

Сборник заданий

ДЛЯ КУРСОВЫХ РАБОТ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. А. А. ЯБЛОНСКОГО

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений.*

МОСКВА
"ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС"
2000

А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон, Н. В. Карпова,
В. Н. Квасников, Ю. Г. Мянкин, Н. И. Никитина, В. Е. Павлов,
Ю. М. Тепанков, Д. Д. Акимов-Перетц, В. С. Доев, Ф. А. Доронин,
К. Ю. Красносельский

Рецензент: д-р техн. наук, проф. М. М. Гернет (Московский
технологический институт пищевой промышленности)

**Сборник заданий для курсовых работ по теоретической
механике: Учебное пособие для технических вузов. —
5-е изд., исправленное — М.: Интеграл-Пресс, 2000. — 384 с.
ISBN 5-89602-004-X**

Сборник содержит 45 заданий в 30-ти вариантах по статике, кинематике, динамике, аналитической механике и колебаниям механической системы для курсовых работ по теоретической механике.

Ряд заданий требует проведения исследований. Приведены примеры выполнения заданий. Предназначен в качестве учебного пособия для студентов вузов очной, вечерней и заочной систем обучения.

Учебное издание

Формат 60 × 90^{1/16}. Объем 24 п. л. Тираж 3000 экз. Издательство «Интеграл-Пресс». 125130, г. Москва, а/я 240. ЛР №065120 от 18.04.97. Отпечатано с оригинал-макета в ППП «Типография «Наука». 121009, Москва, Шубинский пер., 6. Заказ № 234

ISBN 5-89602-004-X



9 785896 020042

© Коллектив авторов 2000
© Издательство «Интеграл-Пресс», 2000

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании сборника исправлены замеченные опечатки и ошибки предыдущего издания. Большую работу по подготовке нового издания сборника провели авторы Доев В. С. и Доронин Ф. А.

Коллектив авторов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Теоретическая механика как одна из важнейших физико-математических дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей.

На основных законах и принципах теоретической механики базируются многие общинженерные дисциплины, такие, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др.

В различных курсах по машиностроительным, механическим, строительным, приборостроительным и многим другим специальностям также широко используются положения теоретической механики. На основе теорем и принципов теоретической механики решаются многие инженерные задачи и осуществляется проектирование новых машин, конструкций и сооружений.

Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам.

Четвертое издание настоящего сборника содержит 45 заданий, каждое в 30 вариантах, по всем основным темам программ, утвержденных Минвузом СССР: 9 — по статике, 9 — кинематике, 13 — динамике, 9 — аналитической механике и 5 — колебаниям механической системы.

В некоторые задания, входившие в третье издание, внесены изменения и дополнения, некоторые из них существенно переработаны, отдельные задания, сходные по тематике, объединены, добавлены новые задания.

В сборнике помещены три задания (по статике, кинематике и динамике), при выполнении которых целесообразно использование ЭВМ. По каждому из этих заданий дан пример с алгоритмом решения и результатами расчета на ЭВМ.

Примеры выполнения заданий не содержат программ и рекомендаций по их составлению, так как в вузах страны могут применяться различные языки программирования и операционные системы и использоваться разные ЭВМ.

Для выполнения заданий по статике и кинематике необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений, а при выполнении задания по динамике — численно интегрировать дифференциальное уравнение. В библиотеке стандартных программ любой ЭВМ такие программы имеются.

Большое число заданий по каждому из разделов курса обеспечивает возможность устанавливать тематику и количество курсовых работ в зависимости от профиля подготовки специалистов, т. е. от объема и содержания изучаемого курса теоретической механики.

Набор вариантов индивидуальных заданий, входящих в курсовую работу, студент может определить по своему шифру, пользуясь специальной таблицей, приведенной в конце книги. Шифр каждому студенту устанавливает преподаватель.

В сборнике приведены примеры выполнения заданий. Основываясь на этих примерах, студенты (особенно заочных и вечерних факультетов) смогут самостоятельно выполнять задания из этого сборника.

При выполнении ряда заданий требуется проведение некоторых исследований. Они могут служить основой для организации учебно-исследовательской работы студентов по теоретической механике.

Сборник могут использовать также инженеры и техники для углубления знаний по теоретической механике.

В подготовке настоящего издания сборника наряду с авторами предыдущих изданий приняли участие Д. Д. Акимов-Перетц, В. С. Доев, Ф. А. Доронин и К. Ю. Красносельский.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору М. М. Гернету за обстоятельный разбор рукописи сборника и ряд ценных предложений, а также коллективам кафедр и отдельным преподавателям за полезные советы, учтенные при подготовке настоящего издания.

Авторы

Используемые обозначения.

o	шарнир
	основание неподвижной опоры
	основание подвижной опоры
	жесткая заделка
	скользящая заделка
	бискользящая заделка
	шарнирно-подвижная опора
	демпфер

I. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Задание С.1. Определение реакций опор твердого тела

На схемах (рис. 1—4) показаны для каждого варианта три способа закрепления бруса, ось которого — ломаная линия. Задаваемая нагрузка (см. табл. 1) и размеры (м) во всех трех случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором реакция, указанная в табл. 1, имеет наименьший модуль.

Таблица 1

Номер варианта (рис. 1—4)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Иссле- дуемая реакция	Номер варианта (рис. 1—4)	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	Иссле- дуемая реакция
1	10	6	2	Y_A	16	12	6	2	M_A
2	20	5	4	M_A	17	20	4	3	Y_A
3	15	8	1	Y_B	18	14	4	2	X_A
4	5	2	1	Y_B	19	16	6	1	R_B
5	10	4	—	X_B	20	10	—	4	Y_A
6	6	2	1	M_A	21	20	10	2	M_A
7	2	4	2	X_A	22	6	6	1	Y_A
8	20	10	4	R_B	23	10	4	2	M_A
9	10	6	—	Y_A	24	4	3	1	Y_A
10	2	4	2	R_A	25	10	10	2	X_A
11	4	10	1	R_B	26	20	5	2	M_A
12	10	5	2	Y_A	27	10	6	1	X_A
13	20	12	2	Y_A	28	20	10	2	Y_A
14	15	4	3	Y_A	29	25	—	1	M_A
15	10	5	2	X_A	30	20	10	2	R_B

Пример выполнения задания. Дано: схемы закрепления бруса (рис. 5, а, б, в); $P = 5$ кН; $M = 8$ кН·м; $q = 1,2$ кН/м.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором момент M_A в заделке имеет наименьшее числовое значение.

Решение. Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменим их реакциями (рис. 6): в схеме а — X_A , Y_A , M_A , в схеме б — Y'_A ,

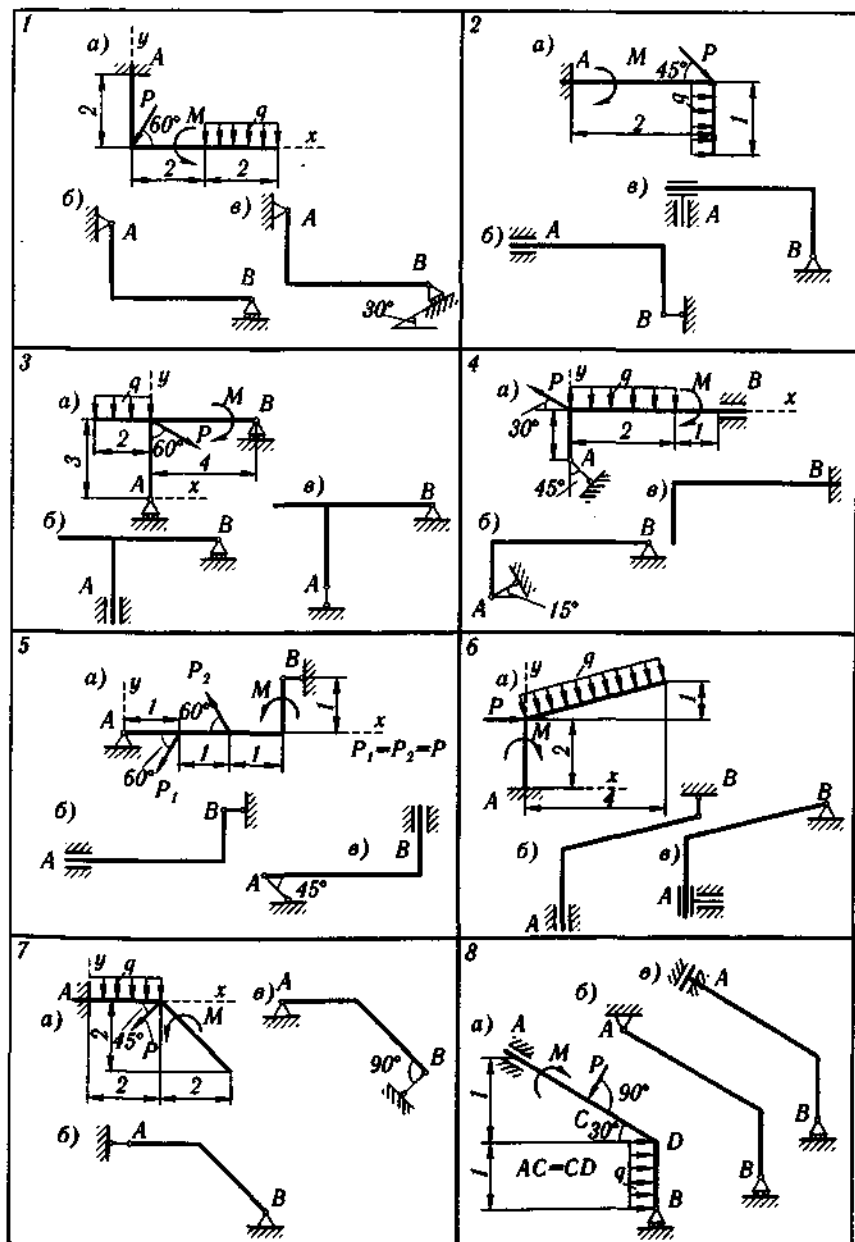


Рис. 1

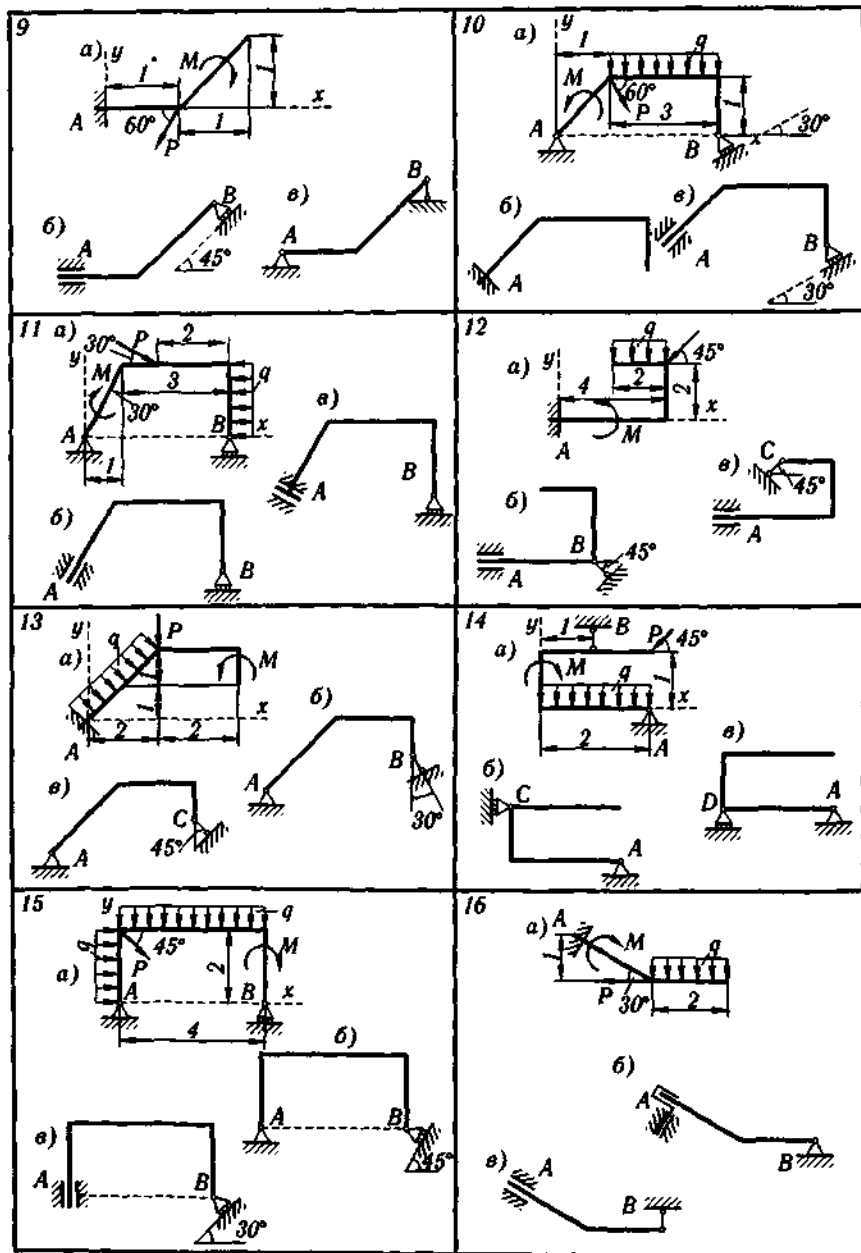


Рис. 2

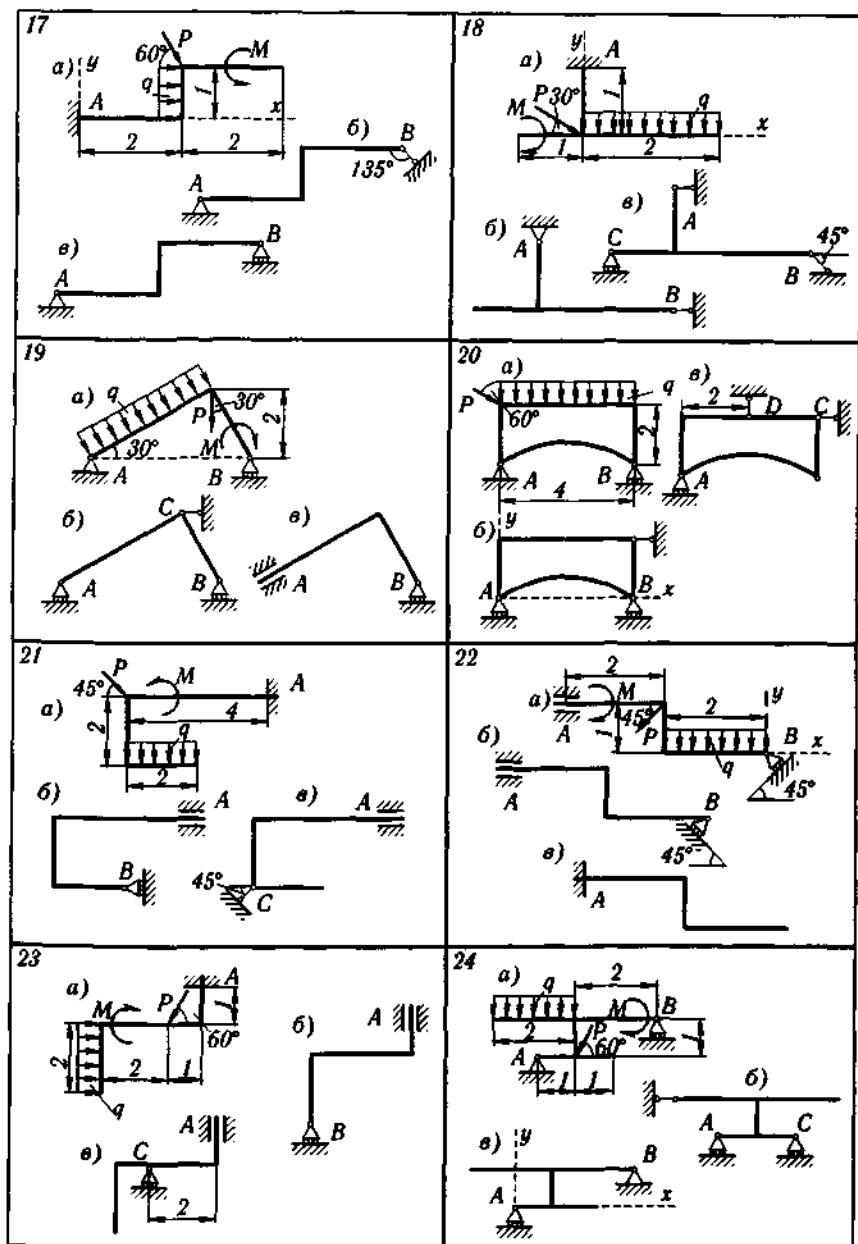


Рис. 3

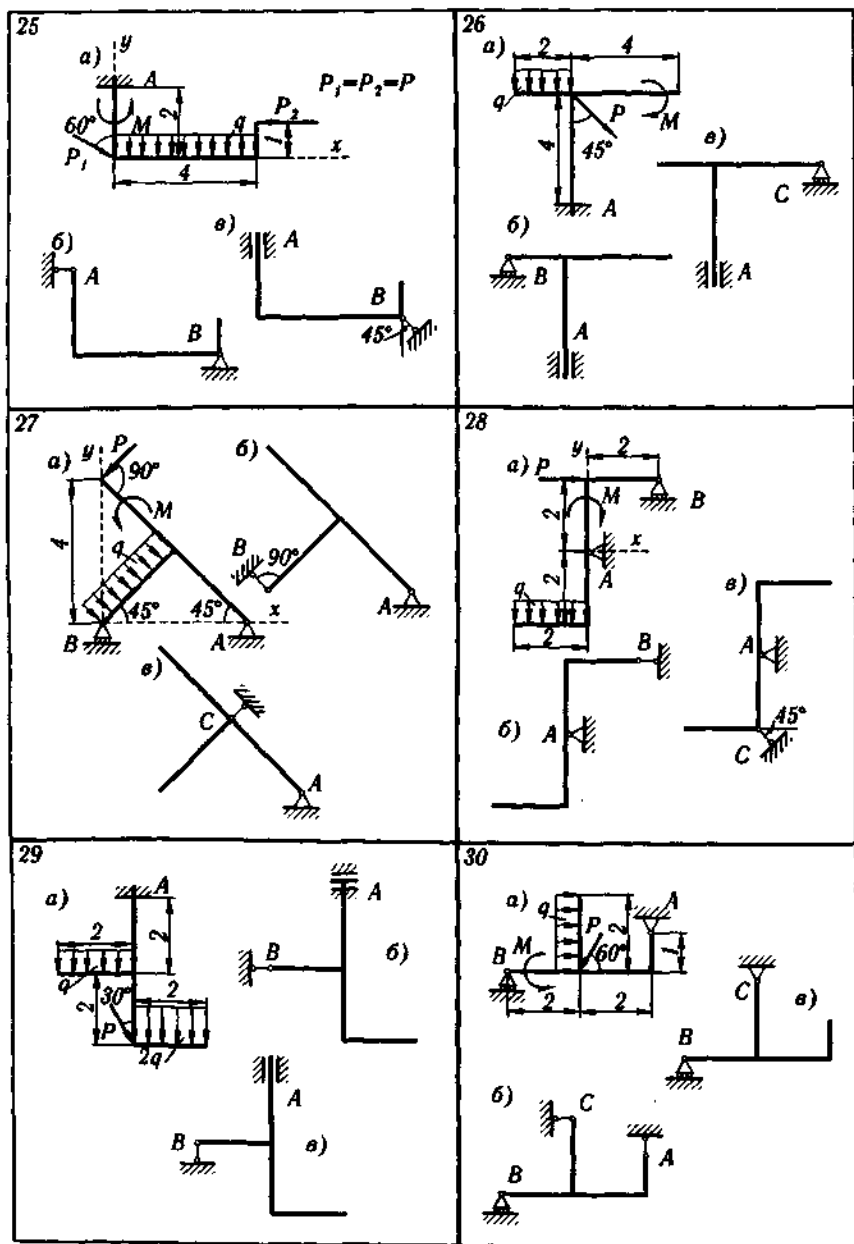


Рис. 4

M'_A и R_B , в схеме a — M''_A , X_B и Y_B . Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей

$$Q = q \cdot 2 = 2,4 \text{ кН.}$$

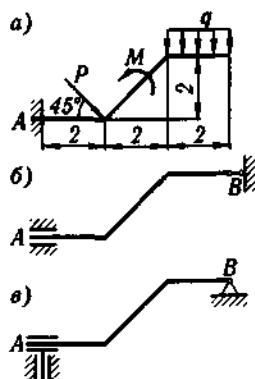


Рис. 5

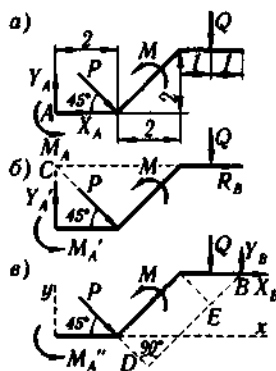


Рис. 6

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдем его для всех трех схем, не определяя пока остальных реакций.

Для схемы a

$$\sum M_{iA} = 0; M_A - P \cdot 2 \sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0.$$

Вычисления дают

$$M_A = 11,07 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Для схемы $б$

$$\sum M_{iC} = 0; M'_A + M - Q \cdot 5 = 0 \text{ и } M'_A = 4,00 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Для схемы $в$

$$\sum M_{iB} = 0; M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \text{ и } M''_A = -31,61 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Здесь

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,24 \text{ м.}$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме $б$. Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; P \cos 45^\circ - R_B = 0, & \text{откуда } R_B &= 3,54 \text{ кН;} \\ \sum Y_i &= 0; Y'_A - P \cdot \sin 45^\circ - Q = 0, & \text{откуда } Y'_A &= 5,94 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Схема по рис. 6	Момент $M_A (M'_A, M''_A), \text{кН} \cdot \text{м}$	Силы, кН	
		Y'_A	R_B
a	11,07	—	—
б	4,00	5,94	3,54
в	-31,61	—	—

Задание С.2. Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы

Определить реакции опор фермы на заданную нагрузку, а также силы во всех ее стержнях способом вырезания узлов. Схемы ферм показаны на рис. 7—9. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

Номер варианта (рис. 7-9)	P_1	P_2	P_3	a	h	α , град	Номера стержней
	кН			м			
1	4	9	2	2,0	—	30	3, 8, 9
2	10	3	4	2,5	—	60	2, 5, 7
3	2	12	6	3,0	—	60	4, 5, 10
4	10	10	5	4,0	—	60	5, 6, 11
5	2	4	2	—	2,0	60	4, 5, 10
6	3	7	5	4,0	3,0	—	8, 9, 11
7	4	6	3	4,0	—	60	4, 6, 12
8	5	7	7	3,2	—	45	3, 4, 5
9	10	8	2	5,0	—	60	6, 7, 12
10	3	4	5	4,4	3,3	—	3, 5, 7
11	2	6	8	2,5	3,0	—	2, 7, 8
12	5	7	2	4,0	—	60	4, 5, 10
13	4	6	2	4,8	3,6	—	4, 5, 10
14	3	5	5	3,0	—	60	5, 6, 8
15	2	2	10	4,0	6,0	—	2, 6, 9
16	5	6	2	5,0	—	60	3, 5, 6
17	4	4	10	4,0	6,0	—	4, 7, 8
18	5	2	8	—	5,0	60	1, 4, 8
19	8	4	10	5,0	10,0	60	4, 5, 7
20	2	3	5	4,0	6,0	—	5, 6, 8
21	3	2	7	6,0	—	45	5, 8, 9
22	4	2	9	4,0	—	45	2, 6, 8
23	5	8	8	4,0	9,0	30	4, 7, 9
24	6	10	2	3,6	—	45	4, 5, 10
25	7	10	5	4,4	3,3	—	8, 10, 11
26	8	12	2	4,0	—	30	4, 5, 9
27	9	4	4	4,0	3,0	—	5, 9, 11
28	10	5	3	5,0	—	30	3, 5, 6
29	12	8	2	6,0	—	45	5, 6, 11
30	5	10	4	4,0	2,0	—	6, 7, 12

Дополнительно определить силы в трех стержнях фермы от той же нагрузки способом Риттера (номера стержней указаны в табл. 3).

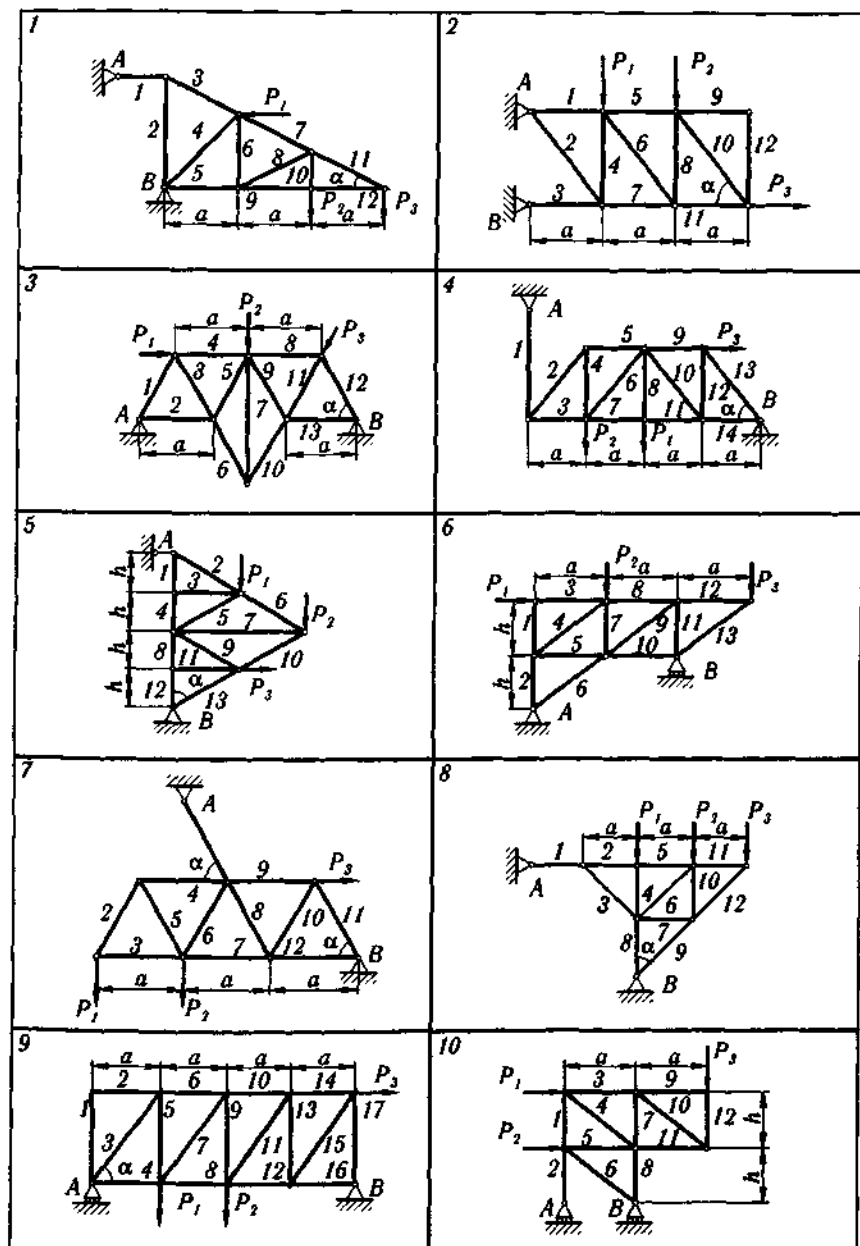


Рис. 7

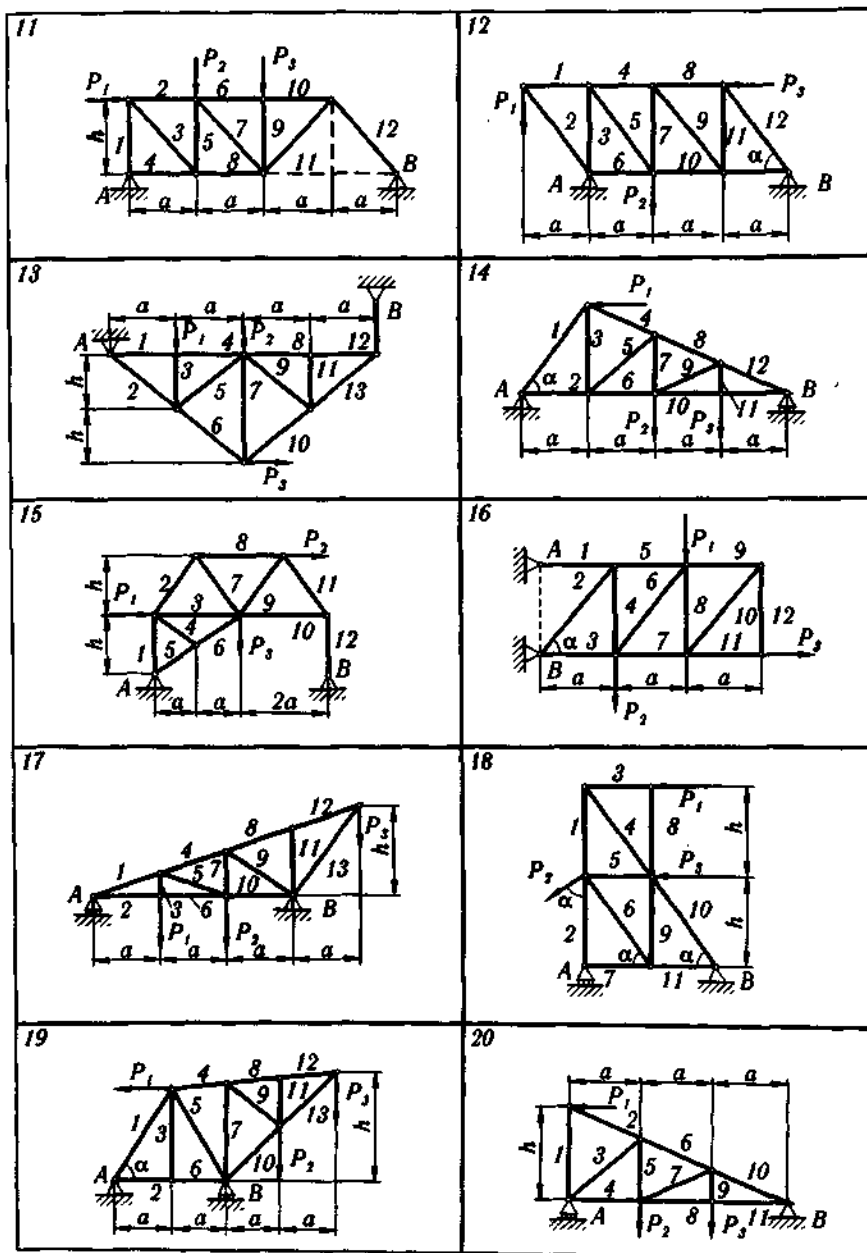


Рис. 8

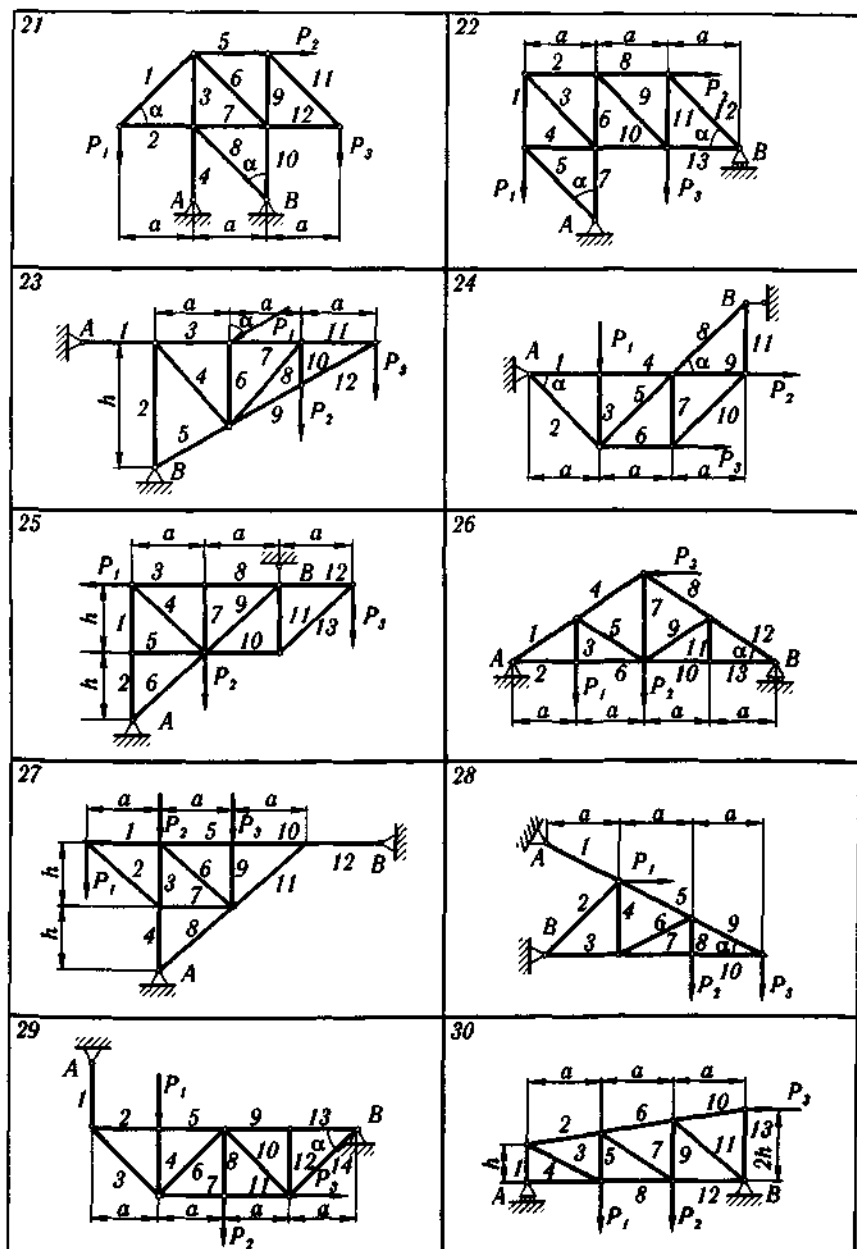


Рис. 9

Пример выполнения задания. Дано: схема фермы (рис. 10); $P_1 = 2 \text{ кН}$, $P_2 = 4 \text{ кН}$, $P_3 = 6 \text{ кН}$, $a = 4,0 \text{ м}$; $h = 3,0 \text{ м}$.

Решение. 1. *Определение реакций опор.* Покажем внешние силы, приложенные к ферме: активные (задаваемые) силы $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакции опор A и B (рис. 11).

Так как линия действия реакции опоры A неизвестна, определим ее составляющие по координатным осям $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.

Опора B — стержневая; линия действия ее реакции известна — она направлена вдоль опорного стержня.

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0; & P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + R_B a &= 0; \\ \sum X_i &= 0; & X_A - P_1 - P_2 &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & Y_A + R_B - P_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из этих уравнений

$$R_B = -10,5 \text{ кН}; \quad Y_A = 6,0 \text{ кН}; \quad X_A = 16,5 \text{ кН}.$$

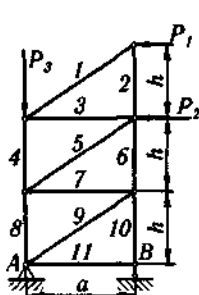


Рис. 10

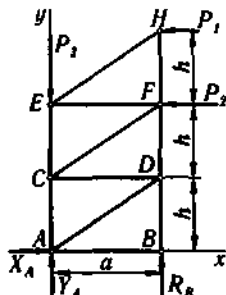


Рис. 11

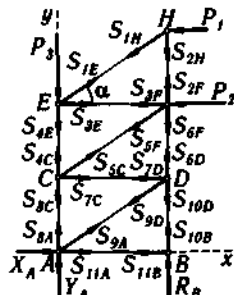


Рис. 12

2. *Определение сил в стержнях фермы способом вырезания узлов.* Стержни, сходящиеся в узле фермы, являются для узлового соединения связями. Отбросим мысленно связи и заменим их действие на узлы реакциями. На рис. 12 показаны узлы фермы с приложенными к ним активными и реактивными силами.

Силу в стержне с номером i обозначим S_i . Реакцию стержня с номером i , приложенную к узлу M , обозначим S_{iM} . Для стержня, соединяющего узлы M и N

$$\vec{S}_{iM} = -\vec{S}_{iN}, \text{ но } S_{iM} = S_{iN} = S_i.$$

Направления реакций всех стержней показаны от узлов внутрь стержней в предположении, что стержни растянуты. Если в результате решения реакция стержня получится отрицательной, это будет означать, что соответствующий стержень сжат.

Для каждого узла составим два уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0 \text{ и } \sum Y_i = 0. \quad (2)$$

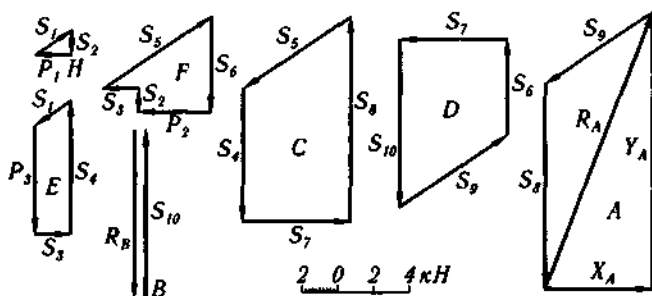


Рис. 13

Нетрудно убедиться, что из этих уравнений можно определить не только все силы, но и реакции опор, так что предварительное определение реакций опор не является необходимым. Действительно, узлов 7 (A, B, C, D, E, F, H), уравнений, следовательно, 14, а неизвестных тоже 14, т. е. 11 усилий в стержнях и 3 составляющих опорных реакций. Ранее найденные реакции опор могут служить для проверки решения.

Если уравнения предполагается решать без применения ЭВМ, рекомендуется рассматривать узлы в такой последовательности, чтобы каждый раз в уравнения (2) входило не более двух неизвестных.

Начнем с узла H:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & -P_1 - S_{1H} \cos \alpha &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & -S_{1H} \sin \alpha - S_{2H} &= 0, \end{aligned}$$

откуда определяем

$$S_{1H} = S_1 = -2,5 \text{ кН (стержень сжат)} \text{ и } S_{2H} = S_2 = 1,5 \text{ кН.}$$

Для узла E

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & S_{1E} \cos \alpha + S_{3E} &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & S_{1E} \sin \alpha - P_3 - S_{4E} &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим

$$S_{3E} = S_3 = 2,0 \text{ кН, } S_{4E} = S_4 = -7,5 \text{ кН (стержень сжат).}$$

Затем составляем уравнения равновесия сил, приложенных к узлам F, C, D, B, A .

Для проверки расчета полезно для каждого узла построить многоугольник сил (рис. 13).

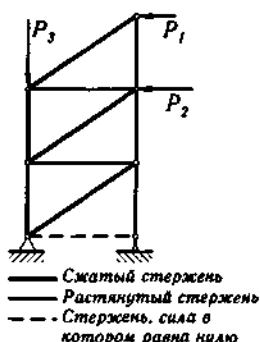


Рис. 14

Для узла H откладываем в масштабе силу P_1 и проводим через конец и начало этого вектора направления реакций S_{1H} и S_{2H} до их взаимного пересечения. Стрелки векторов $\vec{S}_{1H}$ и $\vec{S}_{2H}$ ставим так, чтобы силовой треугольник был замкнут. Для этого на рис. 13 стрелку $\vec{S}_{1H}$ пришлось направить в сторону, противоположную показанной на рис. 12, — это соответствует знаку минус в аналитическом решении. При построении многоугольника сил для узла E откладываем силы $\vec{P}_3$ и $\vec{S}_{1E}$ (направляется противоположно $\vec{S}_{1H}$) и проводим до взаимного пересечения направления реакций S_{3E} и S_{4E} и т. д. Измеренные в

масштабе построения реакции стержней должны мало отличаться от найденных аналитически.

Приводим таблицу сил в стержнях (табл. 4) и схему фермы с фактической картиной сил (рис. 14).

Таблица 4

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Знак силы	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	
Сила, кН	2,5	1,5	2,0	7,5	7,5	6,0	6,0	12,0	7,5	10,5	0

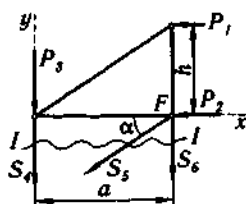


Рис. 15

3. *Определение сил в стержнях способом сечений (способом Риттера).* Требуется определить силы в стержнях 4, 5 и 8.

По способу Риттера каждая сила должна быть определена из отдельного уравнения и не должна выражаться через силы в других стержнях.

Для определения сил S_4 и S_5 мысленно разрежем ферму сечением $I-I$ (рис. 15).

Рассматриваем равновесие сил, приложенных к верхней части фермы*. Действие отброшенной нижней части на верхнюю представлено силами S_4, S_5 и S_6 .

По-прежнему условно предполагаем все стержни растянутыми. Знак минус в ответе укажет на то, что стержень сжат.

* Выбор части фермы обычно определяется объемом вычислительной работы. В данном случае следует отметить, что выбор верхней части позволяет получить искомые силы, выраженные только через заданные силы, независимо от ранее найденных опорных реакций.

Для определения S_4 составим уравнение моментов сил относительно точки F , где пересекаются линии действия сил S_5 и S_6 (точки Риттера для стержня 4):

$$\sum M_{iF} = 0; S_4 a + P_3 a + P_1 h = 0.$$

Отсюда получим

$$S_4 = -7,5 \text{ кН}.$$

Для определения S_5 , чтобы исключить из уравнения усилия S_4 и S_6 , проецируем силы на ось x :

$$\sum X_i = 0; -P_1 - P_2 - S_5 \cos \alpha = 0.$$

Отсюда получим $S_5 = -7,5 \text{ кН}$.

Для определения силы S_8 проводим сечение II—II (можно было бы провести его и через стержни 8, 7 и 6). Рассмотрим равновесие сил, приложенных к нижней части фермы (рис. 16).

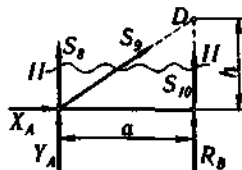


Рис. 16

Точкой Риттера для стержня 8 является узел D , где пересекаются линии действия сил S_9 и S_{10} , исключаемых из уравнения:

$$\sum M_{iD} = 0; -S_8 a - Y_A a + X_A h = 0.$$

Отсюда получим

$$S_8 = -12,0 \text{ кН}.$$

Задание С.3. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из двух частей. Установить, при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в табл. 5, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения C .

На рис. 17—19 показан первый способ соединения — с помощью шарнира C . Второй способ соединения — с помощью скользящей заделки, схемы которой показаны в табл. 6.

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 20); $P_1 = 5 \text{ кН}$, $P_2 = 7 \text{ кН}$; $M = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $\alpha = 60^\circ$.

Определить реакции опор, а также соединения C для того способа сочленения (шарнир или скользящая заделка), при котором модуль опоры A наименьший.

Решение. 1. Определение реакций опоры A при шарнирном соединении в точке C .

Таблица 5

Номер вариан- та (рис. 17-19)	P_1	P_2	M	q	Иссле- дуемая реакция	Номер вариан- та (рис. 17-19)	P_1	P_2	M	q	Иссле- дуемая реакция
	кН		кН·м	кН/м			кН		кН·м	кН/м	
1	5,0	-	24,0	0,8	X_A	16	7,0	10,0	14,0	3,8	R_B
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R_A	17	9,0	12,0	26,0	4,0	R_A
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R_B	18	11,0	10,0	18,0	3,5	M_B
4	8,0	-	18,0	1,4	M_A	19	13,0	9,0	30,0	3,0	M_B
5	9,0	-	16,0	1,6	R_A	20	15,0	8,0	25,0	2,5	R_B
6	10,0	8,0	25,0	1,8	M_A	21	10,0	7,0	20,0	2,0	R_A
7	11,0	7,0	20,0	2,0	R_B	22	5,0	6,0	15,0	1,5	R_A
8	12,0	6,0	15,0	2,2	M_A	23	8,0	5,0	10,0	1,4	R_A
9	13,0	-	10,0	2,4	X_A	24	11,0	4,0	5,0	1,3	M_A
10	14,0	-	12,0	2,6	R_A	25	14,0	6,0	7,0	1,2	R_B
11	15,0	5,0	14,0	2,8	R_D	26	12,0	8,0	9,0	1,1	R_B
12	12,0	4,0	16,0	3,0	R_B	27	10,0	7,0	11,0	1,0	X_A
13	9,0	6,0	18,0	3,2	R_A	28	8,0	9,0	13,0	1,2	R_A
14	6,0	-	20,0	3,4	M_A	29	6,0	10,0	15,0	1,4	M_A
15	5,0	8,0	22,0	3,6	M_B	30	10,0	12,0	17,0	1,6	M_B

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 21). Составим уравнение моментов сил относительно точки B . Для упрощения вычисления момента силы $\vec{P}_1$ разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие: $P'_1 = P_1 \cos 60^\circ = 2,5$ кН; $P''_1 = P_1 \sin 60^\circ = 4,33$ кН,

$$\sum M_{iB} = 0; P'_1 \cdot 3 + P''_1 \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \sqrt{1,0^2 + 1,5^2} = 0, \quad (1)$$

где $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$ кН.

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ кН}. \quad (1')$$

Второе уравнение с неизвестными X_A и Y_A получим, рассмотрев систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира C (рис. 22):

$$\sum M_{iC} = 0; P''_1 \cdot 6 + Q \cdot 2 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 3 = 0,$$

или после вычислений

$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ кН}. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1') и (2), находим:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

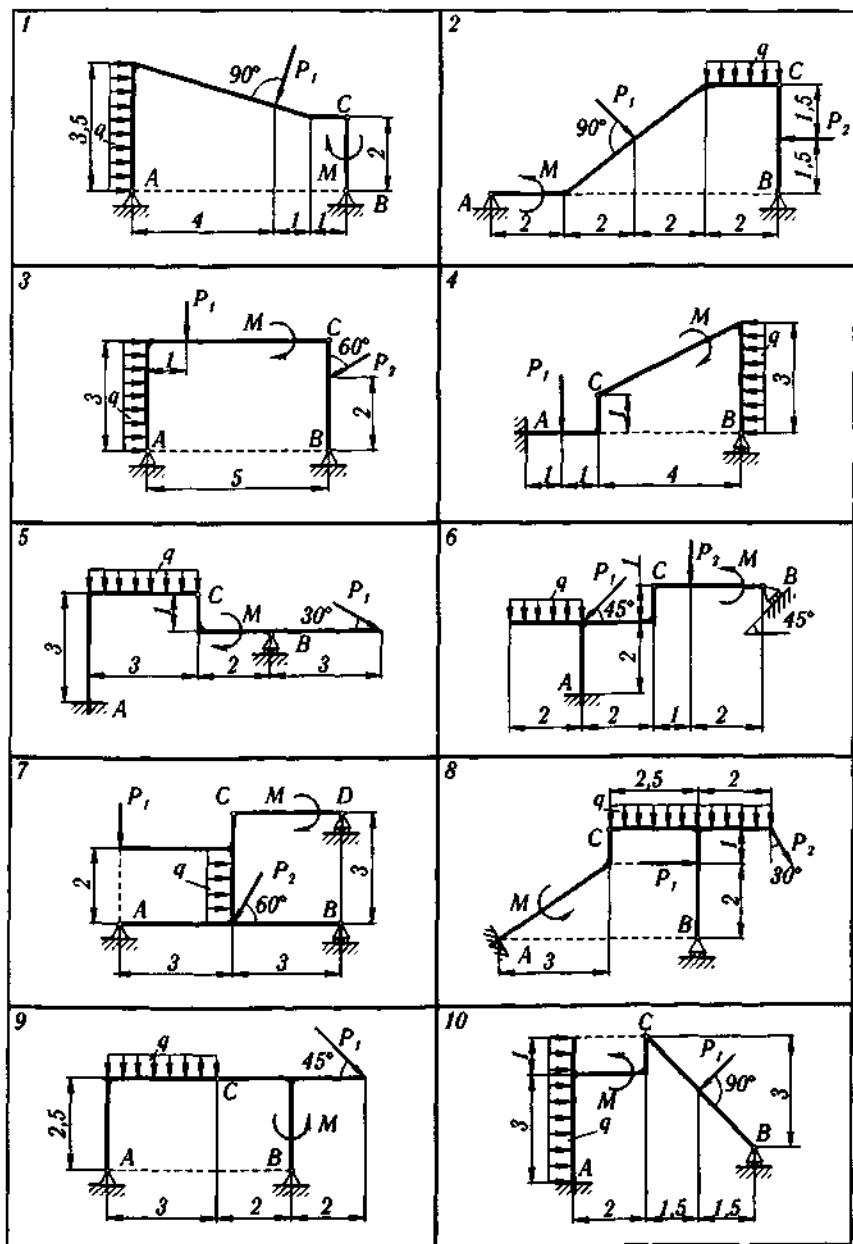
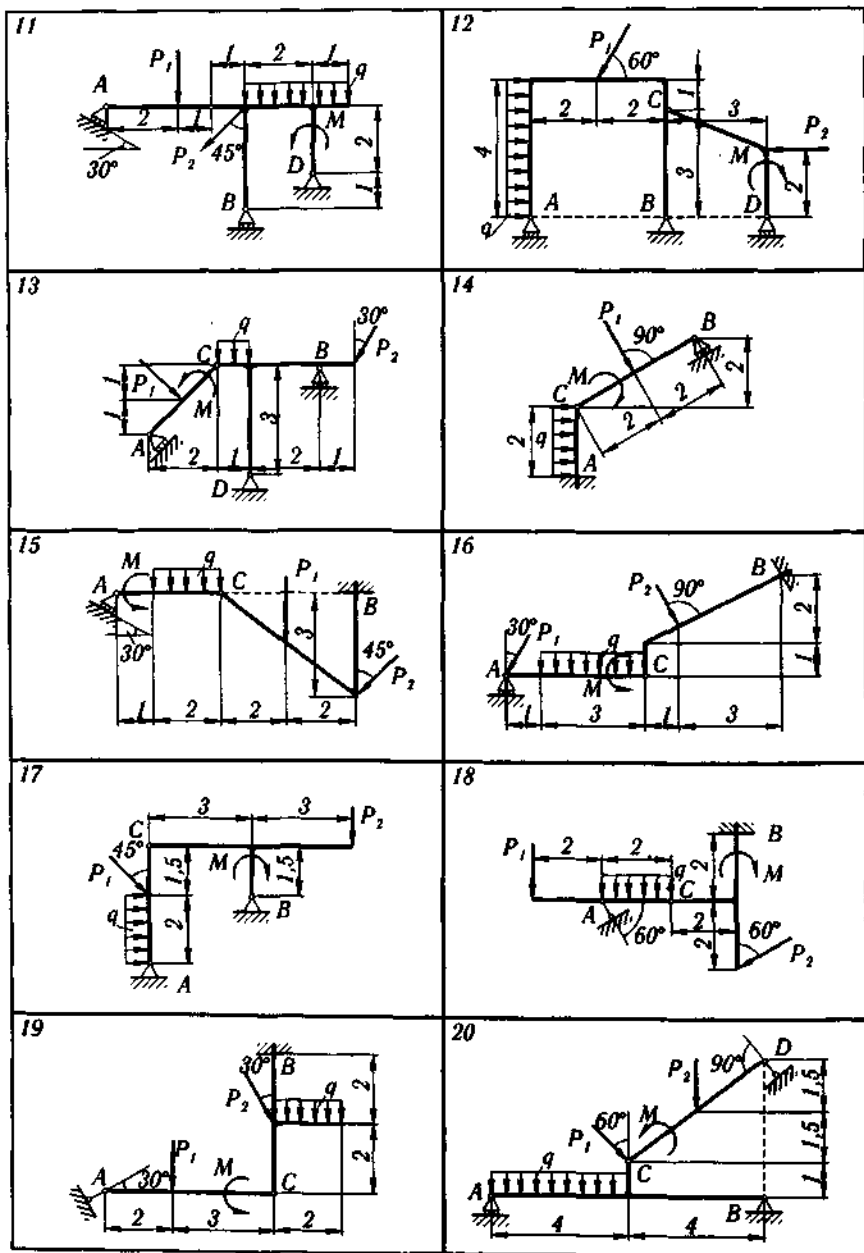


Рис. 17



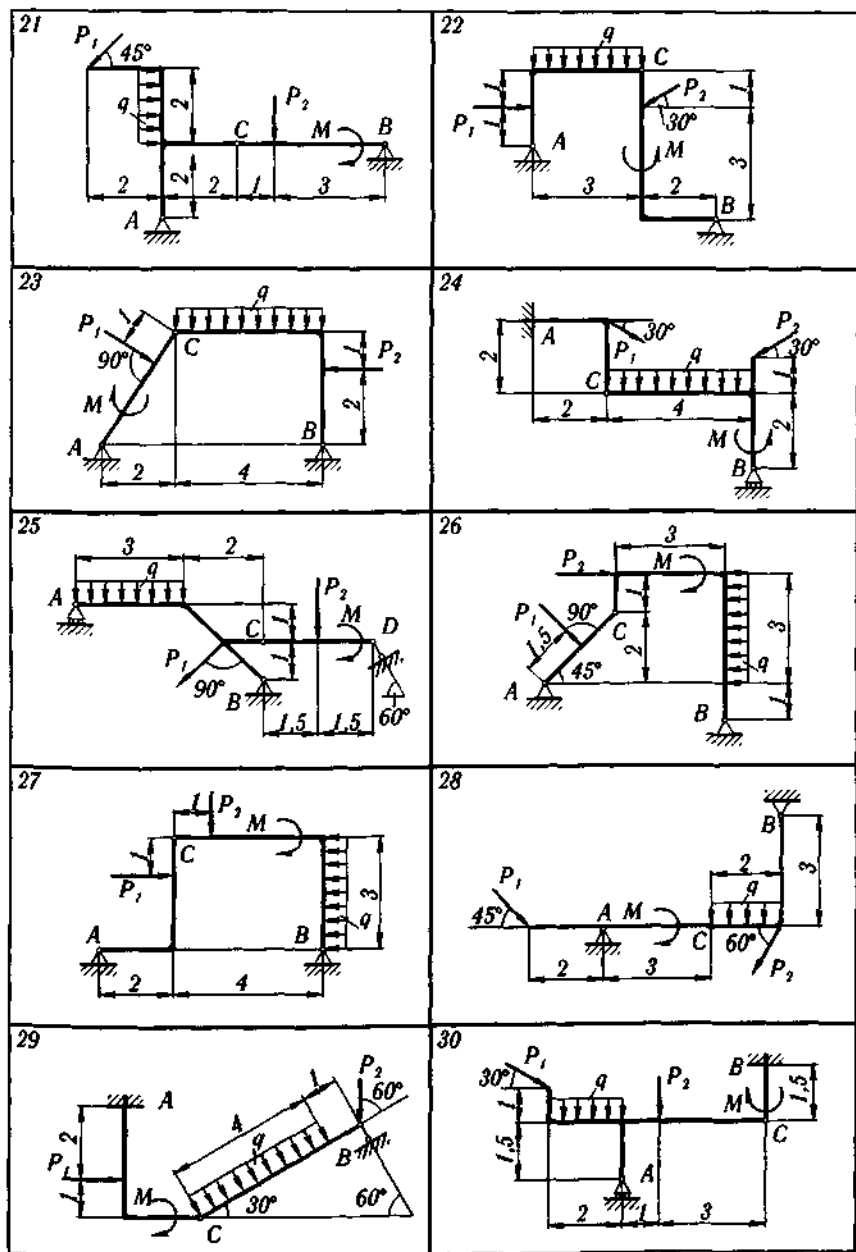


Рис. 19

Таблица 6

Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки
1, 2, 3		14		23	
4		15		24	
5		16		25	
6, 7, 8		17		26	
9		18		27	
10		19		28	
11		20		29	
12		21		30	
13		22			

Модуль реакции опоры A при шарнирном соединении в точке C равен

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = \sqrt{74,81} = 8,65 \text{ кН.}$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке C скользящей заделкой показана на рис. 23. Системы сил, показанных

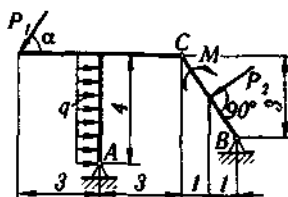


Рис. 20

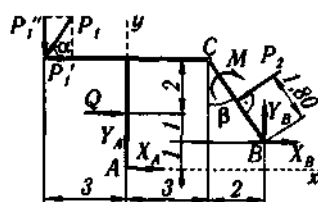


Рис. 21

на рис. 21 и 23, ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (1') остается в силе. Для получения второго уравнения

рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки C (рис. 24, а).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + Q - P'_1 = 0, \quad (3)$$

откуда

$$X_A = -5,50 \text{ кН},$$

и из уравнения (1') находим

$$Y_A = 3,85 \text{ кН}.$$

Следовательно, модуль реакции опоры A при скользящей заделке в C равен

$$R''_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,50^2 + 3,85^2} = \sqrt{45,07} = 6,71 \text{ кН}.$$

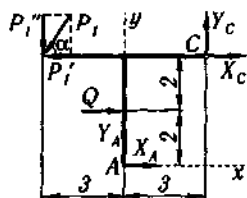


Рис. 22

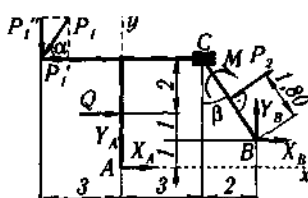


Рис. 23

Итак, при соединении в точке C скользящей заделкой модуль реакции опоры A меньше, чем при шарнирном соединении ($\approx$ на 22%). Найдем составляющие реакции опоры B и скользящей заделки.

Для левой от C части (рис. 24, а)

$$\sum Y_i = 0; \quad -P''_1 + Y_A + Y_C = 0, \quad (4)$$

откуда

$$Y_C = P''_1 - Y_A = 0,48 \text{ кН}.$$

Составляющие реакции опоры B и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от C части конструкции (рис. 24, б):

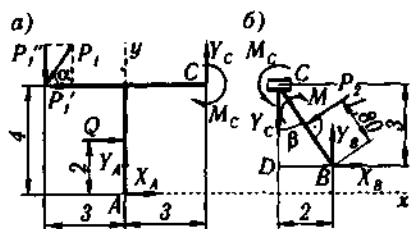


Рис. 24

$$\sum M_{iB} = 0; \quad M_C + Y_C \cdot 2 - M + P_2 \cdot 1,80 = 0, \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0; \quad -P_2 \cos \beta + X_B = 0, \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_C + Y_B - P_2 \sin \beta = 0. \quad (7)$$

Из прямоугольного треугольника BCD

$$\sin \beta = BD/BC = 2,0/\sqrt{2^2 + 3^2} = 2,0/3,61 = 0,555;$$

$$\cos \beta = CD/BC = 3,0/3,61 = 0,832.$$

Решая уравнения (5)—(7) относительно M_C , X_B , Y_B , получим:

$$M_C = 8,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad X_B = 5,82 \text{ кН}; \quad Y_B = 4,37 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакций убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 21), например

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= P'_1 \cdot 4 + P''_1 \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin \beta \cdot 4 + P_2 \cos \beta \cdot 2,5 - X_B \cdot 1 + \\ &+ Y_B \cdot 5 = 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - \\ &- 5,82 \cdot 1 + 4,37 \cdot 5 = 59,40 - 59,36 \approx 0. \end{aligned}$$

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 7

	Силы, кН						Момент, кН · м
	X_A	Y_A	R_A	Y_C	X_B	Y_B	M_C
Для схемы на рис. 20	-7,97	3,36	8,65	-	-	-	-
Для схемы на рис. 23	-5,50	3,85	6,71	$\pm 0,48$	5,82	4,37	$\pm 8,44$

Задание С.4. Определение реакций опор составной конструкции (система трех тел)

Найти реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных либо в одной точке (варианты 1—20), либо в двух точках (варианты 21—30). Схемы конструкций представлены на рис. 25—27 (размеры — в м), нагрузка указана в табл. 8. В вариантах 1—15, 21—30 составные части соединены с помощью шарниров, а в вариантах 16—20 — с помощью гладкой втулки малой длины.

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 28); нагрузка: $P_1 = 10 \text{ кН}$, $P_2 = 204 \text{ кН}$, $M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$. Определить реакции опор в точках A , B , C и E .

Решение. На рис. 29 изображены отдельно все три тела, образующие систему. К каждому из тел приложены задаваемые (активные) силы и реакции связей.

