и плотности тока \mathbf{j}	12
2-1.2	Граничные условия	13
2-2	Линейный электромагнитный отклик однородной среды	13
2-2.1	Симметрии диэлектрической проницаемости	14
2-3	Плоская электромагнитная волна в изотропной среде	15
2-3.1	Дисперсионное соотношение	15
2-3.2	Распространяющаяся плоская монохроматическая волна	15
2-3.3	Аналитические свойства диэлектрической проницаемости	16
2-4	Распространение волнового пакета в среде с дисперсией	17
2-4.1	Выделение огибающей	18
2-4.2	Уравнение на огибающую	18
2-5	Электромагнитные волны в анизотропных средах	19
2-5.1	Уравнение Френеля	20
2-5.2	Распространение лучей	20
2-5.3	Поляризации волн в немагнитных средах	21
2-6	Одноосный кристалл	22
2-7	Магнитооптика	22
2-7.1	Феноменология	22
2-7.2	Эффект Фарадея	22

Глава 3		
Термодинамика тела во внешнем электромагнитном поле		24
3-1	Термодинамика тела во внешнем электрическом и магнитном полях	24
3-1.1	Гамильтониан тела во внешнем электромагнитном поле	24
3-1.2	Термодинамические потенциалы	25
3-2	Энергия поля в диспергирующих средах	26
3-2.1	Мощность, выделяемая в единице объёма	26
3-2.2	Скорость диссипации энергии	26
3-2.3	Энергия электромагнитных волн	27
Глава 4		
Электростатика		28
4-1	Простейшие электростатические задачи	28
4-1.1	Шар в электрическом поле	28
4-1.2	Заряд над границей раздела	28
4-1.3	Заряд рядом с металлическим шаром	28
4-2	Эллипсоид во внешнем электрическом поле	29
4-2.1	Удлиненное тело вращения во внешнем параллельном электрическом поле: приближённое описание	29
4-2.2	Эллипсоид вращения в однородном внешнем поле: точное решение	30
4-2.3	Эллиптический цилиндр во внешнем однородном поле	30
Глава 5		
Распространение электромагнитных волн		32
5-1	Отражение и преломление волн на плоской поверхности раздела	32
5-1.1	Закон Снелла; полное внутренне отражение	32
5-1.2	Граничные формулы Френеля	32
5-2	Падение волны на непрозрачную среду	33
5-2.1	Граничные условия в форме Леонтовича: общая форма	33
5-2.2	Граничные условия Леонтовича в случае скин-эффекта	34
5-2.3	Поверхностный импеданс металлов	35
5-3	Рассеяние электромагнитных волн на частицах	36
5-3.1	Оптическая теорема	36
5-4	Рассеяние света на малых частицах	37
5-4.1	Резонансное рассеяние света	37
Глава 6		
Волноводы		39
6-1	Волноводы	39
6-1.1	Уравнения Максвелла и волновые уравнения	39
6-1.2	Интегральные соотношения между полями	40
6-2	Волноводы с металлическими стенками	40
6-2.1	Волноводы с односвязным поперечным сечением	40
6-2.2	Волноводы с неодносвязным поперечным сечением	42
6-3	Работа двухпроводных линий (линий Лехера) в электрических цепях	42
6-3.1	Подключение нагрузки	44
6-3.2	Потери в линии из-за конечной проводимости металла	44
6-3.3	Трансформатор	45
6-4	Плоские диэлектрические волноводы	45
6-4.1	ТЕ-моды	46
6-4.2	ТМ-моды	47

6-5	Направленные моды в аксиально симметричном волноводе	48
6-5.1	Основные обозначения	48
6-5.2	Параметризация поля и волновое уравнение	49
6-5.3	Безразмерные параметры моды	50
6-5.4	Получение дисперсионного соотношения	51
6-6	Слабо ведущие волноводы	51
6-6.1	Волновое уравнение	52
6-6.2	Фундаментальная мода HE_{11} в круглом волноводе	52
6-6.3	Предел слабо-связанной моды	53
6-6.4	Физические параметры некоторых типов оптоволокон	54
6-7	Поверхностные плазмоны	54
6-7.1	Дисперсия плазмонов в модели Друде	55

Глава 7

Постоянное магнитное поле 57

7-1	Магнитное поле постоянных токов	57
7-2	Магнитостатика	57
7-2.1	Ферромагнетики и их магнитная энергия	58
7-2.2	Магнитные домены: доменные стенки	58

Часть I**ПРИЛОЖЕНИЯ**

Глава 8

Теория линейного отклика и элементы статистики 61

8-1	Обобщённая восприимчивость	61
8-1.1	Диссипация энергии в системе и энергия колебаний	61
8-1.2	Формула Кубо	62
8-1.3	Симметрии коэффициентов обобщённой восприимчивости	62
8-2	Аналитические свойства обобщённой восприимчивости	63
8-2.1	Комплексность восприимчивости α в верхней полуплоскости	64
8-2.2	Среды с низким поглощением	64
8-3	Флуктуации случайной величины: автокорреляционная функция	64
8-3.1	Теорема Винера-Хинчина	65
8-3.2	выражение для корреляционной функции в квантовом случае	66
8-4	Флуктуационно-диссипационная теорема	66
8-4.1	Флуктуационно-диссипационная теорема в классическом пределе	67

Часть II**ЗАДАЧИ**

Глава 9

Плоские волны 69

9-1	Линейный отклик среды	69
9-2	Магнитооптика в плазме	70
9-3	Прохождение электромагнитных волн через вращающуюся среду	71
9-4	Анизотропные негиротропные среды	72

Глава 10	
Задачи рассеяния	73
10-1 Дополнительные задачи	73
Глава 11	
Волноводы	74
11-1 Нелинейное уравнение Шредингера в оптоволокне.....	74
11-1.1 Линейное уравнение со второй дисперсией	74
11-1.2 Уравнение НУШ	74
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	76
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	77
Основная литература.....	77
Отдельные вопросы электродинамики	77