## Тема 6. Лабораторная работа Одномерная оптимизация

### **6.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи одномерной оптимизации.
2. Методы оптимизации: метод дихотомии; метод золотого сечения.
3. Условия сходимости методов.
4. Оценка погрешности оптимизации.
5. Графическая иллюстрация процесса оптимизации.
6. Сравнение методов по точности, эффективности деления отрезка унимодальности, по числу итераций, по числу отсчетов исследуемой функции.

### **6.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** по номеру варианта из табл. 6-1 для решения задачи одномерной оптимизации, т.е. функцию  **y(x)**,минимум которой необходимо найти.
2. **Провести исследование индивидуального варианта задания:**

* построить график функции **y(x)**
* выбрать начальный отрезок неопределенности (отрезок, содержащий точку минимума);
* проверить выполнение аналитического условия унимодальности функции на выбранном отрезке.

1. **Провести «ручной расчет» трех итераций методом дихотомии и определить длину отрезка,** содержащего точку минимума, после трех итераций. Результаты вычислений записать в табл. 6.2.
2. **Провести «ручной расчет» трех итераций методом золотого сечения и определить длину отрезка,** содержащего точку минимума, после трех итераций. Результаты вычислений записать в табл. 6.3.
3. **Решить задачу оптимизации с помощью математического пакета.**

### **6.3. Варианты задания**

Таблица 6-1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№**  **вар.** | **y(x)** | **№**  **вар.** | **y(x)** |
| **1** | **– 2 (1 + x) e–x – 2 cos(x)** | **16** | **sin(ex) – e–x + 1** |
| **2** | **(x – 1)** | **17** | **sin(x + 1) e2 / x** |
| **3** | **10 sin(x3) cos(-x)** | **18** | **– 5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** |
| **4** | **x2cos(x + 3) – 4** | **19** | **1 + sin(4x) / ln(x)** |
| **5** | **cos(x – 5) e2x / 3** | **20** | **2 sin(4x) ln(– x) – 3** |
| **6** | **– 4 sin(x) + x1 / 2** | **21** | **x3 / 2 – 2 x sin(x)** |
| **7** | **– 5 sin3(x) – cos3(x)** | **22** | **x sin(x) + cos(x) + 5** |
| **8** | **– cos(2x + 1) ln(2 / x) + 3** | **23** | **e–x sin(2x)** |
| **9** | **x sin(x + 1) – cos(x – 5)** | **24** | **sin(2x) – 2 sin(x)** |
| **10** | **(1 + x2)1 / 2 + e–x** | **25** | **sin(2x) – x** |
| **11** | **– 8 sin(- x3) e–x** | **26** | **cos(– 2x) e–x** |
| **12** | **5 e–x + 4 x + x3 / 3** | **27** | **e–x sin(– 2x)** |
| **13** | **sin(x – 1) – x cos(x + 3)** | **28** | **e–x cos(– 2x)** |
| **14** | **3 cos(x2) / ln(x + 5)** | **29** | **cos(x + 2) + cos(2x) + x** |
| **15** | **sin(x2) + 1 / (2 – x)** | **30** | **cos(2x) + 2 sin(x)** |

### **6.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.
2. Результаты исследования индивидуального варианта задания:

* график функции **y(x)**;
* начальный отрезок неопределенности;
* результаты проверки аналитического условия унимодальности функции на выбранном отрезке.

1. Результаты «ручного расчета» методом дихотомии, представленные в табл. 6.2, и длина отрезка, содержащего точку минимума, после трех итераций.

Таблица 6-2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **y(x1)** | **y(x2)** |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |

1. Результаты «ручного расчета» методом золотого сечения, представленные в табл. 6.3, и длина отрезка, содержащего точку минимума, после трех итераций.

Таблица 6-3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **y(x1)** | **y(x2)** |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |

1. Результаты решения задачи оптимизации, полученные средствами математического пакета.

### **6.5. Пример выполнения задания**

1. **Задание для решения задачи одномерной оптимизации:**

* функция, для которой необходимо найти минимум : ;

1. **Исследование задания:**

* График функции *y(x)*, выбор начального отрезка неопределенности и проверка условий унимодальности функции на выбранном отрезке.

|  |
| --- |
|  |

Задача одномерной оптимизации имеет единственное решение в том случае, если функция **f(x)** на отрезке **[a;b]** имеет только один экстремум, т.е. функция **унимодальна** на зтом отрезке. **Достаточными**условиями унимодальности функции на отрезке **[a;b]** являются:

1. Длядифференцируемой функции **f(x)** ее производная **f′(х) -**  неубывающая.
2. Для дважды дифференцируемой функции **f(x)** выполняется неравенство **f′′(х)≥0.**

Из приведенных расчетов видно, что на отрезке [-2; 3] функция y(x) – унимодальная: ее вторая производная y2(x)=cos(x)+2 всегда >0 (т.к. cos(x) не может быть меньше, чем -1), а первая производная монотонно возрастает. Следовательно, этот отрезок может быть выбран в качестве начального отрезка неопределенности.