Так как направления составляющих реакций и реактивных моментов в соединении D заранее не известны, покажем их направленными

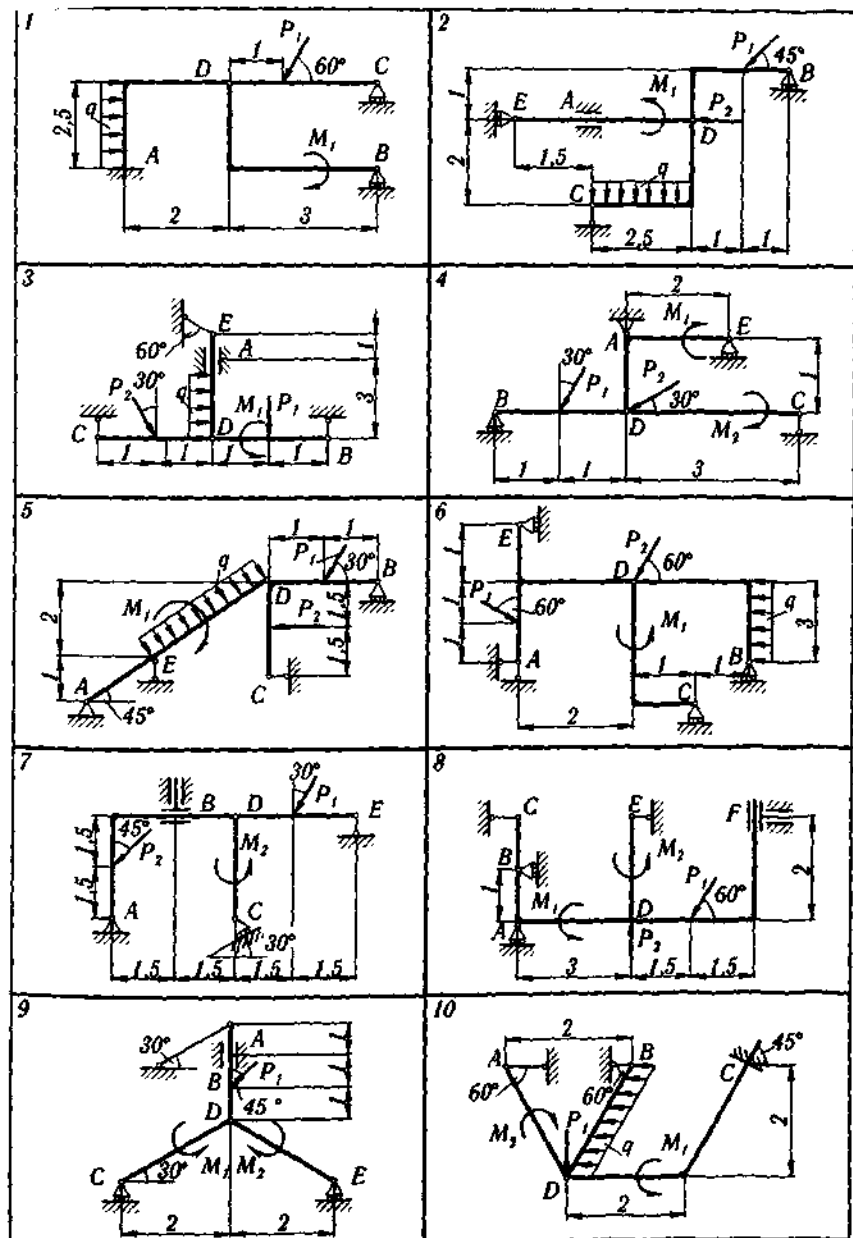


Рис. 25

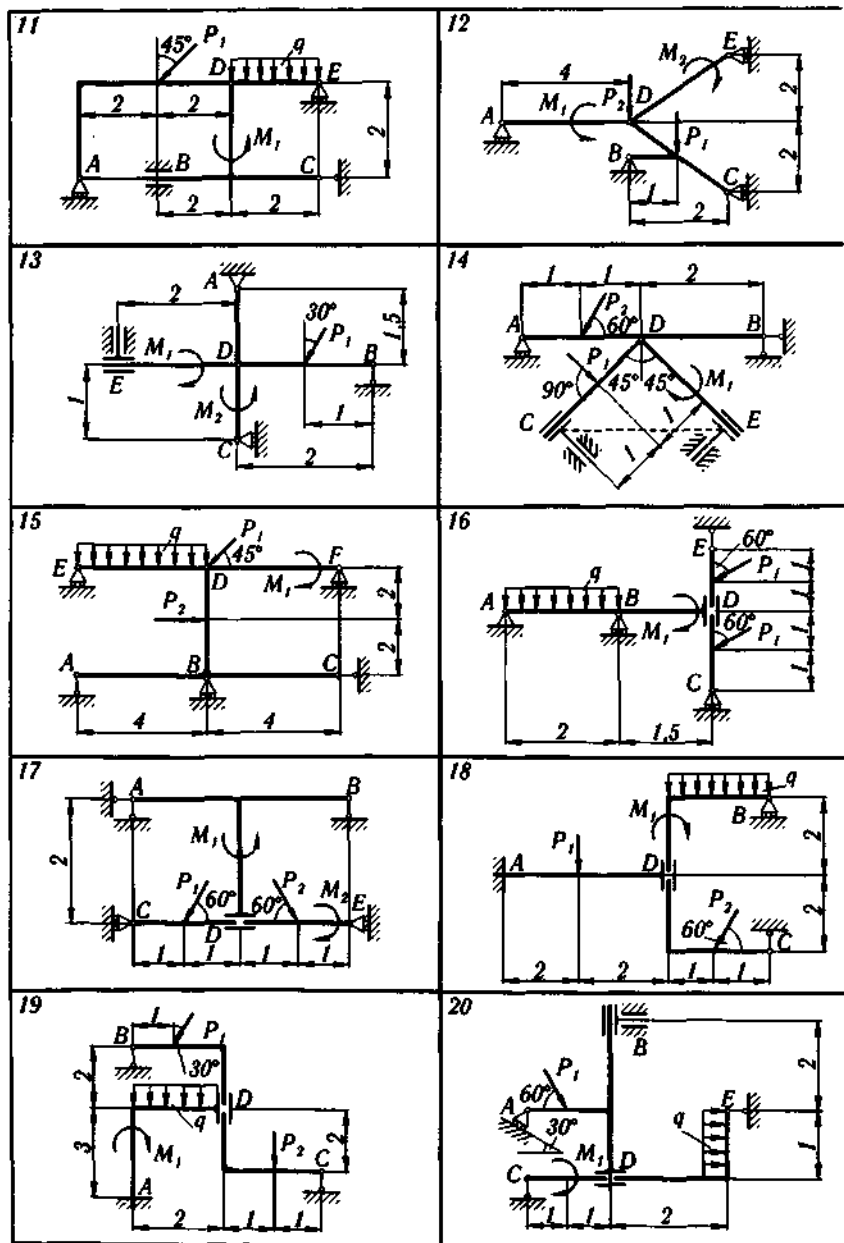


Рис. 26

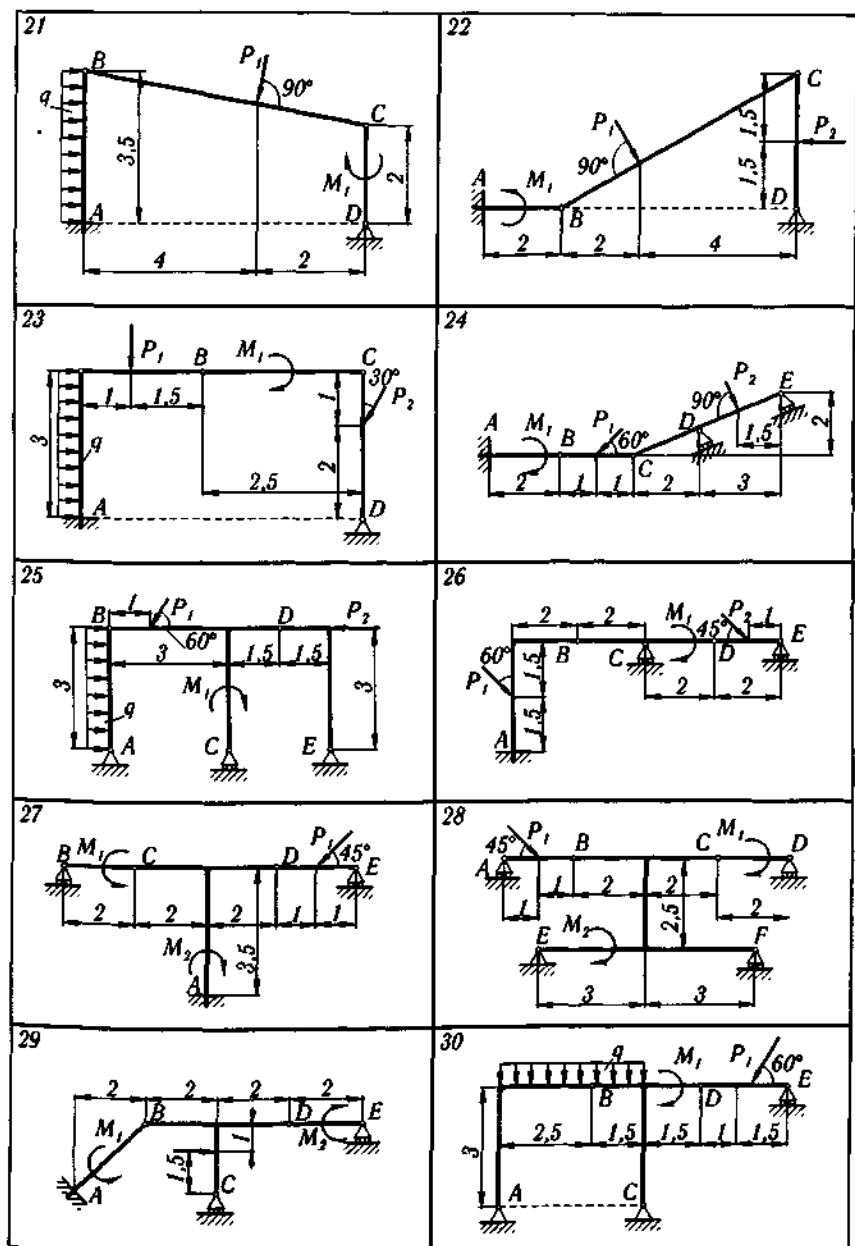


Рис. 27

Таблица 8

Номер варианта (рис. 31-33)	P_1	P_2	M_1	M_2	q	Номер варианта (рис. 31-33)	P_1	P_2	M_1	M_2	q
	кН		кН·м		кН/м		кН		кН·м		кН/м
1	6,0	-	25,0	-	0,8	16	13,0	-	26,0	-	0,9
2	11,0	8,0	34,0	-	1,0	17	7,0	7,0	23,0	34,0	-
3	9,0	12,0	20,0	-	1,0	18	9,0	9,0	29,0	-	1,3
4	10,0	14,0	30,0	20,0	-	19	12,0	7,0	33,0	-	1,2
5	8,0	15,0	22,0	-	1,1	20	11,0	-	38,0	-	1,5
6	10,0	17,0	28,0	-	1,0	21	6,0	-	25,0	-	0,8
7	16,0	10,0	-	30,0	-	22	11,0	8,0	34,0	-	-
8	13,0	12,0	25,0	34,0	-	23	9,0	12,0	20,0	-	1,0
9	11,0	-	29,0	37,0	-	24	10,0	14,0	30,0	-	-
10	12,0	-	34,0	35,0	1,4	25	8,0	15,0	22,0	-	1,1
11	8,0	-	28,0	-	1,0	26	10,0	17,0	28,0	-	-
12	12,0	14,0	36,0	28,0	-	27	16,0	-	36,0	3,0	-
13	15,0	-	30,0	21,0	-	28	13,0	-	25,0	34,0	-
14	10,0	16,0	35,0	-	-	29	11,0	-	29,0	37,0	-
15	12,0	8,0	32,0	-	1,2	30	12,0	-	34,0	-	1,4

одинаково для каждой части конструкции. Истинные направления реакций и моментов определяются по знаку ответа: знак плюс укажет на то, что истинные их направления соответствуют показанным на рисунке.

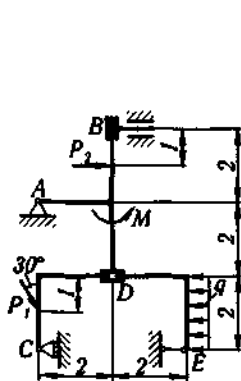


Рис. 28

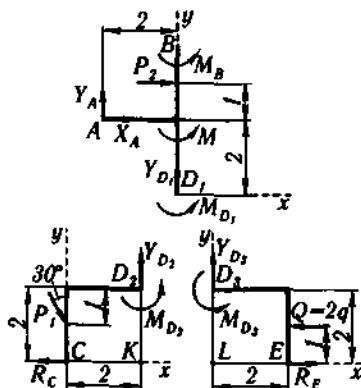


Рис. 29

Общее количество неизвестных реакций в задаче — 11 (X_A , Y_A , M_B , Y_{D1} , Y_{D2} , Y_{D3} , M_{D1} , M_{D2} , M_{D3} , R_C , R_E).

Для каждого из трех тел может быть составлено три независимых уравнения равновесия, что даст в совокупности девять уравнений.

Для того чтобы получить недостающие два уравнения, рассмотрим силы и моменты, приложенные в D_1 , D_2 и D_3 . Из закона о

равенстве действия и противодействия вытекает, что геометрическая сумма этих сил и сумма реактивных моментов должны быть равны нулю. Следовательно, сумма проекций на любую ось всех сил, приложенных в точках D_1 , D_2 и D_3 , должна быть равна нулю. Алгебраическая сумма моментов всех пар в D_1 , D_2 , D_3 также равна нулю. Эти уравнения дополняют уравнения равновесия до системы 11 уравнений.

В рассматриваемом примере сначала рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу ABD_1 (рис. 29):

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + P_2 = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_{D_1} = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -P_2 \cdot 1 + M_B + M + M_{D_1} + Y_{D_1} \cdot 2 = 0. \quad (3)$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу CD_2 :

$$\sum X_i = 0; \quad P_1 \cos 60^\circ - R_C = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -P_1 \cos 30^\circ + Y_{D_2} = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_{iK} = 0; \quad M_{D_2} + P_1 \cos 30^\circ \cdot 2 - P_1 \cos 60^\circ \cdot 1 = 0. \quad (6)$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу ED_3 :

$$\sum X_i = 0; \quad R_E - Q = 0; \quad (7)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_{D_3} = 0; \quad (8)$$

$$\sum M_{iL} = 0; \quad M_{D_3} + Q \cdot 1 = 0. \quad (9)$$

Уравнения, вытекающие из аксиомы о равенстве действия и противодействия:

$$\sum Y_{D_i} = 0; \quad Y_{D_1} + Y_{D_2} + Y_{D_3} = 0; \quad (10)$$

$$\sum M_{D_i} = 0; \quad M_{D_1} + M_{D_2} + M_{D_3} = 0. \quad (11)$$

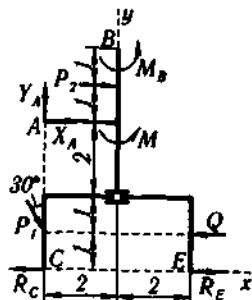


Рис. 30

Решая последовательно уравнения (1), (4), (5) — (10), (2), (11) и (3), получим числовые значения искомых величин. Результаты вычислений приведены в табл. 9.

Для проверки правильности расчетов требуется убедиться в том, что соблюдаются уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 30).

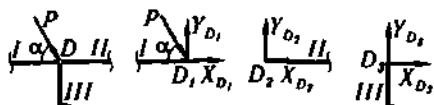


Рис. 31

Например:

$$\sum X_i = X_A + P_2 + P_1 \sin 30^\circ - R_C - Q + R_E =$$

$$= -20 + 20 + 10 \cdot 0,5 - 5 - 4 + 4 = 0;$$

$$\sum Y_i = Y_A - P_1 \cos 30^\circ = 8,66 - 10 \cdot 0,866 = 0;$$

$$\sum M_{iA} = -P_2 \cdot 1 + M_B + M + P_1 \sin 30^\circ \cdot 3 - R_C \cdot 4 + R_E \cdot 4 - Q \cdot 3 =$$

$$= -20 + (-19) + 40 + 10 \cdot 0,5 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = -71 + 71 = 0.$$

Таблица 9

Силы, кН							Моменты, кН·м			
X_A	Y_A	R_C	R_E	Y_{D1}	Y_{D2}	Y_{D3}	M_B	M_{D1}	M_{D2}	M_{D3}
-20	8,66	5	4	-8,66	8,66	0	-19	16,32	-12,32	-4

Примечание. Если тела соединены в точке D шарниром и к нему приложена сосредоточенная сила, то ее можно отнести к любой составной части. На рис. 31 в качестве примера показан случай, когда сила P отнесена к части I конструкции.

Задание С.5. Равновесие сил с учетом сцепления (трения покоя)

Определить минимальное (в вариантах 1—20, 25, 26, 29, 30) или максимальное (в вариантах 21—24, 27, 28) значение силы P и реакции опор системы, находящиеся в покое. Схемы вариантов представлены на рис. 32—34, а необходимые для расчета данные — в табл. 10.

В вариантах 1—20 сцепление (трение покоя) учесть только между колодкой и барабаном. В вариантах 21—30 учесть сцепление в двух опорных точках тела весом G .

Пример выполнения задания (варианты 1—20). Дано: $G = 2$ кН; $Q = 20$ кН; коэффициент сцепления (трения покоя) $f_{\text{сш}} = 0,1$; $\alpha = 20^\circ$; $a = 10$ см; $b = 20$ см (рис. 35).

Определить минимальное значение силы P и реакции опор O , A и B .

Решение. Рассмотрим сначала систему уравнивающих сил, приложенных к телу Q (рис. 36). На тело действуют сила тяжести $\vec{Q}$, реакция нити $\vec{T}$ и нормальная реакция $\vec{N}_1$.

Рассматривая тело Q как материальную точку, составим уравнения равновесия указанных сил:

$$\sum X_i = 0; \quad Q \cos 45^\circ - T = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_1 - Q \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда

$$T = Q \cos 45^\circ; \quad N_1 = Q \sin 45^\circ.$$

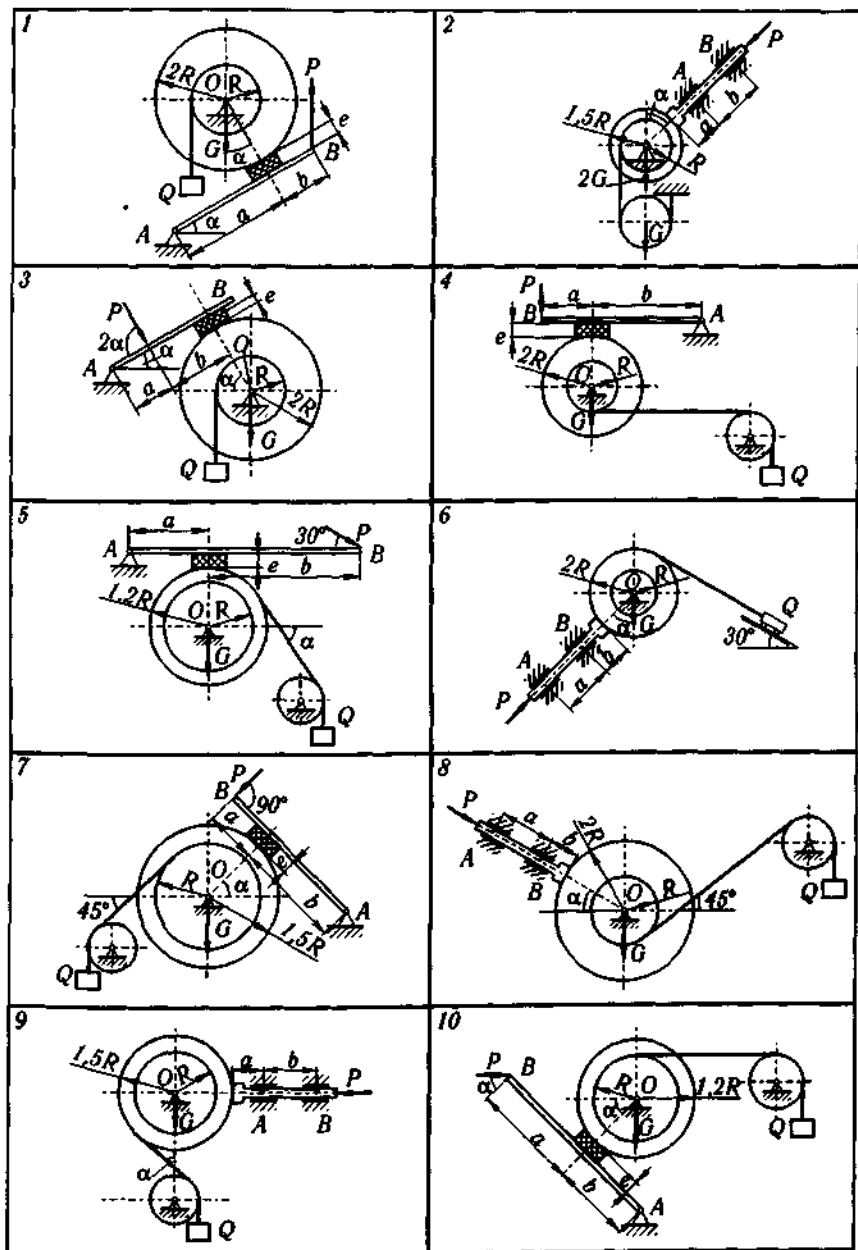


Рис. 32

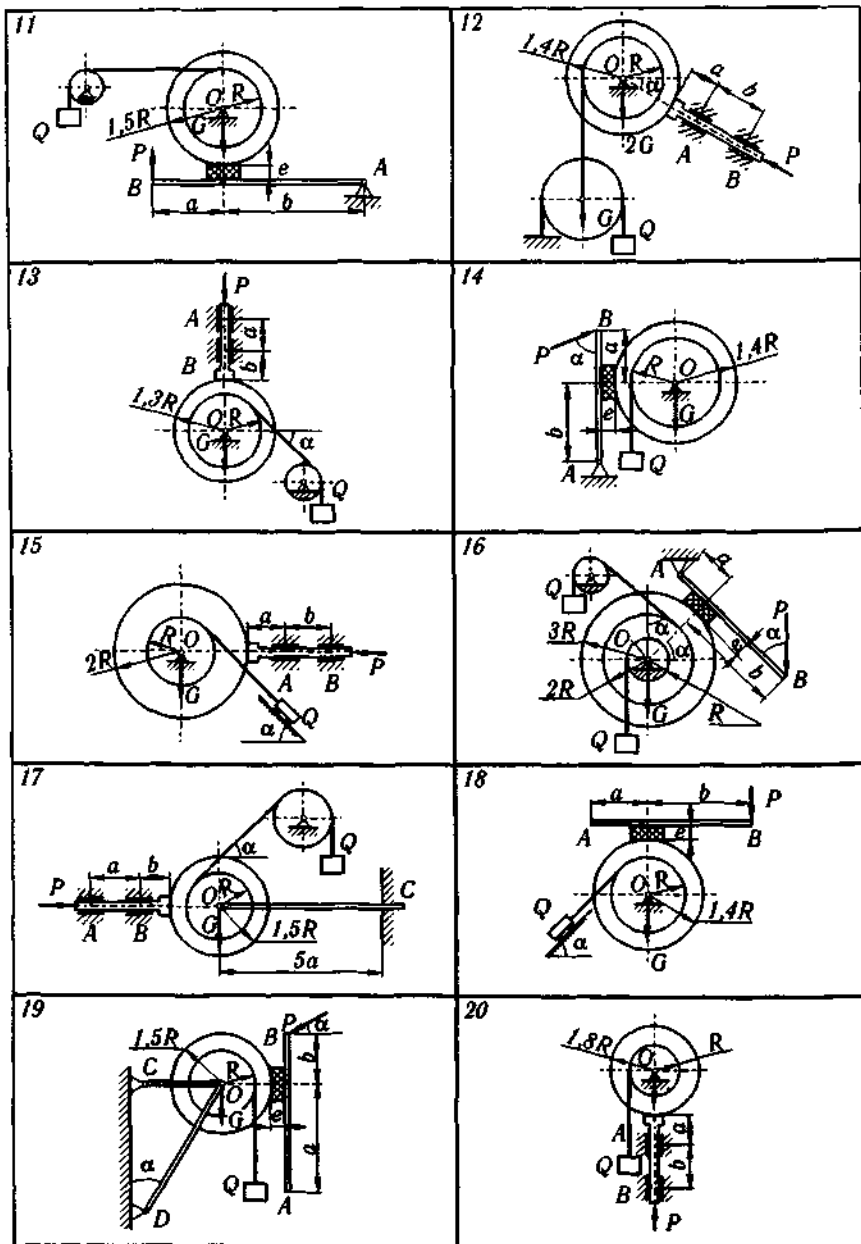


Рис. 33

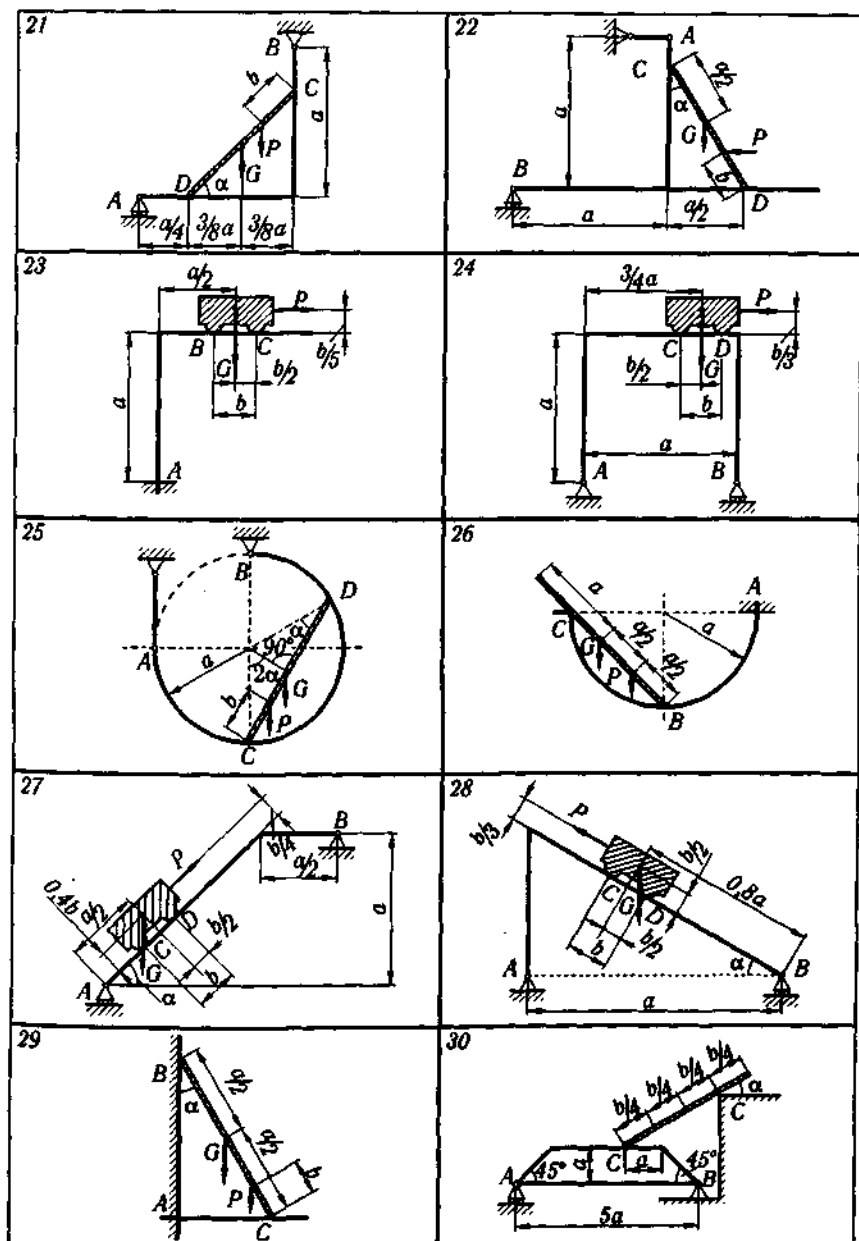


Рис. 34

Таблица 10

Номер варианта (рис. 32-34)	<i>G</i>	<i>Q</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	α ,	Коэффициент сцепления (коэффициент трения покоя)	Точки, в которых определяются реакции
	кН		м			град		
1	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	O, A
2	1,1	-	0,10	0,15	-	30	0,15	O, A, B
3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	O, A
4	1,8	15	0,10	0,40	0,06	-	0,25	O, A
5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	O, A
6	1,6	18	0,15	0,10	-	45	0,35	O, A, B
7	2,0	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	O, A
8	2,2	18	0,20	0,10	-	30	0,35	O, A, B
9	2,1	20	0,10	0,20	-	30	0,30	O, A, B
10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	O, A
11	1,9	24	0,40	0,50	0,06	-	0,20	O, A
12	2,0	25	0,10	0,25	-	30	0,15	O, A, B
13	1,6	20	0,10	0,10	-	45	0,10	O, A, B
14	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	O, A
15	1,8	20	0,10	0,15	-	45	0,20	O, A, B
16	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	O, A
17	1,3	12	0,15	0,15	-	45	0,30	O, A, B, C
18	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	O, A
19	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	A, C, D
20	1,6	18	0,10	0,15	-	-	0,45	O, A, B
21	1,0	-	2	0,50	-	45	0,45	A, B, C, D
22	1,5	-	3	0,80	-	30	0,35	A, B, C, D
23	2	-	5	1,4	-	-	0,40	A, B, C
24	3	-	4	0,8	-	-	0,30	A, B, C, D
25	1,0	-	0,8	0,4	-	30	0,25	A, B, C, D
26	2,0	-	0,4	-	-	-	0,25	A, B, C
27	4	-	4	1,0	-	45	0,35	A, B, C, D
28	5	-	5	0,8	-	30	0,40	A, B, C, D
29	2,0	-	2	0,3	-	30	0,20	A, B, C
30	1	-	2	8,0	-	30	0,20	A, B, C, D

Затем рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану (рис. 37):

$$\sum M_{iO} = 0; \quad -T'R + F_{\text{сц}} \cdot 1,5R = 0, \quad (1)$$

где $F_{\text{сц}}$ — сила сцепления (сила трения покоя);

$$\sum X_i = 0; \quad T' + F_{\text{сц}} \cos \alpha - N_2 \sin \alpha + X_O = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_2 \cos \alpha + F_{\text{сц}} \sin \alpha + Y_O - G = 0. \quad (3)$$

В состоянии предельного равновесия сила P минимальна, а сила сцепления (трения покоя) между тормозной колодкой и барабаном определяется равенством

$$F_{\text{сц}} = f_{\text{сц}} N_2. \quad (4)$$

Из уравнений (1) — (4) получим:

$$F_{\text{сц}} = T'/1,5; \quad N_2 = F_{\text{сц}}/f_{\text{сц}};$$

$$X_O = -T' - F_{\text{сц}} \cos \alpha + N_2 \sin \alpha;$$

$$Y_O = -N_2 \cos \alpha - F_{\text{сц}} \sin \alpha + G.$$

Для определения минимального значения силы P и реакций опор A и B (эти реакции перпендикулярны направляющим A и B , так как трением здесь пренебрегаем) рассмотрим равновесие сил, приложенных к штоку тормозного устройства (рис. 38):

$$\sum M_{iA} = 0; \quad F'_{\text{сц}} a + R_b b = 0; \quad (5)$$

$$\sum X_i = 0; \quad N_2 - P_{\min} = 0; \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A + R_B - F'_{\text{сц}} = 0. \quad (7)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$R_B = -F'_{\text{сц}} a/b; \quad P_{\min} = N_2'; \quad R_A = -R_B + F'_{\text{сц}}.$$

Учитывая заданные в условии числовые значения, получим:

$$\begin{aligned} N_1 &= 14,1 \text{ кН}; & F_{\text{сц}} &= 9,4 \text{ кН}; \\ N_2 &= 94 \text{ кН}; & X_O &= 9,2 \text{ кН}; \\ Y_O &= -89,6 \text{ кН}; & R_B &= -4,7 \text{ кН}; \\ R_A &= 14,1 \text{ кН}; & P_{\min} &= 94 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для определения реакций опоры C достаточно составить уравнения равновесия сил, приложенных к блоку.

Пример выполнения задания (варианты 21—30). Дано: $G = 1 \text{ кН}$; $f_{\text{сц}} = 0,4$; $a = 6 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$ (рис. 39).

Определить максимальное значение силы P и реакции в точках A , B , D и E .

Решение. Рассмотрим сначала систему уравнивающих сил, приложенных к телу весом G (рис. 40). К телу приложена сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, нормальные составляющие реакции $\vec{N}_D$ и $\vec{N}_E$, а также касательные составляющие силы сцепления $F_{\text{сц}(D)}$ и $F_{\text{сц}(E)}$ (силы трения покоя).

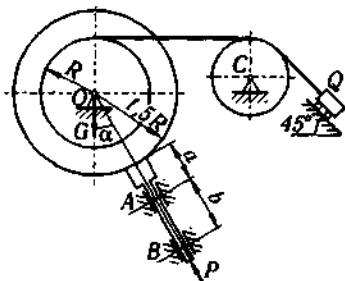


Рис. 35

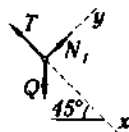


Рис. 36

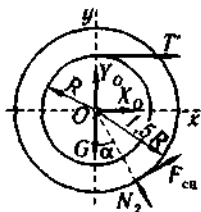


Рис. 37

Составим три уравнения равновесия указанных сил:

$$\sum X_i = 0; \quad -F_{cu(D)} - F_{cu(E)} + P = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_D + N_E - G = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iD} = 0; \quad -Gb/2 + N_E b - Pb/4 = 0. \quad (3)$$

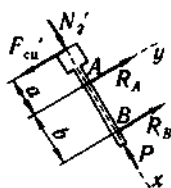


Рис. 38

В случае предельного равновесия $P = P_{\max}$. В этом случае силы сцепления (силы трения покоя) принимают экстремальные значения, а система уравнений (1) — (3) дополняется равенствами

$$F_{cu(D)} = f_{cu} N_D, \quad (4)$$

$$F_{cu(E)} = f_{cu} N_E. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (1) — (5), получаем:

$$P_{\max} = f_{cu} G; \quad N_E = (G/2)(1 + 0,5 f_{cu}); \quad N_D = (G/2)(1 - 0,5 f_{cu}).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P_{\max} &= 0,4 \text{ кН}; & N_E &= 0,6 \text{ кН}; \\ N_D &= 0,4 \text{ кН}; & F_{cu(D)} &= 0,16 \text{ кН}; \\ F_{cu(E)} &= 0,24 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Совокупности сил $\vec{N}_D$ и $\vec{F}_{cu(D)}$, $\vec{N}_E$ и $\vec{F}_{cu(E)}$ образуют соответственно опорные реакции в точках D и E.

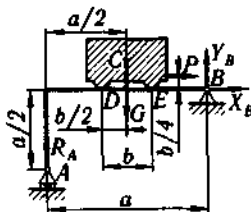


Рис. 39

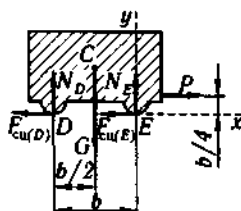


Рис. 40

Рассмотрим теперь равновесие системы сил $\vec{R}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{G}$ и $\vec{P} = \vec{P}_{\max}$, приложенных ко всей системе (см. рис. 39):

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + P_{\max} = 0; \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - G + Y_B = 0; \quad (7)$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad -P_{\max} \cdot b/4 + G \cdot a/2 - R_A \cdot a = 0. \quad (8)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$X_B = -P_{\max}; \quad R_A = (G \cdot a/2 - P_{\max} \cdot b/4)/a; \quad Y_B = G - R_A.$$

Отсюда $X_B = -0,4$ кН; $R_A = 0,467$ кН; $Y_B = 0,533$ кН.

II. СИСТЕМА СИЛ, НЕ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Задание С.6. Приведение системы сил к простейшему виду

Определить главный вектор $\vec{R}^*$ и главный момент $\vec{M}_O$ заданной системы сил относительно центра O и установить, к какому простейшему виду приводится эта система. Размеры параллелепипеда (рис. 41), а также модули и направления сил указаны в табл. 11.

Таблица 11

Номер варианта	Размеры прямоугольного параллелепипеда (рис. 41), см			Силы системы											
				$\vec{F}_1$			$\vec{F}_2$			$\vec{F}_3$			$\vec{F}_4$		
	а	б	с	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление
1	60	30	20	4	F	FK	6	A	AE	8	B	BA	10	D	DK
2	30	40	40	20	A	AC	24	O	OD	10	K	KB	-	-	-
3	20	10	10	4	B	BA	2	C	CK	8	E	ED	-	-	-
4	30	40	20	15	A	AB	20	K	KC	-	-	-	-	-	-
5	20	20	20	8	O	OD	10	D	DF	8	K	KC	10	B	BO
6	30	40	20	8	A	AO	4	E	EF	6	F	FB	20	D	DF
7	30	40	40	10	B	BK	16	C	CO	20	D	DF	-	-	-
8	20	30	10	10	O	OA	10	B	BF	10	D	DK	-	-	-
9	30	40	30	10	A	AC	20	K	KB	-	-	-	-	-	-
10	10	10	20	20	A	AC	30	O	OD	20	K	KE	30	E	EA
11	10	40	30	8	A	AE	12	C	CB	20	O	OK	16	K	KD
12	4	8	6	6	A	AE	20	F	FA	10	C	CK	8	D	DK
13	20	20	20	8	O	OB	8	C	CD	8	E	EK	-	-	-
14	20	5	8	40	B	BA	30	O	OD	-	-	-	-	-	-
15	40	20	40	15	E	AE	10	P	FE	15	B	BF	10	D	DK
16	30	30	30	6	O	OC	10	B	BK	20	K	KO	-	-	-
17	15	15	20	30	E	EB	40	B	BK	10	O	OC	32	D	DO
18	10	15	20	40	A	AB	20	K	KC	16	D	DE	-	-	-
19	20	15	15	40	C	CA	20	D	DF	-	-	-	-	-	-
20	20	20	10	10	A	AD	20	B	BO	10	K	KB	20	D	DF
21	20	20	20	10	O	OD	8	B	BA	6	K	KF	8	D	DK
22	40	20	30	30	O	OA	50	E	EB	50	C	CD	25	D	DK
23	50	20	40	10	O	OA	5	F	FB	8	K	KD	-	-	-
24	30	40	30	40	A	AD	20	K	KE	-	-	-	-	-	-

Номер варианта	Размеры прямоугольного параллелепипеда (рис. 41), см			Силы системы											
				$\vec{F}_1$			$\vec{F}_2$			$\vec{F}_3$			$\vec{F}_4$		
	a	b	c	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление
25	30	20	40	25	A	AC	20	B	BA	25	K	KE	20	D	DK
26	30	40	20	10	E	EA	12	O	OC	10	C	CK	8	K	KF
27	30	20	40	8	O	OD	6	C	CB	4	D	DK	-	-	-
28	10	14	40	4	O	OA	10	F	FE	16	C	CK	-	-	-
29	30	30	40	80	B	BK	100	D	DC	-	-	-	-	-	-
30	40	20	30	10	A	AD	5	B	BO	10	K	KB	5	D	DF

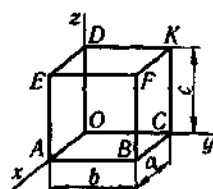


Рис. 41

При выполнении задания необходимо сделать следующее.

1. Изобразить заданную систему сил, выполнив построение параллелепипеда в масштабе, показав $\angle xOy$ на чертеже равным 135° ; сокращение размеров по оси Ox принять равным $1 : 2$.

2. Выбрав систему координатных осей, определить модуль и направление главного вектора заданной системы сил по его проекциям на координатные оси и изобразить $\vec{R}^*$ на чертеже.

3. Вычислить главный момент заданной системы сил относительно центра O по его проекциям на координатные оси и изобразить $\vec{M}_O$ на чертеже.

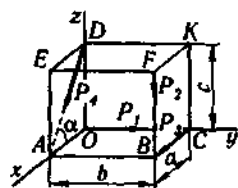


Рис. 42

4. Вычислить наименьший главный момент заданной системы сил.

5. На основании результатов вычислений главного вектора и наименьшего главного момента $\vec{M}^*$ установить, к какому простейшему виду приводится заданная система сил. При этом необходимо сделать следующее:

а) если заданная система сил приводится к паре сил, то показать момент этой пары, приложив его к точке O ;

б) если заданная система сил приводится к равнодействующей, то найти уравнение линии действия равнодействующей, определить точки пересечения этой линии координатных плоскостей и изобразить $\vec{R}$ на чертеже;

в) если заданная система сил приводится к динаме (силовому винту), то найти уравнения центральной оси, определить точки пересечения этой осью координатных плоскостей и изобразить $\vec{R}^*$ и $\vec{M}^*$ на чертеже.

Пример выполнения задания. Дана система сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$; модули, точки приложения и направления этих сил указаны в табл. 12.

Таблица 12

Размеры прямоугольного параллелепипеда, см			Силы системы											
			$\vec{P}_1$			$\vec{P}_2$			$\vec{P}_3$			$\vec{P}_4$		
a	b	c	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление
30	50	40	10	O	OC	4	F	FB	4	C	CB	11	D	DA

Решение. 1. Определение главного вектора заданной системы сил. Заданная система сил показана на рис. 42.

Предварительно определяем

$$\cos \alpha = a / \sqrt{a^2 + c^2}; \quad \sin \alpha = c / \sqrt{a^2 + c^2}.$$

В данном случае $\cos \alpha = 0,6$; $\sin \alpha = 0,8$.

Проекции главного вектора на оси координат:

$$X = P_3 + P_4 \cos \alpha; \quad Y = P_1; \quad Z = -P_2 - P_4 \sin \alpha.$$

Модуль главного вектора

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = X/R^*;$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = Y/R^*;$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = Z/R^*.$$

В соответствии с исходными данными получаем: $X = 10,6$ Н; $Y = 10,0$ Н; $Z = -12,8$ Н; $R^* = 19,4$ Н;

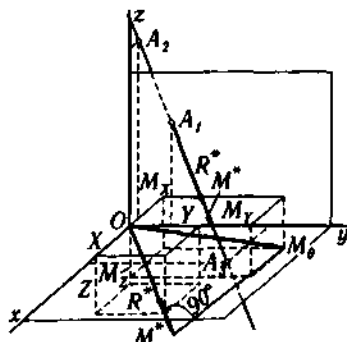


Рис. 43

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = 0,547; \quad \cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = 0,515; \quad \cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = -0,660.$$

Главный вектор показан на рис. 43.

2. Определение главного момента заданной системы сил относительно центра O.

Главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей:

$$M_x = -P_2 b; \quad M_y = P_2 a + P_4 \cos \alpha c; \quad M_z = -P_3 b.$$

Модуль главного момента

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = M_x/M_O; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = M_y/M_O; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = M_z/M_O.$$

В результате вычислений имеем:

$$M_x = -200 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad M_y = 384 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$M_z = -200 \text{ Н} \cdot \text{см}; \quad M_O = 477 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = -0,419; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = 0,805; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = -0,419.$$

Таблица 13

Точки	Координаты, см		
	x	y	z
A ₁	0	5,1	25,5
A ₂	-5,4	0	32,0
A ₃	21,1	25,0	0

Главный момент $\vec{M}_O$ показан на рис. 43.
3. Вычисление наименьшего главного момента заданной системы сил:

$$M^* = (XM_x + YM_y + ZM_z)/R^*.$$

По этой формуле получаем

$$M^* = 221 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

4. Так как $R^* \neq 0$, $M^* \neq 0$, то заданная система сил приводится к динаме (силовому винту).

Уравнение центральной оси таково:

$$[M_x - (yZ - zY)]/X = [M_y - (zX - xZ)]/Y = [M_z - (xY - yX)]/Z = M^*/R^*.$$

Из этих трех уравнений независимыми являются только два. Подставляя в два из этих уравнений найденные числовые значения величин, находим:

$$[M_x - (yZ - zY)]/X = M^*/R^*; \quad 6,4y + 5z = 160;$$

$$[M_y - (zX - xZ)]/Y = M^*/R^*; \quad 5,3z + 6,4x = 135.$$

Значения координат точек пересечения центральной осью координатных плоскостей, определенные с помощью этих уравнений, помещены в табл. 13.

Центральная ось системы сил показана на рис. 43.

Примечание. Если силы приводятся к равнодействующей, т. е. $M^* = 0$, а $\vec{R} = \vec{R}^* \neq 0$, то уравнения линии действия равнодействующей:

$$M_x = yZ - zY; \quad M_y = zX - xZ; \quad M_z = xY - yX,$$

где X, Y, Z — проекции равнодействующей силы на координатные оси; M_x, M_y, M_z — главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей.

Из этих трех уравнений независимыми также являются только два.

Задание С.7. Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рис. 44—46. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 14.

Таблица 14

Номер варианта (рис. 44—46)	Силы, кН			Размеры, см					Номер варианта (рис. 44—46)	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r		Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	-	20	20	30	10	15	5	16	4	-	2	50	30	-	-	-
2	4	-	2	20	10	30	10	10	17	2	-	1	15	10	20	20	5
3	20	-	18	400	400	450	-	-	18	6	-	2	60	40	60	-	-
4	3	-	2	30	20	40	15	10	19	-	8	2	20	30	40	20	15
5	5	-	3	30	40	20	20	15	20	4	-	-	60	40	20	-	-
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	-	-	40	60	30	-	-
7	-	3	1	30	10	5	18	6	22	-	-	5	20	50	30	-	-
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	-	-	4	40	30	50	-	-
9	5	-	3	20	15	10	30	40	24	5	-	2	-	-	-	-	-
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	-	-	3	50	50	60	-	-
11	-	2	1	20	30	15	15	10	26	-	-	1	20	60	40	-	-
12	4	-	1	25	20	8	15	10	27	10	-	-	50	30	50	-	-
13	10	-	5	40	30	20	25	15	28	35	-	32	400	200	200	-	-
14	-	2	1	30	90	20	30	10	29	-	4	3	15	20	15	15	10
15	3	-	2	60	20	40	20	5	30	5	-	-	40	40	10	-	-

Примечания. 1. Считать, что в вариантах 16, 18, 22—26 петли не препятствуют перемещению рамы вдоль AB .

2. В вариантах 20 и 21 соприкасающиеся поверхности считать абсолютно гладкими.

Пример выполнения задания. Дано: рама $ABCD$ весом $G = 1$ кН, $P = 2$ кН, $\vec{P} \parallel Ay$, $AD = BC = 60$ см, $AB = CD = 100$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ (рис. 47). Найти реакции опор A , B и C (A — шаровой шарнир, B — петля, C — стержневая опора).

Решение. К раме $ABCD$ приложены сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, реакция $\vec{S}$ стержня CE и реакции опор A и B . Реакция шарового шарнира A определяется тремя составляющими: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, а реакция петли B — двумя: $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$ (рис. 48).

Из этих сил — шесть неизвестных. Для их определения можно составить шесть уравнений равновесия.

Уравнения моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum M_{iz} = 0; \quad -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ AB + Z_B \cdot AB = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_{iy} = 0; \quad G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

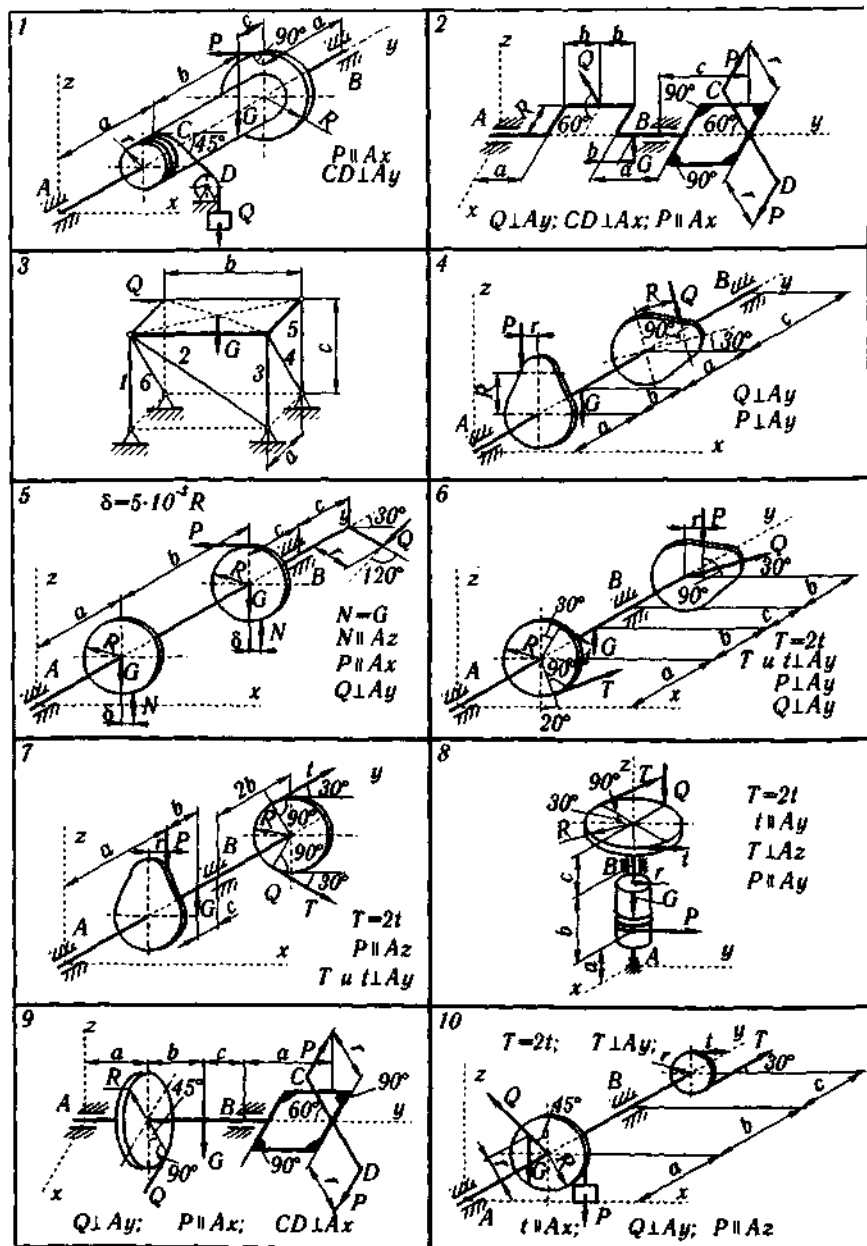


Рис. 44

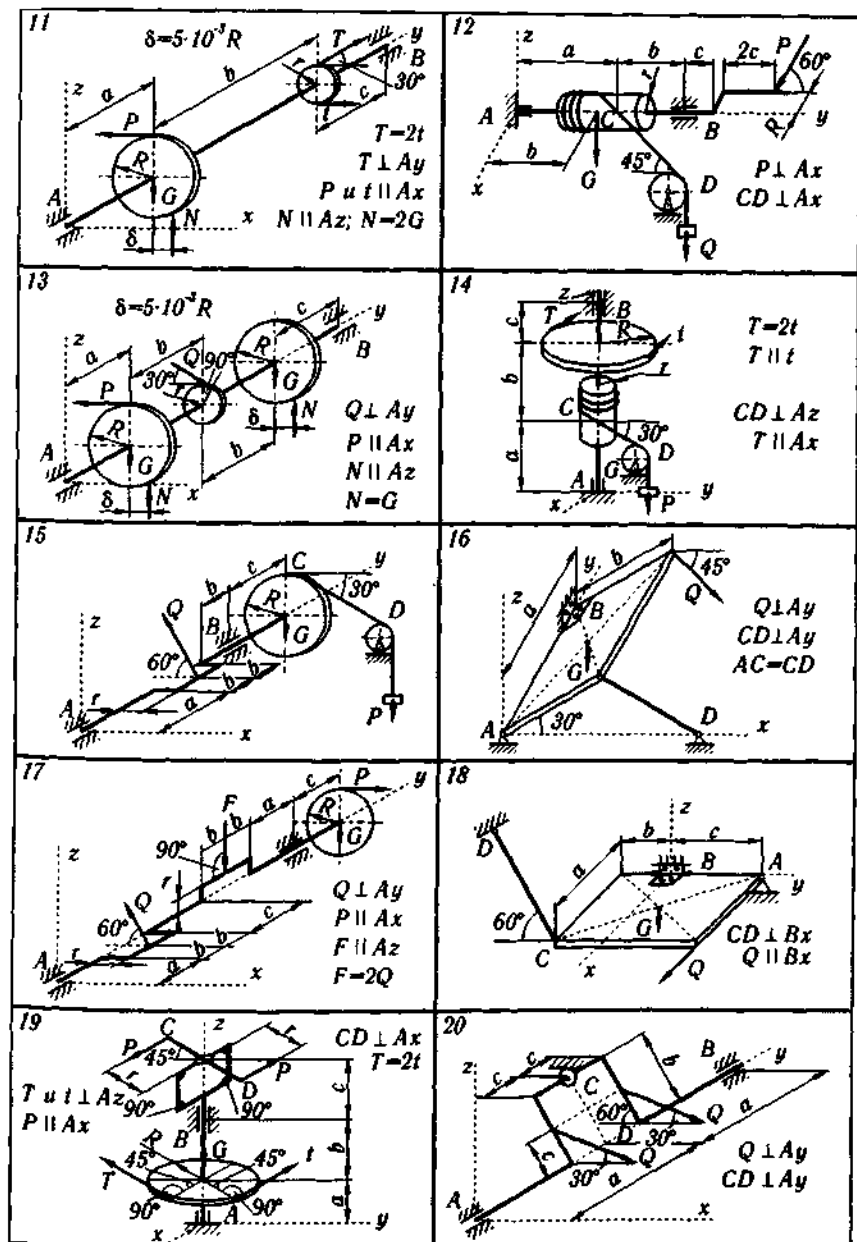


Рис. 45

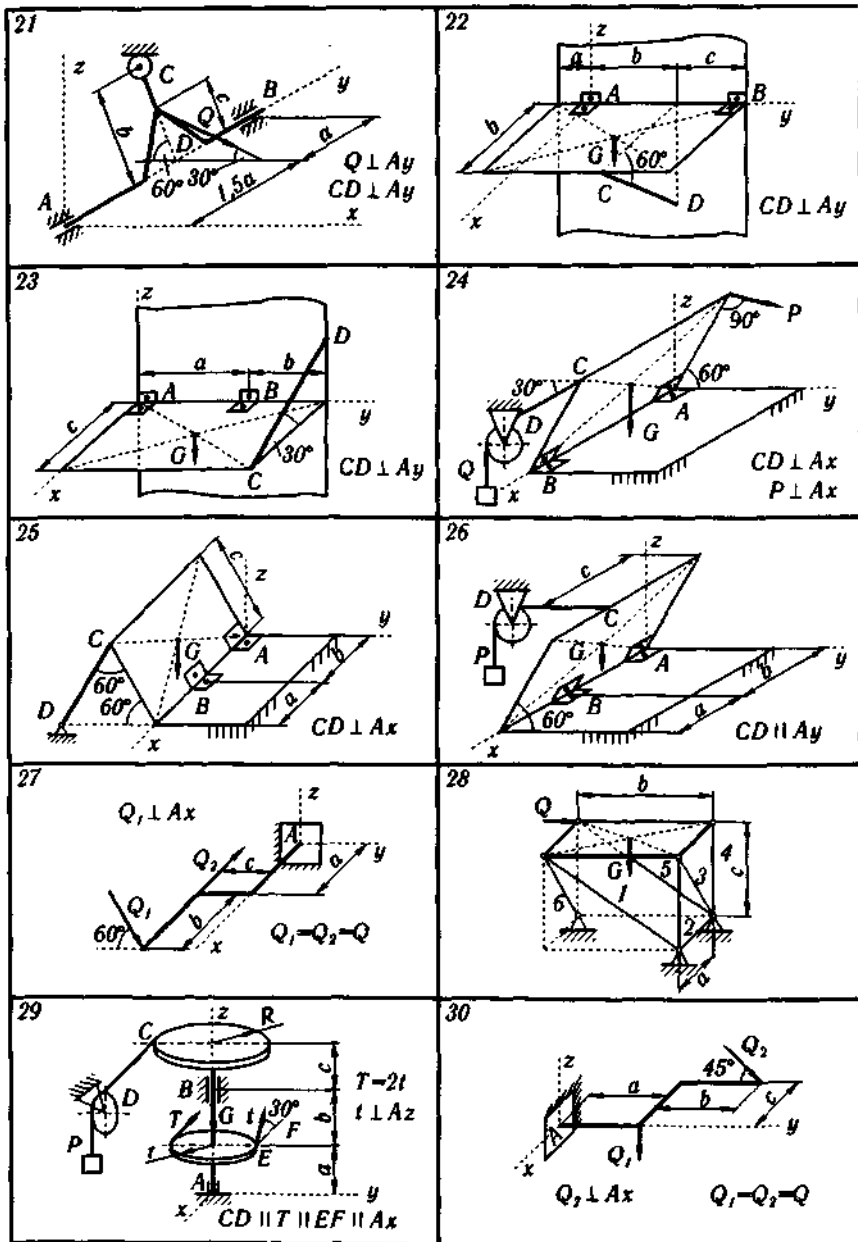


Рис. 46

$$\sum M_{iz} = 0; \quad P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ AB - X_B \cdot AB = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) определяем S , затем из уравнений (1) и (3) находим Z_B и X_B . Уравнения проекций сил на оси координат:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0, \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Из этих уравнений находим X_A , Y_A и Z_A .

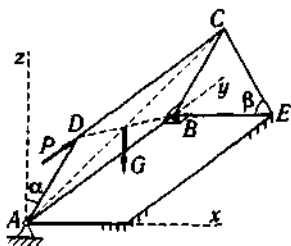


Рис. 47

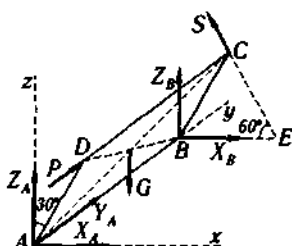


Рис. 48

Результаты вычислений приведены в табл. 15.

Таблица 15

Силы, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,29

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Задание С.8. Определение положения центра тяжести тела

Найти координаты центра тяжести плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней одинакового погонного веса (варианты 1—6), плоской фигуры (варианты 7—18 и 24—30) или объема (варианты 19—23), показанных на рис. 49—51. В вариантах 1—6 размеры указаны в метрах, а в вариантах 7—30 — в сантиметрах.

Пример выполнения задания. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. 52.

