### ***Тема 4. Лабораторная работа Численное интегрирование***

#### 4.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного интегрирования.
2. Методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
3. Оценка погрешности численного интегрирования. Правило Рунге.
4. Графическая иллюстрация методов прямоугольников, трапеций и Симпсона.

#### 4.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл.4-1 для численного интегрирования:

* **f(x)** – подынтегральную функцию;
* **a, b**– пределы интегрирования;
* метод интегрирования для выполнения п.**2** – значение в столбце **t**;
* метод интегрирования для выполнения п.**3** – значение в столбце **m**;
* начальный шаг интегрирования **h0.**

Значения в столбцах t и m означают: 1 –интегрирование методом средних прямоугольников, 2 – методом трапеций, 3 – методом Симпсона.

1. **Вычислить «вручную» интеграл**  с шагом  и /2 по выбранному методу численного интегрирования (значение в столбце **t** табл.4-1, или по указанному преподавателем) без использования пакета MathCad (или используя пакет только как калькулятор) и **оценить погрешность** интегрирования по правилу Рунге.



1. **Вычислить «вручную» интеграл**  с шагом  и /2 по выбранному методу численного интегрирования (значение в столбце **m** из табл.4-1, или по указанному преподавателем) используя пакет MathCad для записи формул соответствующих методов (вычисления сумм ( ∑ ) значений функции и т.п.). **Оценить погрешность** по правилу Рунге.



1. **Вычислить интеграл**  с помощью встроенных функций математического пакета MathCad



#### 4.3. Варианты задания

Таблица 4-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **f(x)** | **a** | **b** | **t** | **m** |  |
| **1** | **8 e-x sin(-2x)** | 2 | 3 | 1 | 3 | 0.25 |
| **2** | **e-x sin(2x)** | 0 | 2 | 2 | 1 | 0.5 |
| **3** | **x3/2 – 2 x sin(x)** | 3 | 4 | 3 | 2 | 0.25 |
| **4** | **e-xcos(-2x)** | 2 | 4 | 1 | 3 | 0.5 |
| **5** | **cos(2x) + 2 sin(x)** | 1 | 3 | 2 | 1 | 0.5 |
| **6** | **8 sin(2x) – x** | 0.2 | 1.2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **7** | **5 cos(-2x) e-x** | -0.5 | 0.5 | 2 | 3 | 0.25 |
| **8** | **x sin(x + 1) – cos(x – 5)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **9** | **0,25 x3 + cos(x/4)** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0,5 |
| **10** | **sin(2x) – 2 sin(x)** | 3 | 5 | 1 | 3 | 0.5 |
| **11** | **sin(ex) – e-x +1** | 0 | 1 | 2 | 1 | 0.25 |
| **12** | **5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **13** | **5 e-x + 4 x + x3/3** | -1 | 1 | 1 | 2 | 0.5 |
| **14** | **-2 sin(4x) ln(-x) + 5** | -2.5 | -1.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **15** | **sin(x – 1) – x cos(x + 3)** | -4 | -2 | 3 | 1 | 0.5 |
| **16** | **4 sin (x) – x1/2** | 1 | 2 | 2 | 3 | 0.25 |
| **17** | **5 sin3(x) + cos3(x)** | 1 | 2 | 2 | 1 | 0.25 |
| **18** | **cos(2x + 1) ln (2 / x) + 3** | 1 | 3 | 3 | 2 | 0.5 |
| **19** | **3 cos(x2) / ln(x + 5)** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0.5 |
| **20** | **sin(x2) + 1 / (2 – x)** | -1.5 | 0.5 | 2 | 1 | 0.5 |
| **21** | **x sin(x) + cos(x) + 5** | 0 | 2 | 1 | 2 | 0.5 |
| **22** | **– cos(x) – cos(2x) – x + 5** | 1 | 3 | 3 | 1 | 0.5 |
| **23** | **1 + sin(4x) / ln(x)** | 1.5 | 2.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **24** | **(1 + x2)1/2 + e-x** | -1 | 2 | 2 | 1 | 0.75 |
| **25** | **sin(x + 1) e2 / x** | 1 | 2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **26** | **2 (1 + x) e-x – 2 cos(x)** | 1 | 4 | 2 | 3 | 0.75 |
| **27** | **– 8 sin(– x3) e-x** | 0.4 | 1.4 | 1 | 3 | 0.25 |
| **28** | **– 10 sin(x3) cos(– x)** | -1.4 | -0.4 | 2 | 1 | 0.25 |
| **29** | **x2cos(x + 3) – 4** | 3 | 4 | 3 | 1 | 0.25 |
| **30** | **– cos(x – 5) e2x / 3** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0.5 |
| **31** | **x - cos(x/3)** | 2 | 3 | 1 | 2 | 0,25 |
| **32** | **x + ln(4x) – 1** | 0 | 2 | 2 | 3 | 0,5 |
| **33** | **ex- 4e-x – 1** | 3 | 4 | 3 | 1 | 0,25 |
| **34** | **x ex– 2** | 2 | 4 | 1 | 2 | 0,5 |
| **35** | **4(x2+1) ln(x) – 1** | 1 | 3 | 2 | 3 | 0,5 |
| **36** | **2 – x - sin(x/4)** | 0,2 | 1,2 | 3 | 2 | 0,25 |
| **37** | **x2 + ln(x) – 2** | -0,5 | 0,5 | 2 | 3 | 0,25 |
| **38** | **сos(x) - (x+2) ½ + 1** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0,25 |
| **39** | **4(1+x1/2) ln(x) – 1** | 1,2 | 3,2 | 3 | 1 | 0,5 |
| **40** | **5ln(x) - x1/2** | 3,5 | 5 | 1 | 3 | 0,5 |
| **41** | **ex+ x3 –2** | 0 | 1 | 2 | 3 | 0,25 |
| **42** | **3sin(x1/2) + x – 3** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0,25 |
| **43** | **0,1 x2 – x ln(x)** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0,5 |
| **44** | **cos(1 + 0,2x2) – x** | -2,5 | -1,5 | 1 | 1 | 0,25 |
| **45** | **3 x – 4 ln(x) – 5** | -4 | -2 | 3 | 2 | 0,5 |