**3. «Ручной расчет» трех итераций методом дихотомии**

|  |
| --- |
|  |

Результаты вычислений сведены в таблицу:

Таблица 6.2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **a** | **b** | **X1** | **X2** | **y(X1)** | **y(X2)** |  |
| 1 | -2 | 3 | 0.498 | 0.502 | -4.129 | -4.127 | 5 |
| 2 | -2 | 0.502 | -0.751 | -0.747 | -2. 416 | -2.429 | 2.502 |
| 3 | -0.751 | 0.502 | -0.127 | -0.123 | -3.85 | -3.855 | 1.253 |
| 4 | -0.127 | 0.502 |  |  |  |  | 0.629 |

Для метода дихотомии теоретическая длина отрезка неопределенности после трех итераций  почти совпала с вычисленной.

После 3-х итераций за минимум можно принять середину оставшегося отрезка, т.е. координатами точки минимума можно считать xmin0.188, а y(xmin) -4.135. Это весьма грубое приближение, поскольку 

1. **«Ручной расчет» трех итераций методом золотого сечения**

|  |
| --- |
| 1 итерация    Считаем    2 итерация    Считаем и    3 итерация      Считаем    После 3-х итераций |

Результаты вычислений сведены в таблицу:

Таблица 6.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **a** | **b** | **X1** | **X2** | **y(X1)** | **y(X2)** |  |
| 1 | -2 | 3 | -0.09 | 1.09 | -3.898 | -3.364 | 5 |
| 2 | -2 | 1.09 | -0.82 | -0.09 | -2.191 | -3.898 | 3.09 |
| 3 | -0.82 | 1.09 | -0.09 | 0.361 | -3.898 | -4.166 | 1.91 |
| 4 | -0.09 | 1.09 | 0.361 |  | -4.166 |  | 1.18 |

Для метода золотого сечения теоретическая длина отрезка неопределенности после трех итераций равна , что совпадает с полученной длиной отрезка неопределенности.

После 3-х итераций за минимум можно принять середину оставшегося отрезка, т.е. координатами точки минимума можно считать xmin0.5, а y(xmin) -4.128. Так как отрезок неопределенности изначально был взят большим (длиной 5), трех итераций мало для нахождения минимума методом золотого сечения.

**5. Решение задачи оптимизации с использованием математического пакета**

При использовании пакета **Mathcad** для минимума унимодальной функции от одной переменной на заданном отрезке применяются функции **Minerr(x) и Minimize**. Из-за использования рекуррентных методов эти функции требуют задания начального условия для поиска (x:=1), а также описания целевой функции y(x). Для **Minerr(x)** целевая функция- равенство нулю первой производной -задается после начала вычислительного блока (**Given**).

|  |
| --- |
| ИЛИ 2 способ: |

### **6.6. Контрольные вопросы по теме**

### **«Одномерная оптимизация»**

1. Какое значение функции называют оптимальным?
2. В чем заключается задача одномерной оптимизации?
3. Какой минимум называют локальным?
4. Что такое глобальный минимум?
5. Каковы необходимые и достаточные условия экстремума функции?
6. Когда применяются численные методы одномерной оптимизации?
7. В чем их преимущества и недостатки по сравнению с аналитическими методами?
8. В чем суть методов одномерного поиска, и при каких условиях они применяются?
9. Что означает понятие «унимодальная функция»?
10. В чем суть условия унимодальности?
11. Почему в методах одномерной оптимизации при переходе к следующей итерации часть отрезка можно отбросить?
12. Какое деление отрезка называют «золотым сечением»?
13. В чем суть метода дихотомии?
14. В чем суть метода золотого сечения?
15. Влияет ли вид функции на скорость сходимости метода дихотомии?
16. Влияет ли вид функции на скорость сходимости метода золотого сечения?
17. В чем заключается основное достоинство метода золотого сечения?
18. Во сколько раз на очередной итерации уменьшается длина отрезка неопределенности в методе дихотомии?
19. Во сколько раз на очередной итерации уменьшается длина отрезка неопределенности в методе золотого сечения?
20. Как оценивается погрешность методов оптимизации?
21. Можно ли найти максимум функции, используя численные методы одномерной оптимизации?