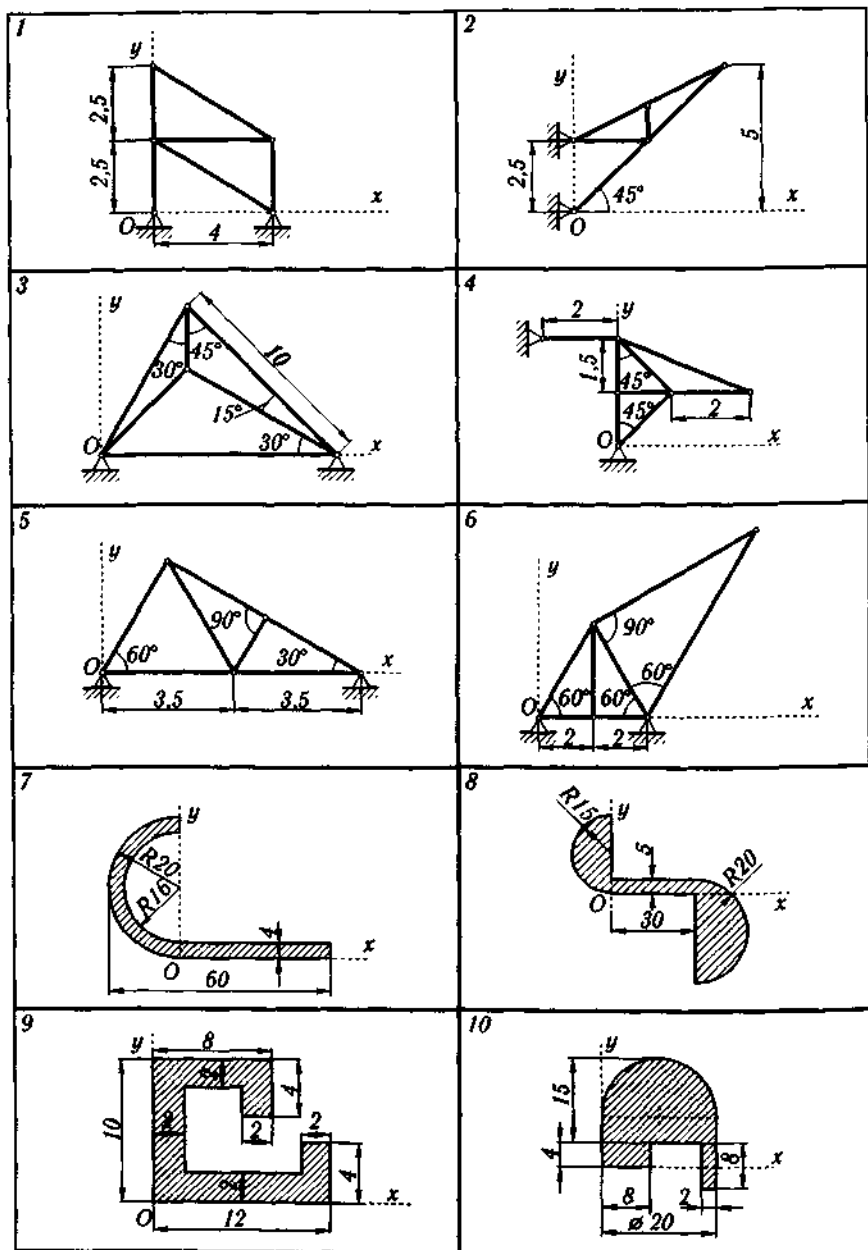


Рис.49

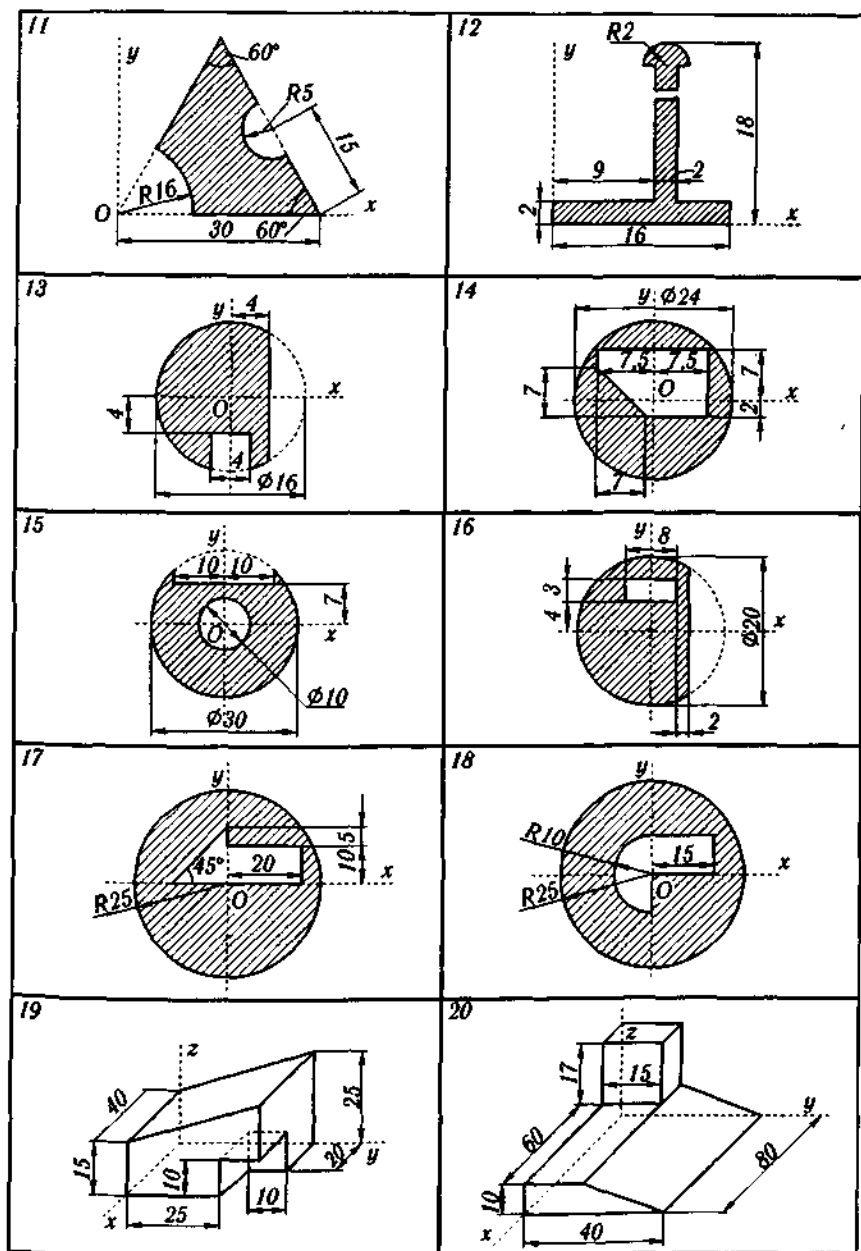


Рис. 50

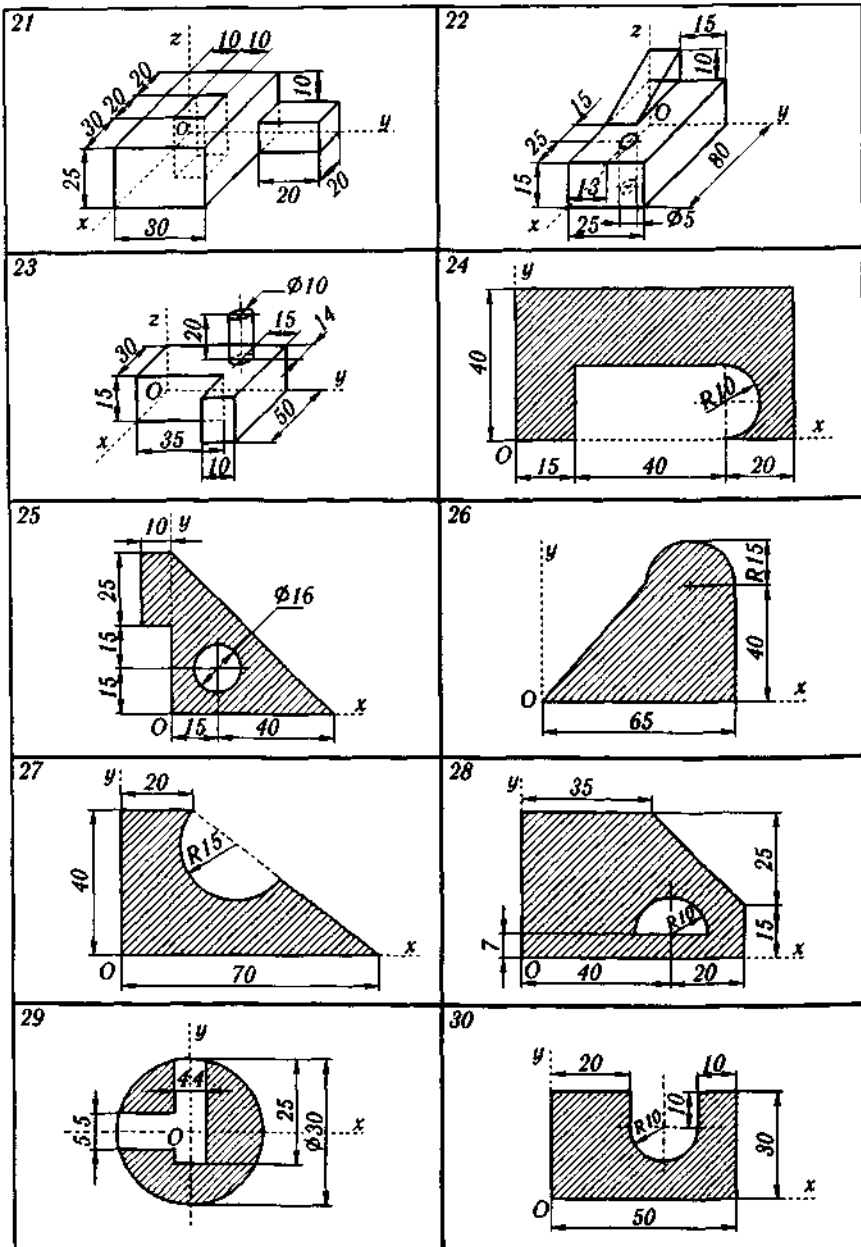


Рис. 51

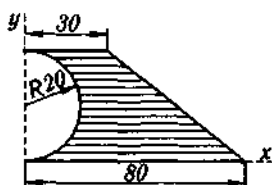


Рис. 52

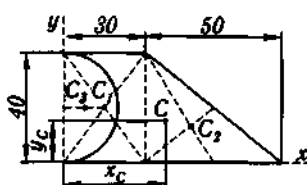


Рис. 53

Решение. Координаты центра тяжести плоской фигуры определяем по формулам

$$x_C = S_y/F; \quad y_C = S_x/F. \quad (1)$$

Здесь $S_y = \sum F_i x_i$, $S_x = \sum F_i y_i$ — статические моменты фигуры относительно осей y и x , F — площадь фигуры.

Чтобы воспользоваться формулами (1), делим плоскую фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади F_i и координаты центров тяжести x_i и y_i .

В данном случае в качестве таких частей принимаем прямоугольник, треугольник и половину круга (рис. 53). Площадь половины круга, вырезанной из прямоугольника, считаем отрицательной.

Все расчетные данные заносим в таблицу (табл. 16).

Таблица 16

Номер элемента	$F_i, \text{см}^2$	$x_i, \text{см}$	$y_i, \text{см}$	$S_{iy} = F_i x_i, \text{см}^3$	$S_{ix} = F_i y_i, \text{см}^3$
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	-628	8,5	20,0	-5338	-12560
Σ	1572	-	-	59362	24700

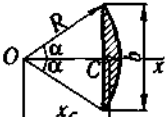
По формулам (1) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_C = 59362/1572 = 37,8 \text{ см}; \quad y_C = 24700/1572 = 15,7 \text{ см}.$$

Центр тяжести площади указан на рис. 53.

Таблица 17

Плоская фигура		Площадь	Координаты центра тяжести
Треугольник		$F = \frac{1}{2} a h_0$	$y_C = \frac{1}{3} h_0$ $x_C = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — координаты вершин O, A, B
Круговой сектор		$F = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3F}$

Плоская фигура		Площадь	Координаты центра тяжести
	$\alpha = \pi/2$ (полукруг)	$F = \pi R^2/2$	$x_C = 4R/(3\pi)$
	$\alpha = \pi/6$	$F = \pi R^2/6$	$x_C = 2R/\pi$
Круговой сегмент		$F = \frac{1}{2} R^2 \times$ $\times (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} =$ $= \frac{b^3}{12F}$

Примечание. Площади и координаты центров тяжести некоторых плоских фигур, встречающихся при выполнении заданий, приведены в табл. 17.

III. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТАТИКИ

Задание С.9. Определение реакций опор составных конструкций с внутренними односторонними связями

Найти реакции опор и силы во внутренних двусторонних и односторонних связях составной конструкции.

Схемы конструкций представлены на рис. 54—56 (размеры — в м), нагрузка указана в табл. 18. Учесть, что при заданной схеме нагружения конструкции реакция возникает только в одной из односторонних связей E или F . Зазоры отсутствуют. При снятии внешних сил реакции внешних и внутренних связей обращаются в ноль.

Таблица 18

Номер варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН·м	q , кН/м	Примечания
1	8	9	10	1,5	EK и NF — нити
2	9	10	12	1	EK и NF — нити
3	12	15	20	2	
4	7	5	13	1,2	
5	8	12	16	1	EK и NF — нити
6	9	14	8	3	
7	9	6	10	1,5	
8	8	10	12	2	EK и NF — нити
9	6	7	8	1	
10	7	5	14	1,8	NF — нить
11	12	14	6	1,4	
12	20	15	23	3	
13	11	12	16	2,2	
14	8	10	12	1,5	
15	22	18	20	1,8	

Номер варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	M , кН·м	q , кН/м	Примечания
16	8	7	10	1,2	
17	20	18	24	2	
18	16	15	20	2,8	
19	18	14	12	3	EK и NF — нити
20	19	14	18	2,5	EK — нить
21	6	11	15	1,8	
22	10	10	11	2	
23	16	15	9	3	EK и NF — нити
24	14	11	20	2	NF — нить
25	8	9	18	1,6	
26	6	5	7	1,6	
27	16	16	20	2,5	
28	14	11	15	1,9	
29	16	12	14	2	EK и NF — нити
30	17	23	18	1,7	EK и NF — нити

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 57); $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 3$ кН, $M = 20$ кН·м, $q = 1$ кН/м.

Определить реакции опор A и B , а также усилия во внутренних двусторонних связях (шарнирах C и D) и в односторонних связях (E и F).

Решение. Так как в условии задачи отсутствует информация о том, в какой из односторонних связей E или F возникает реакция, необходимо рассмотреть два случая.

1-й случай: $R_F = 0$. В этом случае (рис. 58) элементы ED и AC конструкции прижаты один к другому и, следовательно, направление реакции R_E будет таким, как показано на рис. 59. Связь F «не работает».

Сначала рассмотрим силы, приложенные к части AC конструкции (рис. 59). Уравнения равновесия этой системы имеют следующий вид:

$$\sum M_{iC} = 0; \quad R_E \cdot 2 + M - X_A \cdot 3 + Y_A \cdot 7 = 0; \quad (1)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_C + X_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + R_E + Y_C = 0. \quad (3)$$

Затем запишем систему уравнений равновесия для сил, приложенных к элементу CD (рис. 60):

$$\sum M_{iD} = 0; \quad -X'_C \cdot 1 - Y'_C \cdot 10 - P_2 \cdot 10 = 0; \quad (4)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X'_C + X_D = 0; \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y'_C + P_2 + Y_D = 0. \quad (6)$$

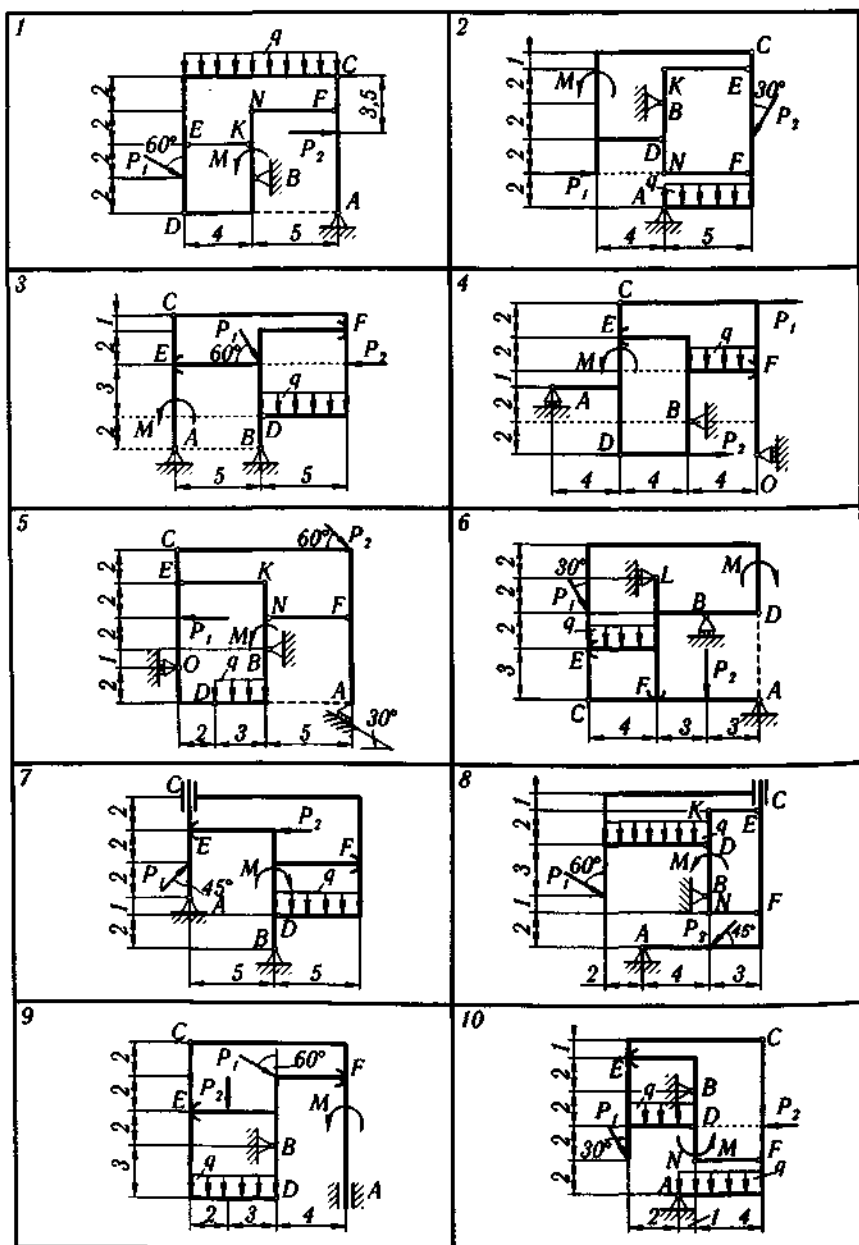


Рис. 54

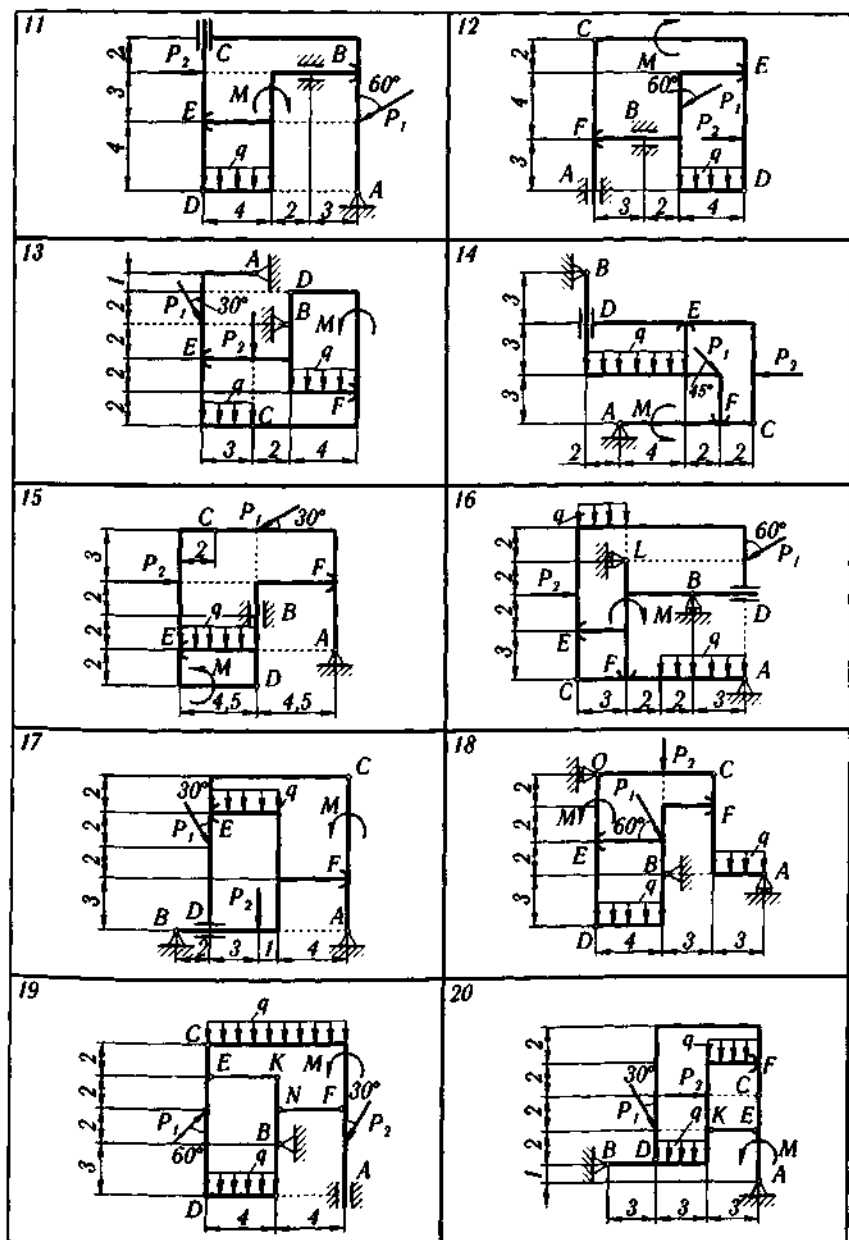


Рис. 55

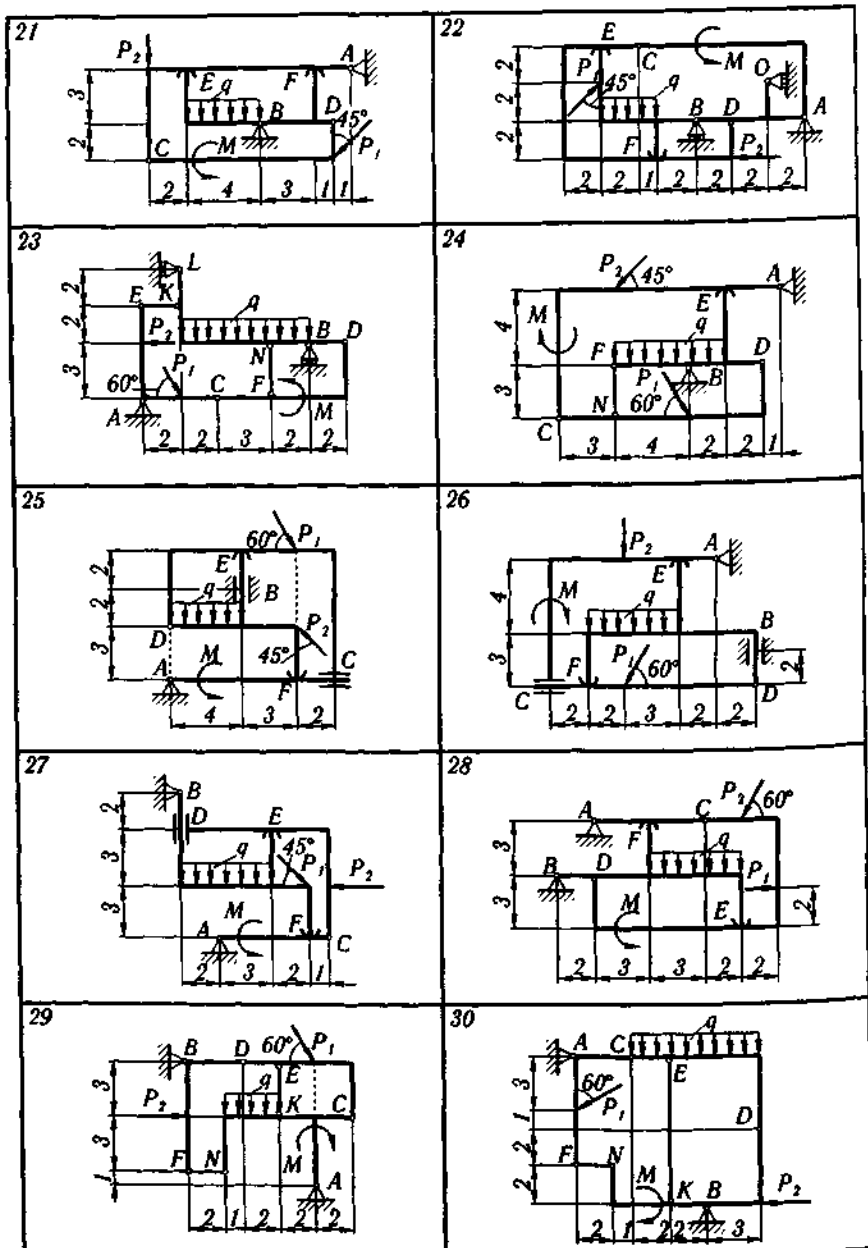


Рис. 56

Далее переходим к рассмотрению системы уравнивающих сил, приложенных к элементу ED (рис. 61).

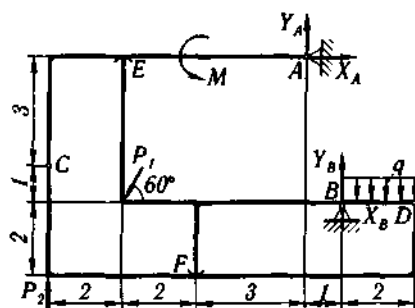


Рис. 57

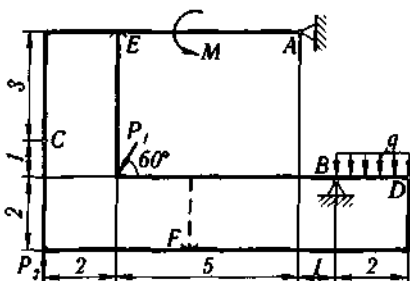


Рис. 58

Уравнения равновесия сил, приложенных к этой части конструкции, имеют следующий вид:

$$\sum M_{iB} = 0; \quad R'_E \cdot 6 + P_1 \sin 60^\circ \cdot 6 - Q \cdot 1 + Y'_D \cdot 2 = 0; \quad (7)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X'_D + X_B - P_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (8)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -R'_E - P_1 \sin 60^\circ + Y_B - Q + Y'_D = 0. \quad (9)$$

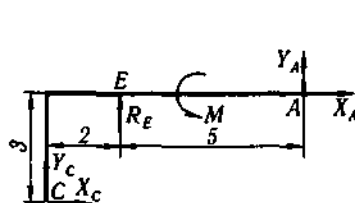


Рис. 59

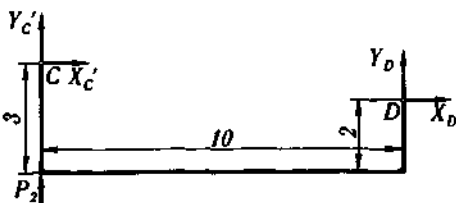


Рис. 60

Помимо уравнений равновесия (1) — (9) запишем уравнения, выражающие равенство действия и противодействия в шарнирах C и D .

Для шарнира C

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_C + Y'_C = 0; \quad (10)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_C + X'_C = 0. \quad (11)$$

Для шарнира D

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_D + Y'_D = 0; \quad (12)$$

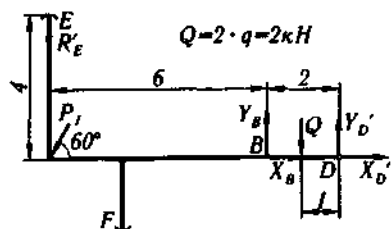


Рис. 61

$$\sum X_i = 0; \quad X_D + X'_D = 0. \quad (13)$$

Из уравнений (10) — (13) следует:

$$Y_C = -Y'_C; \quad X_C = -X'_C; \quad Y_D = -Y'_D; \quad X_D = -X'_D.$$

Учитывая это, а также $R'_E = R_E$, представим систему уравнений (1) — (9) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} 2R_E + M - 3X_A + 7Y_A &= 0; \\ X_C + X_A &= 0; \\ Y_A + R_E + Y_C &= 0; \\ X_C + 10Y_C - 10P_2 &= 0; \\ -X_C + X_D &= 0; \\ -Y_C + P_2 + Y_D &= 0; \\ 6R_E + 6P_1 \sin 60^\circ - Q \cdot 1 - 2Y_D &= 0; \\ -X_D + X_B - P_1 \cos 60^\circ &= 0; \\ -R_E - P_1 \sin 60^\circ + Y_B - Q - Y_D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Система линейных алгебраических уравнений (14) определяет истинные значения всех искомых сил лишь при условии, что ее корень $R_E > 0$.

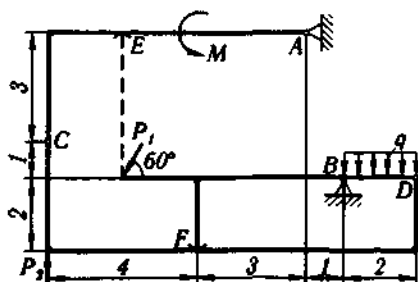


Рис. 62

2-й случай: $R_E = 0$. В этом случае (рис. 62) элементы FD и CD прижаты один к другому и, следовательно, направление реакции R_F будет таким, как показано на рис. 63 и 64 ($R'_F = R_F$). Связь E "не работает".

Рассмотрим систему сил, приложенных к части AC конструкции (рис. 65). Уравнения равновесия этой системы сил имеют следующий вид:

$$\sum M_{iC} = 0; \quad M + Y_A \cdot 7 - X_A \cdot 3 = 0; \quad (15)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + X_C = 0; \quad (16)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_C = 0. \quad (17)$$

Запишем уравнения равновесия сил, приложенных к элементу CD конструкции (см. рис. 63):

$$\sum M_{iD} = 0; \quad -Y'_C \cdot 10 - X'_C \cdot 1 - P_2 \cdot 10 + R_F \cdot 6 = 0; \quad (18)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X'_C + X_D = 0; \quad (19)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y'_C + P_2 - R_F + Y_D = 0. \quad (20)$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к элементу FD (см. рис. 64):

$$\sum M_{iB} = 0; \quad 6P_1 \sin 60^\circ - R_F \cdot 4 - Q \cdot 1 + Y'_D \cdot 2 = 0; \quad (21)$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + X'_D - P_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (22)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_B + Y'_D - Q + R_F - P_1 \sin 60^\circ = 0. \quad (23)$$

Учитывая и здесь результаты, вытекающие из уравнений (10) — (13), перепишем систему уравнений (15) — (23) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} M + 7Y_A - 3X_A &= 0; \\ X_A + X_C &= 0; \\ Y_A + Y_C &= 0; \\ 10Y_C + X_C - 10P_2 + 6R_F &= 0; \\ -X_C + X_D &= 0; \\ -Y_C + P_2 - R_F + Y_D &= 0; \\ 6P_1 \sin 60^\circ - 4R_F - Q - 2Y_D &= 0; \\ X_B - X_D - P_1 \cos 60^\circ &= 0; \\ Y_B - Y_D - Q + R_F - P_1 \sin 60^\circ &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Система линейных уравнений (24) определяет истинные значения всех неизвестных лишь в случае, когда ее корень $R_F > 0$.

Системы уравнений (14) и (24) с учетом значений P , M и Q перепишем в матричной форме:

$$A_1 X_1 = B; \quad (25)$$

$$A_2 X_2 = B. \quad (26)$$

Здесь

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} R_E \\ X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} R_F \\ X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ -3 \\ -49,96 \\ 5 \\ 10,66 \end{pmatrix}.$$

Системы (25) и (26) должны решаться совместно с неравенствами «ключами», выбирающими систему уравнений равновесия. Если в процессе решения системы (25) выясняется, что $R_E > 0$, то уравнениями равновесия рассматриваемой составной конструкции являются уравнения (25). Если же оказывается, что $R_E < 0$, то, следовательно, $R_F > 0$, а поэтому уравнениями равновесия являются уравнения (26).

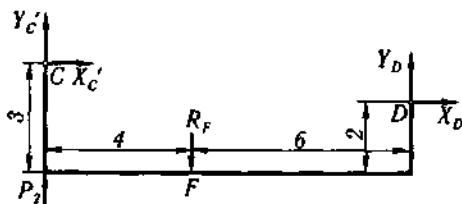


Рис. 63

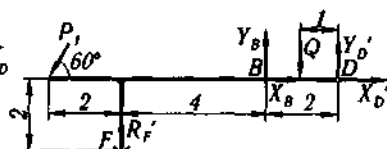


Рис. 64

Для решения полученных систем алгебраических уравнений можно использовать метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Блок-схема программы решений систем (25) и (26) совместно с «ключами» представлена на рис. 66, где Φ_1 — ввод исходных данных; Φ_2 — решение системы (25) методом Гаусса; Φ_3 — если $R_E > 0$, то переход к Φ_4 , если же $R_E \leq 0$, то переход к Φ_6 ; Φ_4 — печать результатов; Φ_5 — конец работы программы, Φ_6 — решение системы (26) методом Гаусса.

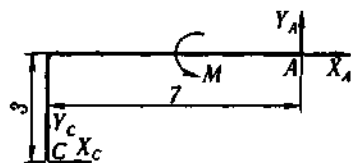


Рис. 65



Рис. 66

Результаты расчета приведены в табл. 19.

Таблица 19

Силы, кН							
R_F	X_A	X_B	X_D	X_C	Y_A	Y_B	Y_C
9,949	11,023	-6,023	-11,023	-11,023	1,867	5,793	5,082

Из таблицы видно, что реакция R_F оказалась положительной. Это означает, что при заданной схеме нагружения составной конструкции «работает» связь F , а в связи E усилие не возникает.

Для проверки правильности произведенных расчетов следует убедиться в том, что соблюдаются уравнения равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции:

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= M + P_1 \sin 60^\circ \cdot 5 - P_1 \cos 60^\circ \cdot 4 - P_2 \cdot 7 + Y_B \cdot 1 + X_B \cdot 4 - Q \cdot 2 = \\ &= 20 + 10 \cdot 0,866 \cdot 5 - 10 \cdot 0,5 \cdot 4 - 3 \cdot 7 + 5,793 - 6,023 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = \\ &= 49,093 - 49,092 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= Y_A + Y_B + P_2 - P_1 \sin 60^\circ - Q = 1,867 + 5,793 + 3 - 8,66 - 2 = \\ &= 10,66 - 10,66 = 0; \end{aligned}$$

$$\sum X_i = X_A + X_B - P_1 \cos 60^\circ = 11,023 - 6,023 - 10 \cdot 0,5 = 0.$$

I. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 20.

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4\cos^2(\pi t/3) + 2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-14t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t + 2)$	$3t + 6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t + 1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7\sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - 3t/2 - 3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6) - 2$	$6\cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \quad (x \text{ и } y \text{ — в см, } t \text{ и } t_1 \text{ — в с}).$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ — орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \ddot{x} &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \ddot{y} &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

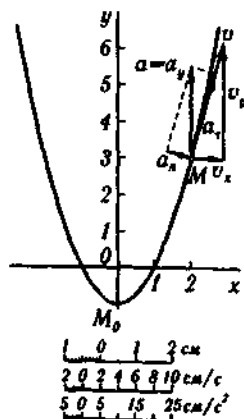


Рис. 67

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «-», — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того, как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)—(6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Дополнение к заданию К.1. Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при ее движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения (см. табл. 20) добавляется третье уравнение (табл. 22).

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведенном выше примере.

Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см	Номер вари- анта	$z = z(t)$, см
1	$3t$	7	$2,5t$	13	$1,5t$	19	$6t$	25	$5t$
2	$2t$	8	$5t$	14	$2t+2$	20	$2t$	26	$6t$
3	$1,5t$	9	$4t+8$	15	$3t$	21	$4t$	27	$3,5t$
4	$4t+4$	10	t	16	$1,5t$	22	t	28	$4t$
5	t	11	$2t$	17	$5t$	23	$1,5t$	29	$5t$
6	$3t$	12	$3t$	18	$3,5t$	24	$2t$	30	$1,5t$

II. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

Движение груза I должно описываться уравнением

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad (1)$$

где t — время, с; c_0 , c_1 , c_2 — некоторые постоянные.

В начальный момент времени ($t = 0$) положение груза определяется координатой x_0 , и он имеет скорость v_0 . Учесть, что в момент времени $t = t_2$ координата груза равна x_2 .

Определить коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 , при которых осуществляется требуемое движение груза I. Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза и точки M одного из колес механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 68—70, а необходимые данные приведены в табл. 23.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма (рис. 71); $R_2 = 50$ см, $r_2 = 25$ см, $R_3 = 65$ см, $r_3 = 40$ см, $x_0 = 14$ см, $v_0 = 5$ см/с, $x_2 = 168$ см, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с.

Найти уравнение движения груза, а также скорости и ускорения груза и точки M в момент времени $t = t_1$.

Решение. Уравнение движения груза I имеет вид

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0. \quad (1)$$

Таблица 23

Номер варианта (рис. 68-70)	Радиусы, см				Координаты и скорости груза 1			Расчетные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0 , см	v_0 , см/с	x_2 , см	t_2	t_1
1	60	45	36	-	2	12	173	3	2
2	80	-	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	-	8	6	40	4	2
4	58	45	60	-	4	4	172	4	3
5	80	-	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	-	7	16	215	4	2
7	45	35	105	-	8	5	124	4	3
8	35	10	10	-	6	2	111	3	2
9	40	30	15	-	10	7	48	2	1
10	15	-	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	-	9	8	65	2	1
12	20	15	10	-	5	10	179	3	2
13	30	20	40	-	7	0	557	5	2
14	15	10	15	-	6	3	80	2	1
15	15	10	15	-	5	2	189	4	2
16	20	15	15	-	4	6	220	4	3
17	15	10	20	-	8	4	44	2	1
18	20	15	10	-	3	12	211	4	1
19	15	10	20	-	5	10	505	5	3
20	25	15	10	-	10	8	277	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	-	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	194	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	-	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	862	4	2
27	40	18	40	18	5	10	193	2	1
28	40	20	40	15	8	5	347	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	-	10	7	128	2	1

Коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 могут быть определены из следующих условий:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 14 \text{ см}, \quad \dot{x}_0 = 5 \text{ см/с}, \quad (2)$$

$$\text{при } t_2 = 2 \text{ с} \quad x_2 = 168 \text{ см}. \quad (3)$$

Скорость груза 1

$$v = \dot{x} = 2c_2t + c_1. \quad (4)$$

Подставляя (2) и (3) в формулы (1) и (4), находим коэффициенты

$$c_0 = 14 \text{ см}, \quad c_1 = 5 \text{ см/с}, \quad c_2 = 36 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1

$$x = 36t^2 + 5t + 14. \quad (5)$$

Скорость груза 1

$$v = \dot{x} = 72t + 5. \quad (6)$$

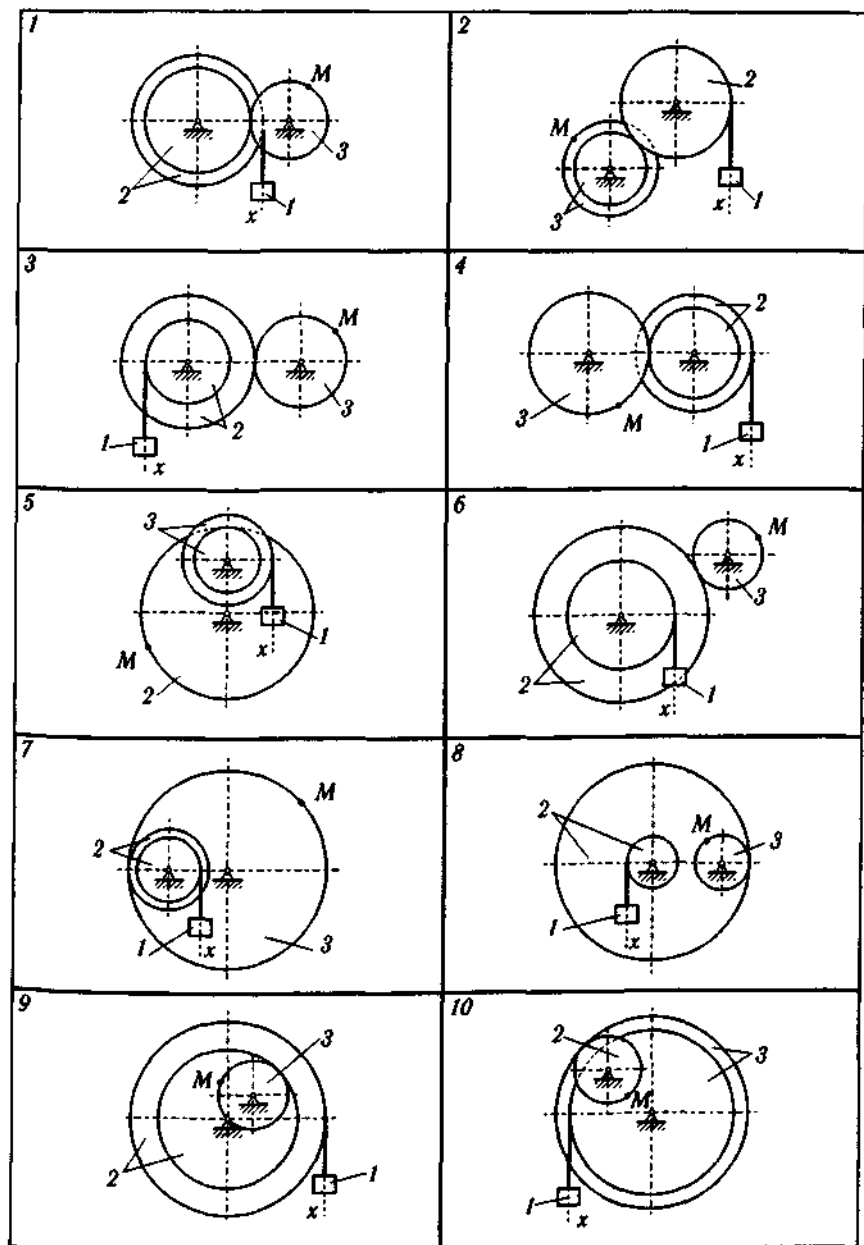


Рис. 68

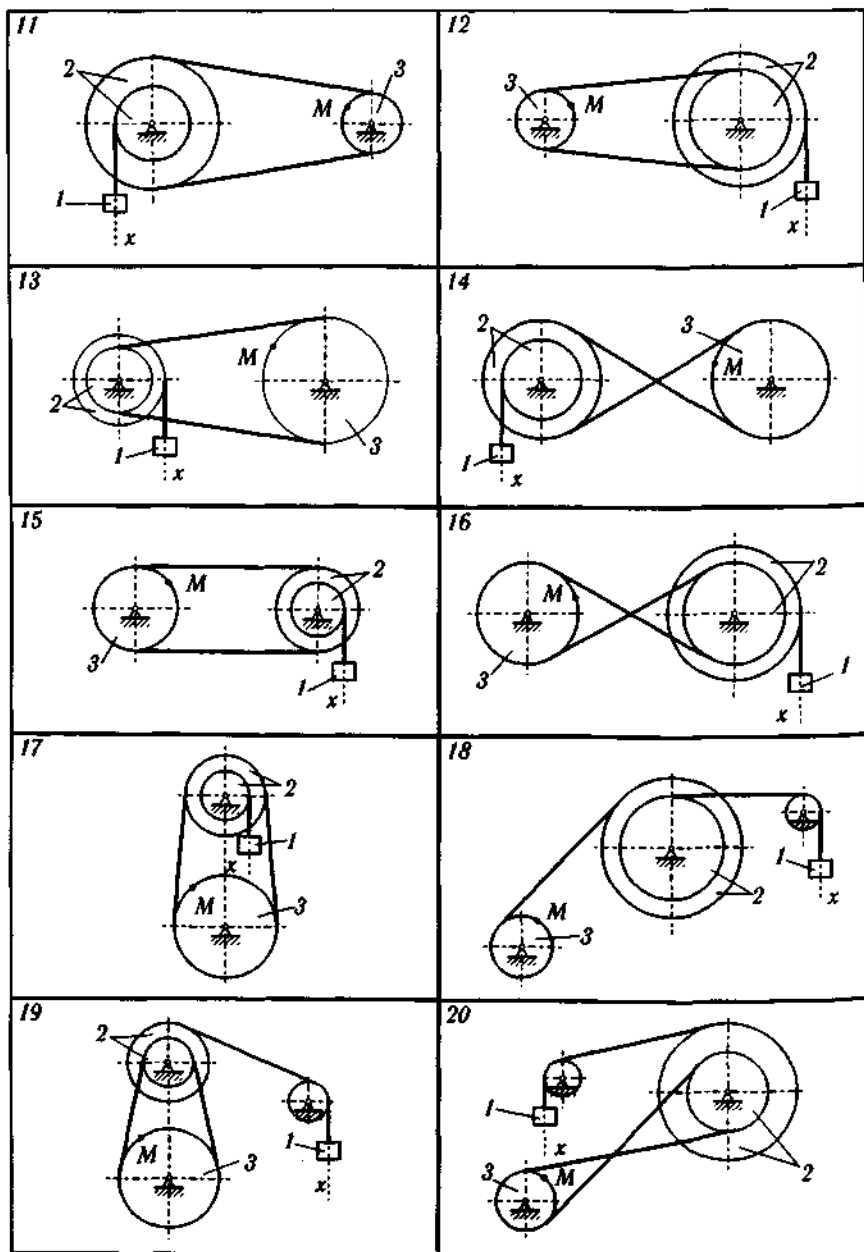


Рис. 69

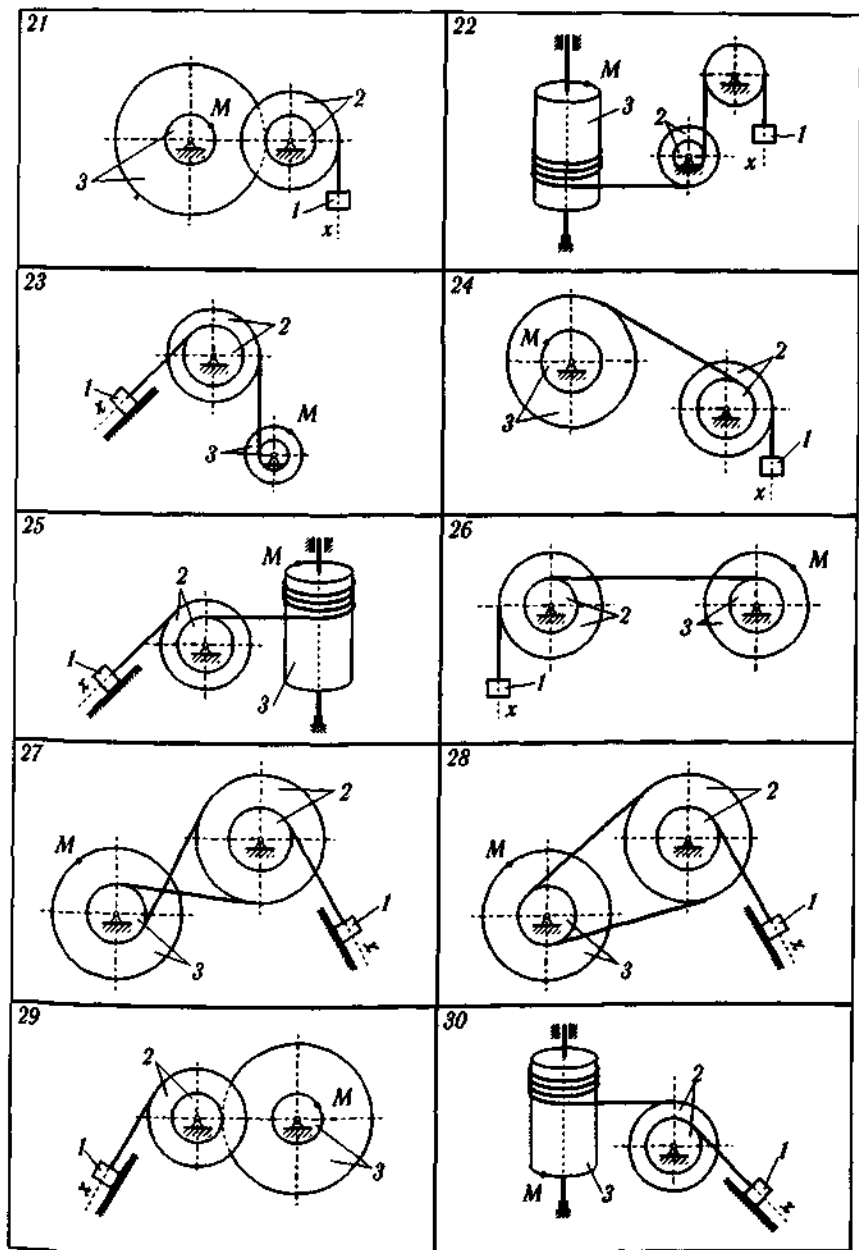


Рис. 70

Ускорение груза 1

$$a = \ddot{x} = 72 \text{ см/с}^2.$$

Для определения скорости и ускорения точки M запишем уравнения, связывающие скорость груза v и угловые скорости колес ω_2 и ω_3 .

В соответствии со схемой механизма

$$\left. \begin{aligned} v &= r_2 \omega_2; \\ R_2 \omega_2 &= R_3 \omega_3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда

$$\omega_3 = v R_2 / (r_2 R_3),$$

или с учетом (6) после подстановки данных

$$\omega_3 = 2,215t + 0,154.$$

Таблица 24

v , см/с	a , см/с ²	ω_3 , рад/с	ε_3 , рад/с ²	v_M , см/с	a_M^u , см/с ²	a_M^p , см/с ²	a_M , см/с ²
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241

Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2,215 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M , ее вращательное, центростремительное и полное ускорения определяются по формулам

$$\begin{aligned} v_M &= r_3 \omega_3; \\ a_M^u &= r_3 \varepsilon_3; \quad a_M^p = r_3 \omega_3^2; \\ a_M &= \sqrt{(a_M^u)^2 + (a_M^p)^2}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений для заданного момента времени $t_1 = 1 \text{ с}$ приведены в табл. 24.

Скорости и ускорения тела 1 и точки M показаны на рис. 72.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C , а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рис. 73—75, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Таблица 25

Номер варианта (рис. 73-75)	Размеры, см				ω_{OA} ,	ω_1 ,	ε_{OA} ,	v_A ,	a_A ,
	OA	r	AB	AC	рад/с	рад/с	рад/с ²	см/с	см/с ²
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-

Примечание. ω_{OA} и ε_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_1 — угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A — скорость и ускорение точки A. Качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 76); исходные данные (табл. 26).

Таблица 26

Размеры, см			ω_{OA} , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение. 1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена (рис. 77). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA.$$

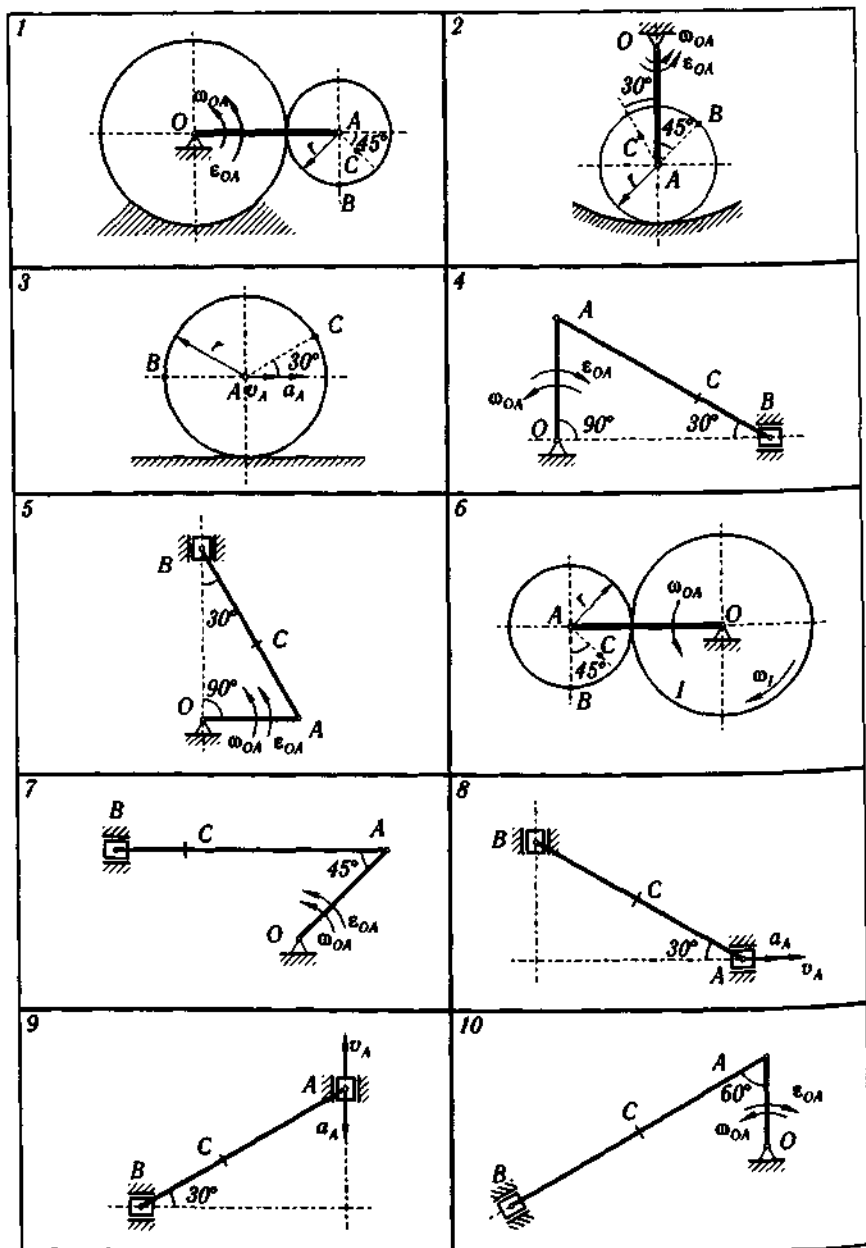


Рис. 73

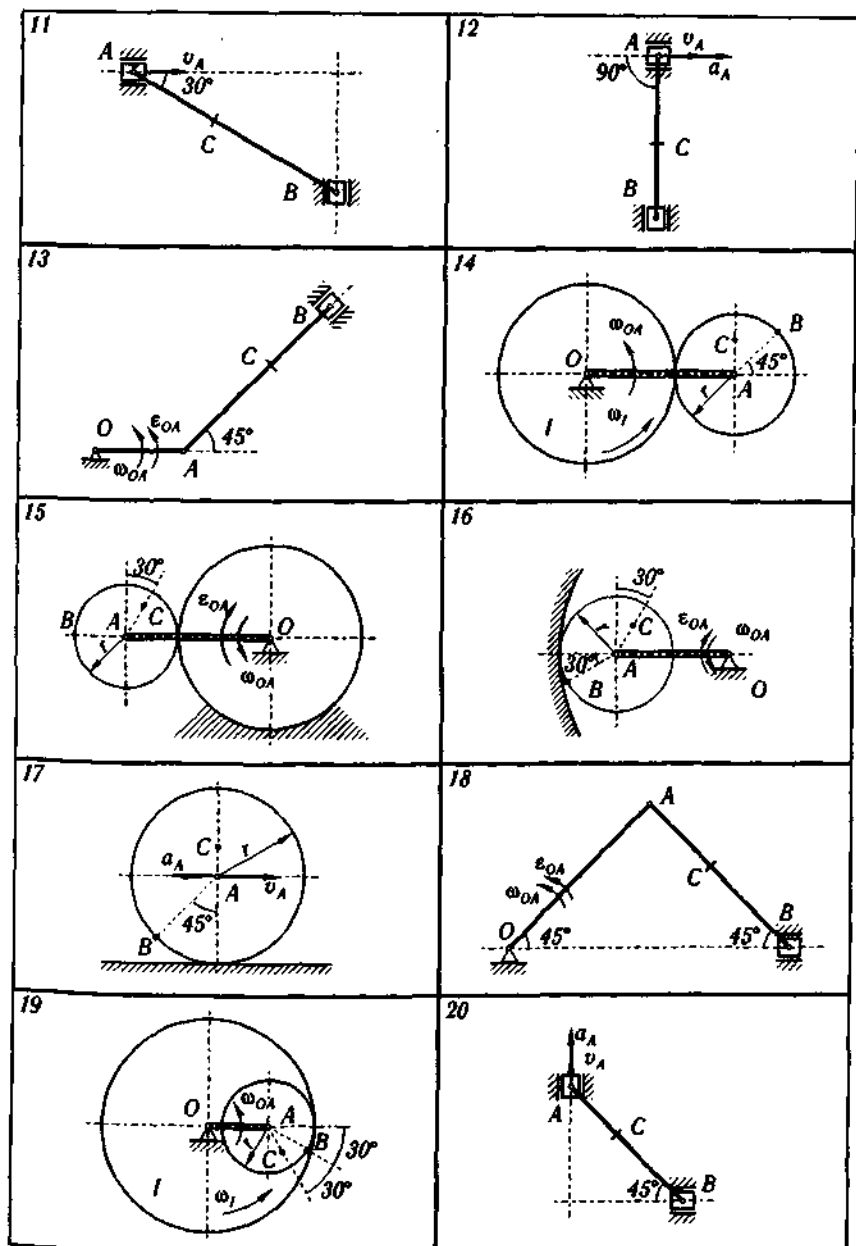


Рис. 74

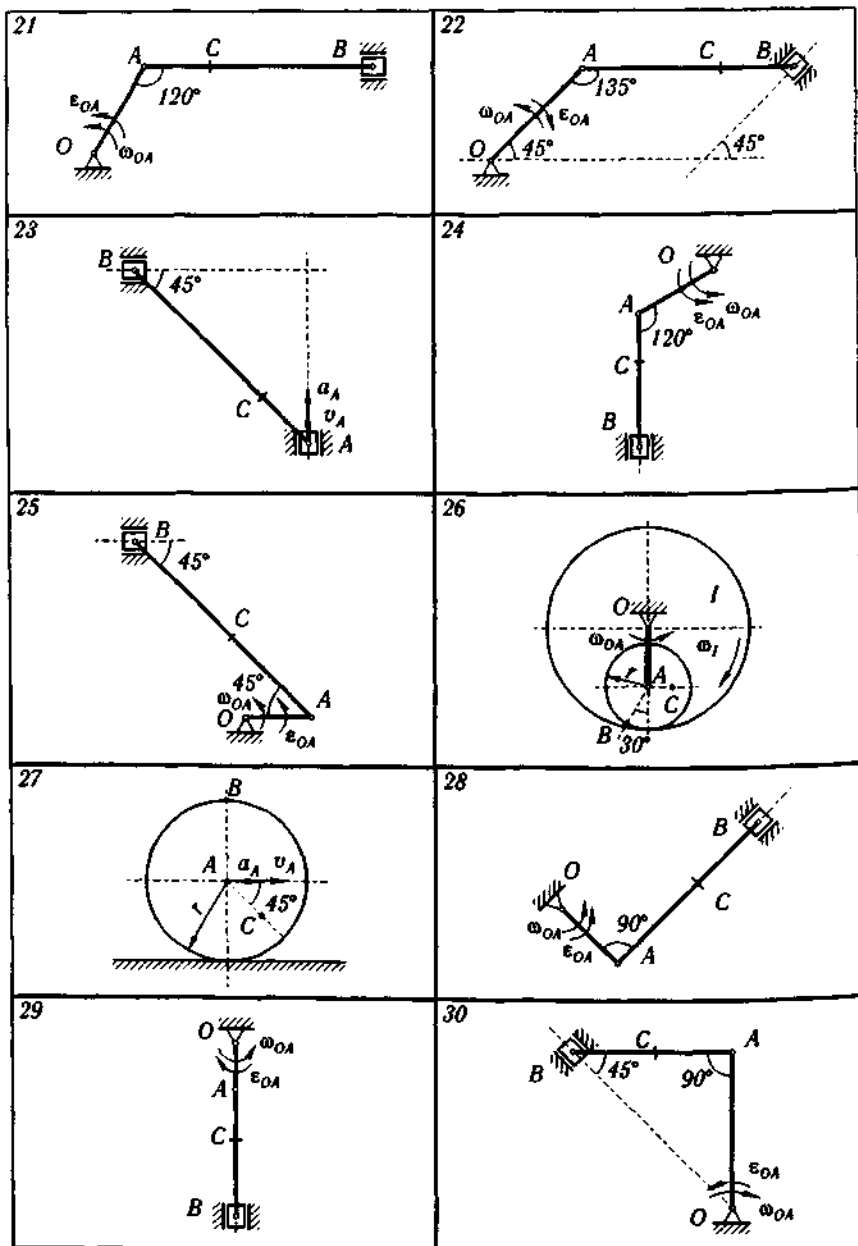


Рис. 75

Скорость точки A перпендикулярна кривошпилю OA . Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Модули скоростей точек B и C

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Расстояния AP_{AB} , BP_{AB} и CP_{AB} определяются из рассмотрения треугольников ABP_{AB} и ACP_{AB} :

$$AP_{AB} = 52,0 \text{ см}; \quad BP_{AB} = 30,0 \text{ см}; \quad CP_{AB} = 36,1 \text{ см}.$$

В соответствии с этим $v_A = 15,0 \text{ см/с}$; $\omega_{AB} = 0,29 \text{ рад/с}$; $v_B = 8,7 \text{ см/с}$; $v_C = 10,5 \text{ см/с}$.

Вектор $\vec{v}_C$ направлен перпендикулярно отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB .

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x вдоль шатуна AB в направлении от B к A .

Имеем $v_A \cos(\vec{v}_A, x) = v_B \cos(\vec{v}_B, x)$, или, как видно из рис. 77,

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$v_B = 8,7 \text{ см}.$$

Полезно убедиться, что и найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. *Определение ускорений точек и углового ускорения звена* (рис. 78). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^* + \vec{a}_A^u; \quad a_A^* = \varepsilon_{OA} \cdot OA; \quad a_A^u = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^* + \vec{a}_{AB}^u,$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^* + \vec{a}_A^u + \vec{a}_{AB}^* + \vec{a}_{AB}^u. \quad (1)$$

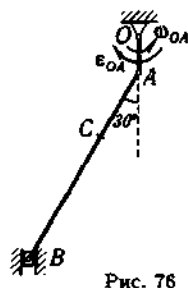


Рис. 76

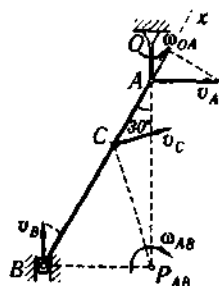


Рис. 77

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A

$$a_{AB}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем:

$$a_A^u = 20,0 \text{ см/с}^2; \quad a_A^u = 22,5 \text{ см/с}^2; \quad a_{AB}^u = 5,0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_A^u$ направлен от A к O . Вектор $\vec{a}_A^s$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_A^u$ и направлен противоположно v_A (вращение кривошипа OA — замедленное).

Вектор $\vec{a}_{AB}^u$ направлен от B к A . Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки B и вращательного ускорения $\vec{a}_{AB}^s$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ — по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}_{AB}^s$ — перпендикулярно AB .

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 78, а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей x и y , как показано на рис. 78, г, получаем:

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A^s \cos 60^\circ + a_{AB}^u \cos 30^\circ + a_{AB}^s; \quad (2)$$

$$a_B \cos 60^\circ = a_A^u \cos 30^\circ + a_{AB}^u \cos 60^\circ + a_{AB}^s. \quad (3)$$

Из уравнения (2) находим

$$a_B = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис. 78, а.

Из уравнения (3) получаем

$$a_{AB}^s = -20,2 \text{ см/с}^2.$$

Рис. 78

Направление $\vec{a}_{AB}^s$ противоположно показанному на рис. 78, а.

Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учетом их истинных направлений и масштаба показаны на рис. 78, б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{AB}^s — алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = |a_{AB}^s|/AB.$$

Вычисляя, находим

$$\varepsilon_{AB} = 0,34 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ускорения $\vec{a}_{AB}^n$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ϵ_{AB} . Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению вращения шатуна.

Определить $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{AB}^n$ можно и графически — построением многоугольника ускорений.

Отложим из точки B согласно (1) в выбранном масштабе последовательно векторы $\vec{a}_A^n$, $\vec{a}_A^u$ и $\vec{a}_{AB}^n$ (рис. 78, в). Через конец вектора $\vec{a}_{AB}^n$ проведем прямую, параллельную вращательному ускорению $\vec{a}_{AB}^n$, т. е. перпендикулярно $\vec{a}_B$, до пересечения ее с прямой, по которой направлено ускорение $\vec{a}_B$.

Последнее определяется как замыкающая сторона многоугольника ускорений.

Модули a_B и a_{AB}^n могут быть найдены измерением на чертеже.

Определяем ускорение точки C :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^u + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^u.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении AB вокруг полюса A

$$a_{AC}^n = \epsilon_{AB} \cdot AC; \quad a_{AC}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AC,$$

или

$$a_{AC}^n = 6,8 \text{ см/с}^2; \quad a_{AC}^u = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{AC}^n$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_{AC}^u$ и направлен соответственно угловому ускорению ϵ_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 78, а):

$$a_{Cx} = a_{AC}^u + a_A^u \cos 30^\circ - a_A^n \cos 60^\circ,$$

$$a_{Cy} = a_A^n \cos 60^\circ + a_A^u \cos 30^\circ - a_{AC}^n,$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2}.$$

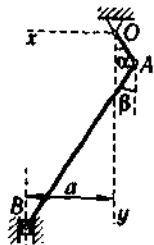


Рис. 79

В результате вычислений получаем: $a_{Cx} = 11,2 \text{ см/с}^2$;
 $a_{Cy} = 21,8 \text{ см/с}^2$; $a_C = 24,5 \text{ см/с}^2$ (рис. 78, г).

Приведем решение этой же задачи другим, более общим методом. На рис. 79 показана схема механизма в некотором произвольном положении.

Проведем оси координат. Уравнениями связи для данного механизма являются условия

$$\vec{r}_B = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (4)$$

($\vec{r}_B$ — радиус-вектор точки B , проведенный из центра O),

$$r_B = a = \text{const.} \quad (5)$$

Проецируя (4) на ось x , с учетом (5) имеем

$$-OA \cdot \sin \alpha + AB \cdot \sin \beta = a. \quad (6)$$

Для определения угловой скорости $\omega_{AB} = \dot{\beta}$ звена AB и углового ускорения $\epsilon_{AB} = \ddot{\beta}$ нет необходимости выражать β из (6). Проще непосредственно дважды продифференцировать (6).

Имея в виду, что $\dot{\alpha} = \omega_{OA}$, получаем в результате первого дифференцирования

$$-OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA} + AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB} = 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \omega_{OA} \cdot OA \cos \alpha / (AB \cdot \cos \beta). \quad (8)$$

Дифференцируя (7) и учитывая, что $\dot{\omega}_{OA} = \epsilon_{OA}$, имеем

$$OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \cos \alpha \cdot \epsilon_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB}^2 + AB \cdot \cos \beta \cdot \epsilon_{AB} = 0;$$

$$\epsilon_{AB} = \omega_{AB}^2 \tan \beta + OA(\epsilon_{OA} \cos \alpha - \omega_{OA}^2 \sin \alpha) / (AB \cdot \cos \beta). \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют вычислять ω_{AB} и ϵ_{AB} для любого положения механизма, в частности для заданного ($\alpha = 0^\circ$, $\beta = 30^\circ$).

Заметим, что ω_{OA} и ϵ_{OA} входят в эти выражения со знаком «+» или «-» в соответствии с принятым направлением отсчета угла α . В данном случае $\omega_{OA} = 1,5$ рад/с, $\epsilon_{OA} = -2,0$ рад/с². Смысл знаков ω_{AB} и ϵ_{AB} определяется направлением отсчета угла β .

Модуль скорости точки B $v_B = |\dot{y}_B|$. Модуль ускорения $a_B = |\ddot{y}_B|$. Проецируя (4) на ось y , получаем

$$y_B = OA \cdot \cos \alpha + AB \cdot \cos \beta.$$

Отсюда после дифференцирования получаем

$$\dot{y}_B = -OA \cdot \sin \alpha \cdot \omega_{OA} - AB \cdot \sin \beta \cdot \omega_{AB};$$

$$\ddot{y}_B = -OA \cdot \cos \alpha \cdot \omega_{OA}^2 - OA \cdot \sin \alpha \cdot \epsilon_{OA} - AB \cdot \cos \beta \cdot \omega_{AB}^2 - AB \cdot \sin \beta \cdot \epsilon_{AB}.$$

Для определения скорости и ускорения точки C следует составить уравнения ее движения в координатной форме, проецируя радиус-вектор $\vec{r}_C = \vec{OA} + \vec{AC}$ на оси x и y .

Задание К.4. Кинематический анализ многозвенного механизма

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{O_1A} = 2$ рад/с. Определить для заданного положения механизма:

1) скорости точек A , B , C , ... механизма и угловые скорости всех его звеньев с помощью плана скоростей;

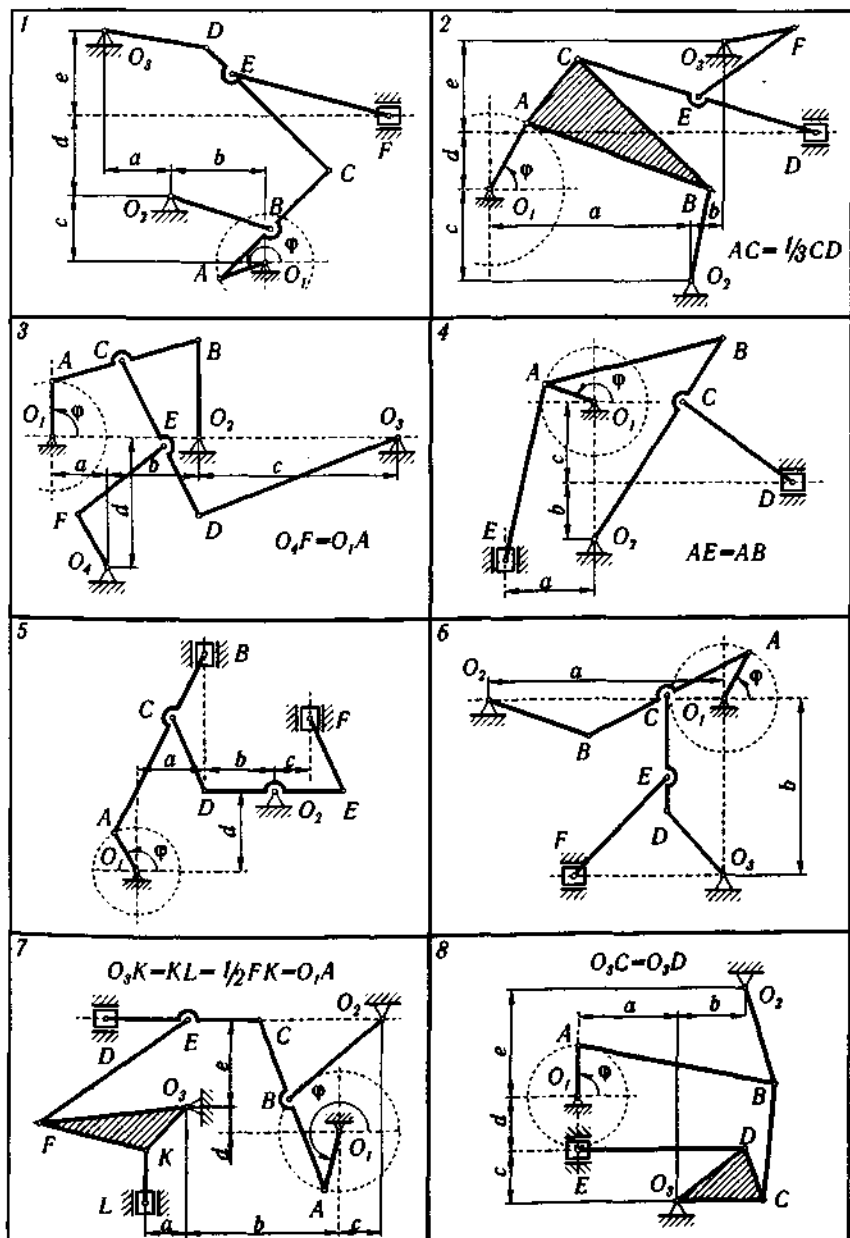


Рис. 80

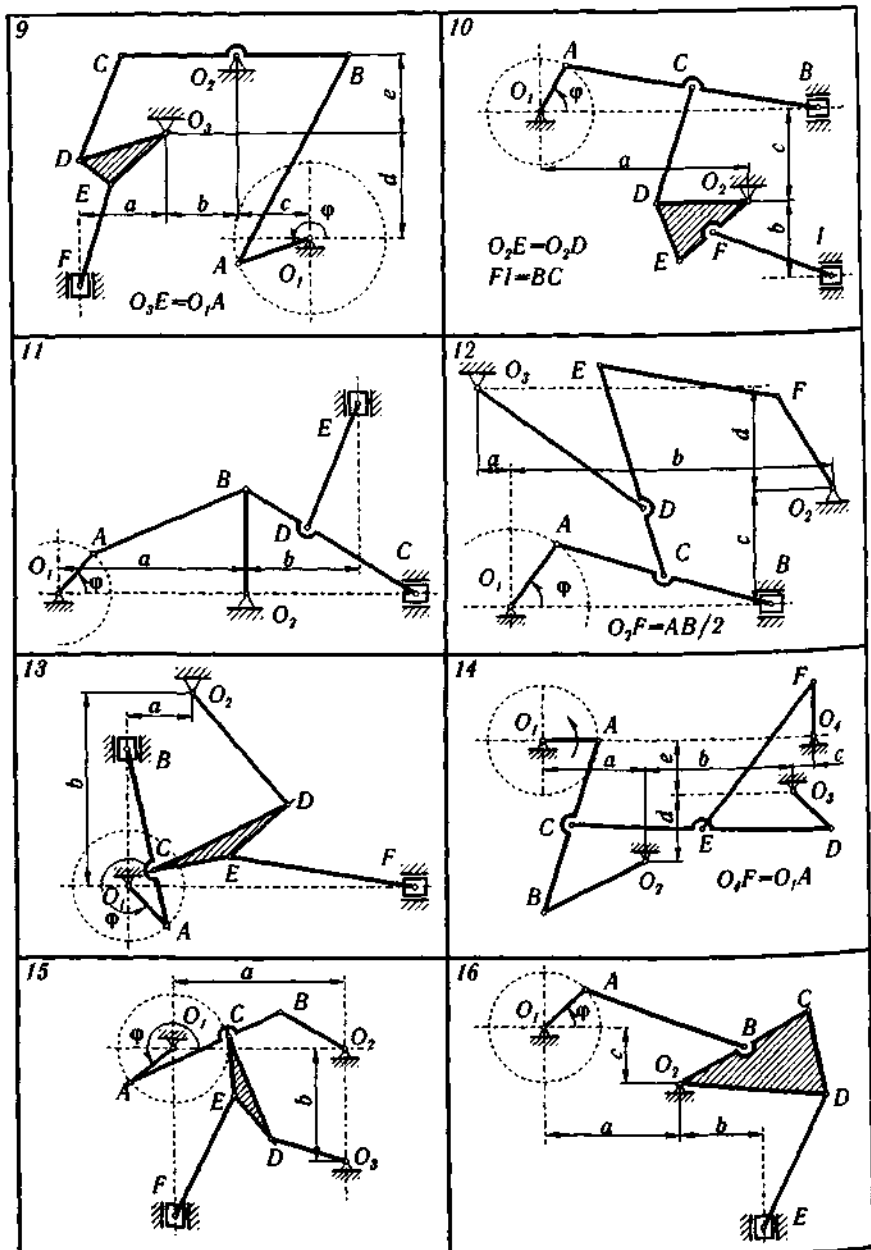


Рис. 81

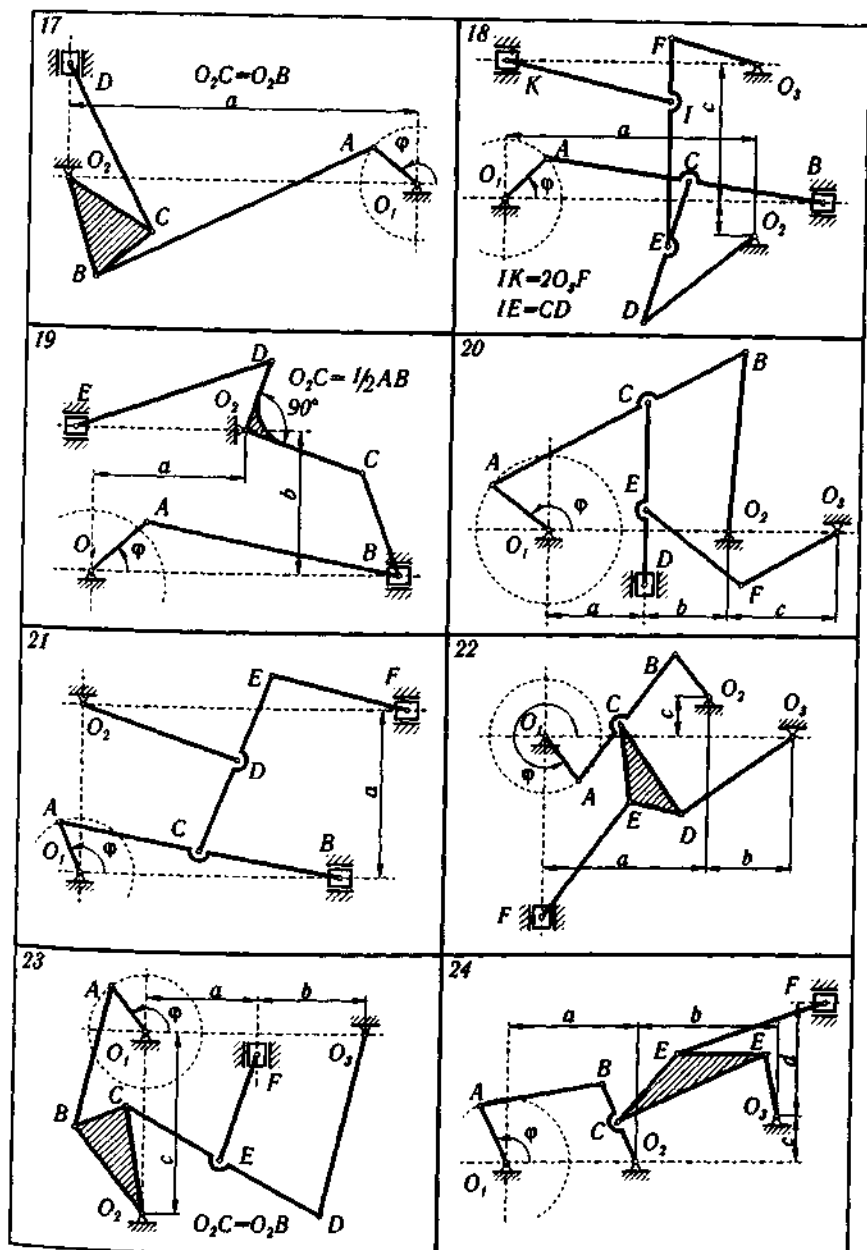


Рис. 82

2) скорости этих же точек механизма и угловые скорости звеньев с помощью мгновенных центров скоростей;

3) ускорения точек *A* и *B* и угловое ускорение звена *AB*;

4) положение мгновенного центра ускорений звена *AB*;

5) ускорение точки *M*, делящей звено *AB* пополам.

Схемы механизмов показаны на рис. 80—83, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 27.

Таблица 27

Номер вари- анта (рис. 80-83)	φ, град.	Расстояния, см					Длина звеньев, см											
		a	b	c	d	e	O ₁ A	O ₂ B	O ₂ D	O ₃ D	O ₃ F	AB	BC	CD	CE	DE	EF	
1	200	18	23	18	22	23	14	28	-	28	-	21	21	48	38	-	42	
2	60	56	10	26	16	25	21	25	-	-	20	54	52	69	35	-	32	
3	90	15	25	54	35	-	15	28	-	58	-	42	21	47	26	-	31	
4	155	26	15	23	-	-	15	65	-	-	-	51	22	38	-	-	-	
5	125	19	19	10	22	-	12	-	19	-	-	55	19	23	-	38	22	
6	60	65	49	-	-	-	15	29	-	24	-	50	25	32	23	-	39	
7	250	11	42	11	7	24	16	34	-	-	41	25	25	42	21	-	49	
8	90	27	18	14	15	30	14	29	-	23	-	55	32	15	-	45	-	
9	200	23	19	20	28	21	21	31	-	25	-	65	62	31	-	11	29	
10	20	55	21	25	-	-	15	-	24	-	-	70	35	33	-	17	12	
11	50	50	30	-	-	-	14	29	-	-	-	45	54	34	-	37	-	
12	55	10	86	32	28	-	21	-	-	55	-	60	30	19	60	-	49	
13	315	17	54	-	-	-	15	-	40	-	-	50	35	40	22	22	50	
14	0	28	40	6	18	15	15	31	-	15	-	50	25	70	35	-	50	
15	220	46	31	-	-	-	15	20	-	20	-	45	15	31	17	17	37	
16	40	36	22	15	-	-	15	20	40	-	-	45	20	24	-	40	-	
17	145	96	-	-	-	-	15	28	-	-	-	84	20	51	-	-	-	
18	45	70	9	37	-	-	16	-	39	-	25	78	38	41	19	-	57	
19	40	42	39	-	-	-	20	-	20	-	-	71	30	-	-	57	-	
20	145	27	24	30	-	-	20	50	-	-	30	80	32	58	29	-	35	
21	115	46	-	-	-	-	15	-	45	-	-	78	39	26	52	-	38	
22	305	46	23	11	-	-	15	15	-	38	-	44	25	30	22	15	40	
23	130	31	30	50	-	-	15	30	-	50	-	40	16	60	30	-	30	
24	115	36	39	13	31	-	17	23	-	17	-	35	11	45	25	25	44	
25	325	72	36	-	-	-	15	-	30	-	-	76	46	50	35	-	51	
26	215	36	53	36	32	-	19	40	-	-	19	76	38	68	35	-	29	
27	140	71	27	32	40	-	16	30	-	50	-	46	33	40	20	-	50	
28	215	30	20	35	-	-	19	-	19	-	-	59	29	24	-	48	36	
29	180	35	15	38	7	-	10	16	-	15	-	50	33	16	-	45	33	
30	25	46	28	17	-	-	16	25	-	75	-	50	11	33	-	26	44	

Пример выполнения задания. Дано: 1) схема механизма в заданном положении (рис. 84); 2) исходные данные (табл. 28).

Решение. 1. *Определение скоростей точек и угловых ускорений звеньев механизма с помощью плана скоростей.*

а) *Определяем скорости точек.* Строим схему механизма в вы-

бранном масштабе (рис. 85). Вычисляем модуль скорости точки A кривошипа O_1A :

$$v_a = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см/с.}$$

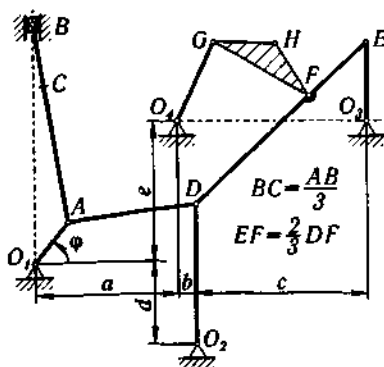


Рис. 84

Вектор $\vec{v}_A$ перпендикулярен O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа.

Строим план скоростей. Из произвольно выбранного полюса O проводим отрезок Oa , изображающий в выбранном масштабе скорость точки A . Для определения скорости точки B через полюс O проводим прямую, параллельную скорости $\vec{v}_B$, через точку a — прямую, перпендикулярную AB . Получаем точку b ; отрезок Ob определяет скорость точки B . Измеряем длину отрезка Ob и, пользуясь масштабом скоростей, находим $v_B = 17,5 \text{ см/с.}$

Таблица 28

φ , град.	Расстояние, см					Длина звеньев, см									
	a	b	c	d	e	O_1A	AB	AD	O_2D	DE	O_3E	FG	GH	FH	O_4G
52	32	4	39	19	32	12	46	29	32	53	18	25	14	14	20

Для определения скорости точки C делим отрезок ab плана скоростей в отношении $ac/cb \approx AC/CB$.

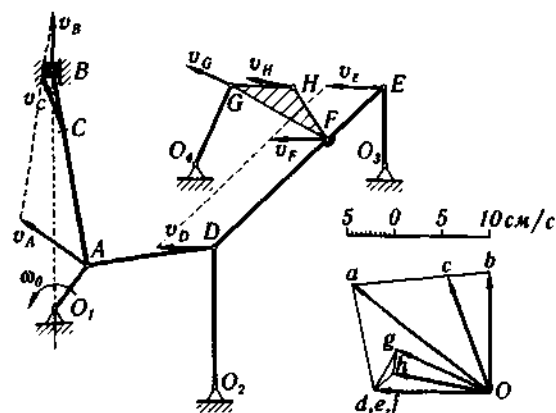


Рис. 85

Отрезок Os изображает скорость точки C . Пользуясь масштабом скоростей, получаем

$$v_C = 17,5 \text{ см/с.}$$

Продолжая построение плана скоростей, находим $v_A, v_B, v_C, v_D, v_E, v_F, v_G, v_H$ (табл. 29).

На чертеже механизма концы векторов скоростей точек прямолинейного звена (например A, B, C или D, E) находятся на одной прямой.

Таблица 29

Способ определения	Скорости точек, см/с							
	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8	14,4
По плану скоростей	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8	14,4
С помощью мгновенных центров скоростей	24	17,3	17,5	17,4	17,4	17,4	14,6	14,1

б) Определяем угловые скорости звеньев механизма. Отрезок ab плана скоростей выражает вращательную скорость точки B вокруг точки A :

$$ab = v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB;$$

отсюда угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = ab/AB = 19,5/46 = 0,424 \text{ рад/с.}$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев AD , DE , FGH :

$$\omega_{AD} = ad/AD;$$

$$\omega_{DE} = de/DE;$$

$$\omega_{FGH} = fg/FG.$$

Угловую скорость ω_{FGH} можно определить также из соотношений

$$\omega_{FGH} = gh/GH = fh/FH.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по вращательной скорости точки D вокруг неподвижного центра O_2 :

$$\omega_{O_2D} = v_D/O_2D.$$

Аналогично определяются угловые скорости звеньев O_3E , O_4G :

$$\omega_{O_3E} = v_E/O_3E; \quad \omega_{O_4G} = v_G/O_4G.$$

Вычисленные по этим формулам угловые скорости приведены в табл. 30.

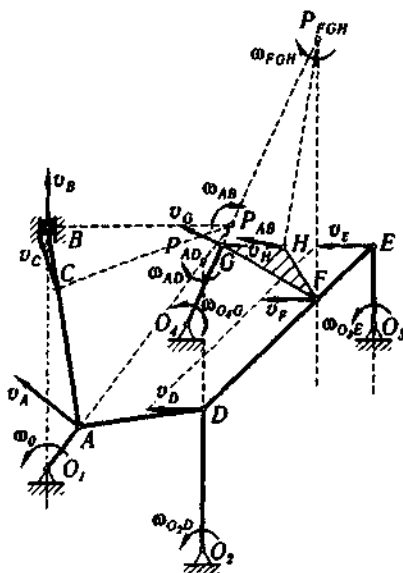


Рис. 86

Таблица 30

Способ определения	Угловые скорости звеньев, рад/с						
	AB	AD	DE	O ₂ D	O ₃ E	FGH	O ₄ G
По плану скоростей	0,424	0,500	0	0,547	0,972	0,272	0,740
С помощью мгновенных центров скоростей	0,421	0,505	0	0,544	0,967	0,278	0,730

2. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.

а) *Определяем положения мгновенных центров скоростей звеньев механизма.* Строим схему механизма в выбранном масштабе (рис. 86). Звенья O_1A , O_2D , O_3E , O_4G вращаются вокруг неподвижных центров O_1 , O_2 , O_3 , O_4 .

Мгновенный центр скоростей P_{AB} звена AB находится как точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям. Аналогично определяется положение мгновенных центров скоростей P_{AD} и P_{FGH} . Мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности.

б) *Определяем скорости точек.* Скорости точек звеньев механизма пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенных центров скоростей соответствующих звеньев.

Эти расстояния измеряются на чертеже.

Для определения скоростей точек B и C звена AB имеем пропорции

$$v_A/v_B = AP_{AB}/BP_{AB};$$

$$v_A/v_C = AP_{AB}/CP_{AB}.$$

Следовательно,

$$v_B = v_A \cdot BP_{AB}/AP_{AB};$$

$$v_C = v_A \cdot CP_{AB}/AP_{AB}.$$

Аналогично, для точки D звена AD

$$v_A/v_D = AP_{AD}/DP_{AD},$$

откуда

$$v_D = v_A \cdot DP_{AD}/AP_{AD}.$$

Так как мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности, то $v_E = v_F = v_D$.

Для определения скоростей точек G и H имеем пропорции $v_F/v_G = FP_{FGH}/GP_{FGH}$; $v_F/v_H = FP_{FGH}/HP_{FGH}$.

Следовательно,

$$v_G = v_F \cdot GP_{FGH}/FP_{FGH};$$

$$v_H = v_F \cdot HP_{FGH}/FP_{FGH}.$$

Пользуясь масштабом длин, определяем расстояния от точек до мгновенных центров скоростей.

Эти расстояния (в см) приведены в табл. 31.

Таблица 31

AP_{AB}	BP_{AB}	CP_{AB}	AP_{AD}	DP_{AD}	FP_{FGH}	GP_{FGH}	HP_{FGH}
57	41	41,5	47,5	34,5	62,7	52,8	50,8

Скорости точек, вычисленные по указанным формулам, приведены в табл. 29.

Одновременно с определением модулей скоростей точек находим их направления, а также направления вращений звеньев механизма.

Например, по направлению скорости точки A и положению мгновенного центра скоростей P_{AB} устанавливаем, что вращение звена AB происходит по часовой стрелке. Поэтому скорость точки B при данном положении механизма направлена вверх.

Аналогично определяем направления вращений остальных звеньев и направления скоростей точек механизма (рис. 86).

в) *Определяем угловые скорости звеньев механизма.* Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP_{BA} = \omega_{AD} \cdot AP_{AD}.$$

Отсюда определяем угловые скорости звеньев AB и AD :

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}; \quad \omega_{AD} = v_A / AP_{AD}.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по скорости точки D :

$$\omega_{O_2D} = v_D / O_2D.$$

Угловая скорость звена DE при данном положении механизма равна нулю, так как мгновенный центр скоростей звена в этом случае находится в бесконечности: $\omega_{DE} = 0$.

Аналогично определяем угловые скорости остальных звеньев механизма:

$$\begin{aligned} \omega_{O_3E} &= v_E / O_3E; \\ \omega_{FGH} &= v_F / FP_{FGH}; \\ \omega_{O_4G} &= v_G / O_4G. \end{aligned}$$

Угловые скорости звеньев, вычисленные по указанным соотношениям, приведены в табл. 30.

3. *Определение ускорений точек A , B , D и угловых ускорений звеньев AB и BD **.

а) *Определяем $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ и ε_{AB}* (рис. 87). С помощью теоремы об ускорениях точек плоской фигуры определяем ускорение точки B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^u + \vec{a}_{AB}^n.$$

Так как кривошип O_1A вращается равномерно, то ускорение точки A направлено к центру O_1 и равно

$$a_A = a_A^u = O_1A \cdot \omega_{O_1A}^2 = 12 \cdot 2^2 = 48 \text{ см/с}^2.$$

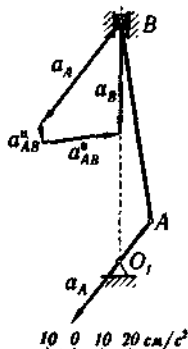


Рис. 87

* Условие задания предусматривает определение ускорений точек A , B и углового ускорения звена AB . Однако в примере определяются также ускорение точки D и угловое ускорение звена AD в соответствии с двумя случаями, встречающимися в задачах такого типа.

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A направлено от точки B к точке A и равно

$$a_{BA}^u = AB \cdot \omega_{AB}^2 = 46 \cdot 0,4^2 = 7,36 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки B в соответствующем масштабе ускорение полюса $\vec{a}_A$. Из конца вектора $\vec{a}_A$ строим вектор $\vec{a}_{AB}^u$, проводя его параллельно BA . Через конец вектора $\vec{a}_{AB}^u$ проводим прямую, перпендикулярную BA , т. е. параллельную вращательному ускорению $\vec{a}_{AB}^n$. Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлен вектор ускорения ползуна B , определяет концы векторов $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{AB}^n$.

Измерением на чертеже получаем $a_B = 39 \text{ см/с}^2$; $a_{AB}^n = 30 \text{ см/с}^2$.

Так как $a_{AB}^n = AB \cdot \epsilon_{AB}$, то угловое ускорение звена AB

$$\epsilon_{AB} = a_{AB}^n / AB = 30 / 46 = 0,652 \text{ рад/с}^2.$$

б) Определяем $\vec{a}_D$ и ϵ_{AD} (рис. 88). Точка D принадлежит двум звеньям: AD и O_2D . Взяв за полюс точку A , получаем

$$\vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{AD}^u + \vec{a}_{AD}^n.$$

Ускорение точки A найдено выше: $a_A = 48 \text{ см/с}^2$.

Центростремительное ускорение точки D во вращательном движении звена AD вокруг полюса A направлено от точки D к точке A и равно

$$a_{AD}^u = AD \cdot \omega_{AD}^2 = 28,5 \cdot 0,5^2 = 7,1 \text{ см/с}^2.$$

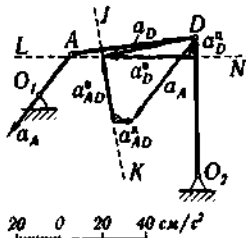


Рис. 88

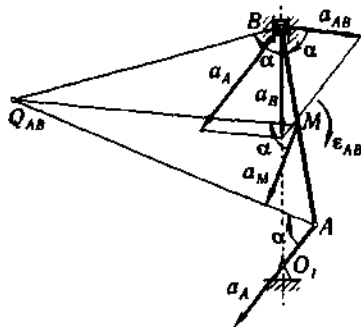


Рис. 89

Откладываем из точки D в соответствующем масштабе ускорение полюса $\vec{a}_A$. Из конца вектора $\vec{a}_A$ строим вектор $\vec{a}_{AD}^u$, проводя его параллельно DA . Через конец вектора $\vec{a}_{AD}^u$ проводим прямую JK перпендикулярно DA , т. е. параллельно вращательному ускорению $\vec{a}_{AD}^n$. Однако определить ускорение $\vec{a}_D$ этим построением невозможно, так как его направление неизвестно.

Чтобы найти ускорение точки D , необходимо выполнить второе построение, рассматривая D как точку звена O_2D . В этом случае

$$\vec{a}_D = \vec{a}_D^u + \vec{a}_D^n.$$

Центростремительное ускорение точки D

$$a_D^n = O_2D \cdot \omega_{O_2D}^2 = 8 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки D вектор $\vec{a}_D^u$, направив его к центру O_2 . Через конец вектора $\vec{a}_D^u$ проводим прямую LN перпендикулярно O_2D , т. е. параллельно вращательному ускорению $\vec{a}_D^n$.

Точка пересечения этой прямой с JK определяет концы векторов $\vec{a}_D$, $\vec{a}_{AD}^n$ и $\vec{a}_D^n$.

Измерением на чертеже получаем $a_D = 42 \text{ см/с}^2$; $a_{AD}^n = 30 \text{ см/с}^2$.

Так как $a_{AD}^n = AD \cdot \epsilon_{AD}$, то угловое ускорение звена AD

$$\epsilon_{AD} = a_{AD}^n / AD = 30/29 = 1,03 \text{ рад/с}^2.$$

4. *Определение положения мгновенного центра ускорений звена AB (рис. 89).* Примем точку A за полюс. Тогда ускорение точки B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}.$$

Строим параллелограмм ускорений при точке B по диагонали $\vec{a}_B$ и стороне $\vec{a}_A$. Сторона параллелограмма $\vec{a}_{AB}$ выражает ускорение точки B во вращении AB вокруг полюса A . Ускорение $\vec{a}_{AB}$ составляет с отрезком AB угол α , который можно измерить на чертеже.

Направление вектора $\vec{a}_{AB}$ относительно полюса A позволяет определить направление ϵ_{AB} , в данном случае соответствующее направлению вращения часовой стрелки. Отложив угол α от векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ в этом направлении и проводя два луча, найдем точку их пересечения Q_{AB} — мгновенный центр ускорений звена AB .

5. *Определение ускорения точки M .* Найдем ускорение точки M с помощью мгновенного центра ускорений.

Ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений:

$$a_M / a_A = MQ_{AB} / AQ_{AB}.$$

Подставив расстояния, определенные по чертежу, $MQ_{AB} = 67,5 \text{ см}$, $AQ_{AB} = 77 \text{ см}$, получим ускорение точки M :

$$a_M = a_A \cdot MQ_{AB} / AQ_{AB} = 48 \cdot 67,5 / 77 = 42,1 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение a_M составляет с прямой MQ_{AB} угол α ; направление этого вектора соответствует угловому ускорению ϵ_{AB} .

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К.5. Определение кинематических характеристик движения твердого тела и его точек по уравнениям Эйлера

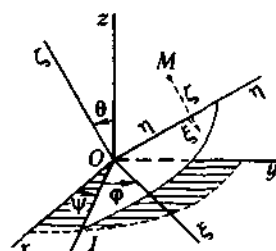
Заданы уравнения сферического движения твердого тела $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, где ψ , θ и φ — углы Эйлера (рис. 90).

Определить для момента времени $t = t_1$ угловую скорость и угловое ускорение тела, а также скорость и ускорение точки M , координаты которой в подвижной системе, жестко связанной с телом, ξ , η , ζ .

Необходимые данные приведены в табл. 32.

Пример выполнения задания. Исходные данные: $\psi = 2t^2 + 3t$ рад, $\theta = \pi/6$ рад, $\varphi = 24t$ рад, $\xi = 3$ см, $\eta = 2$ см, $\zeta = 5$ см, $t_1 = 1$ с.

Решение. 1. Определение угловой скорости тела. Проекции угловой скорости тела на подвижные оси координат определяются по следующим формулам:



$$\omega_{\xi} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_{\eta} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_{\zeta} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

Используя исходные данные, находим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= (4t + 3)0,5 \sin 24t; \\ \omega_{\eta} &= (4t + 3)0,5 \cos 24t; \\ \omega_{\zeta} &= (4t + 3)0,866 + 24. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рис. 90

Таблица 32

Номер варианта	Уравнения движения тела			Координаты точки M, см			$t_1, \text{с}$
	$\psi = \psi(t), \text{рад}$	$\theta = \theta(t), \text{рад}$	$\varphi = \varphi(t), \text{рад}$	ξ	η	ζ	
1	$3t^2 + 6t$	$\pi/3$	$4t$	2	5	4	1
2	$2t$	$(\pi/6) \sin 2t$	$25t$	3	1	2	2
3	$-4t$	$(\pi/4) \cos 3t$	$15t$	4	-3	5	1
4	$2t^2 + 3t$	$\pi/6$	$-2t$	-2	4	4	3
5	$4t^2$	$-\pi/4$	$20t$	3	2	-3	2
6	$3t$	$-(\pi/3) \cos 4t$	$6t$	2	3	2	1
7	$4t^2 - 2t$	$\pi/4$	$-20t$	6	2	3	0,5
8	$t^2 + 4t$	$\pi/3$	$18t$	7	4	1	1
9	$-3t^2 + 2t$	$\pi/6$	$30t$	-4	5	3	2
10	$5t$	$(\pi/3) \cos 2t$	$10t$	5	3	3	0,5

Номер варианта	Уравнения движения тела			Координаты точки М, см			t_1, c
	$\psi = \psi(t), \text{ рад}$	$\theta = \theta(t), \text{ рад}$	$\varphi = \varphi(t), \text{ рад}$	ξ	η	ζ	
11	$-2t$	$(\pi/4) \sin 3t$	$-12t$	4	-2	4	2
12	$2t^2 - 4t$	$-\pi/4$	$15t$	-6	4	2	1
13	$3t^2 + 2t$	$-\pi/3$	$24t$	3	10	5	0,5
14	$-3t$	$(\pi/6) \sin 8t$	$-30t$	10	-4	3	1
15	$-4t^2 + 3t$	$\pi/4$	$16t$	9	5	5	2
16	$2t$	$(\pi/3) \cos 6t$	$3t$	6	8	10	1
17	$-2t^2 + 5t$	$\pi/5$	$5t$	1	3	-2	1
18	$4t^2 + 3t$	$\pi/9$	$25t$	7	5	4	0,5
19	$t^2 - 2t$	$-\pi/6$	$-4t$	5	4	3	2
20	$4t$	$(\pi/5) \cos 3t$	$18t$	-3	2	1	2
21	$-5t$	$(\pi/4) \sin 6t$	$12t$	8	6	10	1
22	$-2t^2 - 2t$	$-\pi/5$	$2t$	4	-1	3	4
23	$3t^2 - 2t$	$\pi/4$	$-5t$	-5	7	4	3
24	$2t$	$-(\pi/5) \sin 3t$	$-30t$	10	8	-6	1
25	$-t$	$(\pi/9) \cos 8t$	$18t$	7	4	5	2
26	$3t$	$(\pi/3) \sin 2t$	$10t$	-2	1	3	1
27	$-3t^2 + 4t$	$-\pi/9$	$5t$	8	9	6	2
28	$-5t$	$-(\pi/3) \sin 3t$	$8t$	4	-2	-2	2
29	t	$(\pi/4) \cos 6t$	$9t$	7	6	10	3
30	$-3t$	$(\pi/6) \cos 4t$	$-15t$	6	8	5	1

Проекция угловой скорости на неподвижные оси координат:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi; \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi; \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi},\end{aligned}$$

или в данном случае

$$\left. \begin{aligned}\omega_x &= 24 \cdot 0,5 \sin(2t^2 + 3t); \\ \omega_y &= -24 \cdot 0,5 \cos(2t^2 + 3t); \\ \omega_z &= 24 \cdot 0,866 + 4t + 3.\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для определения угловой скорости тела при $t_1 = 1$ с предварительно вычисляем:

$$\sin 24t = \sin 24 = \sin(8\pi - 1,133) = \sin(-1,133) = -0,906;$$

$$\cos 24t = 0,424;$$

$$\sin(2t^2 + 3t) = \sin 5 = \sin(2\pi - 1,283) = \sin(-1,283) = -0,959;$$

$$\cos(2t^2 + 3t) = 0,284.$$

Тогда согласно (1) и (2) в результате вычислений получаем (рад/с):

$$\begin{aligned}\omega_{\xi} &= -3,17; & \omega_{\eta} &= 1,48; & \omega_{\zeta} &= 30,1; \\ \omega_x &= -11,5; & \omega_y &= -3,41; & \omega_z &= 27,8.\end{aligned}$$

Модуль угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 + \omega_{\zeta}^2},$$

или

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Можно определить модуль угловой скорости, минуя вычисление ее проекций на оси координат, по формуле

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}.$$

По любой из этих формул находим

$$\omega = 30,3 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости, а следовательно, и мгновенной оси вращения тела можно определить направляющими косинусами, например

$$\cos(\vec{\omega}, \xi) = \omega_{\xi}/\omega.$$

Совершенно аналогичны формулы для других направляющих косинусов.

В результате вычислений получаем:
в подвижной системе координат

$$\cos(\vec{\omega}, \xi) = -0,105; \quad \cos(\vec{\omega}, \eta) = 0,049; \quad \cos(\vec{\omega}, \zeta) = 0,993;$$

в неподвижной системе

$$\cos(\vec{\omega}, x) = -0,380; \quad \cos(\vec{\omega}, y) = -0,113; \quad \cos(\vec{\omega}, z) = 0,917.$$

2. *Определение углового ускорения тела.* Проекция углового ускорения тела на подвижные оси координат определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{\xi} = \dot{\omega}_{\xi}; \quad \varepsilon_{\eta} = \dot{\omega}_{\eta}; \quad \varepsilon_{\zeta} = \dot{\omega}_{\zeta}.$$

В соответствии с (1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi} &= 2 \sin 24t + (2t + 1,5)24 \cos 24t; \\ \varepsilon_{\eta} &= 2 \cos 24t - (2t + 1,5)24 \sin 24t; \\ \varepsilon_{\zeta} &= 3,46.\end{aligned}$$

Проекция углового ускорения на неподвижные оси координат:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z.$$

В соответствии с (2)

$$\varepsilon_x = 12(4t + 3) \cos(2t^2 + 3t); \quad \varepsilon_y = 12(4t + 3) \sin(2t^2 + 3t); \quad \varepsilon_z = 4.$$

При $t_1 = 1$ с находим (рад/с²):

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_\xi = 33,8; & \varepsilon_\eta = 76,9; & \varepsilon_\zeta = 3,46; \\ \varepsilon_x = 23,9; & \varepsilon_y = -80,5; & \varepsilon_z = 4. \end{array}$$

Модуль углового ускорения

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2},$$

или

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}.$$

По любой из этих формул

$$\varepsilon = 84,1 \text{ рад/с}^2.$$

Направление углового ускорения определяется направляющими косинусами.

В подвижной системе координат

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \xi) \approx 0,402; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \eta) = 0,914; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, \zeta) = 0,041.$$

В неподвижной системе координат

$$\cos(\vec{\varepsilon}, x) = 0,284; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, y) = -0,957; \quad \cos(\vec{\varepsilon}, z) = 0,048.$$

3. *Определение скорости точки $M(\xi, \eta, \zeta)$.* Проекции скорости точки на подвижные оси координат определяются по формулам

$$v_\xi = \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta; \quad v_\eta = \omega_\xi \zeta - \omega_\zeta \xi; \quad v_\zeta = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi.$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с и заданных значений ξ, η, ζ имеем (см/с):

$$v_\xi = -52,8; \quad v_\eta = 106,2; \quad v_\zeta = -10,7.$$

Модуль скорости точки

$$v = \sqrt{v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\zeta^2}.$$

Вычисляя, находим $v \approx 119$ см/с. Направляющие косинусы: $\cos(\vec{v}, \xi) = -0,444$; $\cos(\vec{v}, \eta) = 0,892$; $\cos(\vec{v}, \zeta) = -0,090$.

4. *Определение ускорения точки $M(\xi, \eta, \zeta)$.* Проекции ускорения точки на подвижные оси координат определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi; \\ a_\eta &= \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta; \\ a_\zeta &= \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta. \end{aligned}$$

В момент времени $t_1 = 1$ с имеем (см/с²):

$$a_\xi = -2829; \quad a_\eta = -1780; \quad a_\zeta = -414.$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\xi^2 + a_\eta^2 + a_\zeta^2}.$$

или

$$a = 3367 \text{ см/с}^2.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{a}, \xi) = -0,841; \quad \cos(\vec{a}, \eta) = -0,529; \quad \cos(\vec{a}, \zeta) = -0,123.$$

**Задание К.6. Кинематический анализ движения
твердого тела, катящегося без скольжения
по неподвижной поверхности
и имеющего неподвижную точку**

Тело A катится без скольжения по поверхности неподвижного тела B , имея неподвижную точку O . Ось $O\zeta$ тела A вращается вокруг неподвижной оси Oz и имеет при заданном положении тела A угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ϵ_1 .

Определить угловую скорость и угловое ускорение тела A , а также скорость и ускорение точки M в указанном положении тела A .

Схемы показаны на рис. 91 — 93, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 33.

Таблица 33

Номер варианта (рис. 91-93)	OM_0 , см	ω_1 , рад/с	ϵ_1 , рад/с ²	M_0M , см	Номер варианта (рис. 91-93)	OM_0 , см	ω_1 , рад/с	ϵ_1 , рад/с ²	M_0M , см
1	30	2,3	4,0	16	16	45	2,4	5,4	20
2	45	3,0	3,0	5	17	50	3,5	-3,0	10
3	50	1,2	-3,6	-	18	30	1,0	2,2	10
4	40	2,0	4,2	10	19	50	2,7	4,4	20
5	40	0,8	2,0	10	20	30	3,3	-4,6	10
6	70	4,0	5,6	30	21	40	4,0	-5,0	25
7	60	1,5	-2,5	-	22	30	1,6	2,8	5
8	40	2,1	3,2	20	23	40	2,0	3,7	5
9	50	3,2	-4,7	10	24	60	3,5	4,1	10
10	20	1,3	1,8	10	25	40	1,6	-3,0	15
11	30	0,9	2,6	20	26	40	2,2	3,3	15
12	40	2,2	3,0	-	27	30	4,1	-5,5	10
13	20	3,8	4,3	10	28	45	3,0	4,2	5
14	30	1,4	-2,8	10	29	40	1,4	3,6	15
15	40	0,7	2,2	15	30	50	2,9	-5,2	15

Примечание. Положительный и отрицательный знаки у ϵ_1 означают соответственно, что вращение оси $O\zeta$ вокруг оси Oz происходит в направлении, показанном на схеме, ускоренно или замедленно.

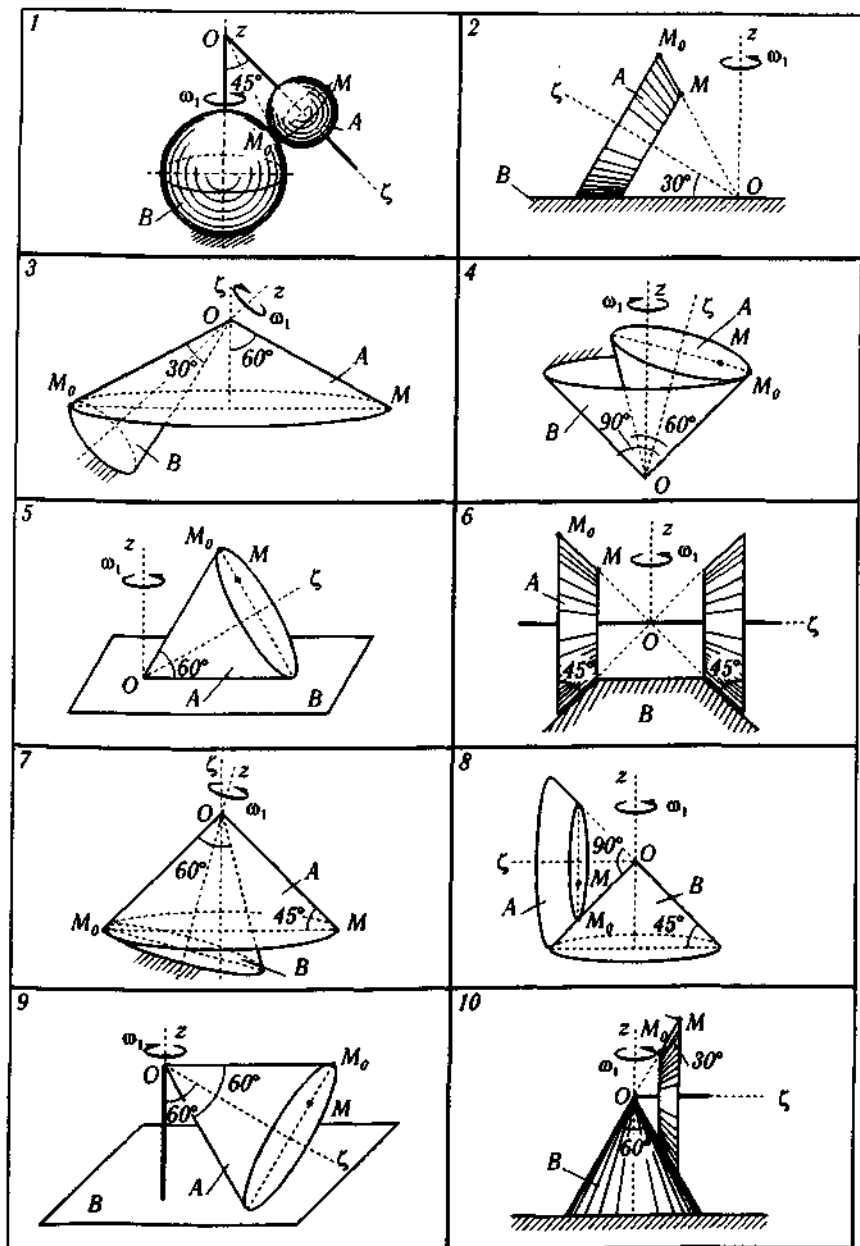


Рис. 91

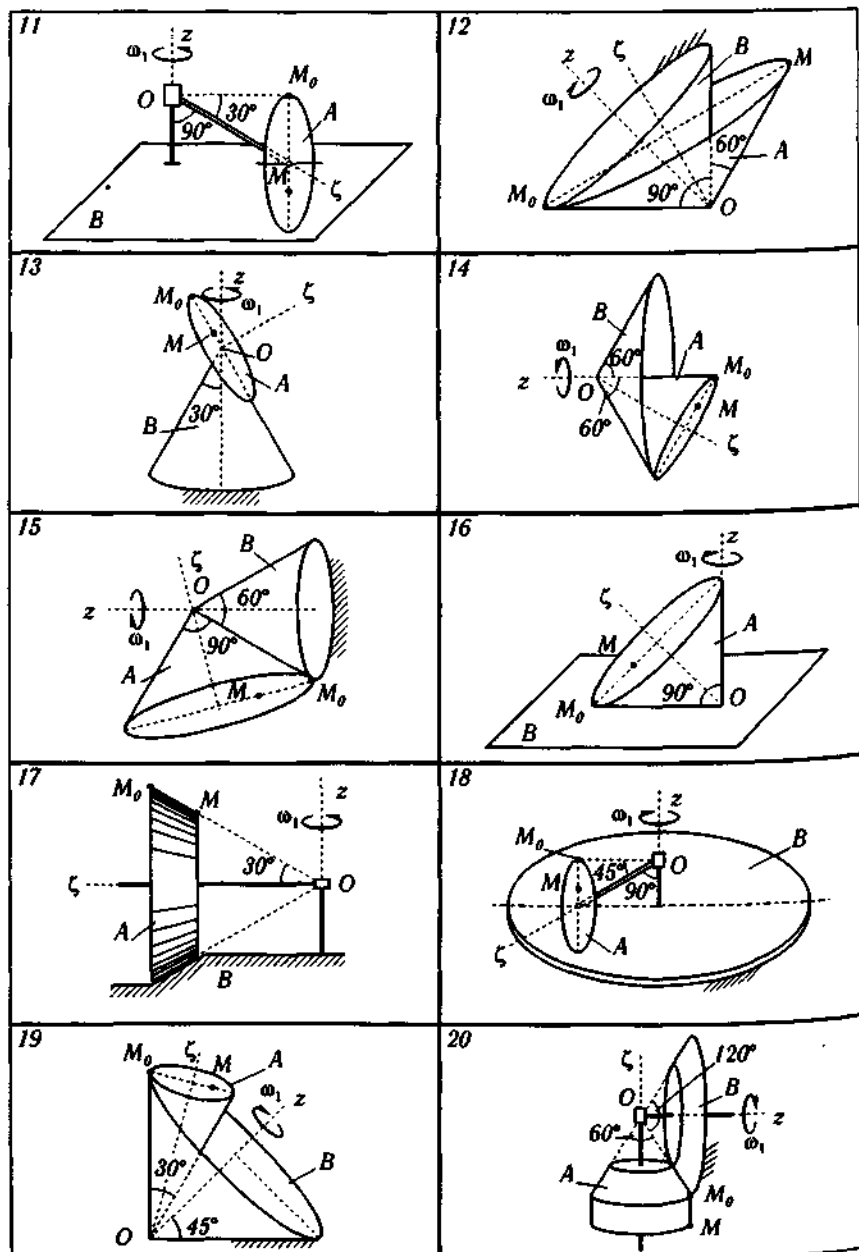


Рис. 92

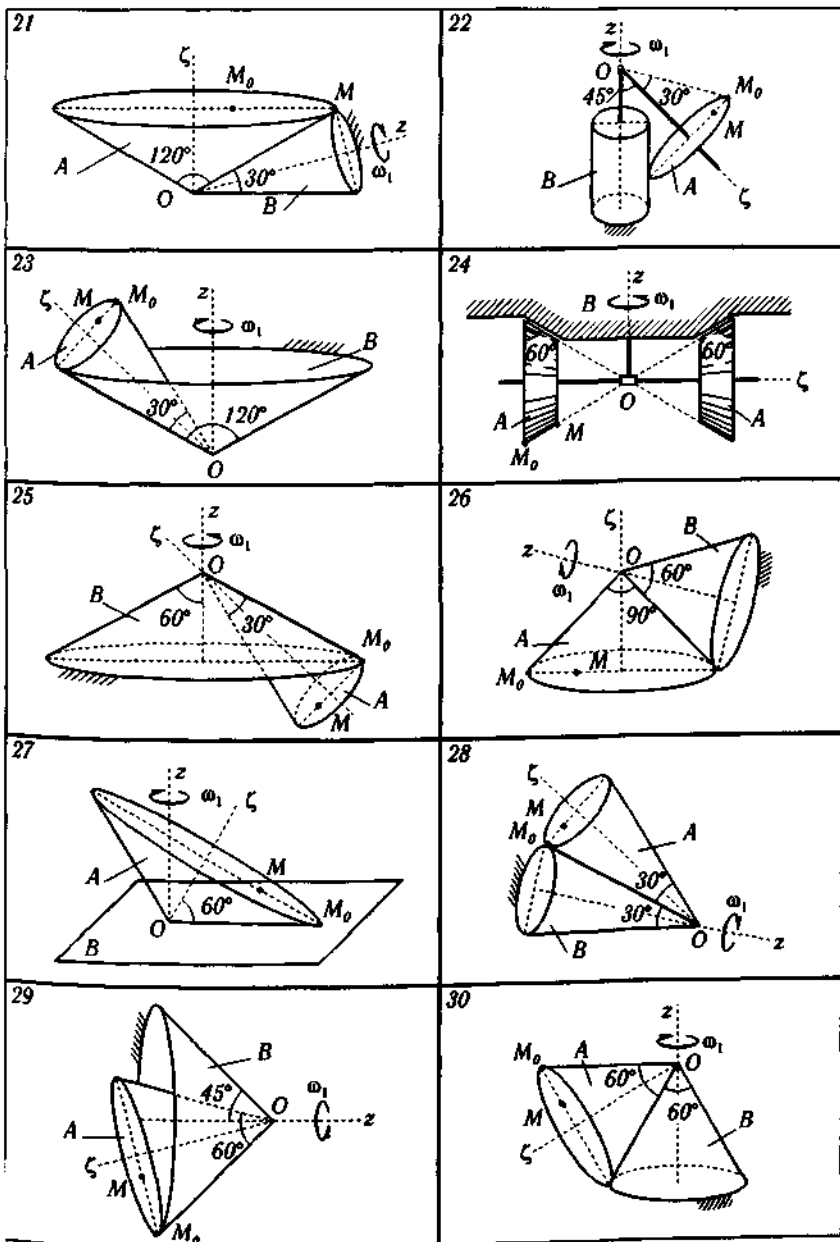


Рис. 93

Пример выполнения задания. Тела A и B представляют собой прямые круговые конусы (рис. 94).

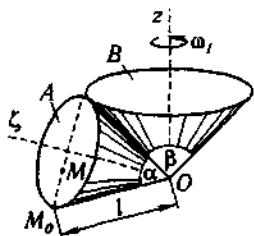


Рис. 94

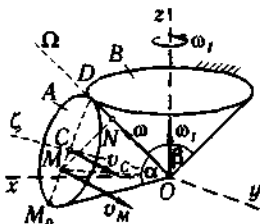


Рис. 95

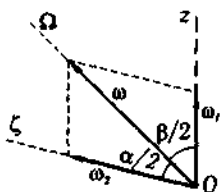


Рис. 96

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $OM_0 = l = 30$ см, $\omega_1 = 1,2$ рад/с, $\varepsilon_1 = 27$ рад/с², $M_0M = 10$ см.

Решение. 1. Определение угловой скорости тела. Конус A совершает сферическое движение. Мгновенная ось вращения $O\Omega$ совпадает с общей образующей конусов (рис. 95).

Выберем направления координатных осей Ox и Oy так, чтобы ось $O\zeta$, а следовательно, и $O\Omega$ находились в плоскости xOz .

Скорость v_C точки C является вращательной скоростью вокруг мгновенной оси.

Следовательно,

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{OC}, \quad (1)$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела A .

С другой стороны, $\vec{v}_C$ — вращательная скорость вокруг оси Oz , поэтому

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_1 \times \vec{OC}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\omega \sin(\alpha/2) = \omega_1 \sin[(\alpha + \beta)/2]. \quad (3)$$

С учетом исходных данных находим $\omega = 2,32$ рад/с.

Направление $\vec{\omega}$ определяется направлением $\vec{v}_C$ в соответствии с (1).

Угловую скорость тела A можно найти также путем сложения вращений вокруг пересекающихся осей — построением параллелограмма угловых скоростей (рис. 96):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Здесь $\vec{\omega}_2$ — угловая скорость конуса A во вращении вокруг собственной оси $O\zeta$.

По теореме синусов,

$$\omega / \sin[(\alpha + \beta)/2] = \omega_1 / \sin(\alpha/2),$$

что совпадает с выражением (3).

2. *Определение углового ускорения тела.* Угловое ускорение

$$\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt. \quad (4)$$

Вектор угловой скорости запишем в виде

$$\vec{\omega} = \omega \vec{i}_\Omega, \quad (5)$$

где ω — модуль вектора $\vec{\omega}$; $\vec{i}_\Omega$ — орт его направления.