#### 

#### 4.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Результаты «ручного расчета» интеграла с шагом и ( и ) без использования пакета MathCad (или используя пакет только как калькулятор) и значения погрешностей по правилу Рунге.



1. Результаты «ручного расчета» интеграла с шагом и ( и ) при использовании пакета MathCad для записи формул соответствующих методов (вычисления сумм ( ∑ ) значений функции и т.п.) и значения погрешностей по правилу Рунге.



1. Результаты решения, полученные с помощью встроенных функций математического пакета.

#### 4.5. Пример выполнения задания

**1**. **Задание для численного интегрирования:**

* – подынтегральная функция;



* **a=1, b=3**–пределы интегрирования;
* методы интегрирования для выполнения п.**2** – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* методы интегрирования для выполнения п.**3** – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* начальный шаг интегрирования **h0=1.**

**2. «Ручной расчет» интеграла с шагом =1 и  ( и ) и оценка его погрешности по правилу Рунге, при использовании MathCad только как калькулятора**

В качестве примера рассмотрим вычисление интеграла с шагом *h0*=1 и  методами средних прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Правило Рунге применяют для вычисления погрешности путём двойного просчёта интеграла с шагами **h/2** и **h,** при этом погрешность вычисляется по формуле . Полагают, что интеграл вычислен с точностью *Е*, если , тогда , где ***I*** – уточненное значение интеграла, **p** – порядок метода.

Вычислим интеграл  с шагом h0=1 и  по формуле

* **средних прямоугольников** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчёта**:



|  |
| --- |
|  |

* **трапеций** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:



|  |
| --- |
|  |

* **Симпсона**



и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:

|  |
| --- |
|  |

**3. «Ручной расчет» интеграла с использованием MathCad с шагом  и  и оценка его погрешности по правилу Рунге**

* **по формуле средних прямоугольников:**

|  |
| --- |
|  |

* **по формуле трапеций:**

|  |
| --- |
|  |

* **по формуле Симпсона:**

|  |
| --- |
|  |

**4. Результаты решения задачи с помощью математического пакета Mathcad**

Для вычисления определенного интеграла с использованием пакета используется шаблон, который вызывается кнопкой с изображением определенного интеграла с дополнительной панели **Операции математического анализа** панели **Математика**:

|  |
| --- |
|  |

#### 4.6. Контрольные вопросы по теме Численное интегрирование

1. Что такое шаг интегрирования?
2. По какой формуле вычисляется шаг изменения х на отрезке [a;b]?
3. Каким образом связана задача численного интегрирования и интерполяция?
4. Какое влияние оказывает уменьшение числа разбиений на отрезке [a;b] на погрешность интегрирования?
5. Каким образом вычисляется определенный интеграл в случае, если подынтегральная функция задана таблицей с переменным шагом?
6. Какой из изученных вами методов численного интегрирования обладает высшей степенью точности?
7. Зависит ли точность численного интегрирования от величины шага интегрирования?
8. Для чего предназначен метод двойного просчета?
9. Какие методы относятся к методам численного интегрирования?
10. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле трапеций?
11. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле Симпсона?
12. Интерполяционным многочленом какой степени заменяется подынтегральная функция в методе прямоугольников?
13. Интерполяционным многочленом какой степени заменяется подынтегральная функция в методе трапеций?
14. Как называется метод численного интегрирования, в котором подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени?
15. В каком методе для вычисления интеграла необходимо выбирать количество интервалов разбиения кратное двум?
16. Какой метод численного интегрирования даст наиболее точный результат, если подынтегральная функция имеет вид y = 5x3?
17. В каком методе численного интегрирования подынтегральная функция заменяется квадратичным полиномом?
18. Какой метод численного интегрирования даст точный результат, если подынтегральная функция имеет вид f(x) = x2?
19. Какой метод интегрирования наилучшим образом подходит для вычисления интеграла линейной функции?
20. Обеспечивают ли методы трапеций и метод средних прямоугольников точность одного порядка?
21. Какой из известных вам методов интегрирования обладает наименьшей точностью?
22. Какому числу кратно количество интервалов разбиения в методе Симпсона?
23. Позволяет ли метод прямоугольников получить точное значение интеграла, если подынтегральная функция – полином 0-й степени?