Следовательно,

$$\vec{\epsilon} = (d\omega/dt)\vec{i}_\Omega + \omega d\vec{i}_\Omega/dt. \quad (6)$$

Заметим, что

$$d\vec{i}_\Omega/dt = \vec{\omega}_1 \times \vec{i}_\Omega,$$

а с учетом направлений $\vec{\omega}_1$ и $\vec{i}_\Omega$ (рис. 97)

$$d\vec{i}_\Omega/dt = \omega_1 \sin(\beta/2) \vec{j}.$$

Теперь вместо (6) имеем

$$\vec{\epsilon} = (d\omega/dt)\vec{i}_\Omega + \omega\omega_1 \sin(\beta/2) \vec{j} \quad (7)$$

или

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_\parallel + \vec{\epsilon}_\perp, \quad (8)$$

где

$$\vec{\epsilon}_\parallel = (d\omega/dt)\vec{i}_\Omega, \quad (9)$$

$$\vec{\epsilon}_\perp = \omega\omega_1 \sin(\beta/2) \vec{j}. \quad (10)$$

Эти же выражения составляющих $\vec{\epsilon}$ непосредственно следуют из условия, что угловое ускорение геометрически равно скорости $\vec{u}$ конца вектора $\vec{\omega}$. Ее составляющие $\vec{u}_\parallel = \vec{\epsilon}_\parallel$ и $\vec{u}_\perp = \vec{\epsilon}_\perp$ — соответственно радиальная и тангенциальная (поперечная) скорости этой точки.

Вектор $\vec{\epsilon}_\parallel$ направлен по мгновенной оси вращения $O\Omega$. Его модуль

$$\epsilon_\parallel = |d\omega/dt|.$$

Согласно (3) и учитывая, что $d\omega_1/dt = \epsilon_1$,

$$d\omega/dt = \epsilon_1 \sin[(\alpha + \beta)/2] / \sin(\alpha/2),$$

или с учетом исходных данных

$$d\omega/dt = 5,22 \text{ рад/с}^2.$$

Следовательно,

$$\epsilon_\parallel = 5,22 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «+» при $d\omega/dt$ (при ϵ_1) показывает, что направления $\vec{\epsilon}_\parallel$ и $\vec{\omega}$ совпадают.

Вектор $\vec{\epsilon}_\perp$, как следует из (10), имеет направление орта $\vec{j}$. Его модуль

$$\epsilon_\perp = \omega\omega_1 \sin(\beta/2),$$

или

$$\epsilon_\perp = 1,97 \text{ рад/с}^2.$$

Так как $\vec{\varepsilon}_\perp$ и $\vec{\varepsilon}_\parallel$ взаимно перпендикулярны, то

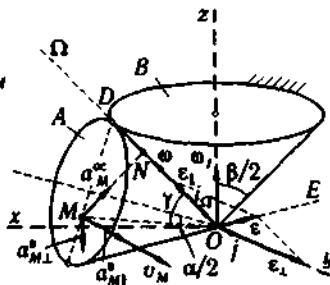


Рис. 97

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_\parallel^2 + \varepsilon_\perp^2},$$

или

$$\varepsilon = 5,58 \text{ рад/с}^2.$$

Векторы $\vec{\varepsilon}_\parallel$, $\vec{\varepsilon}_\perp$ и $\vec{\varepsilon}$ показаны на рис. 97.

3. *Определение скорости точки тела.* Скорость точки M определяем как вращательную вокруг мгновенной оси:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{OM}. \quad (11)$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{OM}$ расположены в плоскости xOz ; следовательно, вектор $\vec{v}_M$ параллелен оси Oy . Он имеет одинаковое направление с вектором $\vec{v}_C$.

Модуль скорости

$$v_M = \omega \cdot OM \sin(\vec{\omega}, \vec{OM}). \quad (12)$$

Как видно из рис. 95,

$$OM \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{OM}) = MN = DM \cdot \cos(\alpha/2);$$

$$DM = 2l \sin(\alpha/2) \sim MM_0.$$

С учетом этих соотношений по формуле (12) находим

$$v_M = 40,2 \text{ см/с}.$$

4. *Определение ускорения точки тела.* Ускорение точки M находим как геометрическую сумму осеостремительного и вращательного ускорений:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{\text{oc}} + \vec{a}_M^{\text{в}}.$$

Осеостремительное ускорение

$$\vec{a}_M^{\text{oc}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_M,$$

оно направлено по перпендикуляру к мгновенной оси вращения (рис. 97). Его модуль

$$a_M^{\text{oc}} = \omega v_M \sin 90^\circ = \omega v_M.$$

Вращательное ускорение

$$\vec{a}_M^{\text{в}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{OM},$$

или, учитывая (9),

$$\vec{a}_M^{\text{в}} = \vec{a}_{M\parallel}^{\text{в}} + \vec{a}_{M\perp}^{\text{в}},$$

где

$$\vec{a}_{M\parallel} = \vec{\varepsilon}_{\parallel} \times \vec{OM}, \quad (13)$$

$$\vec{a}_{M\perp} = \vec{\varepsilon}_{\perp} \times \vec{OM}. \quad (14)$$

Сравнивая (13) с (11) и принимая во внимание, что направления $\vec{\varepsilon}_{\parallel}$ и $\vec{\omega}$ совпадают, заключаем, что и направления $\vec{a}_{M\parallel}$ и $\vec{v}_M$ тоже совпадают.

Модуль составляющей ускорения точки M

$$a_{M\parallel}^s = \varepsilon_{\parallel} \cdot OM \cdot \sin(\vec{\varepsilon}_{\parallel}, \vec{OM}) = \varepsilon_{\parallel} \cdot DM \cdot \cos(\alpha/2).$$

Рис. 98

Вектор $\vec{a}_{M\perp}^s$ расположен в плоскости xOz и перпендикулярен OM . Его модуль

$$a_{M\perp}^s = \varepsilon_{\perp} \cdot OM \cdot \sin 90^\circ = \varepsilon_{\perp} \cdot OM;$$

$$OM = \sqrt{l^2 + (M_0 M)^2 - 2l \cdot M_0 M \cdot \sin(\alpha/2)}.$$

В результате вычислений находим:

$$a_{M\parallel}^s = 90,4 \text{ см/с}^2; \quad a_{M\perp}^s = 52,2 \text{ см/с}^2.$$

Ускорение точки M найдем как геометрическую сумму трех составляющих:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{oc} + \vec{a}_{M\parallel}^s + \vec{a}_{M\perp}^s.$$

Векторы $\vec{a}_M^{oc}$ и $\vec{a}_{M\perp}^s$ расположены в плоскости xOz , а вектор $\vec{a}_{M\parallel}^s$ ей перпендикулярен.

Поэтому модуль ускорения точки M (рис. 97)

$$a_M = \sqrt{(a_M^{oc})^2 + (a_{M\perp}^s)^2 - 2a_M^{oc}a_{M\perp}^s \cos \gamma + (a_{M\parallel}^s)^2}.$$

Здесь

$$\cos \gamma = \cos \angle MOD = (l - DM \cdot \sin(\alpha/2))/OM.$$

Окончательно после вычислений получаем

$$a_M = 110,9 \text{ см/с}^2.$$

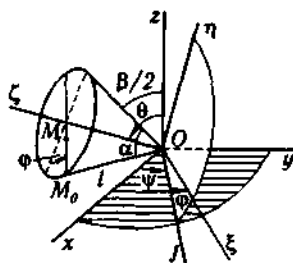
Если бы в этой задаче требовалось определить кинематические характеристики движения тела и его точки не в некоторый заданный, а в любой момент времени, условие задачи удобно было бы записать в форме уравнений Эйлера.

Полагая, например, что $\varepsilon_1 = \text{const}$, ω_1 — начальное значение угловой скорости вращения оси $O\zeta$ вокруг Oz (рис. 98), имеем

$$\psi = \omega_1 t + \varepsilon_1 t^2/2$$

(принято, что начальное значение угла $\psi_0 = 0$),

$$\theta = (\alpha + \beta)/2.$$



Для определения $\varphi = \varphi(t)$ заметим, что угловые скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ обратно пропорциональны длинам окружностей или радиусам оснований конусов, т. е.

$$\dot{\varphi} = [\sin(\beta/2)/\sin(\alpha/2)]\dot{\psi} \quad (\text{то же следует из рис. 96}),$$

или

$$\varphi = [\sin(\beta/2)/\sin(\alpha/2)]\psi \quad (\varphi_0 = 0).$$

Следовательно,

$$\varphi = [\sin(\beta/2)/\sin(\alpha/2)](\omega_1 t + \epsilon_1 t^2/2).$$

В условиях данной задачи

$$\psi = 1,35t^2 + 1,20t; \quad \theta = 5\pi/12; \quad \varphi = \sqrt{2}\psi.$$

Координаты точки M в подвижной системе координат:

$$\xi = l \sin(\alpha/2) - M_0 M = 30 \cdot 0,5 - 10 = 5,0 \text{ см},$$

$$\eta = 0,$$

$$\zeta = l \cos(\alpha/2) = 30 \cdot 0,866 = 26,0 \text{ см}.$$

Порядок решения такой задачи показан в примере выполнения задания К.5.

III. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Задание К.7. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка M движется относительно тела D . По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

Схемы механизмов показаны на рис. 99 — 101, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 34.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма (рис. 102),

$$s_r = OM = 16 - 8 \cos 3\pi t \text{ см}; \quad \varphi_e = 0,9t^2 - 9t^3 \text{ рад}; \quad t_1 = 2/9 \text{ с}.$$

Решение. Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис. 102) совпадает с плоскостью треугольника D . Положение точки M на теле D определяется расстоянием $s_r = OM$.

При $t = 2/9 \text{ с}$

$$s_r = 16 - 8 \cos(3\pi \cdot 2/9) = 20,0 \text{ см}.$$

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Номер варианта (рис. 99-101)	Уравнение относительно- го движения точки M $OM = s_r =$ $= s_r(t)$, см	Уравнение движения тела		t_1 , с	R , см	a , см	α , град	Дополни- тельные данные
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$18 \sin(\pi t/4)$	$2t^3 - t^2$	-	2/3	-	25	-	$\varphi_r = 0,15\pi t^3$
2	$20 \sin \pi t$	$0,4t^2 + t$	-	5/3	20	-	-	
3	$6t^3$	$2t + 0,5t^2$	-	2	-	30	-	
4	$10 \sin(\pi t/6)$	$0,6t^2$	-	1	-	-	60	
5	$40\pi \cos(\pi t/6)$	$3t - 0,5t^3$	-	2	30	-	-	
6	-	-	$3t + 0,27t^3$	10/3	15	-	-	
7	$20 \cos 2\pi t$	$0,5t^2$	-	3/8	-	40	60	
8	$6(t + 0,5t^2)$	$t^3 - 5t$	-	2	-	-	30	
9	$10(1 + \sin 2\pi t)$	$4t + 1,6t^2$	-	1/8	-	-	-	
10	$20\pi \cos(\pi t/4)$	$1,2t - t^2$	-	4/3	20	20	-	
11	$25 \sin(\pi t/3)$	$2t^2 - 0,5t$	-	4	-	25	-	$\varphi = \pi t^3/6;$ $O_1O = O_2A =$ $= 20$ см
12	$15\pi t^3/8$	$5t - 4t^2$	-	2	30	30	-	
13	$120\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	-	1/3	40	-	-	
14	$3 + 14 \sin \pi t$	$4t - 2t^2$	-	2/3	-	-	30	
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0,2t^3 + t$	-	2	-	60	45	
16	$20 \sin \pi t$	$t - 0,5t^2$	-	1/3	-	20	-	
17	$8t^3 + 2t$	$0,5t^2$	-	1	-	$4\sqrt{5}$	-	
18	$10t + t^3$	$8t - t^2$	-	2	-	-	60	
19	$6t + 4t^3$	$t + 3t^2$	-	2	40	-	-	
20	$30\pi \cos(\pi t/6)$	$6t + t^2$	-	3	60	-	-	
21	$25\pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	-	1/2	25	-	-	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
22	$10\pi \sin(\pi t/4)$	$4t - 0,2t^2$	-	2/3	30	-	-	
23	$6\pi t^2$	-	-	1	18	-	-	
24	$75\pi(0,1t + 0,3t^3)$	$2t - 0,3t^2$	-	1	30	-	-	
25	$15 \sin(\pi t/3)$	$10t - 0,1t^2$	-	5	-	-	-	$\varphi = \pi t^3/8;$ $O_1O = O_2A =$ $= 40$ см
26	$8 \cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	-	3/2	-	-	45	
27	-	-	$50t^2$	2	75	-	-	
28	$2,5\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	-	2	40	-	-	
29	$5\pi t^3/4$	-	-	2	30	-	-	
30	$4\pi t^2$	-	$t^3 + 4t$	2	48	-	-	

Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r ; в вариантах 5, 10, 12, 13, 20—24, 28—30 $OM = s_r$ — дуга окружности; на схемах 5, 10, 12, 21, 24 OM — дуга, соответствующая меньшему центральному углу. Относительное движение точки M в вариантах 6 и 27 и движение тела D в вариантах 23 и 29 определяются уравнениями, приведенными в последнем столбце табл. 34.

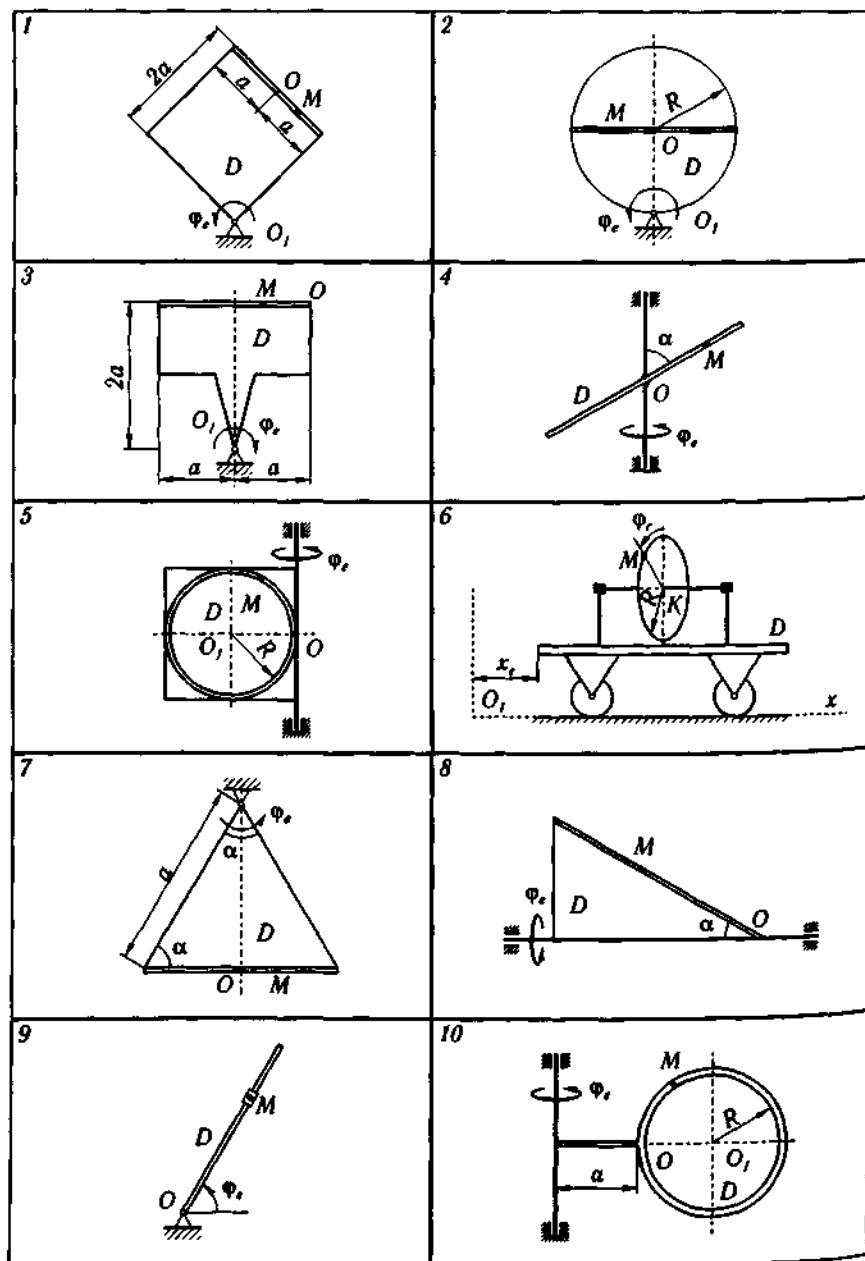


Рис. 99

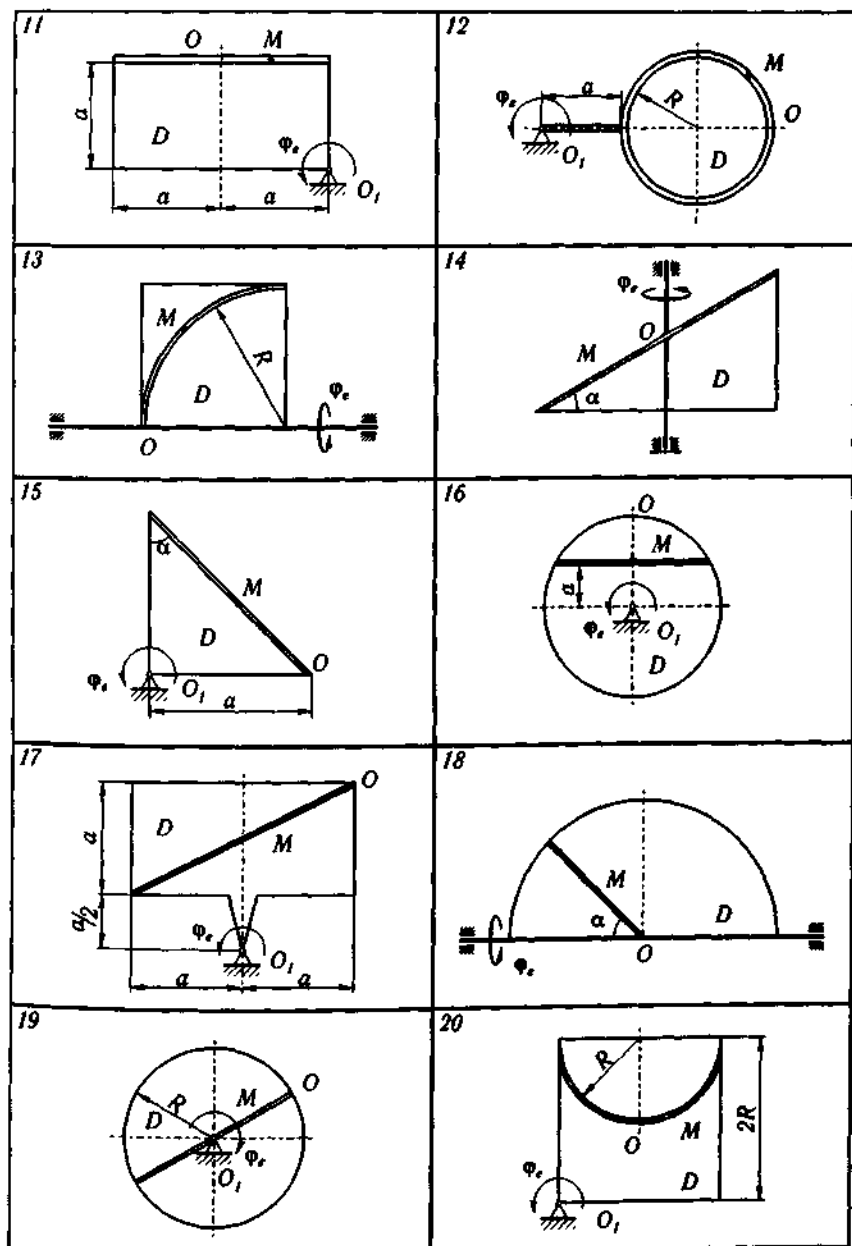


Рис. 100

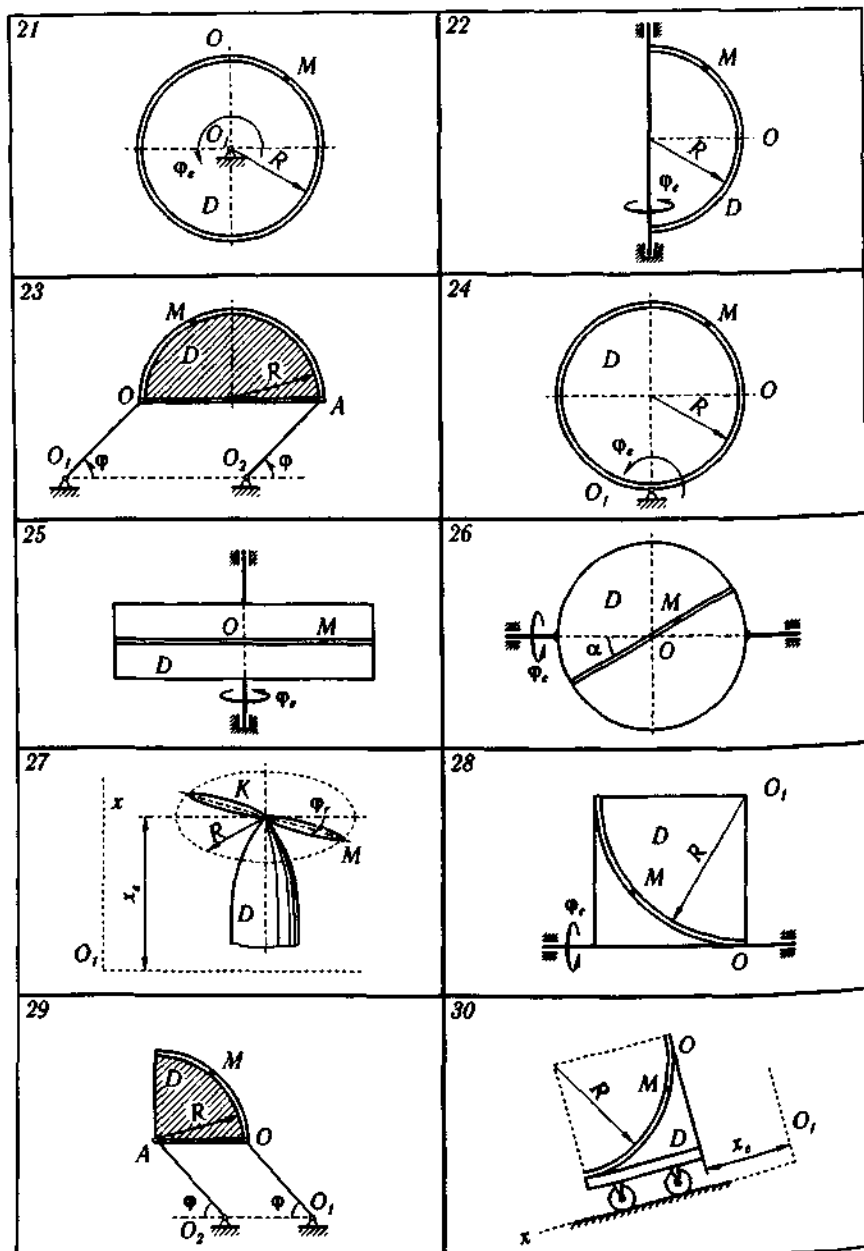


Рис. 101

Модуль относительной скорости

$$v_r = |\vec{v}_r|,$$

где

$$\vec{v}_r = ds_r/dt = 24\pi \sin 3\pi t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\vec{v}_r = 65,2 \text{ см/с}; v_r = 65,2 \text{ см/с}.$$

Положительный знак у $\vec{v}_r$ показывает, что вектор $\vec{v}_r$ направлен в сторону возрастания s_r .

Модуль переносной скорости

$$v_e = R\omega_e, \quad (1) \quad \text{Рис. 102}$$

где R — радиус окружности L , описываемой той точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка M , $r = s_r \sin 30^\circ = 10,0$ см; ω_e — модуль угловой скорости тела:

$$\omega_e = |\dot{\omega}_e|; \quad \dot{\omega}_e = d\varphi_e/dt = 1,8t - 27t^2.$$

При $t = 2/9$ с

$$\dot{\omega}_e = -0,93 \text{ рад/с}; \quad \omega_e = 0,93 \text{ рад/с}.$$

Отрицательный знак у величины $\dot{\omega}_e$ показывает, что вращение треугольника происходит вокруг оси Oz в сторону, обратную направлению отсчета угла φ . Поэтому вектор $\vec{\omega}_e$ направлен по оси Oz вниз (рис. 103, а).

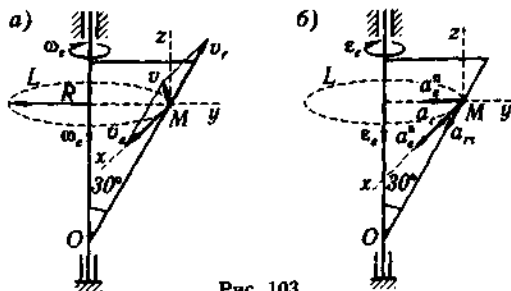


Рис. 103

Модуль переносной скорости, по формуле (1),

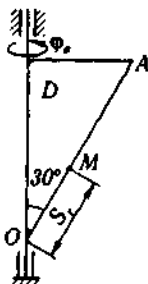
$$v_e = 9,3 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{v}_e$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела. Так как $\vec{v}_e$ и $\vec{v}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2},$$

или

$$v = 65,9 \text{ см/с}.$$



Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

или в развернутом виде

$$\vec{a} = \vec{a}_{rr} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_e^{\omega} + \vec{a}_e^u + \vec{a}_c.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$a_{rr} = |\vec{a}_{rr}|,$$

где

$$\vec{a}_{rr} = d^2 s_r / dt^2 = 72\pi^2 \cos 3\pi t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\vec{a}_{rr} = -355 \text{ см/с}^2; \quad a_{rr} = 355 \text{ см/с}^2.$$

Отрицательный знак $\vec{a}_{rr}$ показывает, что вектор $\vec{a}_{rr}$ направлен в сторону отрицательных значений s_r . Знаки $\vec{v}_r$ и $\vec{a}_{rr}$ различны; следовательно, относительное движение точки M замедленное.

Относительное нормальное ускорение

$$a_{rn} = v_r^2 / \rho = 0,$$

так как траектория относительного движения — прямая ($\rho = \infty$).

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_e^{\omega} = R\epsilon_e, \quad (2)$$

где $\epsilon_e = |\vec{\epsilon}_e|$ — модуль углового ускорения тела D :

$$\vec{\epsilon}_e = d^2 \varphi_e / dt^2 = 1,8 - 54t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\vec{\epsilon}_e = -10,2 \text{ рад/с}^2; \quad \epsilon_e = 10,2 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\vec{\epsilon}_e$ и $\vec{\omega}_e$ одинаковы; следовательно, вращение треугольника D ускоренное, направления векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\epsilon}_e$ совпадают (рис. 103, а, б). Согласно (2),

$$a_e^{\omega} = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^{\omega}$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{v}_e$.

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$a_e^u = R\omega_e^2 \text{ или } a_e^u = 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^u$ направлен к центру окружности L .

Кориолисово ускорение

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r),$$

где

$$\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \sin 150^\circ = 0,5.$$

С учетом найденных выше значений ω_e и v_r получаем

$$a_c = 61 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_c$ направлен согласно правилу векторного произведения (рис. 103, б).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_x = a_e^x + a_c; \quad a_y = -a_e^y - a_{rr} \cos 60^\circ;$$

$$a_z = -a_{rr} \cos 30^\circ; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 35.

Таблица 35

$\vec{\omega}_e$, рад/с	Скорость, см/с			$\vec{e}_e$, рад/с ²	Ускорение, см/с ²								
	v_e	$\vec{v}_r$	v		a_e^x	a_e^y	a_{rr}	$\vec{a}_{rr}$	a_c	a_x	a_y	a_z	a
-0,93	9,3	65,2	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	163	-186	308	395

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Задание К.8. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора

Найти угловые скорости ведомого вала II и сателлитов редуктора. Схемы редукторов показаны на рис. 104—106, необходимые для расчета данные приведены в табл. 36.

Пример выполнения задания (варианты 1—20). Редуктор с цилиндрическими колесами. Исходные данные: схема редуктора (рис. 107); радиусы колес (см): $r_1 = 30$, $r_2 = 15$, $r_3 = 30$, $r_4 = 75$; угловые скорости (рад/с): $\omega_1 = 80$, $\omega_1 = 20$.

Решение. Применим способ мгновенных центров скоростей. По угловым скоростям ведущих звеньев найдем скорость точки A оси блока сателлитов и скорость точки B касания колес 1 и 2 (рис. 108, а).

$$v_A = \omega_1(r_1 + r_2); \quad v_B = \omega_1 r_1,$$

или

$$v_A = 3600 \text{ см/с}; \quad v_B = 600 \text{ см/с}.$$

Таблица 36

Номер варианта (рис. 104-106)	Радиус, см				Угловая скорость, рад/с				
	r_1	r_2	r_3	r_4	ω_1	ω_1	ω_3	ω_4	ω_5
1	15	20	15	20	200	-	-	-40	-
2	30	30	15	45	350	50	-	-	-
3	15	30	15	60	240	-	-	-	40
4	20	30	20	120	10	-30	-	-	-
5	40	10	20	10	60	-	-	-	-20
6	80	15	35	30	120	-	-	50	-
7	50	10	15	55	80	-20	-	-	-
8	20	15	25	60	300	-	-	-	30
9	15	7	5	17	70	-	-	20	-
10	10	10	12	54	200	-	-	-10	-
11	50	10	15	55	30	-	-	-30	-
12	30	15	30	75	330	-	-	70	-
13	20	30	15	35	30	100	-	-	-
14	100	30	20	50	40	-50	-	-	-
15	15	5	9	11	270	-	-	-	20
16	40	10	20	50	40	-	-	-	-30
17	50	15	10	25	50	-30	-	-	-
18	50	10	10	50	40	40	-	-	-
19	20	15	10	25	200	50	-	-	-
20	50	10	15	25	90	-40	-	-	-
21	100	92	52	60	20	-10	-	-	-
22	50	28	16	30	70	-	-	-150	-
23	40	42	22	22	90	-	-	200	-
24	20	44	20	-	250	-	40	-	-
25	20	10	20	30	40	150	-	-	-
26	45	60	45	-	50	-120	-	-	-
27	30	30	30	-	100	-	-	40	-
28	40	42	20	20	130	-250	-	-	-
29	20	20	40	40	320	-	-	50	-
30	15	15	20	20	30	-350	-	-	-

Примечание. Положительный и отрицательный знаки угловых скоростей означают соответственно направление вращения против и по часовой стрелке, если смотреть со стороны ведущего вала I (для редуктора с цилиндрическими колесами) или со стороны положительного направления соответствующей оси (для редуктора с коническими колесами).

Отложив векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, найдем мгновенный центр скоростей P_{2-3} сателлитов 2 — 3. Покажем также скорость $\vec{v}_C$ точки C и направления вращений сателлитов 2—3 и колеса 4 (ведомого вала II). Согласно чертежу, угловая скорость сателлитов

$$\omega_{2-3} = (v_A - v_B)/AB.$$

Скорость точки C

$$v_C = v_A + \omega_{2-3} \cdot AC.$$

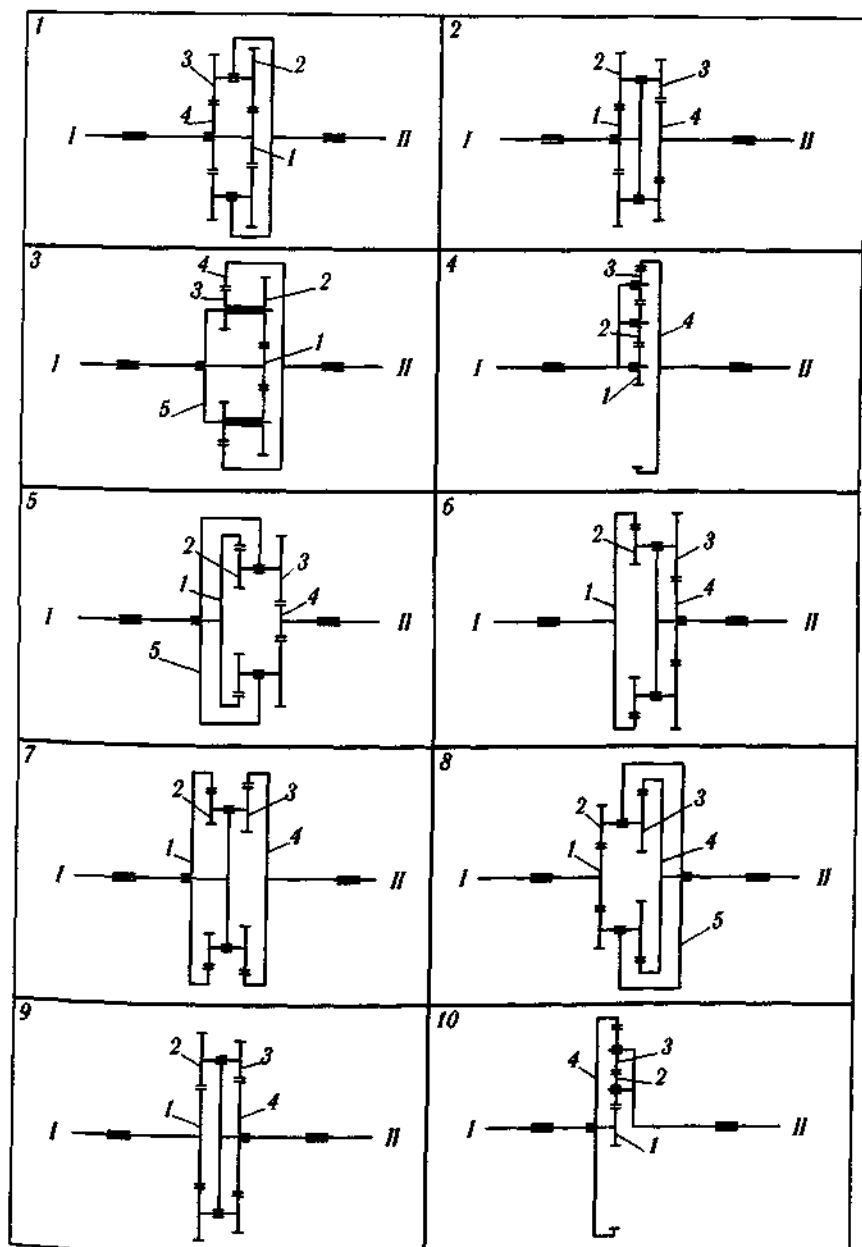


Рис. 104

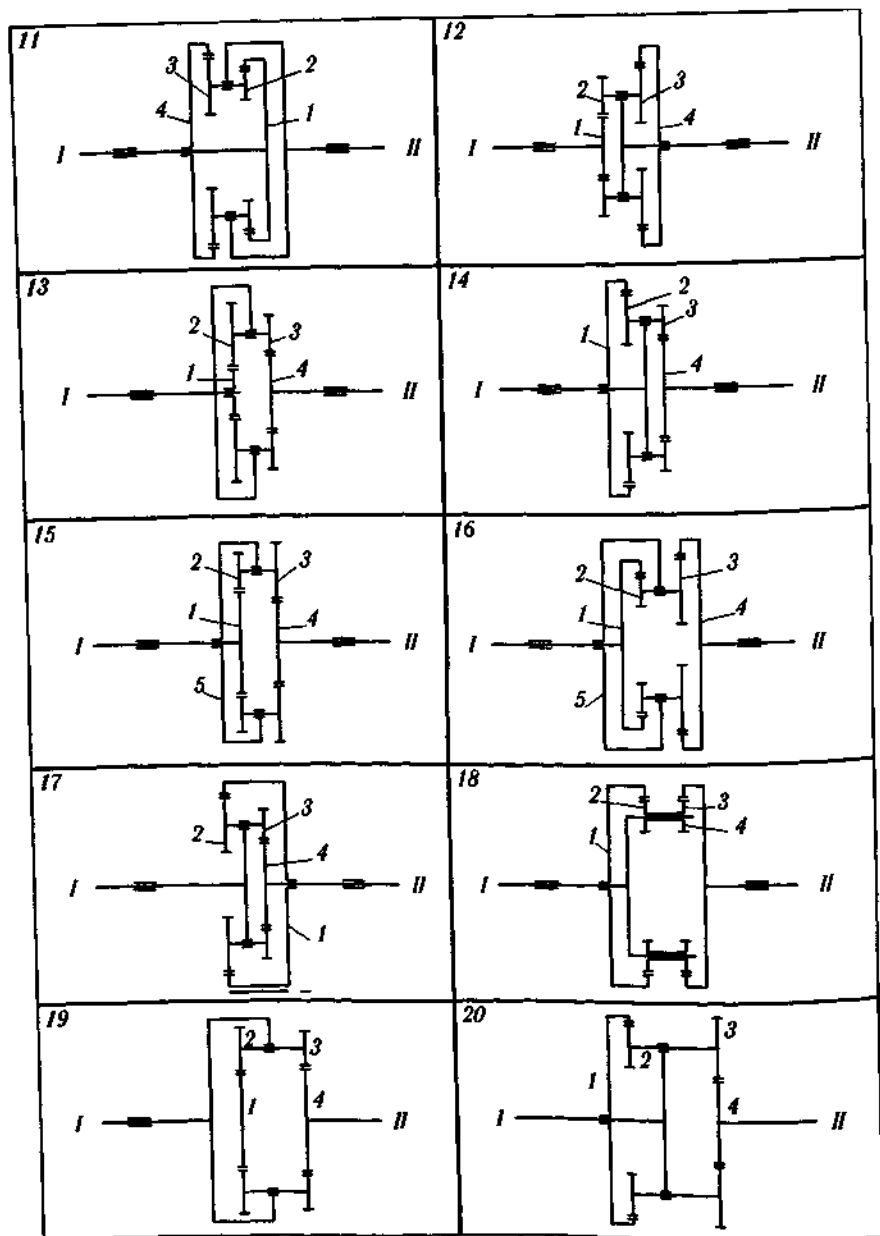


Рис. 105

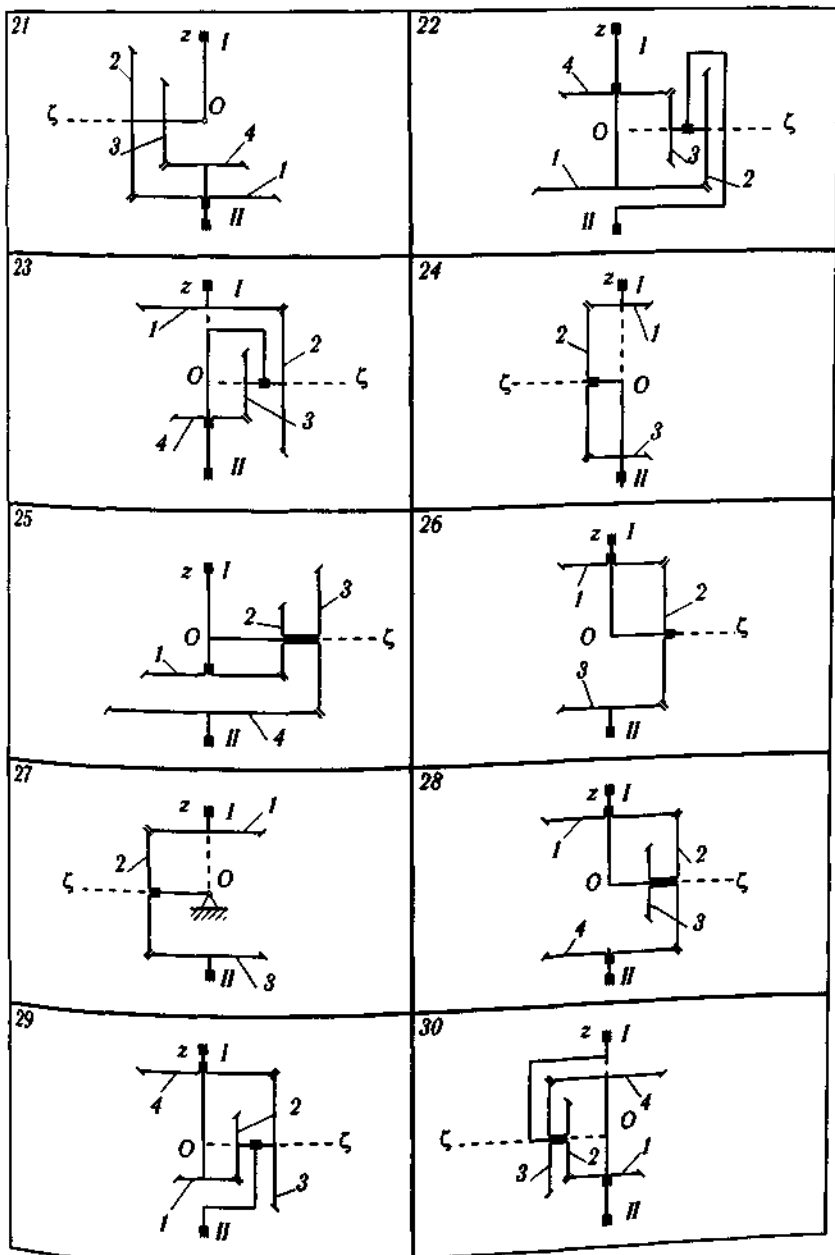


Рис. 106

Угловая скорость ведомого вала

$$\omega_{II} = \omega_4 = v_C / r_4.$$

Вычисляя, находим:

$$\omega_{2-3} = 200 \text{ рад/с}; v_C = 9600 \text{ см/с};$$

$$\omega_{II} = 128 \text{ рад/с}.$$

Для проверки решения используем способ, основанный на применении теории сложения вращений твердого тела вокруг параллельных осей (способ Виллиса).

Колеса редуктора участвуют: 1) в относительном вращении (по отношению к водилу) вокруг собственных осей и 2) в переносном вращении вместе с водилом вокруг его оси.

Переносной угловой скоростью для каждого колеса является угловая скорость водила ω_O .

Относительные угловые скорости колес определяются как разности абсолютных и переносных угловых скоростей:

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_O;$$

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_O;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\omega_{kr} = \omega_k - \omega_O.$$

Эти относительные скорости являются угловыми скоростями колес при мысленно оставленном водиле.

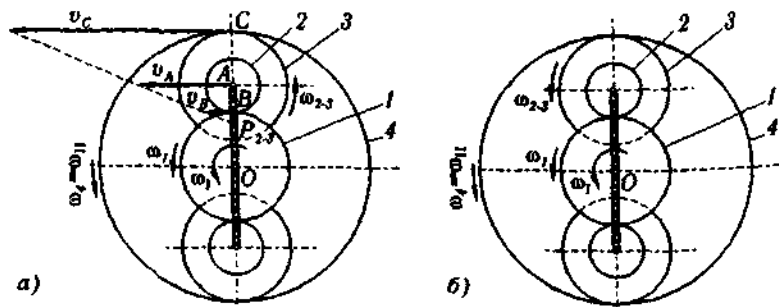


Рис. 108

В этом случае между относительными угловыми скоростями имеются такие же соотношения, как в зубчатых передачах с неподвижными осями вращений. Следовательно,

$$(\omega_1 - \omega_O) / (\omega_k - \omega_O) = (-1)^m i, \quad (1)$$

где m — число внешних зацеплений между колесами 1 и k ; i — передаточное число от колеса 1 к колесу k в относительном движении (при остановленном водиле).

Отметим, что в это соотношение (формулу Виллиса) входят алгебраические значения угловых скоростей; знак «+» примем соответствующим вращению против часовой стрелки, а «-» — вращению по часовой стрелке.

Применим формулу (1) к решению рассматриваемой задачи (рис. 108, б). Так как колеса 1 и 2 находятся во внешнем зацеплении, а колеса 3 и 4 — во внутреннем и угловая скорость водила равна ω_1 (рис. 108, а, б), то

$$(\omega_1 - \omega_1)/(\omega_4 - \omega_1) = (-1)^1 r_2 r_4 / (r_1 r_3),$$

откуда

$$\omega_{II} = \omega_4 = \omega_1 - (\omega_1 - \omega_1) r_1 r_3 / (r_2 r_4).$$

Угловую скорость ω_{2-3} сателлитов 2—3 определяем из следующего отношения:

$$(\omega_1 - \omega_1)/(\omega_{2-3} - \omega_1) = -r_2 / r_1,$$

откуда

$$\omega_{2-3} = \omega_1 - (\omega_1 - \omega_1) r_1 / r_2.$$

Используя исходные данные, находим:

$$\omega_{II} = 128 \text{ рад/с}; \quad \omega_{2-3} = 200 \text{ рад/с}.$$

Знаки «+» в ответах указывают на то, что вал II и сателлиты 2—3 вращаются в направлении, противоположном вращению часовой стрелки.

Пример выполнения задания (варианты 21—30). Редуктор с коническими колесами. Исходные данные: схема редуктора (рис. 109), радиусы колес (см): $r_1 = 24$, $r_2 = 30$, $r_3 = 40$, $r_4 = 44$ см, угловые скорости (рад/с): $\omega_1 = 60$, $\omega_1 = -40$.

Решение. Движение блока сателлитов 2—3 может рассматриваться как совокупность двух вращательных движений. При этом в качестве переносного движения можно принять не только вращение водила вокруг оси Oz (в рассматриваемой задаче угловая скорость водила равна угловой скорости ведущего вала ω_1), но и вращение колеса I или колеса 4. Следовательно,

$$\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{1c}; \quad \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{1c}; \quad \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_{4c}. \quad (2)$$

Здесь $\vec{\omega}_c$ — угловая скорость сателлитов; $\vec{\omega}_{1c}$, $\vec{\omega}_{1c}$, $\vec{\omega}_{4c}$ — угловые скорости сателлитов относительно водила, колеса I и колеса 4 соответственно.

Заметим, что линии действия любых двух составляющих вектора $\vec{\omega}_c$ известны. Угловые скорости $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_4$ направлены по оси Oz (рис. 110, а), $\vec{\omega}_{1c}$ — по оси $O\zeta$; $\vec{\omega}_{1c}$ и $\vec{\omega}_{4c}$ — соответственно по линиям Oa и Ob (по мгновенным осям вращения в относительном движении).

Из произвольного полюса O_1 (рис. 110, б) отложим векторы заданных угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_1$ параллельно оси Oz , а векторы $\vec{\omega}_{1c}$, $\vec{\omega}_{1c}$ и $\vec{\omega}_{4c}$ — параллельно $O\zeta$, Oa и Ob соответственно.

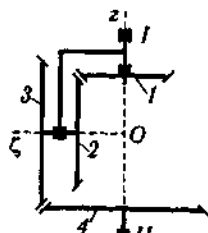


Рис. 109

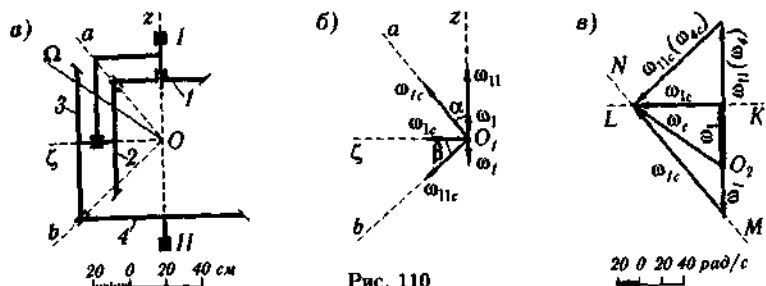


Рис. 110

Спроецировав векторные выражения (2) на оси ζ и z получим:

$$\begin{aligned} \omega_{c\zeta} &= \omega_{1c}; & \omega_{cz} &= \omega_1; \\ \omega_{c\zeta} &= \omega_{1c} \sin \alpha; & \omega_{cz} &= -\omega_1 + \omega_{1c} \cos \alpha; \\ \omega_{c\zeta} &= \omega_{4c} \cos \beta; & \omega_{cz} &= \omega_4 - \omega_{4c} \sin \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая систему уравнений (3), находим:

$$\begin{aligned} \omega_{c\zeta} &= (\omega_1 + \omega_1) \tan \alpha; \\ \omega_{c\zeta} &= \omega_1; \\ \omega_4 &= \omega_1 + (\omega_1 + \omega_1) \tan \alpha \tan \beta. \end{aligned}$$

При вычислениях заметим, что $\tan \alpha = r_1/r_2$; $\tan \beta = r_3/r_4$; $\omega_{11} = \omega_4$.

Учитывая исходные данные и имея в виду, что здесь $\omega_1 = 40$ рад/с (знак « $\rightarrow$ » учтен в направлении $\vec{\omega}_1$ на рис. 110, б), получаем (рад/с):

$$\omega_{c\zeta} = 80; \quad \omega_{cz} = 60; \quad \omega_{11} = 132,7.$$

Угловая скорость сателлитов 2—3

$$\omega_c = \sqrt{\omega_{c\zeta}^2 + \omega_{cz}^2},$$

или

$$\omega_c = 100 \text{ рад/с.}$$

Отметим, что векторные уравнения (2) могут быть решены и графически. Для этого из произвольного центра O_2 (рис. 110, в) отложим в выбранном масштабе параллельно оси Oz векторы заданных угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_1$. Через конец вектора $\vec{\omega}_1$ проводим прямую KL , параллельную $O\zeta$ (линии действия $\vec{\omega}_{1c}$), из конца вектора $\vec{\omega}_1$ — прямую MN , параллельную Oa (линии действия $\vec{\omega}_{1c}$). Точка пересечения этих прямых определяет конец вектора $\vec{\omega}_c$, а также $\vec{\omega}_{1c}$ и $\vec{\omega}_{1c}$.

Измерением на чертеже находим

$$\omega_c = 100 \text{ рад/с.}$$

Направление $\vec{\omega}_c$ определяет положение мгновенной оси вращения сателлита $O\Omega$ (рис. 110, а).

Для определения ω_{11} разложим ω_c на две составляющие, направленные параллельно Oz и Ob . Полученные векторы представляют собой $\vec{\omega}_{11}(\vec{\omega}_4)$ и $\vec{\omega}_{1c}(\vec{\omega}_{4c})$.

Измерением на чертеже находим $\omega_{II} = 135$ рад/с.

Приведем также решение этой задачи способом Виллиса. Формулу (1) можно применять и для механизма с коническими колесами, т. е. когда оси вращения колес пересекаются. В этом случае надо иметь в виду следующее:

1. Сателлиты 2—3 участвуют во вращениях вокруг пересекающихся осей. Поэтому их угловая скорость относительно водила не может быть выражена алгебраической разностью между абсолютной и переносной угловыми скоростями.

2. Знаки передаточного числа от одного колеса к другому в формуле Виллиса определяются из следующего условия: «+», если глядя со стороны положительных направлений осей, видеть вращения соответствующих колес происходящими (при остановленном водиле) в одном направлении; «-», если вращения колес видеть происходящими в разных направлениях.

В рассматриваемой задаче угловая скорость водила равна угловой скорости ведущего вала ω_I . Угловая скорость сателлитов относительно водила обозначена ω_{Ic} . Тогда для колес 1 и 2 имеем

$$(\omega_1 - \omega_I)/\omega_{Ic} = -r_2/r_1. \quad (4)$$

Для колес 3 и 4

$$\omega_{Ic}/(\omega_4 - \omega_I) = r_4/r_3. \quad (5)$$

Перемножая (4) и (5), получаем

$$(\omega_1 - \omega_I)/(\omega_4 - \omega_I) = -r_2 r_4/(r_1 r_3),$$

откуда

$$\omega_{II} = \omega_4 = \omega_I - (\omega_1 - \omega_I)r_1 r_3/(r_2 r_4). \quad (6)$$

Подставляя в (6) числовые значения, находим $\omega_{II} = 132,7$ рад/с.

Положительный знак у ω_{II} показывает, что ведомый вал вращается в направлении против вращения часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси Oz).

Для определения угловой скорости сателлита из (4) определяем сначала его угловую скорость относительно водила:

$$\omega_{Ic} = -(\omega_1 - \omega_I)r_1/r_2,$$

или

$$\omega_{Ic} = 80 \text{ рад/с.}$$

Абсолютная угловая скорость сателлита

$$\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_I + \vec{\omega}_{Ic},$$

причем вектор $\vec{\omega}_I$ направлен по оси Oz , а $\vec{\omega}_{Ic}$ — по оси $O\zeta$.

Так как $\vec{\omega}_{Ic}$ и $\vec{\omega}_I$ взаимно перпендикулярны, то

$$\omega_c = \sqrt{\omega_{Ic}^2 + \omega_I^2},$$

или

$$\omega_c = 100 \text{ рад/с.}$$

IV. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

Задание К.9. Определение угловых скоростей и угловых ускорений звеньев механизма манипулятора по заданному движению рабочей точки

Манипулятор робота представляет собой плоский механизм (рис. 111—113). Звенья этого устройства образуют «механическую руку» с захватом в точке А.

В заданной системе координат известны уравнения движения рабочей точки А (захвата). Движение точки А длится 1 с.

Требуется определить в этом интервале времени углы φ , ψ , θ и расстояние z . Вычислить также угловые скорости и угловые ускорения звеньев и относительные (варианты 1—13, 15—25, 27—30) или абсолютные (варианты 14, 26) скорости $\dot{z}$ и ускорения $\ddot{z}$ точки В. Все вычисления произвести для промежутка времени от 0 до 1 с с шагом $\Delta t = 0,2$ с.

Положительные направления отсчета углов φ , ψ , θ и расстояния z показаны на рисунках вариантов. Считать, что начальные значения углов $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ известны. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 37.

Таблица 37

Номер ва- рианта (рис. 111-113)	a	b	c	φ ₀	ψ ₀	Уравнения движения	
						x _A	y _A
	м			град		м	
1	0,5	1,2	0,4	60	15	1,4091	0,7436-0,3t
2	0,4	0,7	0,24	80	25	0,7712	0,0800+0,2t
3	0,4	1,2	-	115	25	0,6466+0,2t	0,7429
4	0,4	0,7	-	45	10	0,9722	0,4044-0,2t
5	0,3	0,8	0,4	115	25	0,4715	0,8819+0,3t
6	0,8	0,6	0,6	30	25	1,2366	0,1464+0,2t
7	0,9	0,24	0,64	40	25	1,559-0,2t	0,1728
8	0,3	0,66	-	38	25	1,071	0,0947+0,3t
9	0,74	0,8	0,32	35	15	1,3789-0,3t	0,6315
10	0,3	0,36	-	80	5	1,128	0,3896-0,3t
11	0,28	0,34	-	50	40	1,3213	-0,0122+0,3t
12	0,6	0,8	-	35	15	1,2642-0,2t	0,1371
13	0,8	0,6	-	35	15	1,2349	0,3036+0,2t
14	0,46	0,82	0,6	70	15	0,9494+0,2t	0,2200
15	0,5	0,3	-	125	25	0,5289	0,7899-0,4t

Номер варианта (рис. 111-113)	a	b	c	φ ₀	ψ ₀	Уравнения движения	
						x _A	y _A
	м			град		м	
16	0,6	1,2	0,54	35	25	0,5961+0,2t	0,8513
17	0,42	1,0	0,56	50	15	1,236	0,5806-0,2t
18	0,4	0,46	-	40	20	1,6032-0,3t	0,7291
19	0,34	0,9	-	65	12	1,024	0,121+0,3t
20	0,4	0,5	-	60	17	1,6345-0,3t	0,785
21	0,3	0,9	-	50	30	0,5866	0,6798-0,2t
22	0,3	1,3	0,34	60	20	1,3716-0,3t	0,7044
23	0,24	0,82	0,4	135	35	0,502	0,64-0,2t
24	0,3	0,5	-	32	17	1,226+0,2t	0,0987
25	0,4	0,9	0,6	40	15	1,4056-0,2t	0,6839
26	0,4	0,8	0,34	50	20	1,1374	0,7332-0,2t
27	0,2	0,3	-	65	20	1,339-0,3t	0,0427
28	0,3	0,3	0,4	130	35	0,5444+0,3t	0,746
29	0,34	0,24	-	55	30	1,0264	-0,2015+0,2t
30	0,28	0,86	0,4	135	41	0,4511+0,2t	0,7622

В конструкции манипуляторов использовано соединение, схема которого и условное обозначение приведены на рис. 114, а, б; взаимное относительное движение звеньев 1—3 — поступательное, 2 и 3 — вращательное, 1 и 2 — плоское.

Пример выполнения задания. На рис. 115, а изображен в начальном положении механизм манипулятора и показаны положительные направления отсчета углов φ , ψ , θ и расстояния z . Размеры звеньев (м): $a = 1,30$, $b = 1,10$, $c = 0,55$.

Захват (точка А) движется согласно уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x_A(t) &= 1,5329 - 0,2t \\ y_A(t) &= 0,5487 - 0,089t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в течение 1 с.

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 = 62^\circ; \quad \psi = \psi_0 = 33^\circ.$$

Определить значения углов φ , ψ , θ и расстояние z для указанного промежутка времени.

Вычислить также угловые скорости $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, угловые ускорения $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, относительную скорость $\dot{z}$ и относительное ускорение $\ddot{z}$ точки В. Вычисления произвести для моментов времени 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1 с.

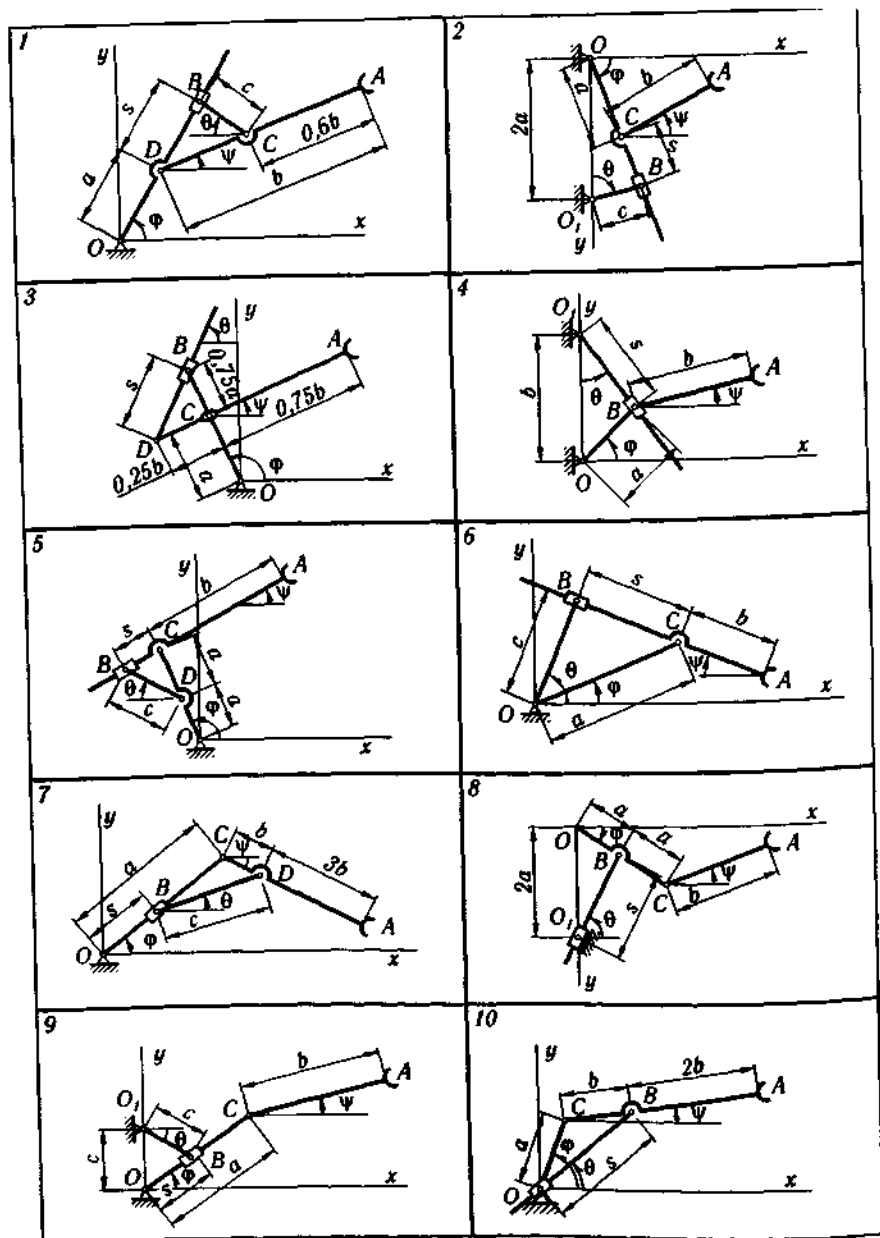


Рис. 111

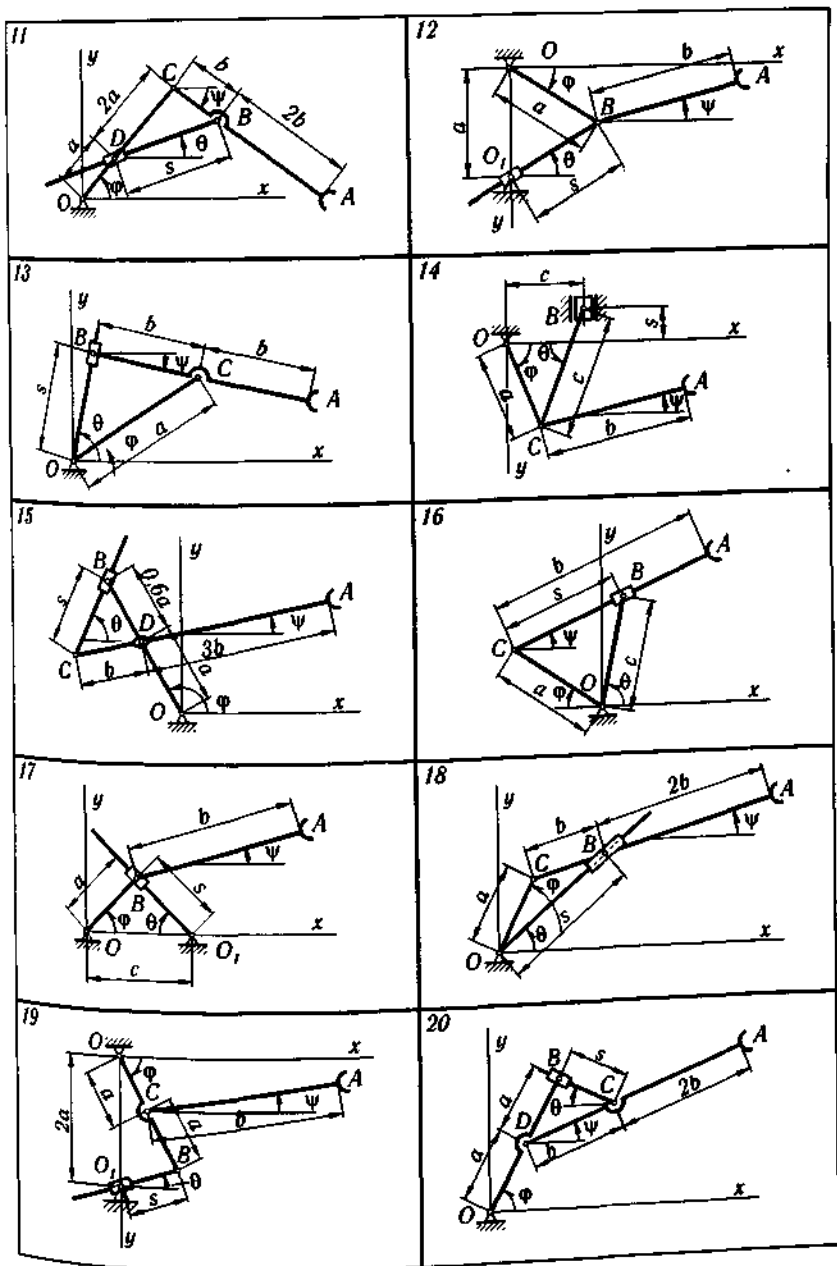


Рис. 112

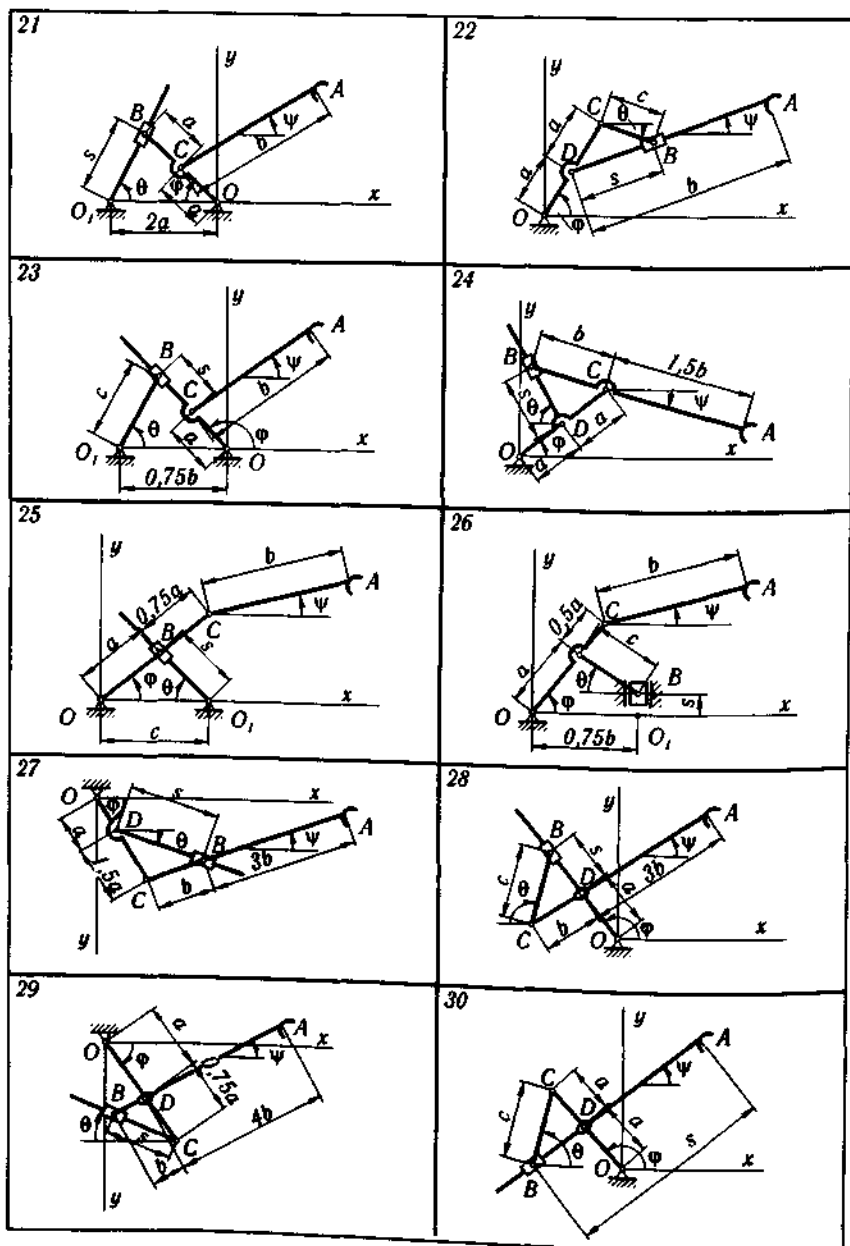


Рис. 113

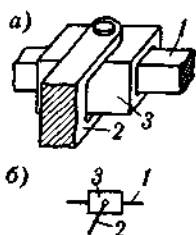


Рис. 114

Решение. Для любого положения механизма справедливы векторные соотношения (рис. 115, б)

$$\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA}, \quad (2)$$

$$\vec{OB} = \vec{DC} + \vec{CB}, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} |\vec{OC}| &= a = \text{const}; & |\vec{CA}| &= b = \text{const}; \\ |\vec{DC}| &= 0,31a = \text{const}; & |\vec{DB}| &= c = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Равенства (2) — (4) являются уравнениями связей, наложенных на систему.

Спроецируем (2) и (3) на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= a \cos \varphi + b \cos \psi; \\ y_A &= a \sin \varphi - b \sin \psi; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} c \cos \theta &= 0,31a \cos \varphi + s \cos \psi; \\ c \sin \theta &= 0,31a \sin \varphi - s \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Продифференцируем (5) и (6) дважды по времени, учитывая (4). В результате первого дифференцирования получим уравнения, содержащие неизвестные угловые скорости $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ и скорость $\dot{s}$:

$$\left. \begin{aligned} -a\dot{\varphi} \sin \varphi - b\dot{\psi} \sin \psi &= \dot{x}_A; \\ a\dot{\varphi} \cos \varphi - b\dot{\psi} \cos \psi &= \dot{y}_A; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} -0,31a\dot{\varphi} \sin \varphi - s\dot{\psi} \sin \psi + \dot{s} \cos \psi + c\dot{\theta} \sin \theta &= 0; \\ 0,31a\dot{\varphi} \cos \varphi - s\dot{\psi} \cos \psi - \dot{s} \sin \psi - c\dot{\theta} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

После второго дифференцирования получим две системы уравнений, связывающих угловые ускорения $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$ и относительное ускорение $\ddot{s}$:

$$\left. \begin{aligned} -a\ddot{\varphi} \sin \varphi - b\ddot{\psi} \sin \psi &= \ddot{x}_A + a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + b\dot{\psi}^2 \cos \psi, \\ a\ddot{\varphi} \cos \varphi - b\ddot{\psi} \cos \psi &= \ddot{y}_A + a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - b\dot{\psi}^2 \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

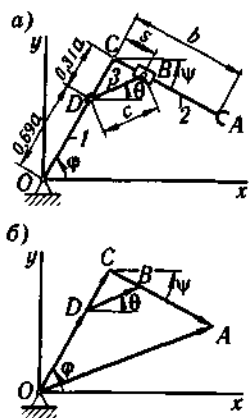


Рис. 115

$$\left. \begin{aligned} -0,31a\ddot{\varphi} \sin \varphi - s\ddot{\psi} \cos \psi + \ddot{s} \cos \psi + c\ddot{\theta} \sin \theta = \\ = 0,31a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + 2\dot{s}\dot{\psi} \sin \psi + s\dot{\psi}^2 \cos \psi - c\dot{\theta}^2 \cos \theta; \\ 0,31a\ddot{\varphi} \cos \varphi - s\ddot{\psi} \cos \psi - \ddot{s} \sin \psi - c\ddot{\theta} \cos \theta = \\ = 0,31a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2\dot{s}\dot{\psi} \cos \psi - s\dot{\psi}^2 \sin \psi - c\dot{\theta}^2 \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Величины $\dot{x}_A$, $\dot{y}_A$, $\ddot{x}_A$, $\ddot{y}_A$, входящие в выражения (7) и (9), определяются дифференцированием уравнений движения захвата (1):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_A = -0,2; \quad \ddot{x}_A = 0; \\ \dot{y}_A = -0,089; \quad \ddot{y}_A = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для начального момента времени $t = t_0 = 0$ системы уравнений (7) и (8) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} -a\dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0 - b\dot{\psi}_0 \sin \psi_0 = -0,2; \\ a\dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 - b\dot{\psi}_0 \cos \psi_0 = -0,089; \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

$$\left. \begin{aligned} -0,31a\dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0 - s_0\dot{\psi}_0 \sin \psi_0 + \dot{s}_0 \cos \psi_0 + c\dot{\theta}_0 \sin \theta_0 = 0; \\ 0,31a\dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 - s_0\dot{\psi}_0 \cos \psi_0 - \dot{s}_0 \sin \psi_0 - c\dot{\theta}_0 \cos \theta_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

Для определения s_0 и θ_0 воспользуемся системой (6) для начального положения ($t = 0$):

$$\begin{aligned} c \cos \theta_0 &= 0,31a \cos \varphi_0 + s_0 \cos \psi_0; \\ c \sin \theta_0 &= 0,31a \sin \varphi_0 - s_0 \sin \psi_0. \end{aligned}$$

Разрешив данную систему относительно s_0 и $\tan \theta_0$, получим:

$$s_0 = \sqrt{(0,31a)^2 + c^2 - 0,62a \cdot c \cdot \cos(\varphi_0 - \theta_0)}; \quad s_0 = 0,4102 \text{ м};$$

$$\tan \theta_0 = \frac{0,31a \sin \varphi_0 - s_0 \sin \psi_0}{0,31a \cos \varphi_0 + s_0 \cos \psi_0}; \quad \tan \theta_0 = 0,2483,$$

откуда

$$\theta_0 = 13,946^\circ.$$

Подставляя значения a , b , c , φ_0 , ψ_0 , θ_0 , s_0 в (7'), (8'), имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -1,1478\dot{\varphi}_0 - 0,5991\dot{\psi}_0 &= -0,2; \\ 0,6103\dot{\varphi}_0 - 0,9225\dot{\psi}_0 &= 0,089; \\ -0,3558\dot{\varphi}_0 - 0,2234\dot{\psi}_0 + 0,8387\dot{s}_0 + 0,1326\dot{\theta}_0 &= 0; \\ 0,1892\dot{\varphi}_0 - 0,344\dot{\psi}_0 - 0,5446\dot{s}_0 - 0,5338\dot{\theta}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0 &= 0,0921 \text{ рад/с}; & \dot{\psi}_0 &= 0,1574 \text{ рад/с}; \\ \dot{\theta}_0 &= -0,1806 \text{ рад/с}; & \dot{s}_0 &= 0,1095 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Заметим, что первые два уравнения решаются совместно, независимо от двух последних.

Используя найденные результаты, составим систему уравнений (9) и (10) для начального положения манипулятора

$$\begin{aligned} -1,1478\ddot{\varphi}_0 - 0,5991\ddot{\psi}_0 &= 0,028, \\ 0,6103\varphi_0 - 0,9225\ddot{\psi}_0 &= -0,0051 \\ -0,3558\ddot{\varphi}_0 - 0,2234\ddot{\psi}_0 + 0,8387\dot{s}_0 + 0,1326\dot{\theta}_0 &= 0,0115; \\ 0,1892\ddot{\varphi}_0 - 0,344\psi_0 - 0,5446\dot{s}_0 - 0,5338\dot{\theta}_0 &= 0,0221 \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_0 &= -0,0203 \text{ рад/с}^2 & \dot{\psi}_0 &= -0,0079 \text{ рад/с}; \\ \dot{\theta}_0 &= -0,0555 \text{ рад/с}, & \dot{s}_0 &= 0,0118 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Отметим что и в этом случае первые два уравнения решаются независимо от двух последних

Следующим моментом времени, при котором необходимо определить искомые величины, является $t = t_1 = \Delta t = 0,2$ с. Считая Δ малой величиной, можно записать*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 + \dot{\varphi}_0\Delta t + \ddot{\varphi}_0\Delta t^2/2; \\ \psi_1 &= \psi_0 + \dot{\psi}_0\Delta t + \ddot{\psi}_0\Delta t^2/2; \\ \theta_1 &= \theta_0 + \dot{\theta}_0\Delta t + \ddot{\theta}_0\Delta t^2/2 \\ s_1 &= s_0 + \dot{s}_0\Delta t + \ddot{s}_0\Delta t^2/2 \end{aligned} \quad (12)$$

Выражения (12) непосредственно вытекают из разложения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$, $s(t)$ в ряд Маклорена

Вычислим согласно (12) φ_1 , ψ_1 , θ_1 и s_1

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1,1001 \text{ рад}; & \psi_1 &= 0,6073 \text{ рад}; \\ \theta_1 &= 0,2062 \text{ рад}, & s_1 &= 0,4323 \text{ м} \end{aligned}$$

В общем случае переход от φ_i , ψ_i , θ_i , s_i к φ_{i+1} , ψ_{i+1} , θ_{i+1} , s_{i+1} будет осуществляться по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= \varphi_i + \dot{\varphi}_i\Delta t + \ddot{\varphi}_i\Delta t^2/2; \\ \psi_{i+1} &= \psi_i + \dot{\psi}_i\Delta t + \ddot{\psi}_i\Delta t^2/2 \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \dot{\theta}_i\Delta t + \ddot{\theta}_i\Delta t^2/2; \\ s_{i+1} &= s_i + \dot{s}_i\Delta t + \ddot{s}_i\Delta t^2/2, \end{aligned} \quad (13)$$

где i — порядковый номер рассчитываемого положения механизма. Отметим, что уравнения (13) соответствуют закону изменения параметров φ , ψ , θ , s в интервале времени $[t_i, t_{i+1}]$ с постоянным ускорением (равнопеременное движение)

Следует учесть что для решения системы дифференциальных уравнений необходимо правильно выбрать численный метод, иначе полученное решение может оказаться неверным

По найденным согласно (12) φ_1 , ψ_1 , θ_1 , s_1 записываем системы уравнений (7) и (8) для положения 1 ($i = 1$) манипулятора:

$$\begin{aligned} -1,1586\dot{\varphi}_1 - 0,6277\dot{\psi}_1 &= -0,2; \\ 0,5896\dot{\varphi}_1 - 0,9033\dot{\psi}_1 &= -0,089; \\ -0,3592\dot{\varphi}_1 - 0,2467\dot{\psi}_1 + 0,8212\dot{s}_1 + 0,1126\dot{\theta}_1 &= 0; \\ 0,1828\dot{\varphi}_1 - 0,3550\dot{\psi}_1 - 0,5707\dot{s}_1 - 0,5383\dot{\theta}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= 0,0881 \text{ рад/с}; & \dot{\psi}_1 &= 0,1560 \text{ рад/с}; \\ \dot{\theta}_1 &= -0,1913 \text{ рад/с}; & \dot{s}_1 &= 0,1116 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Используя полученные результаты, записываем системы уравнений (9) и (10) для положения 1 ($i = 1$) манипулятора:

$$\begin{aligned} -1,1586\ddot{\varphi}_1 - 0,6277\ddot{\psi}_1 &= 0,0265; \\ 0,5896\ddot{\varphi}_1 - 0,9033\ddot{\psi}_1 &= -0,0063; \\ -0,3592\ddot{\varphi}_1 - 0,2467\ddot{\psi}_1 + 0,8212\ddot{s}_1 + 0,1126\ddot{\theta}_1 &= 0,0102; \\ 0,1828\ddot{\varphi}_1 - 0,3550\ddot{\psi}_1 - 0,5707\ddot{s}_1 + 0,5383\ddot{\theta}_1 &= 0,0212. \end{aligned}$$

Решая эти системы уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -0,0197 \text{ рад/с}^2; & \ddot{\psi}_1 &= -0,0059 \text{ рад/с}^2; \\ \ddot{\theta}_1 &= -0,0520 \text{ рад/с}^2; & \ddot{s}_1 &= 0,0092 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Очередным моментом времени, при котором необходимо определить искомые величины, является $t = t_2 = 2\Delta t = 0,4$ с.

Воспользовавшись (13), при $i = 1$ найдем φ_2 , ψ_2 , θ_2 , s_2 .

Описанная выше вычислительная процедура выполняется k раз, где

$$k = \frac{\tau}{\Delta t} + 1 = \frac{1}{0,2} + 1 = 6.$$

Здесь τ — длительность процесса движения ($\tau = 1$ с).

Блок-схема описанного алгоритма показана на рис. 116.

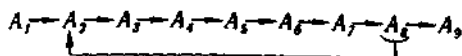


Рис. 116

Здесь A_1 — ввод исходных данных;

A_2 — решение системы (7), определение $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$;

A_3 — решение системы (8), определение $\dot{\theta}$, $\dot{s}$;

A_4 — решение системы (9), определение $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$;

A_5 — решение системы (10), определение $\ddot{\theta}$, $\ddot{s}$;

A_8 — печать результатов;

A_7 — вычисление φ , ψ , θ , z для следующего момента времени согласно (13);

A_8 — если $i < 6$, вычисления повторить;

A_9 — конец работы.

После проведения всех вычислений составляется таблица значений φ , ψ , θ , z , $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{z}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{z}$ для различных моментов времени.

Для приведенного примера результаты вычислений с точностью до третьего десятичного знака приведены в табл. 38.

Таблица 38

t, c	$\varphi, \text{рад}$	$\psi, \text{рад}$	$\theta, \text{рад}$	$z, \text{м}$
0,000	1,082	0,576	0,243	0,410
0,200	1,100	0,607	0,206	0,432
0,400	1,117	0,638	0,167	0,455
0,600	1,134	0,669	0,126	0,478
0,800	1,150	0,700	0,083	0,501
1,000	1,164	0,731	0,038	0,524
t, c	$\dot{\varphi}, \text{рад/с}$	$\dot{\psi}, \text{рад/с}$	$\dot{\theta}, \text{рад/с}$	$\dot{z}, \text{м/с}$
0,000	0,092	0,157	-0,181	0,110
0,200	0,088	0,156	-0,191	0,112
0,400	0,084	0,155	-0,201	0,113
0,600	0,080	0,154	-0,211	0,114
0,800	0,077	0,154	-0,220	0,115
1,000	0,073	0,154	-0,228	0,115
t, c	$\ddot{\varphi}, \text{рад/с}^2$	$\ddot{\psi}, \text{рад/с}^2$	$\ddot{\theta}, \text{рад/с}^2$	$\ddot{z}, \text{м/с}^2$
0,000	-0,020	-0,008	-0,056	0,012
0,200	-0,020	-0,006	-0,052	0,009
0,400	-0,019	-0,004	-0,049	0,007
0,600	-0,019	-0,002	-0,046	0,004
0,800	-0,019	0,000	-0,043	0,002
1,000	-0,020	0,001	-0,040	-0,001

1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1—5 (рис. 117, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ с. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f .

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD , наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h .

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC .

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 3,5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить v_B и τ .

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9,8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Определить α и T .

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 9,8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^\circ$. Определить f и v_C .

Варианты 6—10 (рис. 117, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB , наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью v_A . Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T с лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^\circ$.
Определить l и v_C .

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45^\circ$.
Определить v_B и T .

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^\circ$.
Определить α и d .

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^\circ$.
Определить v_B и v_A .

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^\circ$.
Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC .

Варианты 11—15 (рис. 117, схема 3). Имея в точке A скорость v_A , мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l , составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d , находясь в воздухе T с и приземляясь в точке C со скоростью v_C . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h .

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4,5$ м/с; $h = 1,5$ м. Определить v_A и d .

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м. Определить P и l .

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $P = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C .

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m .

Варианты 16—20 (рис. 117, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l . Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f . Имея в точке B скорость v_B , камень через T с ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0,2$; $d = 2,5$ м. Определить h и T .

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м. Определить d и f .

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0,1$; $d = 3$ м. Определить h и τ .

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $\tau = 1,5$ с; $d = 2$ м. Определить v_A и h .

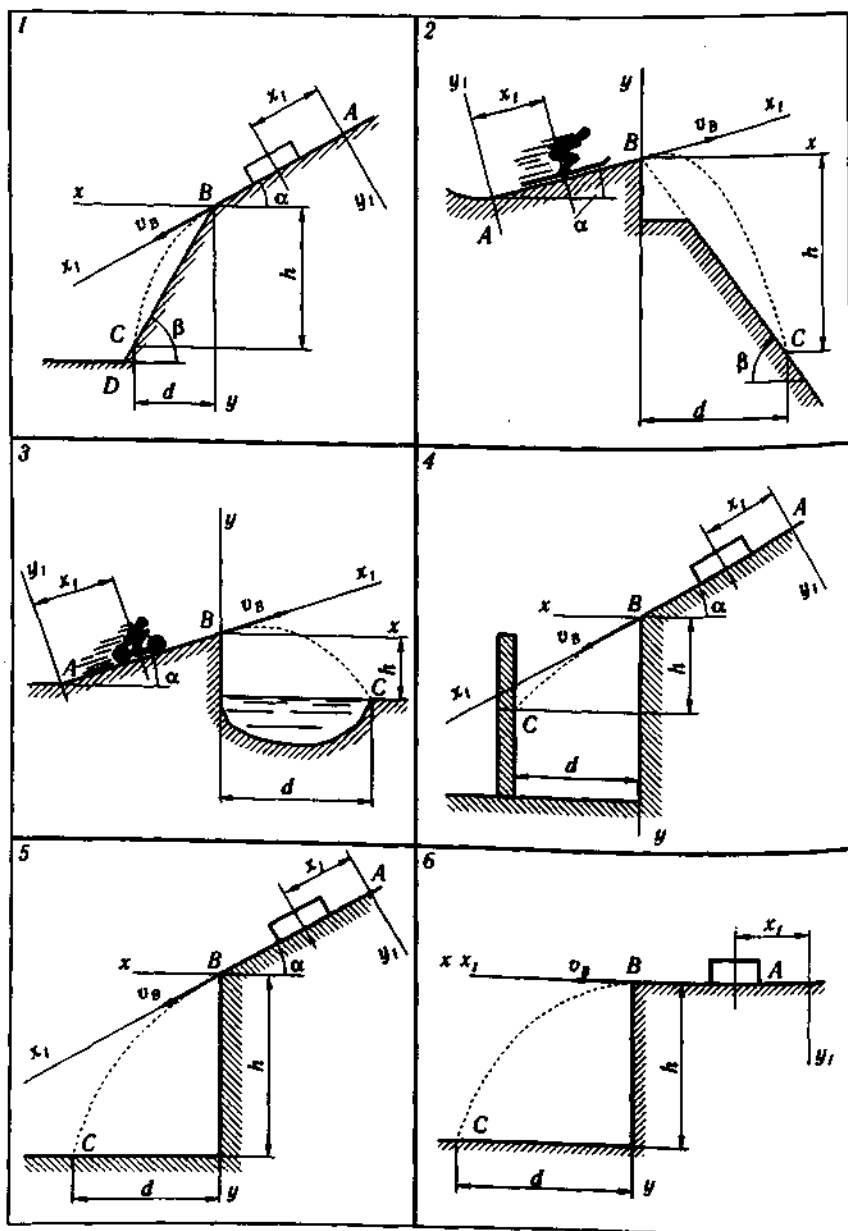


Рис.117

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м. Определить l и τ .

Варианты 21—25 (рис. 117, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения равен f . Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C ; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 1$ м/с; $\tau = 1,5$ с; $h = 10$ м. Определить v_B и d .

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10$ м; $\tau = 2$ с. Определить f и уравнение траектории на участке BC .

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9,81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м. Определить α и T .

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м. Определить τ и h .

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 6$ м; $h = 4,5$ м. Определить τ и v_C .

Варианты 26—30 (рис. 117, схема 6). Имея в точке A скорость v_A , тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C , находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0,2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м. Определить d и v_C .

Вариант 27. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0,1$; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м. Определить v_B и h .

Вариант 28. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0,3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и T .

Вариант 29. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2,5$ м; $h = 20$ м. Определить f и d .

Вариант 30. Дано: $f = 0,25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ .

Пример выполнения задания (рис. 118). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC . Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость $v_0 = 0$, определить наименьшую ширину полки b и скорость v_C , с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l , камень движется τ с.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.
Определить b и v_C .

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB . Принимая камень за материальную точку, покажем (рис. 118) действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию N и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB :

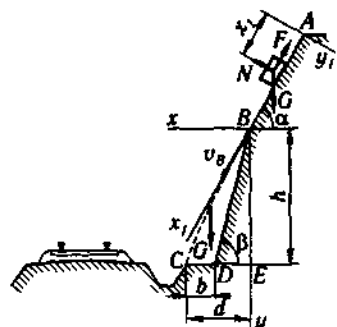


Рис. 118

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{1i}; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$ *

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2.$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t;$$

$$x_1 = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] t^2.$$

Для момента τ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \tau^2,$$

* Постоянные интегрирования C_1 — C_6 во всех 30 вариантах задания можно найти, вводя начальные условия на первом и втором участках движения точки. Тем не менее в ряде вариантов более естественно воспользоваться граничными условиями, когда значения координат и скоростей заданы не для одного, а для разных моментов времени.

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = 2 \cdot 4/1 = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C .

Показав силу тяжести $\vec{G}$, действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Начальные условия задачи: при $t = 0$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; & y_0 &= 0; \\ \dot{x}_0 &= v_B \cos \alpha; & \dot{y}_0 &= v_B \sin \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3; & \dot{y} &= gt + C_4; \\ x &= C_3t + C_5; & y &= gt^2/2 + C_4t + C_6. \end{aligned}$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_3; & \dot{y}_0 &= C_4; \\ x_0 &= C_5; & y_0 &= C_6. \end{aligned}$$

Отсюда найдем, что

$$\begin{aligned} C_3 &= v_B \cos \alpha; & C_4 &= v_B \sin \alpha; \\ C_5 &= 0; & C_6 &= 0. \end{aligned}$$

Получим следующие уравнения проекций скорости камня:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения его движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = gx^2/(2v_B^2 \cos^2 \alpha) + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения $y = h$, $x = d$.

Определяя d из уравнения траектории, найдем

$$d_1 = 2,11 \text{ м}, \quad d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Так как траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2,11 \text{ м}$.

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h/\operatorname{tg} 75^\circ, \quad \text{или } b = 0,77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos \alpha \cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C :

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2},$$

или

$$v_C = 12,8 \text{ м/с.}$$

Зада н и е Д.2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил

Найти уравнения движения тела M массой m (рис. 119—121), принимаемого за материальную точку и находящегося под действием переменной силы $\vec{P} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ при заданных начальных условиях. Во всех вариантах ось z (где показана) вертикальна, за исключением вариантов 8 и 30.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 39, в которой приняты следующие обозначения: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты координатных осей (соответственно x, y, z); g — ускорение свободного падения ($9,81 \text{ м/с}^2$); f — коэффициент трения скольжения; t — время, с; x, y, z , $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — координаты точки и проекции ее скорости на оси координат соответственно, м и м/с.

Во всех случаях, где сила $\vec{P}$ зависит от $x, \dot{x}, z, \dot{z}$, рассмотреть движение точки, при котором эти величины только положительны.

Пример выполнения задания. Дано: $m = 1 \text{ кг}$, $x_0 = 0$, $z_0 = 10 \text{ м}$, $\dot{x}_0 = 20 \text{ м/с}$, $\dot{z}_0 = 0$, $\vec{P} = -c\tau(\vec{i} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi)$; $\vec{R} = -\alpha \vec{r}$, $c = 4 \text{ Н/м}$, $\alpha = 2 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$.

Найти уравнения движения точки без учета и с учетом силы $\vec{R}$.

Решение. На материальную точку действуют силы тяжести $\vec{G}$ и сила $\vec{P}$, линия действия которой проходит через неподвижный центр O (рис. 122). Силой $\vec{R}$ пренебрегаем. Сила $\vec{P}$ притягивает точку M к центру O . Модуль этой силы прямо пропорционален расстоянию r от точки до полюса.

В начальный момент времени ($t = 0$) точка M находится на оси z на расстоянии 10 м от начала отсчета и ей сообщается начальная скорость 20 м/с , направленная параллельно оси x .

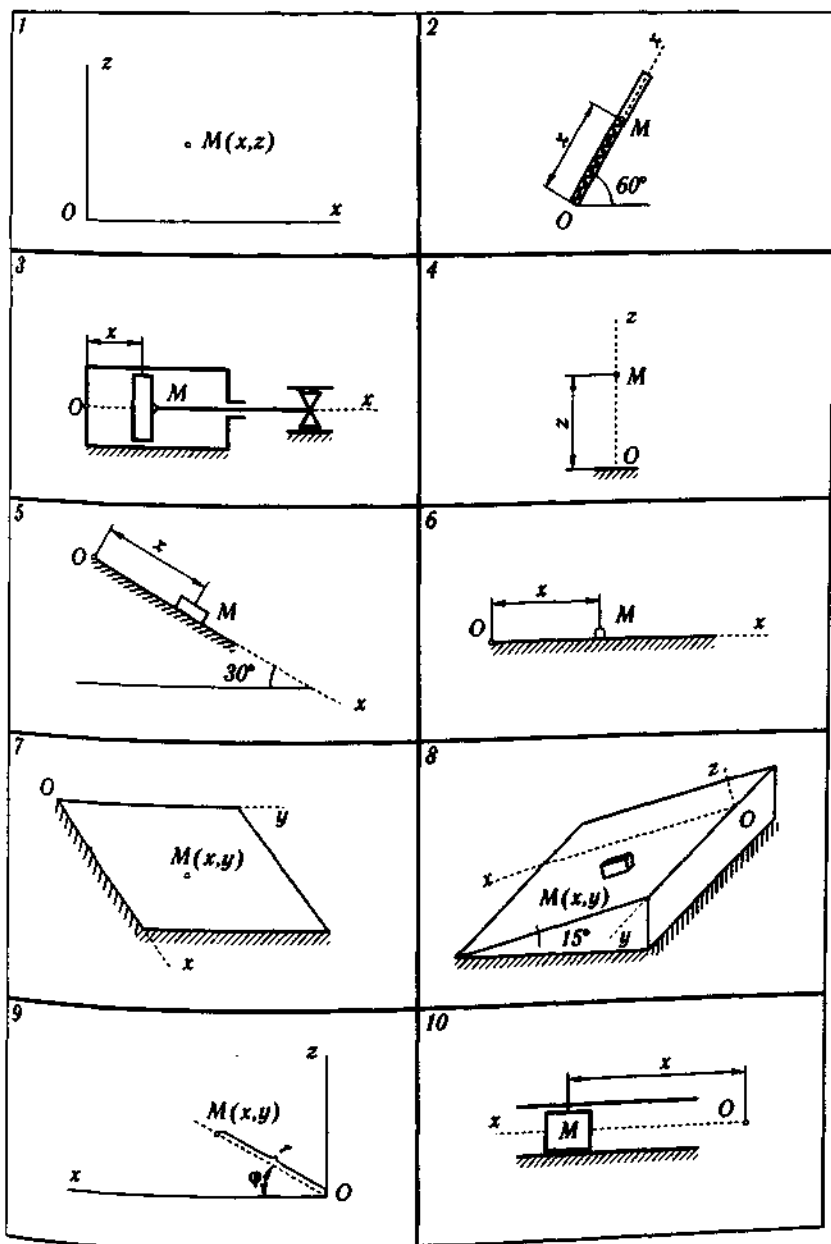


Рис. 119

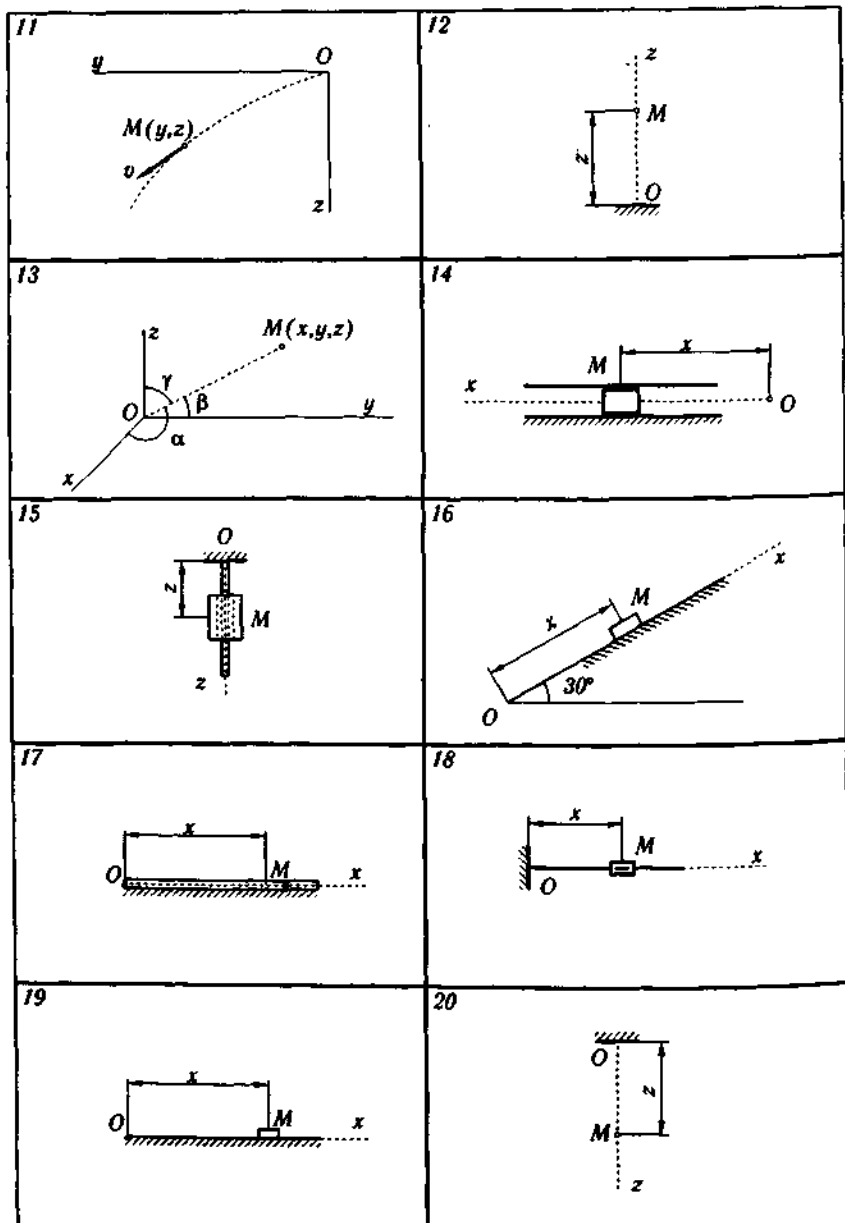
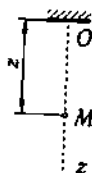
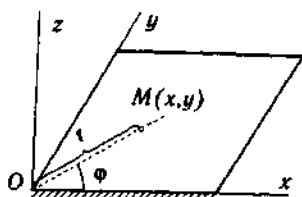


Рис. 120

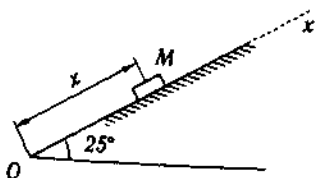
21



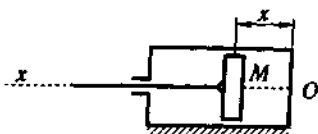
22



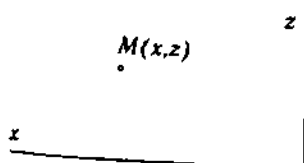
23



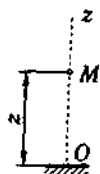
24



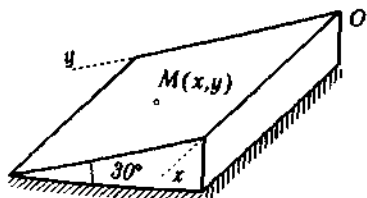
25



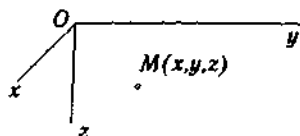
26



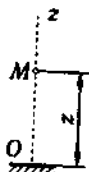
27



28



29



30

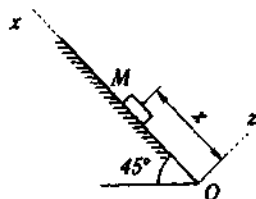


Рис.121

Таблица 39

Номер варианта (рис. 119—121)	m, кг	$\vec{P}, H$	f	Начальные условия						Примечание
				м			м/с			
				x_0	y_0	z_0	$\dot{x}_0$	$\dot{y}_0$	$\dot{z}_0$	
1	2	$-0,5(\vec{x}\vec{i} + z\vec{k})$	-	0	-	0	20	-	20	$t_0 = 0,02$ м
2	0,25	$-100(x - t_0)\vec{i}$	0,3	0,03	-	-	0,5	-	-	Учесть только силу $\vec{P}$; μ, a — положительные постоянные $v_0 > 0, \mu > 0$ (const)
3	2	$-(20x - 4z)\vec{i}$	0	0,15	-	-	1	-	-	
4	m	$-\mu z^{-2}\vec{k}$	-	-	-	a	-	-	$\sqrt{2\mu/(ma)}$	
5	50	$-(5x - 25z)\vec{i}$	0	0	-	-	1	-	-	
6	m	$-m\mu x^{-3}\vec{i}$	0	a	-	-	v_0	-	-	Рассмотреть движение при $\dot{y} > 0, \dot{z} > 0$ Учесть только силу $\vec{P}$, ($R > 0$) (const)
7	2	$4\vec{i} \cos(\pi t/6) + \dot{y}\vec{j}$	0	0	0	-	0	3	-	
8	150	$120t(\vec{i} \cos 30^\circ + \vec{j} \sin 30^\circ)$	0	0	0	0	0,5	2	0	
9	1	$4r(\vec{i} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi)$	-	0	-	2	5	-	0	
10	1	$-3\sqrt{x}\vec{i}$	0	0	-	-	16	-	-	$\sqrt{2gR}$
11	20	$-3\vec{e}$	-	-	-	0	-	15	0	
12	m	$-mgR^2 z^{-2}\vec{k}$	-	-	-	R	-	-	-	
13	m	$-9mr(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$	-	2	2	2	1	0	1	
14	1,5	$(4,5 + 3x)\vec{i}$	0,1	1	-	-	0,3	-	-	

Номер варианта (рис. 119—121)	m, кг	$\vec{P}, \text{H}$	f	Начальные условия									Примечание
				M			m/c						
				x ₀	y ₀	z ₀	x ₀	y ₀	z ₀	x ₀	y ₀	z ₀	
15	1,5	$(6 - 1,5z + z)\vec{k}$	0	-	-	0,5	-	-	-	-	1	Учесть только силу $\vec{P}$ То же	
16	100	$-20\vec{x}$	0	0	-	-	2,5	-	-	-	-		
17	1	$5(1 - e^{-2t})\vec{i}$	0	0	-	-	0	-	-	-	-		
18	2	$-6\vec{x}^2\vec{i}$	0	0	-	-	-	10	-	-	-		
19	6	$(30e^{-3t} - 18z - 12x)\vec{i}$	0	0	-	-	-	10	-	-	-		
20	0,1	$-0,2z^4\vec{k}$	-	-	-	200	-	-	-	-	0,1		
21	0,1	$0,1z^3\vec{k}$	-	-	-	300	-	-	-	-	2,5		
22	m	$-4mr(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\cos\varphi)$	0	20	0	0	0	8	0	-	0		
23	100	$50(3 + z)\vec{i}$	0,2	0	-	-	-	1	-	-	-		
24	3	$-3(3z + 2x)\vec{i}$	0	0	-	-	-	2	-	-	-		
25	1,5	$-7,5(\vec{x}^3 - 2g\vec{k})$	-	0	-	100	4	-	0	-	0		
26	0,1	$-(2z^3 - 0,981)\vec{k}$	-	-	-	20	-	-	-	-	0,7		
27	2	$3t\vec{i}$	0	0	0	0	-	4	0	0	0		
28	4	$-2(\vec{x}\vec{i} + \vec{y}\vec{j} + z\vec{k})$	-	0	0	0	1	1	2	1	2		
29	0,01	$-3\sqrt{z}\vec{k}$	-	-	-	0	-	-	-	-	125		
30	100	$120(7,5 + t)(\vec{i}\cos 30^\circ + \vec{k}\sin 30^\circ)$	0,25	0	-	0	0,5	-	-	-	0		
Влиянием силы тяжести пренебречь													

Заданные силы $\vec{P}$, $\vec{G}$ и вектор $\vec{v}_0$ начальной скорости расположены в плоскости xOz , и поэтому дальнейшее движение точки происходит в этой плоскости. Дифференциальные уравнения движения материальной точки имеют вид

$$m\ddot{x} = -cr \cos \varphi; \quad m\ddot{z} = -cr \sin \varphi - G.$$

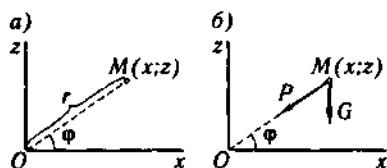


Рис. 122

Так как

$$\cos \varphi = x/r; \quad \sin \varphi = z/r,$$

то

$$m\ddot{x} = -cx; \quad m\ddot{z} = -cz - G$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0; \quad \ddot{z} + k^2 z = -g, \quad (1)$$

где

$$k = \sqrt{c/m}, \quad k = 2 \text{ рад/с.}$$

Уравнения (1) — линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Первое из них однородное, а второе — неоднородное.

Решения уравнений (1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos kt + C_2 \sin kt; \\ z &= C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - g/k^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt; \\ \dot{z} &= -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 , C_4 найдем из начальных условий

$$\text{при } t = 0 \quad \left. \begin{aligned} x_0 &= 0; & z_0 &= 10; \\ \dot{x}_0 &= 20; & \dot{z}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и (3), получим:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= C_1; & z_0 &= C_3 - g/k^2; \\ \dot{x}_0 &= C_2 k; & \dot{z}_0 &= C_4 k. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \dot{x}_0/k; \quad C_3 = z_0 + g/k^2; \quad C_4 = 0. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), будем иметь окончательно

$$\left. \begin{aligned} x &= (\dot{x}_0/k) \sin kt = 10 \sin 2t; \\ z &= (z_0 + g/k^2) \cos kt - g/k^2 = 12,45 \cos 2t - 2,45. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 \cos kt = 20 \cos 2t; \\ \dot{z} &= -k(z_0 + g/k^2) \sin kt = -24,9 \sin 2t. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В рассматриваемом примере может быть получено уравнение траектории точки. Для этого запишем уравнения движения (6) в виде

$$\frac{z}{\dot{x}_0/k} = \sin kt; \quad \frac{z + g/k^2}{z_0 + g/k^2} = \cos kt.$$

Возведя эти выражения в квадрат и сложив результаты, получим

$$\frac{x^2}{(\dot{x}_0/k)^2} + \frac{(z + g/k^2)^2}{(z_0 + g/k^2)^2} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{(z + 2,45)^2}{2,45^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса, центр которого A смещен по оси z относительно начала координат на 2,45 м вниз. Полуоси эллипса: горизонтальная $a = 10$ м, а вертикальная $b = 12,45$ м (рис. 123). В процессе движения точки M по эллипсу сумма моментов сил $\vec{P}$ и $\vec{G}$ относительно центра A остается все время равной нулю. Иными словами, равнодействующая сил $\vec{P}$ и $\vec{G}$ во все время движения проходит через точку A .

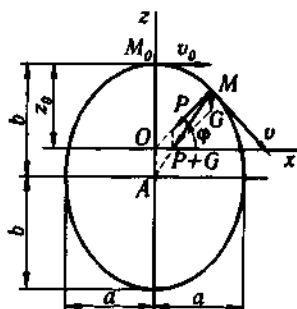


Рис. 123

Период обращения точки по эллипсу

$$T = 2\pi/k = \pi = 3,14 \text{ с.}$$

Площадь, заметаемая радиус-вектором точки за период, равна:

$$F = \pi ab = \pi(z_0 + g/k^2)\dot{x}_0/k.$$

Обратимся теперь к изучению движения точки с сопротивлением. Сила сопротивления движению

$$\vec{R} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \vec{v} = -\alpha(\vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y}). \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки примут вид

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x}; \quad m\ddot{z} = -cz - \alpha\dot{z} - G,$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0; \quad \ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2z = -g, \quad (9)$$

где

$$2n = \alpha/m; \quad n = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Так как $n < k$, то решения уравнений (9) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-nt}(\tilde{C}_1 \cos k_* t + \tilde{C}_2 \sin k_* t); \\ z &= e^{-nt}(\tilde{C}_3 \cos k_* t + \tilde{C}_4 \sin k_* t) - g/k^2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$k_* = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{4 - 1} \approx 1,73 \text{ рад/с},$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= e^{-nt} (-\tilde{C}_1 k_* \sin k_* t + \tilde{C}_2 k_* \cos k_* t) - \\ &\quad - e^{-nt} n (\tilde{C}_1 \cos k_* t + \tilde{C}_2 \sin k_* t); \\ \dot{z} &= e^{-nt} (-\tilde{C}_3 k_* \sin k_* t + \tilde{C}_4 k_* \cos k_* t) - \\ &\quad - e^{-nt} n (\tilde{C}_3 \cos k_* t + \tilde{C}_4 \sin k_* t). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив начальные условия (4) в (10) и (11), получим:

$$\begin{aligned} x_0 &= \tilde{C}_1; & \dot{x}_0 &= \tilde{C}_2 k_* - n \tilde{C}_1; \\ z_0 &= \tilde{C}_3 - g/k^2; & \dot{z}_0 &= \tilde{C}_4 k_* - n \tilde{C}_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}_1 &= 0; & \tilde{C}_2 &= \frac{\dot{x}_0}{k_*}; \\ \tilde{C}_3 &= z_0 + g/k^2; & \tilde{C}_4 &= \frac{n}{k_*} (z_0 + g/k^2). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), окончательно имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dot{x}_0}{k_*} e^{-nt} \sin k_* t = 11,56 e^{-t} \sin 1,73 t; \\ z &= (z_0 + g/k^2) e^{-nt} \left(\cos k_* t + \frac{n}{k_*} \sin k_* t \right) - g/k^2, \end{aligned}$$

или

$$z = 12,45 e^{-t} (\cos 1,73 t + 0,577 \sin 1,73 t) - 2,45.$$

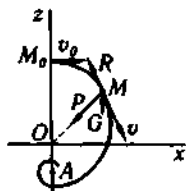


Рис. 124

Нетрудно понять, что траектория точки представляет собой спираль, навивающуюся на точку A (рис. 124), в которой силы $\vec{P}$ и $\vec{G}$ взаимно уравновешиваются. Отметим, что материальная точка будет асимптотически приближаться к точке A. Радиус-вектор точки будет делать один полный оборот за

$$T_* = 2\pi/k_*; \quad T_* = 3,63 \text{ с.}$$

При этом расстояние от центра A до движущейся точки будет каждые T_* с убывать в e^{nT_*} раз, т. е. примерно в 37,7 раза.

Задание Д.3. Исследование колебательного движения материальной точки

В задании рассматриваются колебания груза D или системы грузов D и E. Во всех вариантах, представленных ниже, считать, что сила сопротивления движению R измеряется в Н, скорость движения v — в м/с, а величина ξ — в см.

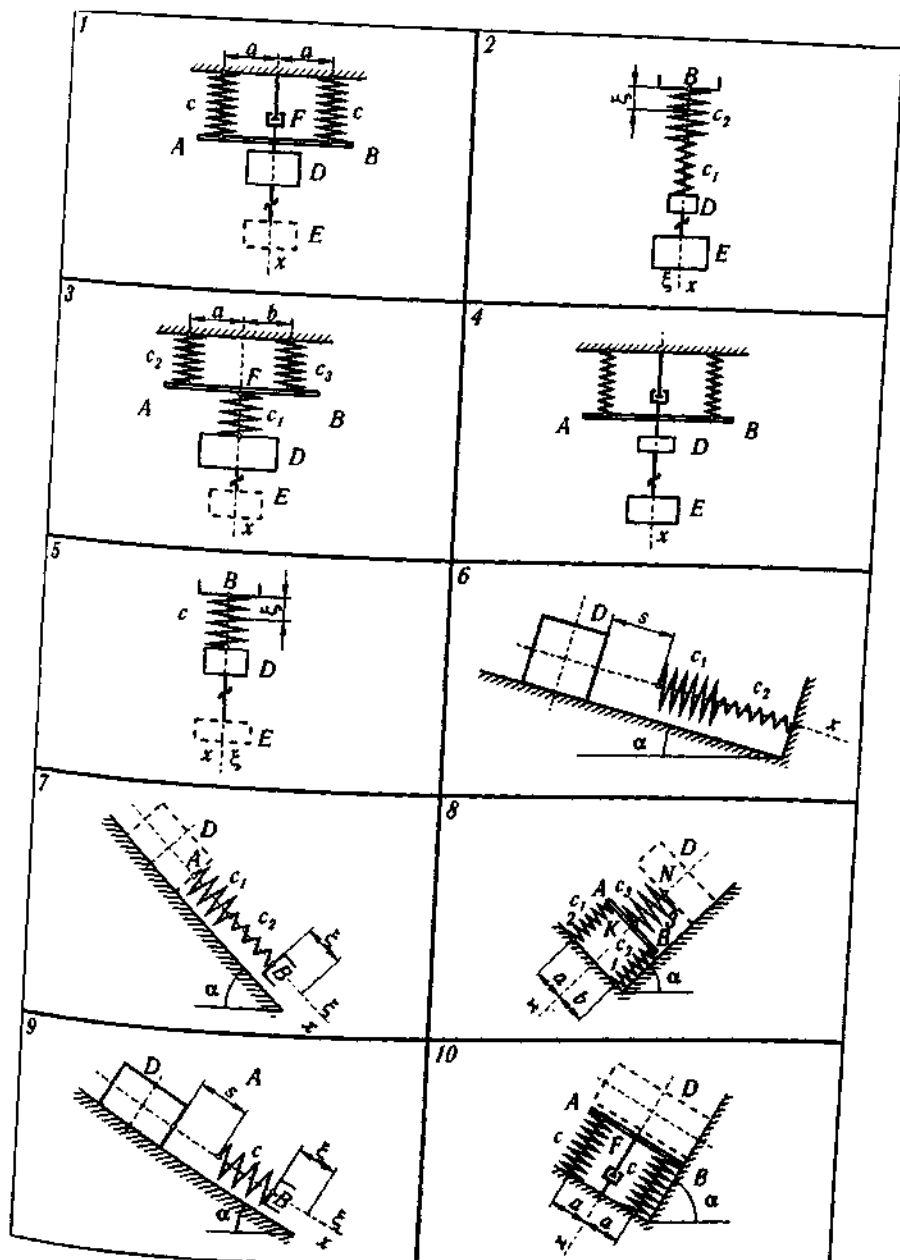


Рис. 125

Варианты 1—5 (рис. 125). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 2 и 4) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 1, 3, 5), отнеся их движение к оси x ; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Стержень, соединяющий грузы, считать невесомым и недеформируемым.

Вариант 1. Груз D ($m_D = 2$ кг) прикреплен к бруску AB , подвешенному к двум одинаковым параллельным пружинам, коэффициент жесткости каждой из которых $c = 3$ Н/см. Точка прикрепления груза D находится на равных расстояниях от осей пружин.

В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1$ кг). Сопротивление движению системы двух грузов пропорционально скорости: $R = 12v$ (Н), где v — скорость (м/с).

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, прикрепленной к бруску, пренебречь.

Вариант 2. В момент, когда стержень, соединяющий грузы D ($m_D = 1$ кг) и E ($m_E = 2$ кг), перерезают, точка B (верхний конец последовательно соединенных пружин) начинает совершать движение по закону $\xi = 1,5 \sin 18t$ (см) (ось ξ направлена вертикально вниз). Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 36$ Н/см.

Вариант 3. Груз D ($m_D = 0,8$ кг) висит на пружине, прикрепленной к точке F бруска AB и имеющей коэффициент жесткости $c_1 = 10$ Н/см. Брусок подвешен к двум параллельным пружинам, коэффициенты жесткости которых $c_2 = 4$ Н/см, $c_3 = 6$ Н/см; точка F находится на расстояниях a и b от осей этих пружин: $a/b = c_3/c_2$.

В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1,2$ кг). В этот же момент системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0,2$ м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 4. Статическая деформация двух одинаковых параллельных пружин под действием грузов D ($m_D = 0,5$ кг) и E ($m_E = 1,5$ кг) $f_{ст} = 4$ см. Грузы подвешены к пружинам с помощью абсолютно жесткого бруска AB . В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают. Сопротивление движению груза D пропорционально скорости: $R = 6v$, где v — скорость. Массой бруска и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

Вариант 5. Одновременно с подвешиванием к грузу D ($m_D = 1,6$ кг), висящему на пружине, коэффициент жесткости которой $c = 4$ Н/см, груза E ($m_E = 2,4$ кг) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 2 \sin 5t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Варианты 6—10 (рис. 125). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α , с момента соприкосновения груза с пружиной или с системой пружин, предполагая, что при дальнейшем движении груз

от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x , приняв за начало отсчета положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 6. Пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) расстояние $s = 0,1$ м, груз D ($m = 4$ кг) ударяется о недеформированные, последовательно соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости $c_1 = 48$ Н/см и $c_2 = 24$ Н/см.

Вариант 7. В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) присоединяют без начальной скорости к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 6$ Н/см. В тот же момент времени ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45^\circ$) по закону $\xi = 0,02 \sin 20t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 8. Две параллельные пружины 1 и 2, имеющие коэффициенты жесткости $c_1 = 4$ Н/см и $c_2 = 6$ Н/см, соединены абсолютно жестким бруском AB , к точке K которого прикреплена пружина 3 с коэффициентом жесткости $c_3 = 15$ Н/см. Точка K находится на расстояниях a и b от осей пружин 1 и 2: $a/b \approx c_2/c_1$. Пружины 1, 2 и 3 не деформированы. Груз D массой $1,5$ кг присоединяют к концу N пружины 3; в тот же момент грузу D сообщают скорость $v_0 = 0,5$ м/с, направленную вниз параллельно наклонной плоскости ($\alpha = 45^\circ$). Массой бруска AB пренебречь.

Вариант 9. Груз D ($m = 1,2$ кг), пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) расстояние $s = 0,2$ м, ударяется о недеформированную пружину, коэффициент жесткости которой $c = 4,8$ Н/см. В этот же момент ($t = 0$) точка B (нижний конец пружины) начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0,03 \sin 12t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз) (см. примечание к варианту 7).

Вариант 10. Груз D ($m = 1$ кг) прикрепляют в середине абсолютно жесткого бруска AB , соединяющего концы двух одинаковых параллельных пружин, не сообщая начальной скорости; пружины не деформированы. Коэффициенты жесткости пружин $c = 1,5$ Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 8v$, где v — скорость, $\alpha = 60^\circ$. Массой бруска AB и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

Варианты 11—15 (рис. 126). Груз D массой m укреплен на конце невесомого стержня, который может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси E . Груз соединен с пружиной или с системой пружин; положение покоя стержня, показанное на чертеже, соответствует недеформированным пружинам. Считая, что груз D , принимаемый за материальную точку, движется по прямой, определить уравнение движения этого груза (трением скольжения груза по плоскости пренебречь).

Движение отнести к оси x , за начало отсчета принять точку, соответствующую положению покоя груза.

Вариант 11. Груз D ($m = 2,4$ кг) соединен с точкой F бруска AB , связывающего концы двух параллельных пружин, коэффициенты жесткости которых $c_1 = 1$ Н/см и $c_2 = 1,4$ Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$.

Груз D отклоняют на величину $\lambda = 2$ см влево от положения, показанного на чертеже, и отпускают без начальной скорости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 6v$, где v — скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой демпфера пренебречь.

Вариант 12. В некоторый момент времени груз D ($m = 3$ кг), удерживаемый в положении, при котором пружина сжата на величину $\lambda = 2$ см, отпускают без начальной скорости. Коэффициент жесткости пружины $c = 9$ Н/см. Одновременно ($t = 0$) точка B (правый конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 1,2 \sin 8t$ (см) (ось ξ направлена влево).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 13. Груз D ($m = 1$ кг) прикреплен к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости $c_1 = 12$ Н/см и соединенной другим концом с точкой F бруска AB . Брусок AB связывает концы двух параллельных пружин, коэффициент жесткости каждой из которых $c = 3$ Н/см. Точка F находится на равных расстояниях от осей параллельных пружин. Грузу в положении стержня, показанном на чертеже, сообщают скорость $v_0 = 0,5$ м/с, направленную вправо.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v — скорость.

Шток демпфера пропущен через отверстие в невесомом бруске AB и соединен с грузом D .

Вариант 14. Груз D ($m = 1,5$ кг) прикреплен одной стороной к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости $c_1 = 4,4$ Н/см, а другой стороной — к концу двух последовательно соединенных пружин, коэффициенты жесткости которых $c_2 = 2$ Н/см, $c_3 = 8$ Н/см.

Груз отклоняют на величину $\lambda = 2,5$ см влево от его положения, показанного на чертеже, и отпускают, одновременно сообщая грузу начальную скорость $v_0 = 0,4$ м/с, направленную вправо.

Вариант 15. Груз D ($m = 1$ кг) прикреплен к концу A последовательно соединенных пружин. Другой конец пружин B движется по закону $\xi = 1,8 \sin 12t$ (см) (ось ξ направлена влево). Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 12$ Н/см. При $t = 0$ груз находится в положении покоя, соответствующем недеформированным пружинам (см. примечание к варианту 12).

Варианты 16—20 (рис. 126). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 17 и 19) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 16, 18, 20), отнеся движение к оси x ; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы

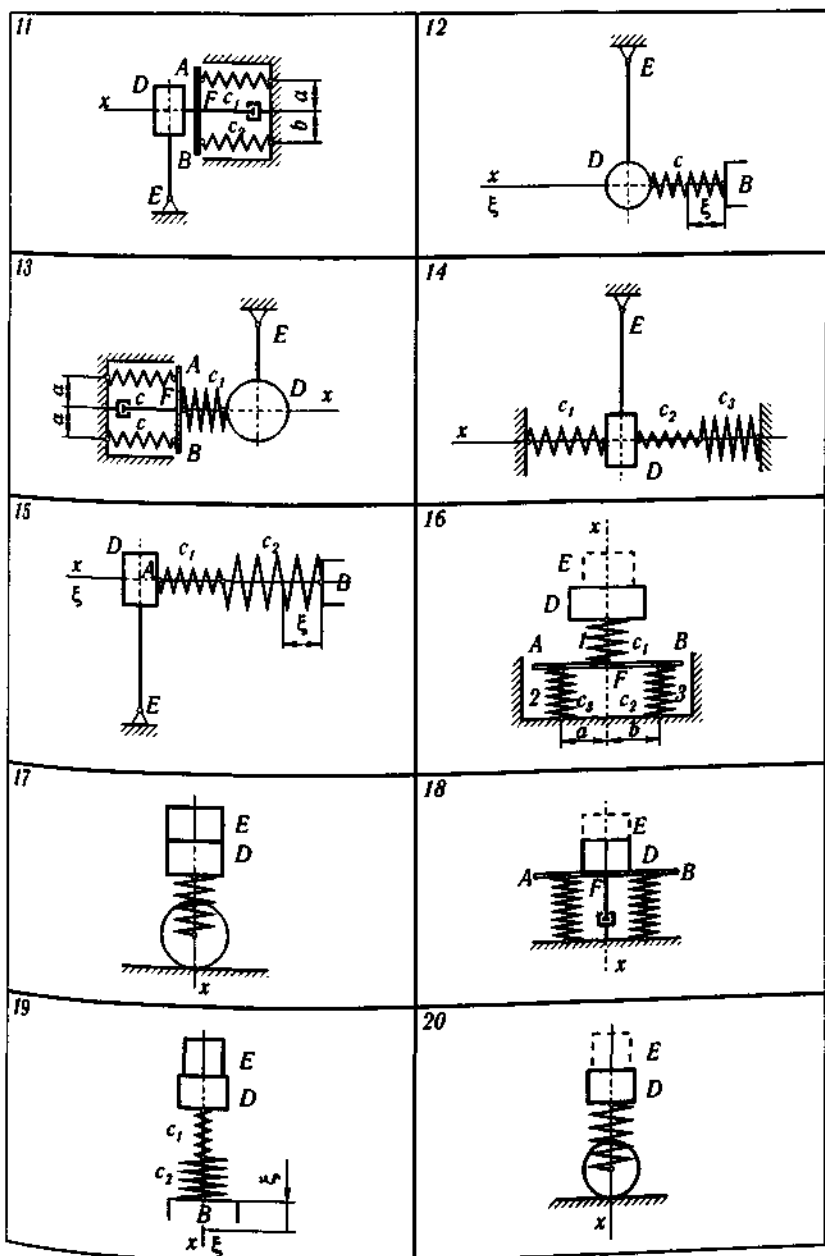


Рис. 126

грузов D и E (при статической деформации пружин). Предполагается, что грузы D и E при совместном движении не отделяются.

Вариант 16. Пружина 1, на которой покоится груз D ($m_D = 10$ кг), опирается в точке F на брусок AB , соединяющий концы двух параллельных пружин 2 и 3. Коэффициенты жесткости (Н/см) пружин 1, 2 и 3: $c_1 = 200$, $c_2 = 160$, $c_3 = 140$.

Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин 2 и 3: $a/b = c_3/c_2$.

В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E ($m_E = 20$ кг); одновременно системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0,4$ м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 17. В некоторый момент времени груз E снимают с груза D (оба груза находятся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины). Циклическая частота собственных колебаний системы грузов D и E на пружине $k = 20$ рад/с, отношение масс $m_D/m_E = 2/3$.

Вариант 18. Статическая деформация каждой из двух одинаковых параллельных пружин под действием груза D ($m_D = 20$ кг) равна $f_{стD} = 2$ см. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E ($m_E = 10$ кг). Сопротивление движению грузов пропорционально скорости: $R = 60\sqrt{3}v$, где v — скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, связанной с ним, пренебречь.

Вариант 19. Два груза D и E ($m_D = 15$ кг, $m_E = 25$ кг) покоятся на последовательно соединенных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 250$ Н/см и $c_2 = 375$ Н/см. В момент, когда снимают груз E , точка B опирания пружин начинает совершать движение по закону $\xi = 0,5 \sin 30t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 20. На груз D , находящийся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины, в некоторый момент времени устанавливают груз E . В этот же момент времени системе двух грузов сообщают скорость $v_0 = 0,3$ м/с, направленную вниз. Циклическая частота собственных колебаний груза D на пружине $k_D = 24$ рад/с, отношение масс $m_E/m_D = 3$.

Варианты 21—25 (рис. 127). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α , отнеся движение к оси x ; за начало отсчета принять положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 21. В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) прикрепляют к концам недеформированных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 7$ Н/см и $c_2 = 3$ Н/см; одновременно грузу сообщают скорость $v_0 = 0,4$ м/с, направленную вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45^\circ$) вниз.

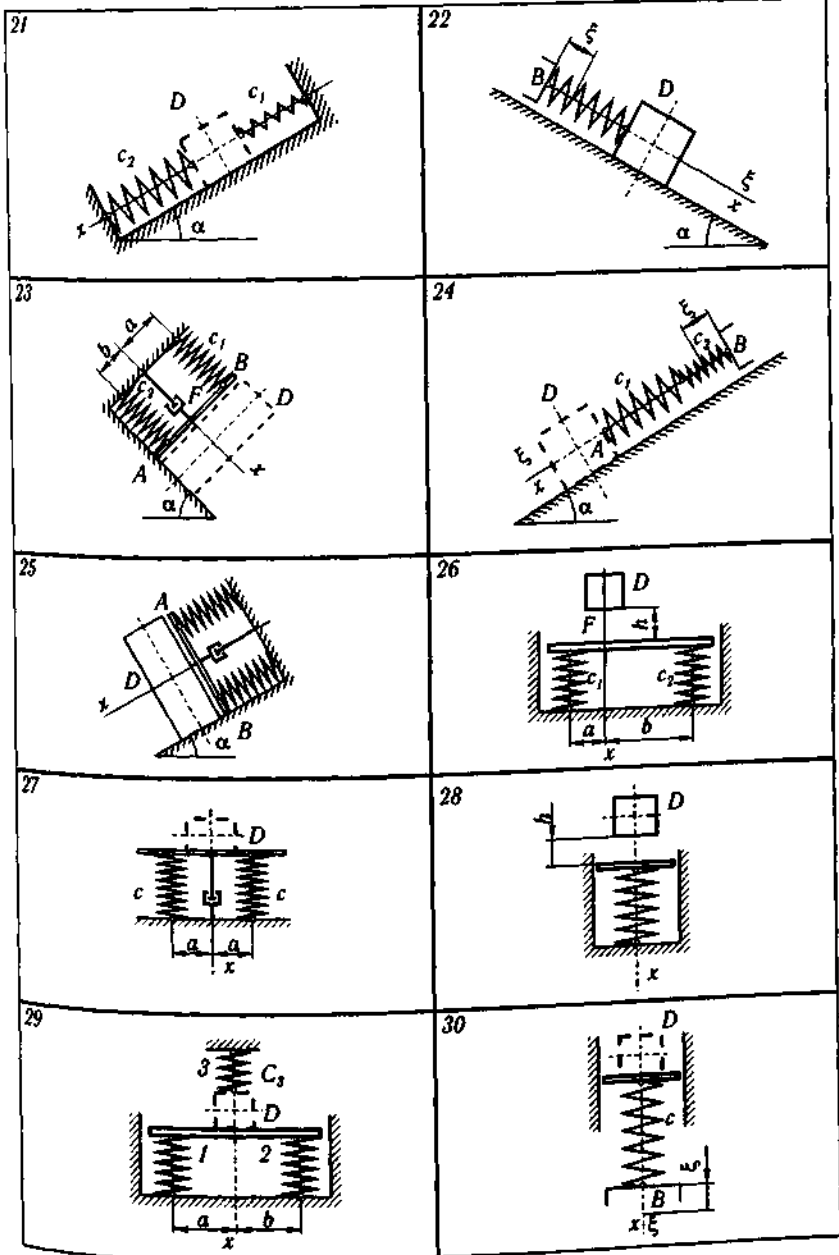


Рис. 127

Вариант 22. Груз D находится на наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины $f_{ст} = 2$ см. В некоторый момент времени ($t = 0$) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 0,01 \sin 10t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 23. Груз D ($m = 3$ кг) прикрепляют к точке F бруска AB , соединяющего концы двух недеформированных параллельных пружин, и отпускают без начальной скорости. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 2$ Н/см и $c_2 = 4$ Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружины: $a/b = c_2/c_1$; $\alpha = 60^\circ$.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v — скорость. Массой бруска AB и массой демпфера пренебречь.

Вариант 24. В некоторый момент времени груз D ($m = 1$ кг) прикрепляют к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 12$ Н/см и $c_2 = 4$ Н/см, и отпускают без начальной скорости.

Одновременно ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение по закону $\xi = 1,5 \sin 10t$ (см). Ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз ($\alpha = 30^\circ$) (см. примечание к варианту 22).

Вариант 25. Концы двух одинаковых параллельных пружин соединены брусом AB . Статическая деформация каждой из пружин под действием груза D ($m = 1,5$ кг), находящегося на наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$), $f_{ст} = 4,9$ см. В некоторый момент грузу D сообщают скорость $v_0 = 0,3$ м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости груза: $R = 6v$, где v — скорость.

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, связанной с брусом, пренебречь.

Варианты 26—30 (рис. 127). Пренебрегая массой плиты и считая ее абсолютно жесткой, найти уравнение движения груза D массой m с момента соприкосновения его с плитой, предполагая, что при дальнейшем движении груз от плиты не отделяется.

Движение груза отнести к оси x , приняв за начало отсчета положение покоя этого груза (при статической деформации пружин).

Вариант 26. Плита лежит на двух параллельных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 600$ Н/см и $c_2 = 400$ Н/см. Груз D ($m = 50$ кг) падает без начальной скорости с высоты $h = 0,1$ м в точку F плиты, находящуюся на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$.

Вариант 27. Коэффициент жесткости каждой из двух параллельных пружин, на которых лежит плита, $c = 130$ Н/см. Груз D ($m = 40$ кг) устанавливают на середину плиты и отпускают без

начальной скорости при недеформированных пружинах. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 400v$, где v — скорость. Массой плиты и демпфера пренебречь.

Вариант 28. Груз D падает на плиту с высоты $h = 5$ см. Статический прогиб пружины под действием этого груза $f_{ст} = 1$ см.

Вариант 29. Плита лежит на двух одинаковых параллельных пружинах 1 и 2, коэффициенты жесткости которых $c_1 = c_2 = c = 400$ Н/см. В некоторый момент времени груз D ($m = 200$ кг) устанавливают на середину плиты и одновременно прикрепляют к недеформированной пружине 3, имеющей коэффициент жесткости $c_3 = 200$ Н/см. В тот же момент времени (при недеформированных пружинах) грузу сообщают скорость $v_0 = 0,6$ м/с, направленную вниз.

Вариант 30. В некоторый момент времени груз D ($m = 100$ кг) устанавливают на плиту и отпускают (при недеформированной пружине) без начальной скорости. В этот же момент времени точка B (нижний конец пружины) начинает совершать движение по вертикали согласно закону $\xi = 0,5 \sin 20t$ (см) (ось ξ направлена вниз). Коэффициент жесткости пружины $c = 2000$ Н/см.

Примечание. Начало отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Пример выполнения задания (рис. 128). Два груза D и E массами $m_D = 2$ кг и $m_E = 3$ кг лежат на гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, опираясь на пружину, коэффициент жесткости которой $c = 6$ Н/см $= 600$ Н/м.

В некоторый момент времени груз E убирают; одновременно ($t = 0$) нижний конец пружины B начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0,02 \sin 10t$ (м). Найти уравнение движения груза D .

Решение. Применим к решению задачи дифференциальные уравнения движения точки. Совместим начало координатной системы с положением покоя груза D , соответствующим статической деформации пружины, при условии, что точка B занимает свое среднее положение ($\xi = 0$).

Направим ось x вверх вдоль наклонной плоскости (в сторону движения груза D после снятия груза E). Движение груза D определяется по следующему дифференциальному уравнению:

$$m_D \ddot{x} = \sum X_i,$$

где $\sum X_i$ — сумма проекций на ось x сил, действующих на груз D (рис. 128, а): $\vec{G}_D$ — веса, $\vec{N}$ — нормальной реакции наклонной плоскости, $\vec{P}$ — силы упругости пружины.

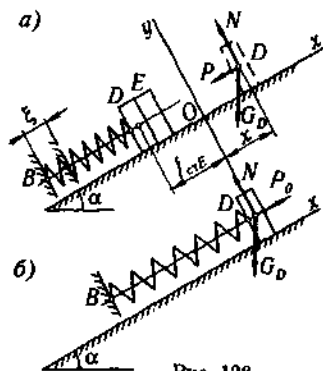


Рис. 128

Таким образом,

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - P.$$

Здесь

$$P = c(x - f_{\text{ст}D} - \xi),$$

где $f_{\text{ст}D}$ — статическая деформация пружины под действием груза D ; ξ — перемещение точки прикрепления нижнего конца пружины, происходящее по закону $\xi = d \sin pt$ ($d = 0,02$ м, $p = 10$ рад/с).

Статическую деформацию пружины $f_{\text{ст}D}$ найдем из уравнения, соответствующего состоянию покоя груза D на наклонной плоскости (рис. 128, б):

$$\sum X_i = 0;$$

$$-G_D \sin \alpha + P_0 = 0,$$

т. е.

$$-G_D \sin \alpha + c f_{\text{ст}D} = 0,$$

откуда

$$f_{\text{ст}D} = G_D \sin \alpha / c.$$

Дифференциальное уравнение движения груза D примет вид

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - c(x - f_{\text{ст}D} - \xi),$$

или после преобразования

$$m_D \ddot{x} + cx = cd \sin pt.$$

Разделив все члены уравнения на m_D и введя обозначения

$$c/m_D = k^2, \quad cd/m_D = h,$$

приведем дифференциальное уравнение к следующему виду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

Решение этого неоднородного уравнения складывается из общего решения x^* соответствующего однородного уравнения и частного решения x^{**} данного неоднородного уравнения:

$$x = x^* + x^{**}.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$x^{**} = [h/(k^2 - p^2)] \sin pt.$$

Общий интеграл

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + [h/(k^2 - p^2)] \sin pt.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем, кроме того, уравнение для $\dot{x}$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + [hp/(k^2 - p^2)] \cos pt$$

и используем начальные условия задачи.

Рассматриваемое движение начинается в момент ($t = 0$), когда деформация пружины является статической деформацией под действием грузов D и E . При принятом положении начала отсчета O начальная координата груза D равна $x_0 = -f_{стE}$, причем $f_{стE} = G_E \sin \alpha / c$ — статическая деформация пружины под действием груза E .

Таким образом, при $t = 0$

$$x_0 = -f_{стE}, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Составим уравнения $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$ для $t = 0$:

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = C_2 k + hp/(k^2 - p^2),$$

откуда

$$C_1 = -f_{стE}, \quad C_2 = -hp/[k(k^2 - p^2)].$$

Уравнение движения груза D имеет следующий вид:

$$x = -f_{стE} \cos kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Найдем числовые значения входящих в уравнение величин:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 100}{2}} = 17,3 \text{ с}^{-1};$$

$$f_{стE} = \frac{G_E \sin \alpha}{c} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{6 \cdot 100} = 0,0245 \text{ м};$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{cd}{m_D(k^2 - p^2)} = \frac{600 \cdot 0,02}{2(300 - 100)} = 0,03 \text{ м};$$

$$\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = \frac{0,03 \cdot 10}{17,3} = 0,0173 \text{ м}.$$

Следовательно, уравнение движения груза D

$$x = -2,45 \cos 17,3t - 1,73 \sin 17,3t + 3 \sin 10t \text{ (см)}.$$

Зада н и е Д.4. Исследование относительного движения материальной точки

Шарик M , рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A (рис. 129—131). Найти уравнение относительного движения этого шарика $x = f(t)$, приняв за начало отсчета точку O .

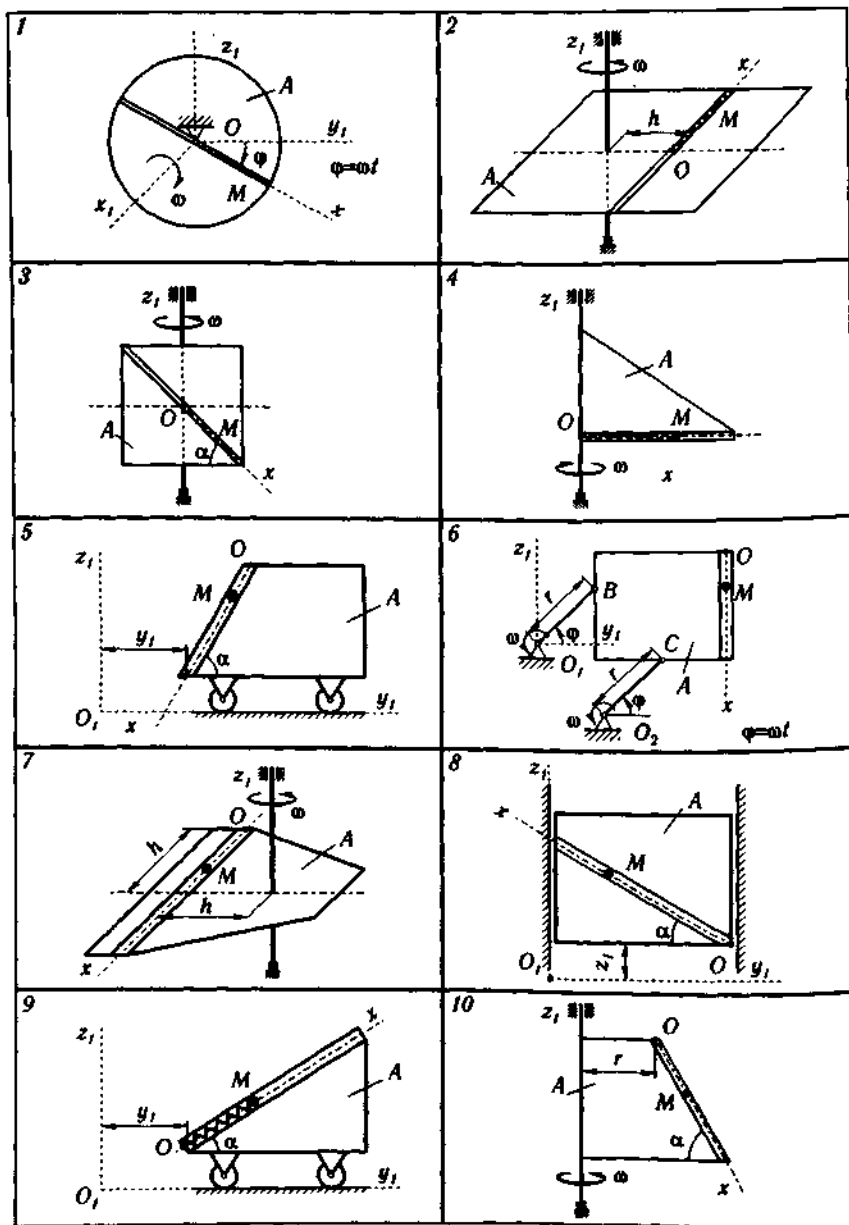


Рис. 129

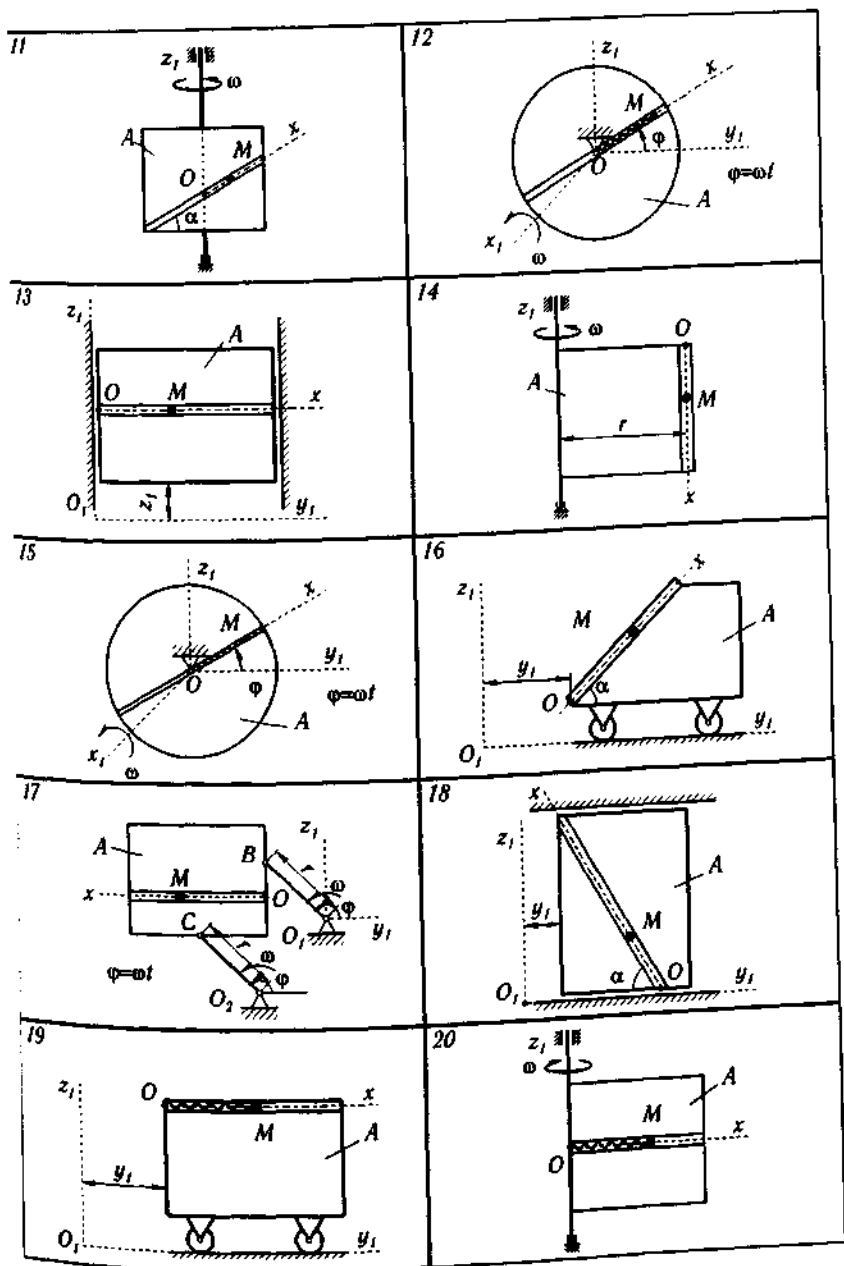


Рис. 130

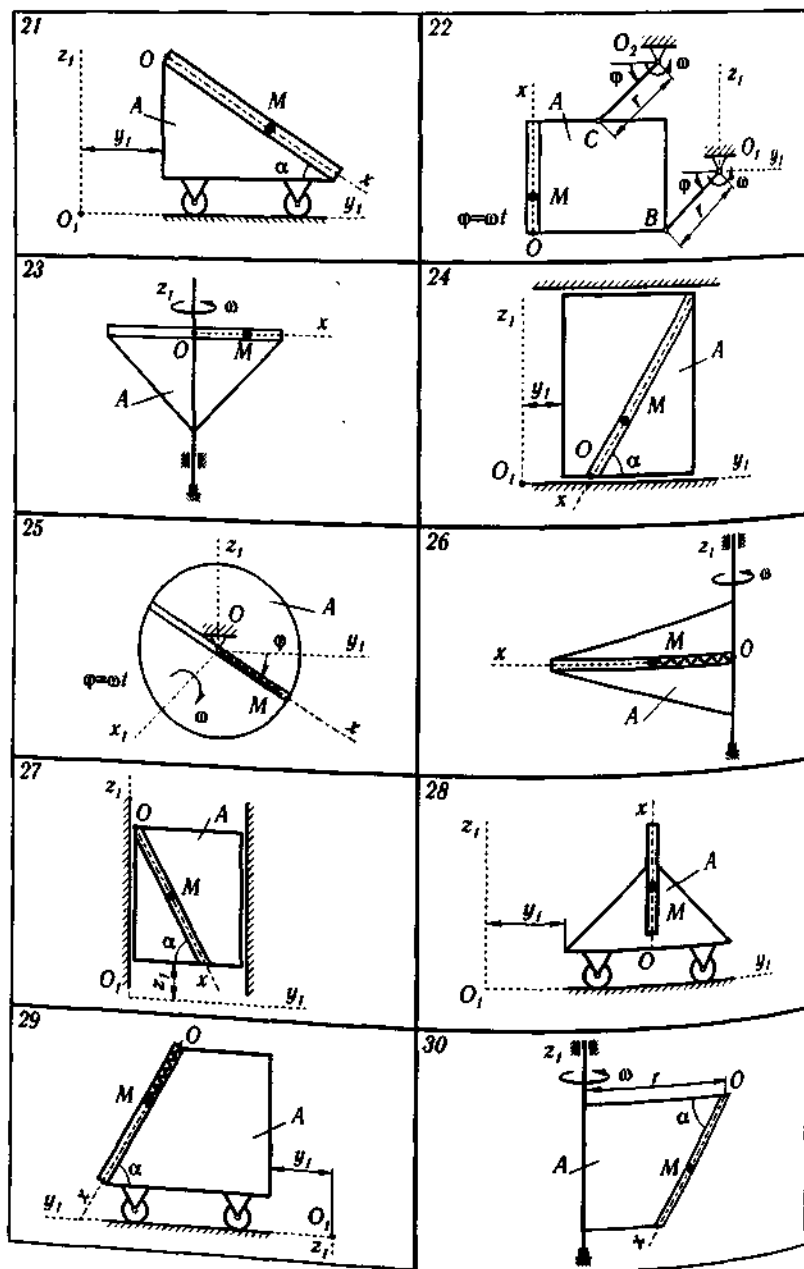


Рис. 131

Таблица 40

Номер варианта (рис. 129-131)	α , град	m , кг	ω , $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$	Начальные данные		t_1 , с	c , $\frac{\text{Н}}{\text{см}}$	l_0 , м	Уравнение движения тела А	r, h , м	f
				x_0 , м	$\dot{x}_0$, м/с						
1	-	0,02	π	0	0,4	0,5	-	-	-	-	0
2	-	0,02	π	0	0,2	0,4	-	-	-	-	0
3	45	0,03	2π	0,5	0	0,2	-	-	-	0,15	0
4	-	0,09	4π	0,2	-0,8	0,1	0,36	0,15	-	-	0
5	60	0,02	-	0,6	0	0,2	-	-	$y_1=0,6-2t^3$ (м)	-	0
6	-	0,01	10π	0,5	0	0,2	-	-	-	-	0
7	-	0,03	2π	0,3	0	0,2	-	-	-	0,10	0
8	30	0,03	-	0,8	0	0,1	-	-	-	0,20	0
9	30	0,02	-	0,4	0	0,1	0,20	0,20	$z_1=0,1 \cos 2\pi t$ (м)	-	0
10	60	0,05	6π	0,4	0	0,1	-	-	$y_1=4t^3$ (м)	-	0
11	30	0,05	π	0	0	0,4	-	-	-	0,20	0
12	-	0,08	6π	0,05	0	0,1	0,20	0,10	-	-	0
13	-	0,01	-	0	0,5	0,2	-	-	-	-	0
14	-	0,05	4π	0,5	0	0,1	-	-	$z_1=5-10t^2$ (м)	-	0,1
15	-	0,01	π	0,5	0	1,0	-	-	-	0,20	0,2
16	45	0,02	-	1,0	2,0	0,1	-	-	-	-	0
17	-	0,02	6π	0	4,0	0,2	-	-	$y_1=0,06t^3$ (м)	-	0
18	40	0,02	-	0,6	0	0,1	-	-	-	0,20	0
19	-	0,08	-	0,4	-0,8	0,1	0,40	0,20	$y_1=0,1 \sin \pi t$ (м)	-	0
20	-	0,01	10π	0,1	0	0,2	0,20	0,10	$y_1=8t-t^3$ (м)	-	0
21	30	0,05	-	0,5	0,1	0,1	-	-	-	-	0
22	-	0,03	4π	0,1	3,0	0,1	-	-	$y_1=2+t^2$ (м)	-	0,2
23	-	0,01	2π	-0,5	-0,1	0,2	-	-	-	0,10	0
24	60	0,01	-	0	0,2	0,2	-	-	-	-	0
25	-	0,05	2π	0,1	-0,4	0,1	0,20	0,20	$y_1=0,1 \cos 1,5\pi t$ (м)	-	0
26	-	0,09	π	0,2	0,3	0,1	0,20	0,1	-	-	0
27	75	0,02	-	1,0	0,6	0,3	-	-	-	-	0
28	-	0,03	-	0,8	0	0,3	-	-	$z_1=0,1 \sin 0,5\pi t$ (м)	-	0
29	60	0,10	-	0,4	1,0	0,1	0,20	0,20	$y_1=8-5t^3$ (м)	-	0,1
30	50	0,02	$\pi/2$	0	0,5	0,2	-	-	$y_1=8+t^3$ (м)	-	0

Тело А равномерно вращается вокруг неподвижной оси (в вариантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26 и 30 ось вращения z_1 вертикальна, в вариантах 1, 12, 15 и 25 ось вращения x_1 горизонтальна). В вариантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 и 29 тело А движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $y_1 O_1 z_1$.

Найти также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t = t_1$. Данные, необходимые для выполнения задания, приведены в табл. 40.

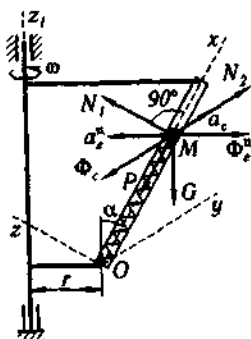


Рис. 132

В задании приняты следующие обозначения: m — масса шарика M ; ω — постоянная угловая скорость тела A (в вариантах 1—4, 7, 10—12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30) или кривошипов O_1B и O_2C (в вариантах 6, 17, 22); c — коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M ; l_0 — длина недеформированной пружины; f — коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; $x_0, \dot{x}_0$ — начальная координата и проекция начальной скорости на ось x .

Пример выполнения задания (рис. 132).

Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\omega = \pi$ рад/с; $m = 0,01$ кг; $\tau = 0,2$ с; $x_0 = 0,3$ м; $\dot{x}_0 = 2$ м/с; $c = 1$ Н/м; $l_0 = 0,2$ м; $r = 0,2$ м.

Найти уравнение $x = x(t)$ относительного движения шарика M , а также координату x_1 и давление шарика на стенку канала при заданном $t = t_1$.

Решение. Свяжем подвижную систему отсчета $Oxyz$ с вращающимся каналом (трубкой), совместив ось x с траекторией относительного движения шарика M .

Вращение этой системы вокруг оси z_1 является переносным движением для шарика M . Относительным движением шарика M является его движение вдоль трубки. В том случае, когда переносное движение является равномерным вращением, относительное движение точки определяется уравнением

$$m\ddot{a}_r = \sum \vec{P}_i + \vec{\Phi}_i^u + \vec{\Phi}_c.$$

К шарiku M приложены силы: вес $\vec{G}$, реакция пружины $\vec{P}$ и нормальная реакция стенки трубки; эту реакцию можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие N_1 и N_2 .

Присоединяем к силам, действующим на шарик M , переносную центробежную силу инерции $\vec{\Phi}_c^u$ и кориолисову силу инерции $\vec{\Phi}_c$, направленные противоположно ускорениям $\vec{a}_c^u$ и $\vec{a}_c$. Направление ускорения $\vec{a}_c$ найдем по известному правилу. Предположим, что направление относительной скорости $\vec{v}_r$ точки M совпадает с положительным направлением оси x . В этом случае кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c$ перпендикулярна плоскости xOz и направлена, как показано на рис. 132.

Модули сил инерции определяются по формулам

$$\Phi_c^u = ma_c^u = m\omega_e^2(r + x \sin \alpha);$$

$$\Phi_c = ma_c = 2m\omega_e v_r \sin \alpha,$$

где

$$\omega_e = \omega, \quad v_r = |\dot{x}|.$$

Основное уравнение относительного движения точки M в данном случае имеет вид

$$m\ddot{a}_r = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^u + \vec{\Phi}_c. \quad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение относительного движения шарика M вдоль оси x :

$$m\ddot{x} = \sum X_i = \Phi_e^u \sin \alpha - G \cos \alpha - P;$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2(r + x \sin \alpha) \sin \alpha - mg \cos \alpha - c(x - l_0)$$

(реакция пружины P равна произведению коэффициента жесткости на деформацию пружины).

Последнее уравнение представим в виде

$$\ddot{x} + (c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha)x = \omega^2 r \sin \alpha - g \cos \alpha + cl_0/m. \quad (2)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = x^* + x^{**},$$

где x^* — общее решение соответствующего однородного уравнения;
 x^{**} — частное решение уравнения (2).

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha = 0;$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - c/m} = \sqrt{\pi^2 \cdot 0,5^2 - 1/0,01} = 9,876i;$$

$$\lambda_2 = -9,876i.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x^* = C_1 \cos 9,876t + C_2 \sin 9,876t.$$

Частное решение уравнения (2) находим в форме

$$x^{**} = B.$$

Из дифференциального уравнения (2) находим

$$x^{**} = B = \frac{\omega^2 r \sin \alpha - g \cos \alpha + cl_0/m}{c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

В результате вычислений получаем

$$B = 0,128 \text{ м.}$$

Решение дифференциального уравнения (2) относительного движения шарика M получает вид

$$x = C_1 \cos 9,876t + C_2 \sin 9,876t + 0,128. \quad (3)$$

Скорость этого движения

$$\dot{x} = -9,876C_1 \sin 9,876t + 9,876C_2 \cos 9,876t. \quad (4)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем, используя начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad x_0 = 0,3 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 2,0 \text{ м/с.}$$

Составим уравнения (3) и (4) для $t = 0$:

$$x_0 = C_1 + 0,128; \quad \dot{x}_0 = 9,876C_2,$$

откуда

$$C_1 = 0,172; \quad C_2 = 0,202.$$

Уравнение относительного движения шарика M принимает вид

$$x = 0,172 \cos 9,876t + 0,202 \sin 9,876t + 0,128.$$

Скорость относительного движения шарика $\dot{x} = -1,69 \sin 9,876t + 1,99 \cos 9,876t$.

Для определения составляющих реакции стенки трубки N_1 и N_2 при $t = t_1 = 0,2$ с выразим векторное уравнение (1) в проекциях на оси y и z . Учитывая, что вектор $\vec{a}_r$ перпендикулярен этим осям, получаем

$$0 = N_2 - \Phi_c, \quad 0 = N_1 - G \cos 60^\circ - \Phi_c^u \cos 30^\circ.$$

Из этих уравнений находим

$$N_2 = \Phi_c = 2m\omega v_r \sin \alpha;$$

$$N_1 = G \cos 60^\circ + \Phi_c^u \cos 30^\circ = mg \cos 60^\circ + m\omega^2(r + x \sin \alpha) \cos 30^\circ.$$

Для получения числовых значений N_1 и N_2 необходимо определить координату x_1 и проекцию относительной скорости точки $\dot{x}_1$, соответствующие значению $t_1 = 0,2$ с:

$$x_1 = 0,172 \cos(9,876 \cdot 0,2) + 0,202 \sin(9,876 \cdot 0,2) + 0,128 =$$

$$= 0,172 \cos 113^\circ + 0,202 \sin 113^\circ + 0,128 = 0,246 \text{ м};$$

$$\dot{x}_1 = -1,69 \sin 113^\circ + 1,99 \cos 113^\circ = -2,33 \text{ м/с.}$$

Следовательно, составляющие реакции $N_1 = 0,077$ Н; $N_2 = 0,080$ Н. Реакция стенки трубки

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{0,077^2 + 0,080^2} = 0,111 \text{ Н.}$$

Искомое давление шарика M на стенки трубки по числовому значению равно найденной реакции N и направлено в противоположную сторону.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание Д.5. Применение теоремы об изменении количества движения к определению скорости материальной точки

Телу массой m сообщена начальная скорость v_0 , направленная вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. На тело действует сила $\vec{P}$, направленная в ту же сторону (рис. 133).

Зная закон изменения силы $P = P(t)$ и коэффициент трения скольжения f , определить скорость тела в моменты времени t_1, t_2, t_3 и проверить полученный результат для момента времени t_1 с помощью дифференциального уравнения движения.

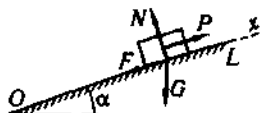


Рис. 133

Необходимые для решения данные приведены в табл. 41.

При построении графика изменения силы P по заданным ее значениям P_0, P_1, P_2, P_3 для моментов времени t_0, t_1, t_2, t_3 считать зависимость $P = P(t)$ между указанными моментами времени линейной. Значение силы P , задаваемое в табл. 41 в виде дроби, указывает на то, что модуль силы в заданный момент времени претерпевает «скачок»: в числителе указан модуль силы в конце промежутка времени, а в знаменателе — в начале следующего промежутка времени.

Таблица 41

Номер варианта	m , кг	v_0 , м/с	t_1	t_2	t_3	P_0	P_1	P_2	P_3	α , град.	f
			с				Н				
1	35	5,4	4	10	18	100	200	150	250	25	0,10
2	20	0	6	10	15	200	160	160	180	37	0,25
3	25	0	4	10	16	200	200/120	120	0	21	0,10
4	10	4,5	5	10	16	0	180	40	100	32	0,12
5	16	9,0	4	8	16	120	120/0	0	160	24	0,08
6	40	4,0	4	8	12	400	300	300	0	40	0,06
7	20	8,0	5	8	11	0	300	0	0	25	0,20
8	16	7,6	6	11	13	75	200	0	0	23	0,12
9	12	0	6	10	14	100	140	0	0	20	0,20
10	50	12,0	2	6	12	0	300	200	200	27	0,08
11	10	5,0	6	10	16	50	100	100	200	35	0,24
12	12	3,0	3	8	14	60	180	120	120	42	0,15
13	10	8,0	4	12	16	0	150	150	100	30	0,18
14	20	8,5	5	8	15	40	100	150	0	23	0,07
15	14	9,0	7	12	18	0	140	0	100	18	0,15

Номер варианта	m, кг	v ₀ , м/с	t ₁	t ₂	t ₃	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	α, град.	f
			с								
16	20	3,0	5	9	17	300	150	100	100	39	0,12
17	24	10,0	6	10	15	0	180	60	140	15	0,20
18	15	13,0	8	16	20	110	150	0	90	26	0,22
19	15	7,2	3	10	16	150	110	90	120	30	0,30
20	22	8,2	2	9	11	70	110	110	50	15	0,15
21	13	10,0	8	12	16	0	200/0	0/200	100	28	0,14
22	11	6,0	7	9	14	160	0	0/100	120	31	0,11
23	12	4,5	5	10	16	50	120	40	80	21	0,22
24	10	7,0	4	14	29	100	50	50	0	18	0,09
25	18	0	8	10	16	180	160/0	0/140	180	33	0,17
26	8	9,0	4	8	12	0	150	0	120	45	0,10
27	17	5,0	7	10	18	190	170/0	100	280	38	0,21
28	9	7,5	4	12	17	0	140/70	100/70	70	26	0,20
29	20	9,5	5	6	11	0	400	400/100	200	15	0,25
30	10	10,2	6	7	10	120	70	0	120	33	0,15

Пример выполнения задания. Дано: $m = 40$ кг; $v_0 = 10$ м/с; $t_1 = 3$ с, $t_2 = 8$ с, $t_3 = 12$ с; $P_0 = 0$; $P_1 = 250$ Н; $P_2 = 300/200$ Н; $P_3 = 150$ Н; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$.

Определить v_1 , v_2 и v_3 для t_1 , t_2 , t_3 .

Решение. Покажем силы, действующие на тело: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию плоскости $\vec{N}$, силу $\vec{P}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$, направив ее противоположно начальной скорости, т. е. вниз по наклонной плоскости.

Построим график $P = P(t)$ по заданным значениям P_0 , P_1 , P_2 и P_3 (рис. 134).

1. Для тела, принимаемого за материальную точку, составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения в проекциях на ось x для промежутка времени от 0 до t_1 :

$$P(H) \quad \begin{array}{c} 300 \\ 250 \\ 200 \\ 150 \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ C \\ D \\ E \end{array} \quad \begin{array}{c} M \\ I \\ K \end{array} \quad \begin{array}{c} t_1=3 \\ t_2=8 \\ t_3=12 \end{array} \quad \begin{array}{c} t(c) \end{array}$$

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{ix}, \quad (1)$$

где

$$\sum S_{ix} = -Gt_1 \sin \alpha - Ft_1 + S_{px}.$$

Проекция импульса переменной силы P за время t_1

$$S_{px} = \int_0^{t_1} P dt.$$

Рис. 134

Этот интеграл определим как площадь треугольника OBM на графике $P = P(t)$:

$$S_{px} = 3 \cdot 250/2 = 375 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Учитывая, что сила трения скольжения $F = fN = fG \cos \alpha$, получаем уравнение (1) в следующем виде:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = -mgt_1 \sin \alpha - fgt_1 \cos \alpha + 375,$$

откуда

$$v_{1x} = v_{0x} - gt_1 \sin \alpha - fgt_1 \cos \alpha + 375/m.$$

С учетом исходных данных находим

$$v_1 = |v_{1x}| = 2,10 \text{ м/с}.$$

Примечание. Сила трения скольжения $\vec{F}$ направлена противоположно скорости, и поэтому, прежде чем производить приведенный расчет, нужно выяснить, не изменит ли скорость тела за время t первоначального направления вверх по наклонной плоскости ($v_{0x} > 0$), а следовательно, сила трения — направления вниз.

Для этого надо установить, возможен ли такой момент времени $t^* < t_1$, при котором скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил $\vec{G}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$ и силы $\vec{P}$, изменяющейся по закону прямой $OB: P = (250/3)t$.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для предполагаемого промежутка времени от 0 до t^* :

$$mv_x - mv_{0x} = -mgt^* \sin \alpha - fgt^* \cos \alpha + S_{px},$$

где в данном случае

$$v_x = 0, \quad S_{px} = \int_0^{t^*} P_x dt = \int_0^{t^*} (250/3)t dt = (125/3)t^{*2}.$$

В результате получим следующее уравнение для определения t^* :

$$(125/3)t^{*2} - mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)t^* + mv_{0x} = 0,$$

т. е.

$$t^{*2} - (196,2 + 34,1)3t^*/125 + 400 \cdot 3/125 = 0,$$

или

$$t^{*2} - 5,52t^* + 9,6 = 0.$$

Решая это уравнение, делаем вывод, что не существует такого момента времени, для которого скорость тела, находящегося под действием указанных сил, будет равна нулю.

2. Для определения скорости тела в момент времени t_2 составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени $t_2 - t_1$:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix}, \quad (2)$$

где

$$\sum S_{ix} = -G(t_2 - t_1) \sin \alpha - F(t_2 - t_1) + S_{px}.$$

Проекция импульса переменной силы P за $t_2 - t_1$ выражается площадью трапеции $MBCI$ на графике $P = P(t)$:

$$S_{px} = 5(250 + 300)/2 = 1375 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Поэтому уравнение (2) имеет вид

$$mv_{2x} - mv_{1x} = -mg(t_2 - t_1) \sin \alpha - fmg \cos \alpha(t_2 - t_1) + 1375,$$

откуда

$$v_{2x} = v_{1x} - g(t_2 - t_1) \sin \alpha - fg \cos \alpha(t_2 - t_1) + 1375/m,$$

или

$$v_2 = |v_{2x}| = 7,68 \text{ м/с}.$$

Примечание. Прежде чем составить уравнение (2), нужно убедиться, что за время $t_2 - t_1$ первоначальная скорость v_1 ($v_{1x} > 0$) не изменит своего направления. Действительно, в начале движения на этом участке сила $P > (G \sin \alpha + fG \cos \alpha)$ и продолжает расти, значит, скорость тела не может изменить своего первоначального направления.

3. Уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения и составленное для промежутка времени $t_3 - t_2$, дает возможность определить скорость тела v_3 в момент t_3 :

$$mv_{3x} - mv_{2x} = \sum S_{ix}, \quad (3)$$

где

$$\sum S_{ix} = -G(t_3 - t_2) \sin \alpha - fG \cos \alpha(t_3 - t_2) + S_{px}.$$

Проекция импульса переменной силы P за $(t_3 - t_2)$ выражается площадью трапеции $IDEK$:

$$S_{px} = 4(200 + 150)/2 = 700 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Тогда

$$v_{3x} = v_{2x} - g(t_3 - t_2) \sin \alpha - fg \cos \alpha(t_3 - t_2) + 700/40,$$

откуда

$$v_3 = |v_{3x}| = 2,15 \text{ м/с}.$$

Примечание. Уравнение (3) можно составить после того, как установлено, что на третьем участке тело не изменяет направления своей первоначальной скорости ($v_{2x} > 0$) и сила трения скольжения направлена в течение всего промежутка времени $t_3 - t_2$ вниз по наклонной плоскости. Для этого следует выяснить, возможен ли такой момент времени $\tau^* < t_3$, когда скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил $\vec{G}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$ и силы $\vec{P}$, закон изменения которой представлен на третьем участке графика (см. рис. 133) прямой DE . Уравнение DE имеет вид

$$P = 200 - [(200 - 150)/4]\tau = 200 - 12,5\tau,$$

где τ — время, отсчитываемое от момента $t_2 = 8$ с.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени от $\tau_0 = 0$ до $\tau = \tau^*$:

$$mv_x - mv_{2x} = -mg\tau^* \sin \alpha - fmg\tau^* \cos \alpha + S_{px},$$

где для данного случая $v_x = 0$, а

$$S_{px} = \int_0^{\tau^*} P_x d\tau = \int_0^{\tau^*} (200 - 12,5\tau) d\tau = 200\tau^* - 6,25\tau^{*2}.$$

В результате получим следующее уравнение, позволяющее определить τ^* :

$$6,25\tau^{*2} - 200\tau^* + mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)\tau^* - mv_{2x} = 0,$$

т. е.

$$\tau^{*2} + \frac{230,3 - 200}{6,25}\tau^* - \frac{40 \cdot 7,68}{6,25} = 0,$$

или

$$\tau^{*2} + 4,85\tau^* - 49,1 = 0,$$

откуда

$$\tau^* = -2,42 \pm \sqrt{5,86 + 49,1} = -2,42 \pm 7,41 \text{ с.}$$

Таким образом,

$$\tau^* = 4,99 \text{ с.}$$

Скорость станет равной нулю при $\tau = 4,99$ с, но $(t_3 - t_2) < \tau^*$, поэтому изменения скорости в рассматриваемый промежуток времени $t_3 - t_2$ не произойдет.

4. Найдем в момент t_1 значение скорости v_1 с помощью дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} = \sum X_i.$$

Раскроем правую часть уравнения:

$$m\ddot{x} = -G \sin \alpha - F + P,$$

или

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha + P,$$

т. е.

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + P/m,$$

где $P = (250/3)t$ — уравнение прямой OB , а поэтому

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + (25/12)t.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, получаем

$$\dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + (25/24)t^2 + C.$$

Для определения C используем начальное условие задачи: при $t = 0$ $v_{0x} = \dot{x}_0 = 10$ м/с.

Составим уравнение, полученное интегрированием, для $t = 0$; найдем, что $C = 10$ м/с. Таким образом, уравнение, определяющее изменение скорости за промежуток времени от 0 до t_1 , имеет вид

$$\dot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + (25/24)t^2 + 10.$$

При $t = t_1$

$$v_1 = |\dot{x}_{t=t_1}| = 2,10 \text{ м/с.}$$

Задание Д.6. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 135—137). Найти скорость шарика в положениях B и C и давление шарика на стенку трубки в положении C . Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь h_0 , отделяется от пружины.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 42.

В задании приняты следующие обозначения: m — масса шарика; v_A — начальная скорость шарика; τ — время движения шарика на участке AB (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке BD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9—13, 15—17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f — коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки; h_0 — начальная деформация пружины; h — наибольшее сжатие пружины; c — коэффициент жесткости пружины; H — наибольшая высота подъема шарика; s — путь, пройденный шариком до остановки.

Пример выполнения задания (рис. 138). Дано: $m = 0,5$ кг; $v_A = 0,8$ м/с; $\tau = 0,1$ с (время движения на участке BD); $R = 0,2$ м; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см = 1000 Н/м.

Определить v_B , v_C , N_C , v_D , h .

Решение. Для определения v_B и v_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и AB траектории происходит под действием силы тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$mv_B^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_1 = mgAB \sin \alpha = mg6R \sin \alpha;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g6R \sin \alpha;$$

$$v_B = 4,59 \text{ м/с};$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha);$$

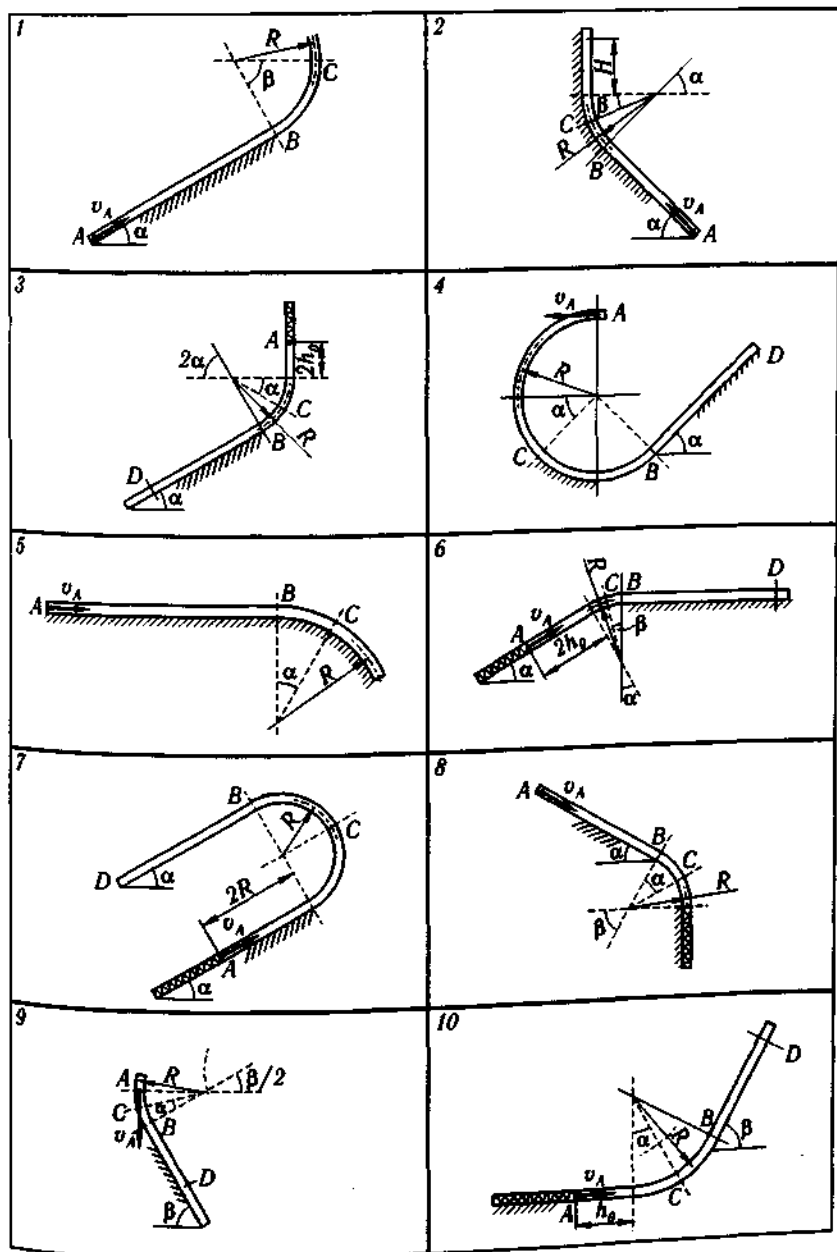


Рис. 135

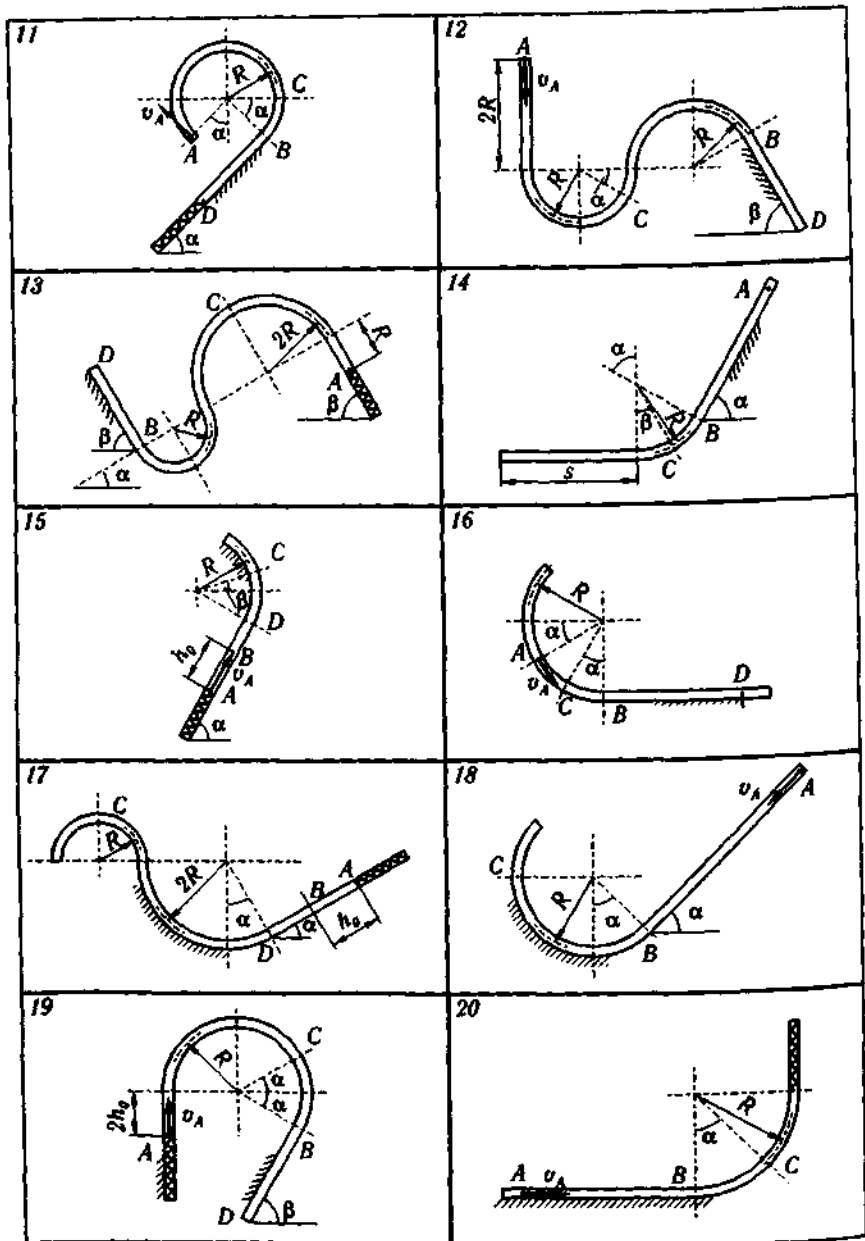


Рис. 136

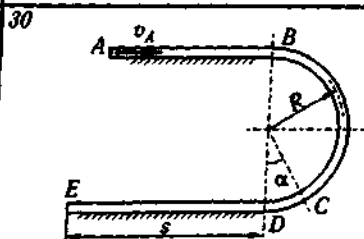
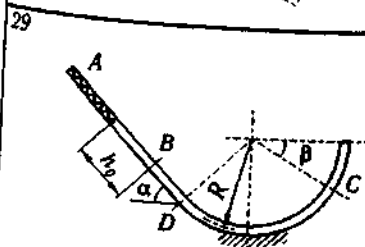
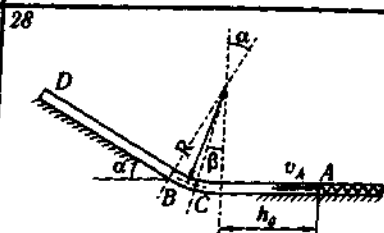
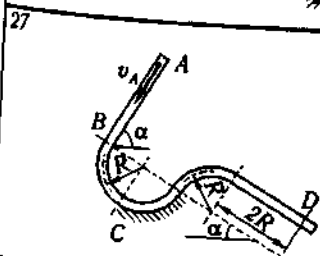
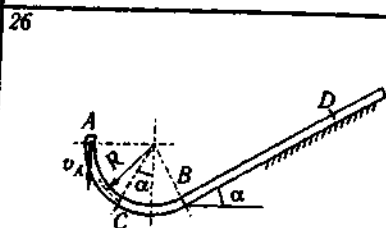
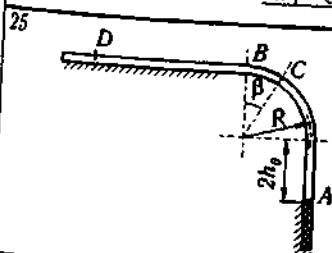
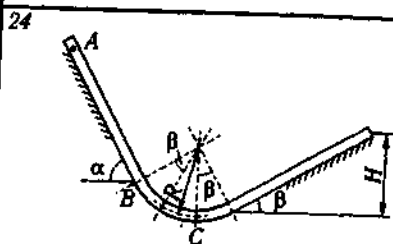
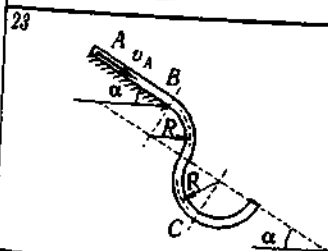
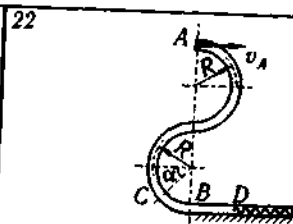
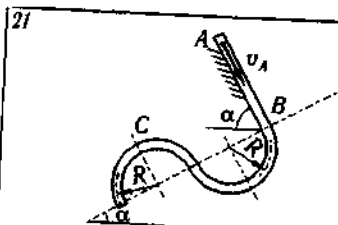


Рис. 137

Таблица 42

Номер варианта (рис. 135—137)	m, кг	v_A , м/с	τ , с	R, м	f	α , град	β , град	h ₀ , см	c, Н/см	Величины, которые требуется определить дополнительно
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	-	-	-
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	-	-	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	-	10	1	v_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	-	-	-	v_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	-	-	-	-
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	-	50	5	v_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	-	-	v_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	v_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	-	-	3	v_D, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	-	-	v_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	v_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	-	-	s
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	v_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	-	-	-	v_D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	-	40	1,0	v_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	-	-	-	-
19	0,1	4	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	v_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	-	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	-	-	-	-
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	-	0	1,1	v_D, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	-	-	-	-
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	-	-	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	-	30	30	0,4	v_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	-	-	-	v_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	-	-	-	v_D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v_D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	v_D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	-	-	-	t_{DE}

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2\sin\alpha + \cos\alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2\sin\alpha + \cos\alpha)},$$

или

$$v_C = 4,26 \text{ м/с.}$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении C .

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равна нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0.$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau.$$

Сумма проекций сил $\vec{G}$, $\vec{N}'_C$ и $\vec{\Phi}$ на ось x должна быть равна нулю:

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R},$$

или

$$N'_C = 25,2 \text{ Н.}$$

Реакцию N'_C можно также определить с помощью естественного уравнения движения:

$$\frac{mv_C^2}{R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_C - G \cos 60^\circ.$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{R}.$$

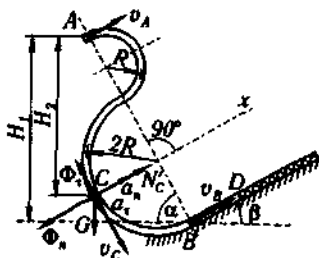


Рис. 138

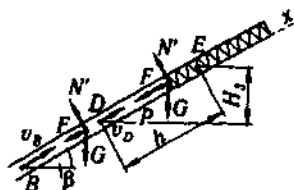


Рис. 139

Искомое давление N_C с шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции N'_C и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении D найдем, применив на участке BD теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 139):

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}.$$

К точке приложены сила тяжести $\vec{G}$, реакция стенки трубки $\vec{N}'$ и сила трения $\vec{F}$:

$$F = fN' = fG \cos \beta.$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, \quad v_{Bx} = v_B, \quad \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то

$$mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

откуда

$$v_D = 4,01 \text{ м/с}.$$

Для определения максимального сжатия h пружины воспользуемся на участке DE теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - GH_3 - Fh.$$

Учитывая, что $v_E = 0$ и $H_3 = h \sin \beta$, получаем

$$ch^2/2 + G(\sin \beta + f \cos \beta)h - mv_D^2/2 = 0,$$

или

$$h^2 + 2Gh(\sin \beta + f \cos \beta)/c - mv_D^2/c = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно h , получим

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м}.$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м}.$$

II. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задание Д.7. Применение теоремы о движении центра масс к исследованию движения механической системы

Тела 1 и 2 (рис. 140--142) движутся по отношению к телу 3 с помощью механизмов, установленных на этом теле (силы, приводящие в движение механизмы, являются внутренними силами данной механической системы). Тело 3 находится на горизонтальной плоскости.

1. Предполагая горизонтальную плоскость гладкой, определить зависимость между перемещением $s_3 = s_3(t)$ тела 3 и относительным

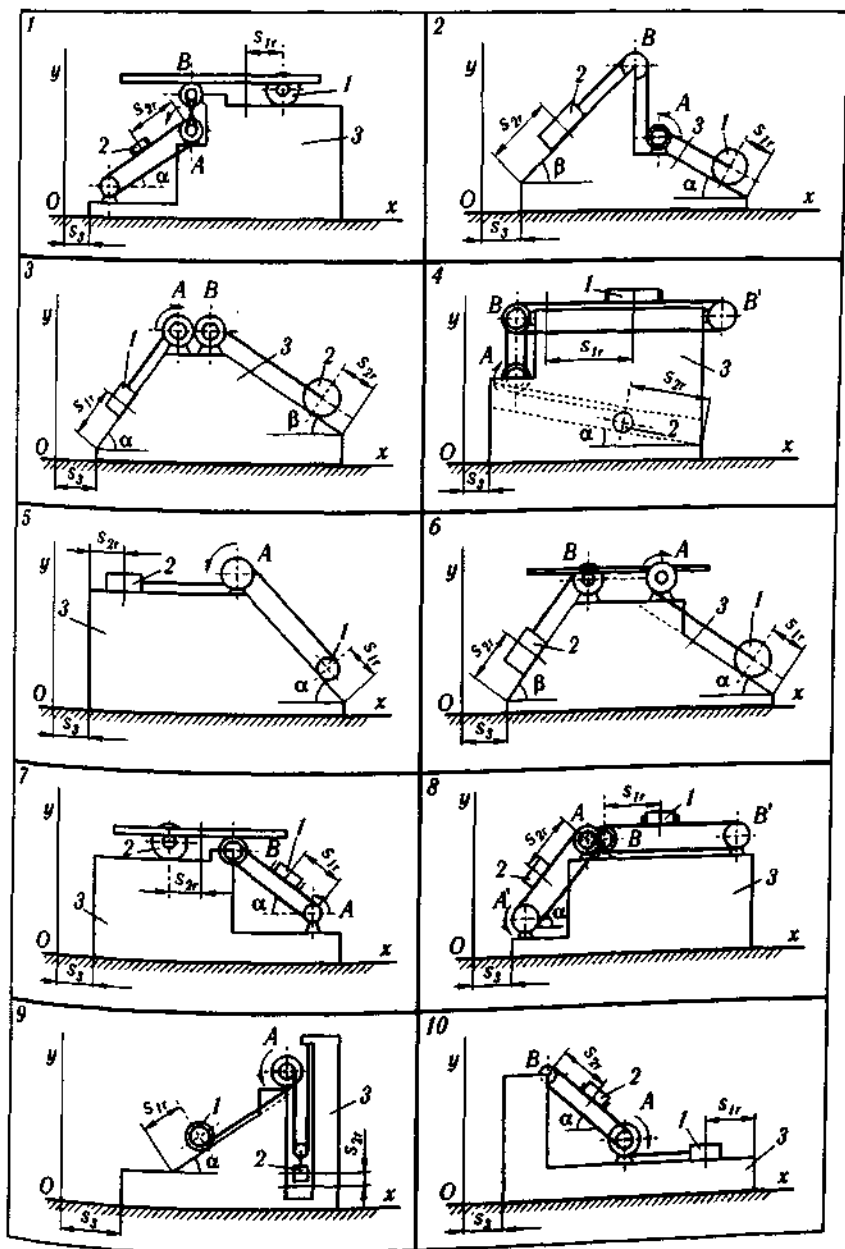


Рис. 140

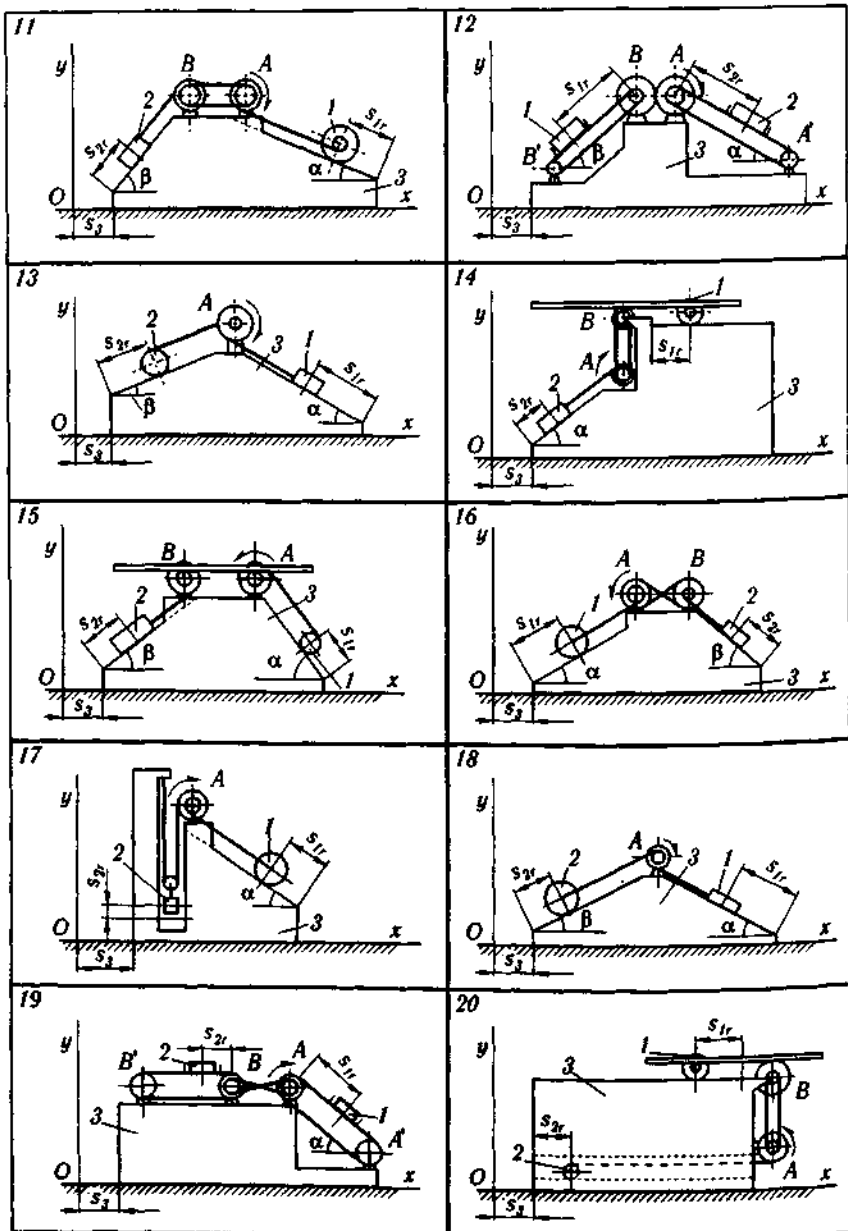


Рис. 141

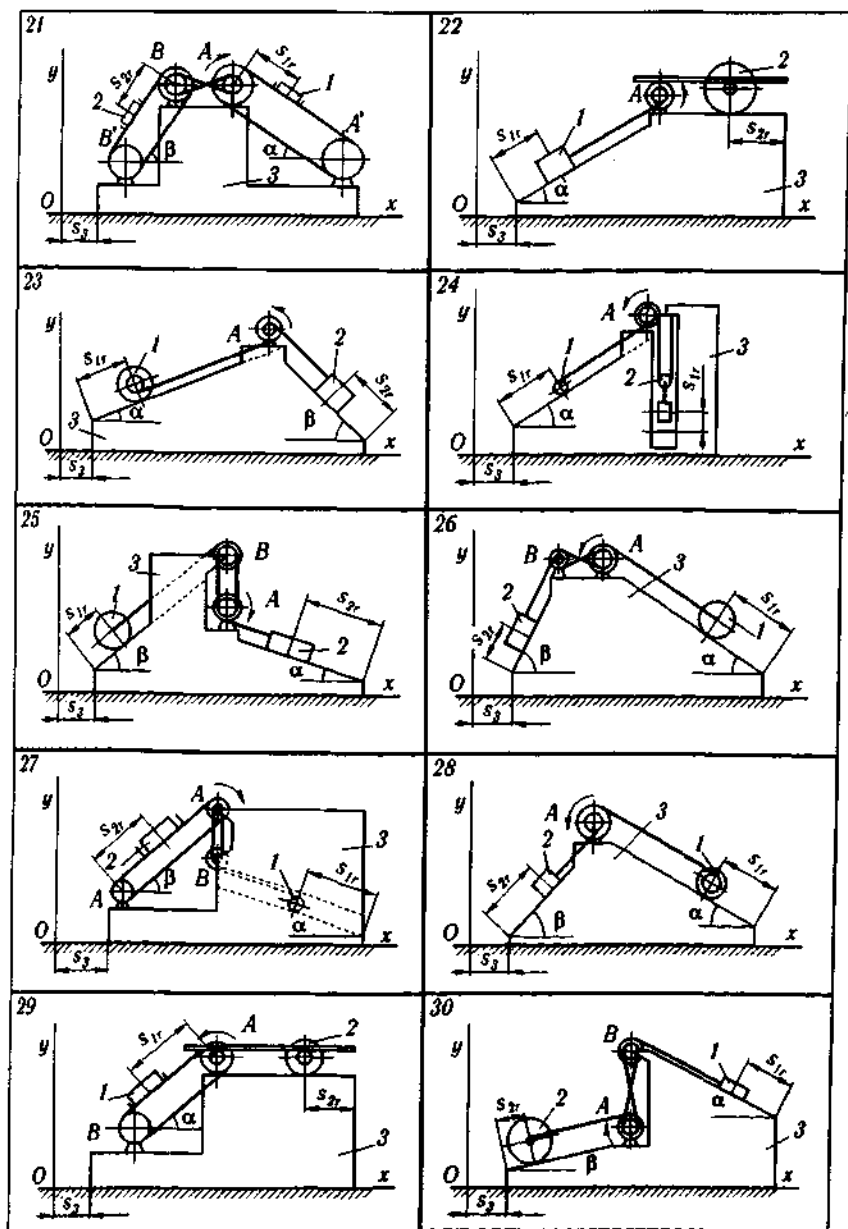


Рис. 142

Таблица 43

Номер варианта (рис. 140—142)	m_1	m_2	m_3	$\frac{R_A}{r_A}$	$\frac{R_B}{r_B}$	$\frac{R_1}{r_1}$	$\frac{R_2}{r_2}$	α	β	Примечание
	кг							град		
1	800	200	800	2	2	3	-	30	-	$r_A = r_B$
2	200	600	1000	3/2	-	-	-	30	45	$R_A = R_B$
3	300	800	500	3	2	-	-	60	30	$R_A = R_B$
4	200	800	1000	2	2	-	-	15	-	$r_A = r_B$; $R_{B'} = R_B$
5	100	700	600	3/2	-	-	-	45	-	
6	600	300	600	3	2	-	-	30	45	$r_A = r_B$
7	300	500	1000	-	2	-	4	45	-	$r_A = r_B$
8	500	200	400	2	2	-	-	60	-	$r_A = r_B$; $R_{A'} = R_A$;
9	400	200	500	2	-	-	2	30	-	$R_{B'} = R_B$
										Массой подвижного
										блока пренебречь
10	500	300	600	2	-	-	-	45	-	$r_A = r_B$
11	600	200	800	2	2	-	3	30	60	$r_A = r_B$
12	300	600	500	2	3	-	-	30	60	$R_A = R_B$; $r_{A'} = r_A$;
										$r_{B'} = r_B$
13	700	300	600	3	-	-	-	30	30	
14	400	500	1000	2	2	-	3	45	-	$r_A = r_B$
15	400	900	500	2	2	-	-	60	30	$r_A = r_B$
16	600	200	700	2	3	-	-	30	45	$R_A = R_B$
17	500	400	800	2	-	-	-	30	-	Массой подвижного
										блока пренебречь
18	700	400	800	2	-	-	-	30	15	
19	300	600	700	3/2	2	-	-	45	-	$r_A = r_B$; $R_{A'} = R_A$;
										$R_{B'} = R_B$
20	800	200	1000	2	2	-	3	-	-	$r_A = r_B$
21	500	180	300	3	2	-	-	45	60	$r_A = r_B$; $R_{A'} = R_A$;
										$R_{B'} = R_B$
22	300	700	500	2	-	-	3	30	-	
23	600	300	500	2	-	2	-	30	60	
24	400	300	600	2	-	-	-	30	-	Массой подвижного
										блока пренебречь
25	200	700	600	2	2	-	-	15	45	$r_A = r_B$
26	600	300	800	2	2	-	-	30	60	$r_A = R_B$
27	200	600	800	2	2	-	-	30	60	$r_A = r_B$; $R_{A'} = R_A$
28	500	200	600	2	-	2	-	30	60	
29	600	300	800	2	-	-	4	45	-	$R_A = R_B$
30	300	800	600	2	2	-	4	30	15	$r_A = r_B$

перемещением $s_{1r} = s_{1r}(t)$ тела 1 (по отношению к телу 3), если механическая система в начале рассматриваемого движения ($t = 0$) находилась в состоянии покоя, причем $s_{1r0} = s_{2r0} = s_{30} = 0$; определить также зависимость горизонтальной составляющей реакции R_x одного из упоров, которые удерживали бы тело 3 от перемещения, от относительного перемещения $s_{1r} = s_{1r}(t)$ тела 1.

2. Предполагая горизонтальную плоскость шероховатой, написать дифференциальное уравнение движения тела 3; определить условие, при котором тело 3 (при заданных параметрах системы) придет в движение, и найти зависимость между $s_3(t)$ и $s_{1r}(t)$, считая, что дальнейшее движение происходит при соблюдении этого условия (при $t = 0$ $s_{1r0} = s_{2r0} = s_{30} = 0$, $\dot{s}_{1r0} = \dot{s}_{2r0} = \dot{s}_{30} = 0$).

Известны: m_1, m_2 — массы тел 1 и 2; m_3 — масса тела 3 с находящимися на нем механизмами привода (центр масс C_3 по отношению к телу 3 не перемещается); R, r — радиусы больших и малых окружностей тел 1 и 2 или звеньев А и В механизмов привода; α, β — углы наклона граней призмы (тел 3) и лент транспортеров к горизонтальной плоскости; $f_{сц}, f$ — коэффициенты трения покоя (сцепления) и трения скольжения соответственно, принимаемые одинаковыми во всех вариантах: $f_{сц} = 0,11, f = 0,10$; $s_{1r} = s_{1r}(t)$ — непрерывная и возрастающая функция времени (ее производная тоже непрерывна и возрастает).

Качение тел происходит без проскальзывания; нити невесомы и нерастяжимы.

На схемах тела 1, 2, 3 — в отклоненных от начального ($t = 0$) положениях; показаны относительные перемещения s_{1r}, s_{2r} тел 1 и 2 и предполагаемое абсолютное перемещение s_3 тела 3 в сторону возрастания этих перемещений. Необходимые для решения данные приведены в табл. 43. Массой зубчатой рейки (варианты 1, 6, 7, 14, 15, 20, 22, 29) пренебречь.

Пример выполнения задания (рис. 143). Дано: $m_1 = 600$ кг; $m_2 = 240$ кг; $m_3 = 400$ кг; $R_A/r_A = 3$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $f_{сц} = 0,11$; $f = 0,10$.

Решение. 1. Горизонтальная плоскость — гладкая. Напишем дифференциальное уравнение, выражающее теорему о движении центра масс механической системы (рис. 143, а), в проекциях на ось x :

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E.$$

В данном случае

$$m\ddot{x}_C = 0, \quad (1)$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3$ — масса всей системы.

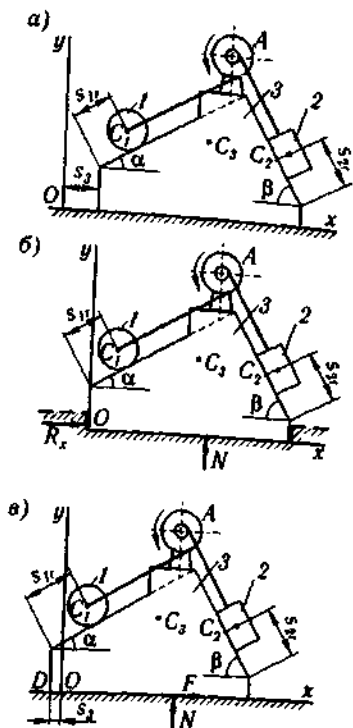


Рис. 143

Проинтегрируем уравнение (1) дважды при следующих начальных условиях: при $t = 0$ $x_{C0} \neq 0$, $\dot{x}_{C0} = 0$.

Получаем

$$\dot{x}_C = C_1, \quad x_C = C_1 t + C_2.$$

Эти уравнения для $t = 0$ имеют вид

$$\dot{x}_{C0} = C_1; \quad x_{C0} = C_2,$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = x_{C0}$. Таким образом, для любого момента времени

$$\dot{x}_C = 0, \quad x_C = x_{C0}. \quad (2)$$

Из уравнений (2) видно, что вдоль оси x центр масс механической системы не перемещается и что движение тел 1 и 2 возможно только с одновременным движением тела 3.

Приравняем на основании (2) абсциссу центра масс системы в любой момент времени t

$$x_C = \frac{m_1 x_{C1} + m_2 x_{C2} + m_3 x_{C3}}{m} \quad (3)$$

его абсциссе в начальный момент рассматриваемого движения:

$$x_{C0} = \frac{m_1 x_{C10} + m_2 x_{C20} + m_3 x_{C30}}{m}. \quad (4)$$

Покажем перемещение s_3 тела 3, предполагая его направленным в сторону возрастания координаты s_3 .

В выражении (3)

$$\begin{aligned} x_{C1} &= x_{C10} + s_3 + s_{1r} \cos \alpha; \\ x_{C2} &= x_{C20} + s_3 - s_{2r} \cos \beta = x_{C20} + s_3 - s_{1r} r_A \cos \beta / R_A; \\ x_{C3} &= x_{C30} + s_3. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) следует выразить s_{2r} через s_{1r} . Для этого устанавливаем связь между относительными скоростями $v_{2r} = \dot{s}_{2r}$ и $v_{1r} = \dot{s}_{1r}$.

Из чертежа (рис. 143, а) находим

$$v_{1r}/v_{2r} = R_A/r_A, \text{ откуда } v_{2r} = v_{1r} r_A / R_A,$$

т. е.

$$d s_{2r} / dt = (d s_{1r} / dt) r_A / R_A, \text{ или } d s_{2r} = d s_{1r} r_A / R_A.$$

Интегрируя это выражение при нулевых начальных условиях, имеем

$$s_{2r} = s_{1r} r_A / R_A.$$

Из полученного видно, что линейные перемещения находятся в такой же зависимости, что и соответствующие линейные скорости.

Приравняв (3) [с учетом (5)] и (4), имеем

$$\begin{aligned} m_1 (x_{C10} + s_3 + s_{1r} \cos \alpha) + m_2 (x_{C20} + s_3 - s_{1r} r_A \cos \beta / R_A) + m_3 (x_{C30} + s_3) = \\ = m_1 x_{C10} + m_2 x_{C20} + m_3 x_{C30}, \end{aligned}$$

откуда найдем искомую зависимость

$$s_3 = \frac{-m_1 \cos \alpha + m_2 r_A \cos \beta / R_A}{m} s_{1r}, \quad (6)$$

или, используя числовые данные, получим

$$s_3 = -0,39 s_{1r} \text{ (м)}.$$

Знак «-» означает, что при заданных параметрах системы положительной координате s_{1r} тела 1 соответствует координата $s_3 < 0$, т. е. тело 3 перемещается из первоначального положения влево (а не в положительном направлении отсчета s_3 , как первоначально предполагалось).

Очевидно, что зависимость между абсолютной скоростью $v_3 = \dot{s}_3$ тела 3 и относительной скоростью $v_{1r} = \dot{s}_{1r}$ тела 1 определяется на основании (6) выражением

$$v_3 = \frac{-m_1 \cos \alpha + m_2 r_A \cos \beta / R_A}{m} v_{1r}, \quad (7)$$

или

$$v_3 = -0,39 v_{1r} \text{ (м/с)}. \quad (7')$$

Пусть тело 3 на гладкой горизонтальной плоскости удерживается упорами (на рис. 143,б они показаны пунктиром).

Учитывая по (7') направление скорости тела 3, покажем горизонтальную составляющую $\vec{R}_x$ реакции левого упора.

Для определения ее величины составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы:

$$m \ddot{x}_C = \sum X_i^E.$$

В данном случае $\sum X_i^E = R_x$.

Выразим проекцию ускорения центра масс системы на ось через соответствующие проекции ускорений центров масс тел системы, взяв производные по времени от выражения (3):

$$\ddot{x}_C = \frac{m_1 \ddot{x}_{C1} + m_2 \ddot{x}_{C2} + m_3 \ddot{x}_{C3}}{m}. \quad (8)$$

Тогда

$$m_1 \ddot{x}_{C1} + m_2 \ddot{x}_{C2} + m_3 \ddot{x}_{C3} = R_x. \quad (9)$$

Вторые производные от координат (5) центров масс тел системы:

$$\ddot{x}_{C1} = \ddot{s}_3 + \ddot{s}_{1r} \cos \alpha, \quad \ddot{x}_{C2} = \ddot{s}_3 - \ddot{s}_{1r} r_A \cos \beta / R_A, \quad \ddot{x}_{C3} = \ddot{s}_3. \quad (10)$$

При наличии упоров тело 3 перемещаться не будет ($s_3 = 0 = \text{const}$), т. е.

$$\ddot{s}_3 = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (9) с учетом (10) и (11) находим

$$R_x = (m_1 \cos \alpha - m_2 r_A \cos \beta / R_A) \ddot{s}_{1r}, \quad (12)$$

или

$$R_x = 479,6 \ddot{s}_{1r} \text{ Н}.$$

Выражение (12) позволяет заключить, что упор будет испытывать горизонтальное давление тела 3 (а тело 3 — реакцию R_x) только тогда, когда тела 1 и 2 движутся с ускорением ($\ddot{s}_{1r} \neq 0$).

Заметим, что R_x может оказаться равной нулю, когда $\ddot{s}_{1r} \neq 0$, при некоторых сочетаниях параметров системы. Например, в данной задаче, как это видно из (12), при $m_1 \cos \alpha = m_2 r_A \cos \beta / R_A$.

2. *Горизонтальная плоскость шероховата.* Составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы:

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E.$$

В данном случае (рис. 143, в) на ось x проецируется сила трения скольжения $\vec{F}$ между телом 3 и горизонтальной плоскостью, направленная противоположно скорости тела 3, а направление скорости тела 3 определяется выражением (7'), поэтому $\sum X_i^E = F$.

Используя (8), напишем

$$m_1\ddot{x}_{C1} + m_2\ddot{x}_{C2} + m_3\ddot{x}_{C3} = F$$

или, учитывая (10), имеем

$$m_1(\ddot{s}_3 + \ddot{s}_{1r} \cos \alpha) + m_2(\ddot{s}_3 - \ddot{s}_{1r} r_A \cos \beta / R_A) + m_3\ddot{s}_3 = F. \quad (13)$$

Найдем силу трения скольжения:

$$F = fN', \quad (14)$$

где N' — нормальное давление системы на горизонтальную плоскость.

Для определения величины N' составим уравнение, выражающее теорему о движении центра масс системы, в проекциях на ось y :

$$m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E.$$

Выразим проекцию ускорения центра масс системы на ось y через соответствующие проекции ускорений центров масс отдельных тел системы [по аналогии с (8)]:

$$\ddot{y}_C = \frac{m_1\ddot{y}_{C1} + m_2\ddot{y}_{C2} + m_3\ddot{y}_{C3}}{m}.$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$m_1\ddot{y}_{C1} + m_2\ddot{y}_{C2} + m_3\ddot{y}_{C3} = -G_1 - G_2 - G_3 + N. \quad (15)$$

Здесь $\vec{N}$ — нормальная реакция горизонтальной плоскости: $\vec{N} = -\vec{N}'$; G_1, G_2, G_3 — силы тяжести тел 1, 2, 3.

Составим выражения ординат центров масс тел системы:

$$y_{C1} = y_{C10} + s_{1r} \sin \alpha, \quad y_{C2} = y_{C20} + s_{2r} \sin \beta = y_{C20} + s_{1r} r_A \sin \beta / R_A,$$

$$y_{C3} = y_{C30}.$$

Взяв производные по времени от этих выражений, получим:

$$\ddot{y}_{C1} = \ddot{s}_{1r} \sin \alpha, \quad \ddot{y}_{C2} = \ddot{s}_{1r} r_A \sin \beta / R_A, \quad \ddot{y}_{C3} = 0. \quad (16)$$

Из (15) с учетом (16) найдем величину реакции:

$$N = G + m_1 \ddot{s}_{1r} \sin \alpha + m_2 \ddot{s}_{1r} r_A \sin \beta / R_A \quad (17)$$

($G = G_1 + G_2 + G_3$ — сила тяжести всей системы).

Используя (14) и (17), напомним дифференциальное уравнение (13) в следующем виде:

$$m_1(\ddot{s}_3 + \ddot{s}_{1r} \cos \alpha) + m_2(\ddot{s}_3 - \ddot{s}_{1r} r_A \cos \beta / R_A) + m_3 \ddot{s}_3 = \\ = f(G + m_1 \ddot{s}_{1r} \sin \alpha + m_2 \ddot{s}_{1r} r_A \sin \beta / R_A).$$

Ускорение тела 3 определяется выражением

$$\ddot{s}_3 = \frac{fG - [m_1 \cos \alpha - (m_2 r_A \cos \beta / R_A) - f(m_1 \sin \alpha + m_2 r_A \sin \beta / R_A)] \ddot{s}_{1r}}{m}. \quad (18)$$

Отсюда заключаем, что движение тела 3 на шероховатой плоскости возможно только тогда, когда тела 1 и 2 движутся с ускорениями, причем ускорение $\ddot{s}_{1r}$ превосходит некоторую величину $\ddot{s}_{1r}^*$.

В самом деле, $|\ddot{s}_3| > 0$, когда

$$|fG - [m_1 \cos \alpha - (m_2 r_A \cos \beta / R_A) - f(m_1 \sin \alpha + m_2 r_A \sin \beta / R_A)] \ddot{s}_{1r}^*| > 0,$$

т. е.

$$|m_1 \cos \alpha - (m_2 r_A \cos \beta / R_A) - f(m_1 \sin \alpha + m_2 r_A \sin \beta / R_A)| \ddot{s}_{1r}^* > fG. \quad (19)$$

Движение тела 3 начинается из состояния покоя, когда на него действует максимальная сила трения покоя (сцепления) $F_{cu \max} = f_{cu} N = f_{cu} G$; поэтому, определяя $\ddot{s}_{1r}^*$ из выражения (19), следует ввести коэффициент сцепления f_{cu} :

$$\ddot{s}_{1r0}^* > \frac{f_{cu} G}{|m_1 \cos \alpha - (m_2 r_A \cos \beta / R_A) - f_{cu}(m_1 \sin \alpha + m_2 r_A \sin \beta / R_A)|}. \quad (19')$$

Произведя вычисления, получим

$$\ddot{s}_{1r0}^* > 3,05 \text{ м/с}^2.$$

Пусть относительное ускорение изменяется по некоторому непрерывному закону $\ddot{s}_{1r} = \ddot{s}_{1r}(t)$ так, что в любой момент времени $\ddot{s}_{1r} > \ddot{s}_{1r0}^*$.

Тогда движение тела 3 описывается дифференциальным уравнением (18). Разделив каждое из слагаемых числителя правой части (18) на знаменатель и обозначив

$$\frac{|m_1 \cos \alpha - (m_2 r_A \cos \beta / R_A) - f(m_1 \sin \alpha + m_2 r_A \sin \beta / R_A)|}{m} = B,$$

получим это уравнение в следующем виде:

$$\ddot{s}_3 = fg - B \ddot{s}_{1r}. \quad (20)$$

Заметим, что условие (19') при принятом обозначении имеет вид

$$\ddot{s}_{1r}^* > \frac{f_{\text{сж}} g}{B}.$$

Интегрируем (20) (начальные условия: при $t = 0$ $s_{1r0} = s_{2r0} = s_{3r0} = 0$, $\dot{s}_{1r0} = \dot{s}_{2r0} = \dot{s}_{3r0} = 0$):

$$\dot{s}_3 = fgt - B\dot{s}_{1r} + C, \quad s_3 = (fgt^2/2) - Bs_{1r} + Ct + D.$$

Напишем эти уравнения для $t = 0$:

$$\dot{s}_{30} = -B\dot{s}_{1r0} + C, \quad s_{30} = -Bs_{1r0} + D,$$

откуда найдем (имея в виду начальные условия) постоянные интегрирования:

$$C = 0, \quad D = 0.$$

Таким образом, $\dot{s}_3 = fgt - B\dot{s}_{1r}$, $s_3 = (fgt^2/2) - Bs_{1r}$.

Сделав числовые расчеты, имеем

$$\dot{s}_3 = 0,98t - 0,36\dot{s}_{1r}, \quad s_3 = 0,49t^2 - 0,36s_{1r}. \quad (21)$$

Задание Д.8. Применение теоремы об изменении количества движения к исследованию движения механической системы

Механическая система (рис. 144—146) состоит из тел 1, 2, 3 с массами соответственно m_1 , m_2 и m_3 . Массами остальных тел, составляющих систему, пренебречь.

На тело 1 наложены две связи. Опора А препятствует перемещению по нормали к опорным поверхностям (по вертикали). Опора В не препятствует перемещениям по вертикали и горизонтали, но исключает возможность поворота.

В некоторый момент времени (принятый за начальный), когда скорость тела 1 равна v_0 , а угловая скорость тела 2 — ω_0 , движение тел 2 и 3 относительно тела 1 начинает замедляться (направление вращения тела 2 и направление скорости $\vec{v}_0$ показаны на рис. 144—146). Торможение осуществляется внутренними для всей системы силами. Устройство, осуществляющее торможение, на схемах не показано. В процессе торможения угловое ускорение ϵ_2 (замедление) тела 2 остается постоянным.

Определить скорость v_T тела 1 в тот момент времени T , когда ω_2 становится равным нулю, т. е. когда движение тел 2 и 3 относительно тела 1 прекращается. Вычисление v_T произвести для одного из следующих условий*:

* Выбор условий — по усмотрению преподавателя. Условие б) рекомендуется для самостоятельного исследования.

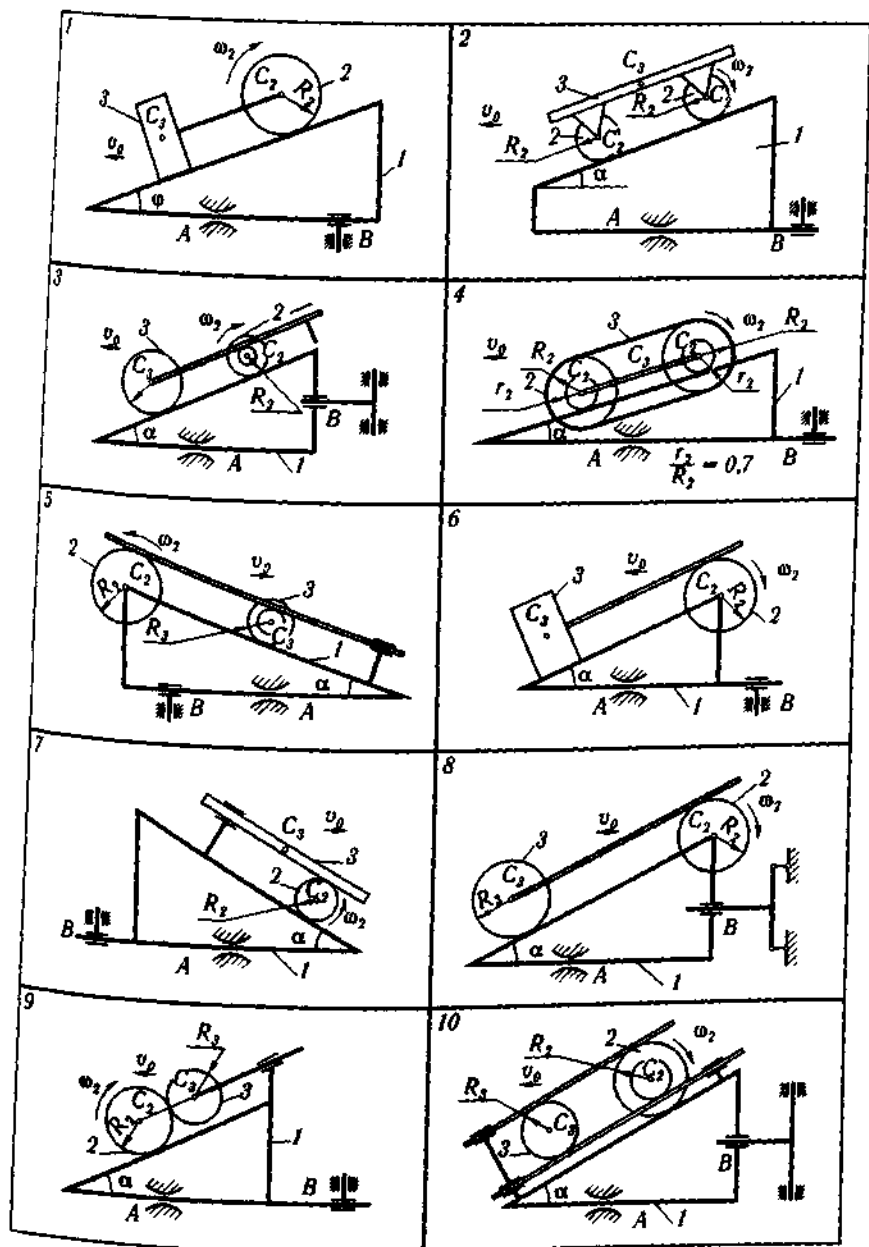


Рис. 144

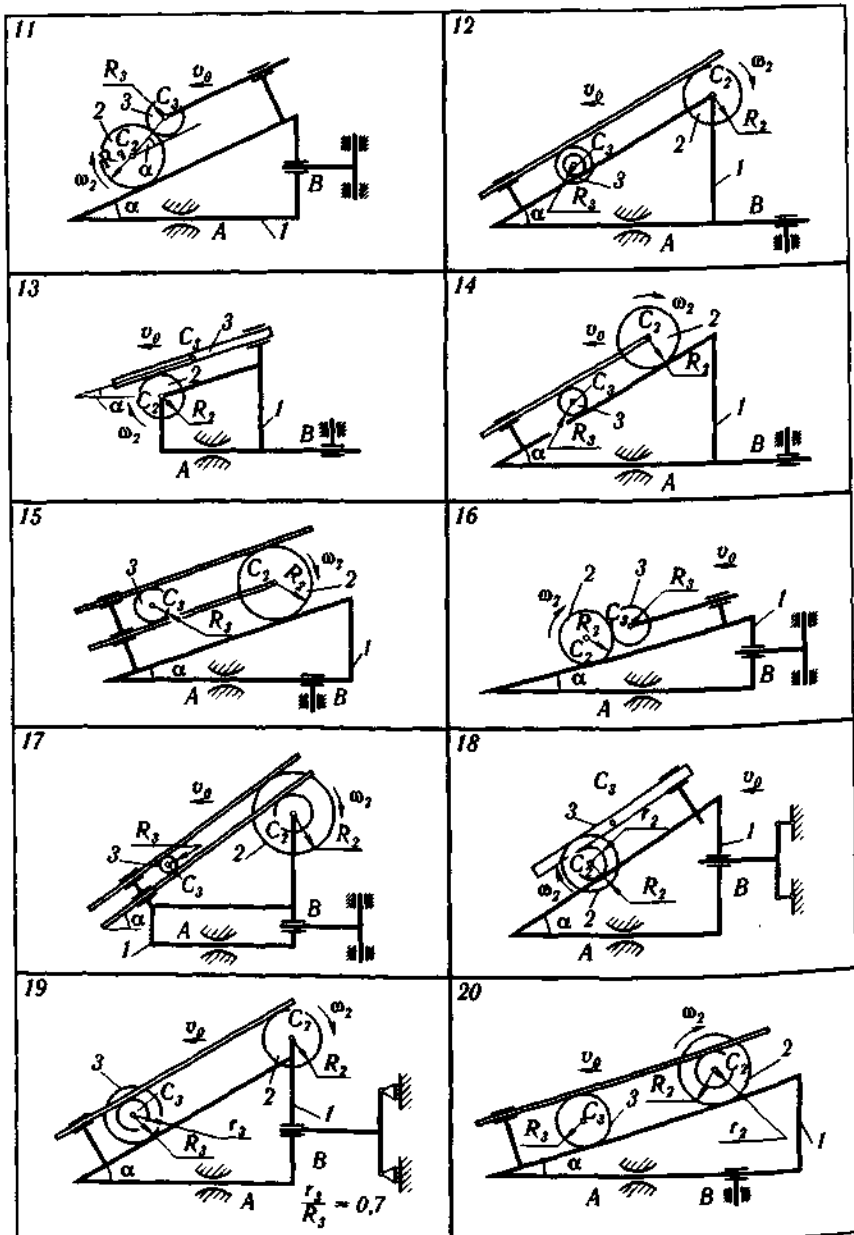


Рис. 145

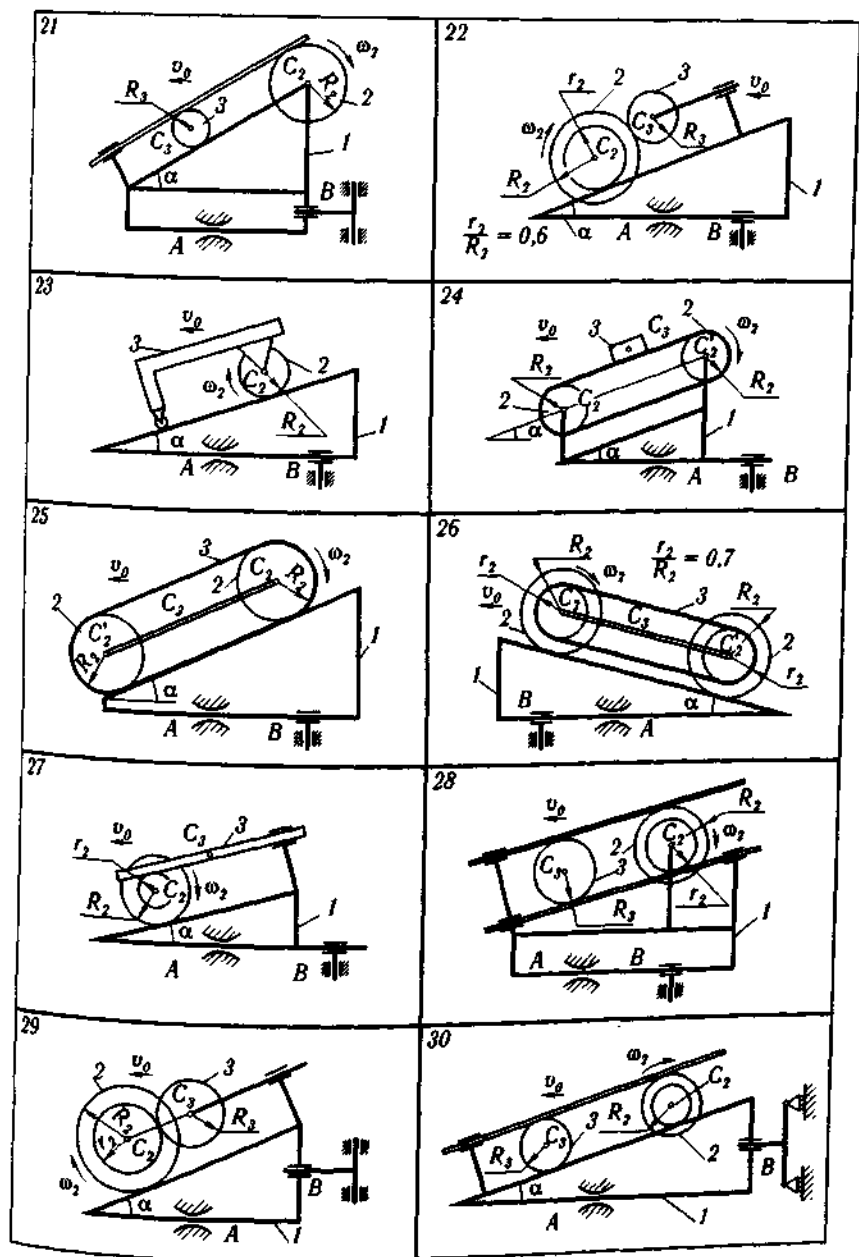


Рис. 146

Таблица 44

Номер варианта (рис. 144-146)	m_1	m_2	m_3	R_2	R_3	α_1	Номер варианта (рис. 144-146)	m_1	m_2	m_3	R_2	R_3	α_1
	кг			м		град		кг			м		град
1	10	5	2	0,5	—	40	16	10	5	2	0,9	0,4	30
2	12	4	3	0,5	—	30	17	15	4	1	0,8	0,2	30
3	10	4	5	0,35	0,5	20	18	12	2	4	0,8	—	40
4	12	4	2	0,7	—	40	19	12	2	6	0,6	0,8	30
5	10	1	6	0,5	0,4	30	20	14	2	4	0,8	0,5	20
6	15	1	6	0,5	—	40	21	13	1	6	0,8	0,4	25
7	16	4	4	0,7	—	40	22	12	4	2	0,6	0,4	20
8	19	2	6	0,7	0,7	40	23	20	1	8	0,8	—	35
9	10	5	5	0,7	0,5	30	24	13	1	6	0,6	—	30
10	12	4	6	0,8	0,6	30	25	10	2	4	0,6	—	25
11	18	6	4	0,8	0,4	25	26	11	2	4	0,7	—	25
12	13	1	6	0,8	0,6	35	27	20	1	6	0,7	—	30
13	12	2	6	0,4	—	40	28	14	1	6	0,8	0,6	20
14	12	6	2	0,8	0,4	40	29	10	4	3	0,8	0,6	20
15	10	5	3	0,8	0,4	30	30	12	4	4	0,8	0,6	25

а) на тело 1 со стороны направляющих А действует сила кулоновского (сухого) трения $\vec{F} = -f|N|\vec{v}/|v|$ (f — коэффициент трения скольжения, $|N|$ — модуль реакции в точке А);

б) на тело 1 кроме силы трения скольжения $\vec{F}$ в опоре А действует сила «вязкого» трения $\vec{R}$ со стороны опоры В: $\vec{R} = -b\vec{v}$ (b — коэффициент «вязкого» сопротивления, $\vec{v}$ — вектор скорости тела 1).

Вычисление v_t произвести точно и приближенно. В приближенном расчете пренебречь величинами первого и более высоких порядков малости относительно промежутка времени $T = \omega_{20}/\varepsilon_2$.

Для всех вариантов принять $v_0 = 2$ м/с; $\omega_{20} = 10$ рад/с; $|\varepsilon_2| = 250$ рад/с²; $f = 0,25$; $b = 10$ Н·с/м.

Считать, что проскальзывание колес по соответствующим поверхностям отсутствует.

Необходимые для расчета данные приведены в табл. 44.

Пример выполнения задания. Дано (рис. 147): $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 4$ кг, $m_3 = 3$ кг; $R_2 = 0,5$ м; $r_2 = 0,25$ м; $\alpha = 30^\circ$; $v_0 = 2$ м/с; $\omega_{20} = 10$ рад/с; $|\varepsilon_2| = 250$ рад/с²; $f = 0,25$; $b = 10$ Н·с/м;

$$\omega_2 = \omega_{20} - \varepsilon_2 t \quad (0 \leq t \leq \omega_{20}/\varepsilon_2). \quad (1)$$

Определить v_t — скорость тела 1 в момент времени $T = \omega_{20}/\varepsilon_2$.

Решение. а). На механическую систему действуют внешние силы: $\vec{F}$ — сила сухого трения в опоре А; $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ — силы тяжести

тел 1, 2 и 3; $\vec{N}$ — сила нормальной реакции в точке A; M_B — реактивный момент в опоре B.

Применим теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме. В проекциях на оси координат

$$dK_x/dt = \sum X_i^E; \quad dK_y/dt = \sum Y_i^E, \quad (2)$$

где K_x , K_y — проекции вектора количества движения системы на оси координат; $\sum X_i^E$, $\sum Y_i^E$ — суммы проекций внешних сил на соответствующие оси.

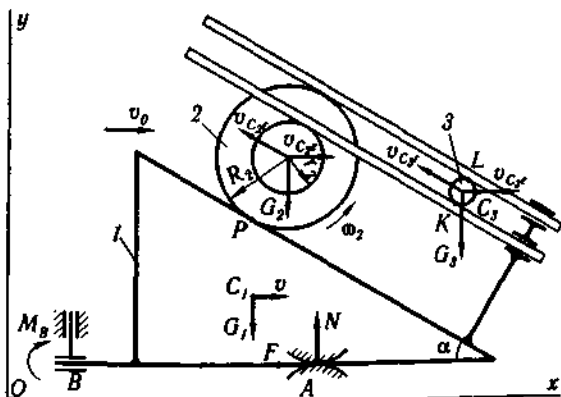


Рис. 147

Количество движения системы тел 1, 2 и 3

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3, \quad (3)$$

где

$$\vec{K}_1 = m_1 \vec{v}_1; \quad \vec{K}_2 = m_2 \vec{v}_{C2} = m_2 (\vec{v}_{C2e} + \vec{v}_{C2r}); \quad (4)$$

$$\vec{K}_3 = m_3 \vec{v}_{C3} = m_3 (\vec{v}_{C3e} + \vec{v}_{C3r}).$$

Здесь $\vec{v}$, $\vec{v}_{C2}$, $\vec{v}_{C3}$ — скорости центров масс тел 1, 2, 3; $\vec{v}_{C2e}$, $\vec{v}_{C3e}$, $\vec{v}_{C2r}$, $\vec{v}_{C3r}$ — соответственно переносные и относительные скорости центров масс (рис. 147).

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_{C2e} = \vec{v}_{C3e} = \vec{v}; \\ v_{C2r} = \omega_2 R_2; \quad v_L = 2R_2 \omega_2; \quad v_K = \omega_2 (R_2 + r_2); \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} v_K = (v_L + v_K)/2 = \omega_2 (3R_2 + r_2)/2; \\ \omega_3 = (v_L - v_K)/(2r_3) = \omega_2 (R_2 - r_e)/(2r_3). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Проецируя обе части векторного равенства (3) на координатные оси, получаем с учетом (4), (5) и (6)

$$K_x = m\dot{x} - \mu\omega_2 \cos \alpha, \quad K_y = \mu\omega_2 \sin \alpha, \quad (7)$$

где $\dot{x}$ — проекция вектора $\vec{v}$ на ось x ;

$$m = m_1 + m_2 + m_3; \quad \mu = m_2 R_2 + 0,5 m_3 (3R_2 + r_2).$$

Проекции главного вектора внешних сил на координатные оси

$$\sum X_i^E = \mp f|N|; \quad \sum Y_i^E = -G_1 - G_2 - G_3 + N. \quad (8)$$

Здесь знак « $\rightarrow$ » соответствует случаю, когда $\dot{x} > 0$, а знак « $+$ » — случаю, когда $\dot{x} < 0$.

Подставляя (7) и (8) в (2), получим

$$m\ddot{x} + \mu\epsilon_2 \cos \alpha = \mp f|N|; \quad -\mu\epsilon_2 \sin \alpha = -G_1 - G_2 - G_3 + N. \quad (9)$$

Выразим из второго уравнения системы (9) алгебраическую величину нормальной реакции и подставим ее в первое уравнение. В результате получим

$$\ddot{x} = -a \quad \text{при } \dot{x} > 0; \quad (10)$$

$$\ddot{x} = -\bar{a} \quad \text{при } \dot{x} < 0, \quad (11)$$

где

$$a = \frac{\mu}{m}\epsilon_2 \cos \alpha + f|g - \frac{\mu}{m}\epsilon_2 \sin \alpha|; \quad \bar{a} = \frac{\mu}{m}\epsilon_2 \cos \alpha - f|g - \frac{\mu}{m}\epsilon_2 \sin \alpha|.$$

Рассмотрим промежуток времени $0 \leq t \leq T_*$, в течение которого тело 1 движется в направлении v_0 . Из (10) следует, что

$$\dot{x} = -at + C = -at + v_0, \quad (12)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия: при $t = 0$

$$\dot{x}_0 = v_0. \quad (13)$$

При $t = T_*$ скорость тела 1 обращается в ноль, поэтому

$$T_* = v_0/a. \quad (14)$$

Для дальнейшего решения необходимо сравнить найденную величину T_* с величиной $T = \omega_{20}\epsilon_2$.

Если окажется, что $T_* > T$, то искомая скорость v_T может быть найдена по формуле (12) при $t = T$.

Если $T_* = T$, то очевидно, что $v_T = 0$, т. е. движение всех тел в системе прекращается одновременно при $t = T$.

Если $T_* < T$, то тело 1 либо останавливается при $t = T_*$ ($v_1 = 0$ при любом $t > T_*$), либо начинает двигаться в обратном направлении. Первая из этих возможностей реализуется при $\bar{a} = 0$, а вторая — при $\bar{a} > 0$. Справедливость этих утверждений вытекает из дифференциального уравнения (11).

В рассматриваемом примере

$$a = 57,92 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a} = 47,60 \text{ м/с}^2; \\ T_* = 0,0346 \text{ с}; \quad T = 0,04 \text{ с},$$

т. е. $T_* < T$ и $\bar{a} > 0$. Следовательно, тело 1 начинает при $t = T_*$ двигаться в обратную сторону. Это движение описывается дифференциальным уравнением (11) при начальном условии: при $t = T_*$

$$\dot{x} = 0. \quad (15)$$

Интегрируя (11) с учетом (15), получим при $T_* \leq t \leq T$

$$\dot{x} = -\bar{a}(t - T_*). \quad (16)$$

При $t = T$ получим из (16) искомое значение скорости тела 1 в момент, когда $\omega_2 = 0$:

$$v_{tx} = \dot{x}(T) = -\bar{a}(T - T_*); \quad v_{tx} = -0,26 \text{ м/с}.$$

Интересно сопоставить этот результат со скоростью v_x , вычисленной при отсутствии силы трения. В этом случае надо положить во всех выкладках $f = 0$. В результате вычислений будем иметь $v_{tx} = -0,11 \text{ м/с}$, что в два раза меньше, чем в системе с трением.

б) На механическую систему помимо перечисленных в предыдущем пункте внешних сил действует сила «вязкого» трения R .

Точное решение задачи. Воспользовавшись методикой, изложенной в п. а), получим дифференциальное уравнение движения тела 1:

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} = -a \quad \text{при } \dot{x} > 0; \quad (17)$$

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} = -\bar{a} \quad \text{при } \dot{x} < 0, \quad (18)$$

где $\beta = b/m$ ($\beta = 0,526 \text{ рад/с}$).

Из (17) и начальных условий (13) следует, что при $0 \leq t \leq T_*$

$$\dot{x} = (v_0 + a/\beta)e^{-\beta t} - a/\beta,$$

откуда

$$T_* = \frac{1}{\beta} \ln(v_0 \beta / a + 1),$$

или

$$T_* = 0,0343 \text{ с}.$$

Из (18) и начальных условий (15) получаем при $T_* \leq t \leq T$:

$$\dot{x} = (\bar{a}/\beta)[e^{-\beta(t-T_*)} - 1]. \quad (19)$$

При $t = T$ из (19) находим

$$v_{tx} = -0,27 \text{ м/с}.$$

Приближенное решение задачи*. Воспользуемся теоремой об изменении количества движения механической системы в конечной форме для промежутков времени $0 \leq t \leq T_*$ и $T_* \leq t \leq T$:

$$\left. \begin{aligned} K_{x*} - K_{x0} &= \sum S_{ix}^E; & K_{y*} - K_{y0} &= \sum S_{iy}^E; \\ K_{xT} - K_{x*} &= \sum \bar{S}_{ix}^E; & K_{yT} - K_{y*} &= \sum \bar{S}_{iy}^E, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где $\sum S_{ix}^E$, $\sum S_{iy}^E$, $\sum \bar{S}_{ix}^E$, $\sum \bar{S}_{iy}^E$ — сумма проекций импульсов внешних сил на координатные оси соответственно за первый и второй промежутки времени.

Очевидно, что проекции количества движения системы равны

$$\left. \begin{aligned} K_{x0} &= mv_{0x} - \mu\omega_{20} \sin \alpha; \\ K_{y0} &= \mu\omega_{20} \sin \alpha; \\ K_{x*} &= -\mu\omega_{2*} \cos \alpha; \\ K_{y*} &= \mu\omega_{2*} \sin \alpha; \\ K_{xT} &= mv_{Tx}; \\ K_{yT} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где ω_{2*} — угловая скорость тела 2 при $t = T_*$.

Если предположить, что $N = \text{const}$, то проекции импульсов внешних сил примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sum S_{ix}^E &= -\int_0^{T_*} b\dot{x} dt - \int_0^{T_*} f|N|dt = -bx_* - f|N|T_*; \\ \sum S_{iy}^E &= -(G_1 + G_2 + G_3)T_* + NT_*; \\ \sum \bar{S}_{ix}^E &= -\int_{T_*}^T b\dot{x} dt + f \int_{T_*}^T |N|dt = -b(x_T - x_*) + f|N|(T - T_*); \\ \sum \bar{S}_{iy}^E &= -(G_1 + G_2 + G_3)(T - T_*) + N(T - T_*), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где x_* ; x_T — смещения тела 1 соответственно за T_* и T с.

Подставим (21) и (22) в (20):

$$-\mu\omega_{2*} \cos \alpha - mv_{0x} + \mu\omega_{20} \cos \alpha = -bx_* - f|N|T_*; \quad (23)$$

$$(\omega_{2*} - \omega_{20})\mu \sin \alpha = -(G_1 + G_2 + G_3)T_* + NT_*; \quad (24)$$

$$mv_{Tx} + \mu\omega_{2*} \cos \alpha = -b(x_T - x_*) + f|N|(T - T_*); \quad (25)$$

$$-\mu\omega_{2*} \sin \alpha = -(G_1 + G_2 + G_3)(T - T_*) + N(T - T_*). \quad (26)$$

* Порядок приближенного решения задачи для условия а) такой же.

Выразим из уравнений (24) и (26) соответственно NT_* и $N(T-T_*)$ и подставим эти результаты в (23) и (25):

$$-\mu\omega_{2*} \cos \alpha - mv_{0x} + \mu\omega_{20} \cos \alpha = -bx_* - f[(G_1 + G_2 + G_3)T_* + (\omega_{2*} - \omega_{20})\mu \sin \alpha]; \quad (27)$$

$$mv_{tx} + \mu\omega_{2*} \cos \alpha = -b(x_T - x_*) + f[(G_1 + G_2 + G_3)(T - T_*) - \mu\omega_2 \sin \alpha]. \quad (28)$$

Текущая координата x , описывающая поступательное движение тела 1, является некоторой функцией времени t . Разложим $x = x(t)$ в ряд Маклорена по степеням t :

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \dots$$

Так как $x_0 = 0$, а $t \leq T$, где T — малая величина, то, пренебрегая величинами первого и более высоких порядков малости относительно T , мы тем самым пренебрегаем смещением тела 1 за любой промежуток времени, меньший T , т. е.

$$x_* \approx 0 \text{ и } x_T \approx 0.$$

Из тех же соображений следует в (27) и (28) пренебречь слагаемыми $(G_1 + G_2 + G_3)T_*$ и $(G_1 + G_2 + G_3)(T - T_*)$.

С учетом сказанного строгие равенства (27) и (28) переходят в более простые приближенные:

$$-\mu\omega_{2*} \cos \alpha - mv_{0x} + \mu\omega_{20} \cos \alpha \approx -f(\omega_{20} - \omega_{2*})\mu \sin \alpha; \quad (29)$$

$$mv_{tx} + \mu\omega_{2*} \cos \alpha \approx f\omega_{2*}\mu \sin \alpha. \quad (30)$$

Из (29) определяем ω_{2*} , а из (30) — v_{tx} :

$$\omega_{2*} \approx \omega_{20} - mv_{0x}/[\mu(\cos \alpha + f \sin \alpha)]; \quad (31)$$

$$v_{tx} \approx \omega_{2*}(\mu/m)(f \sin \alpha - \cos \alpha). \quad (32)$$

Произведя вычисления по формулам (31) и (32), будем иметь $v_{tx} \approx -0,31$ м/с. Этот результат приемлемо согласуется с полученным выше точным.

Задача Д.9. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела

Тело H массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом в точке O желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A , отсчитываемом вдоль желоба, закреплена материальная точка K массой m_2 . В некоторый момент времени ($t = 0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ действие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент $t = \tau$.

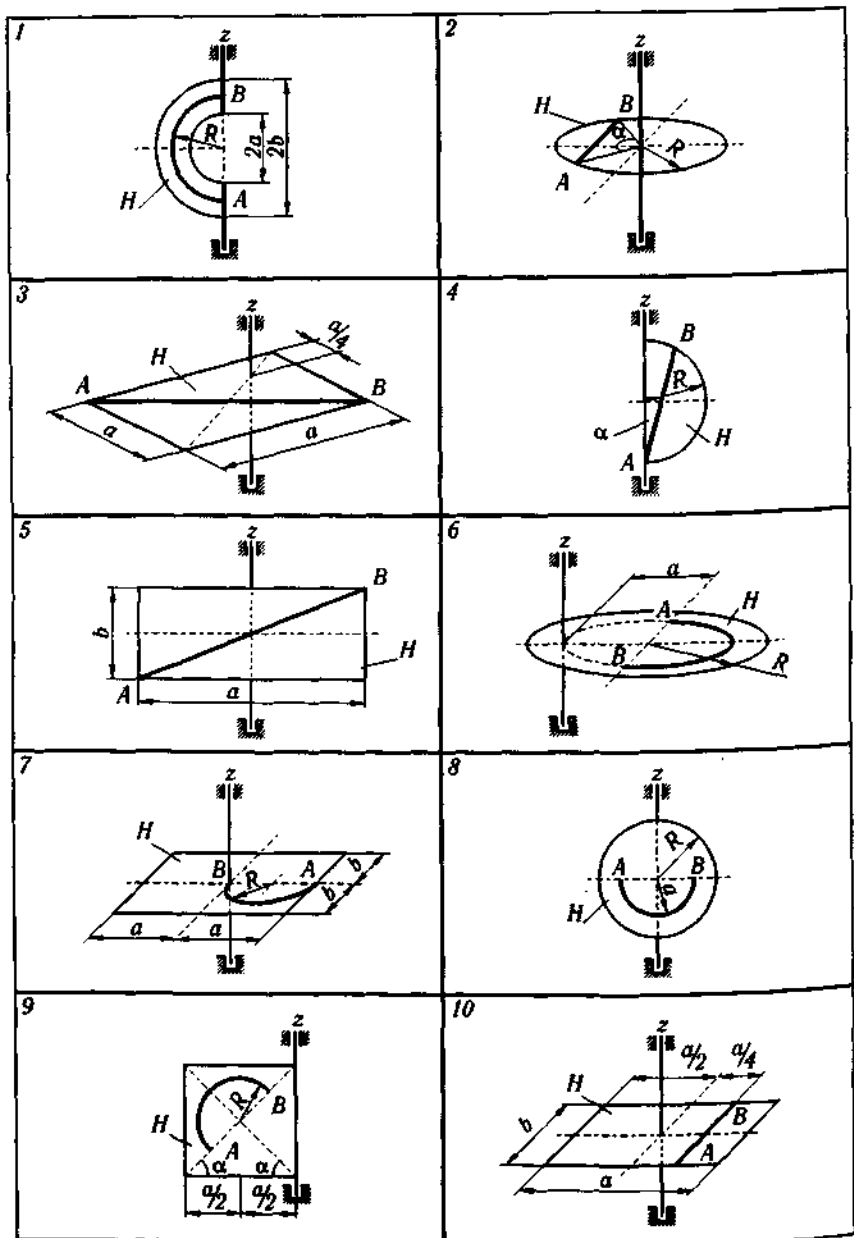


Рис. 148

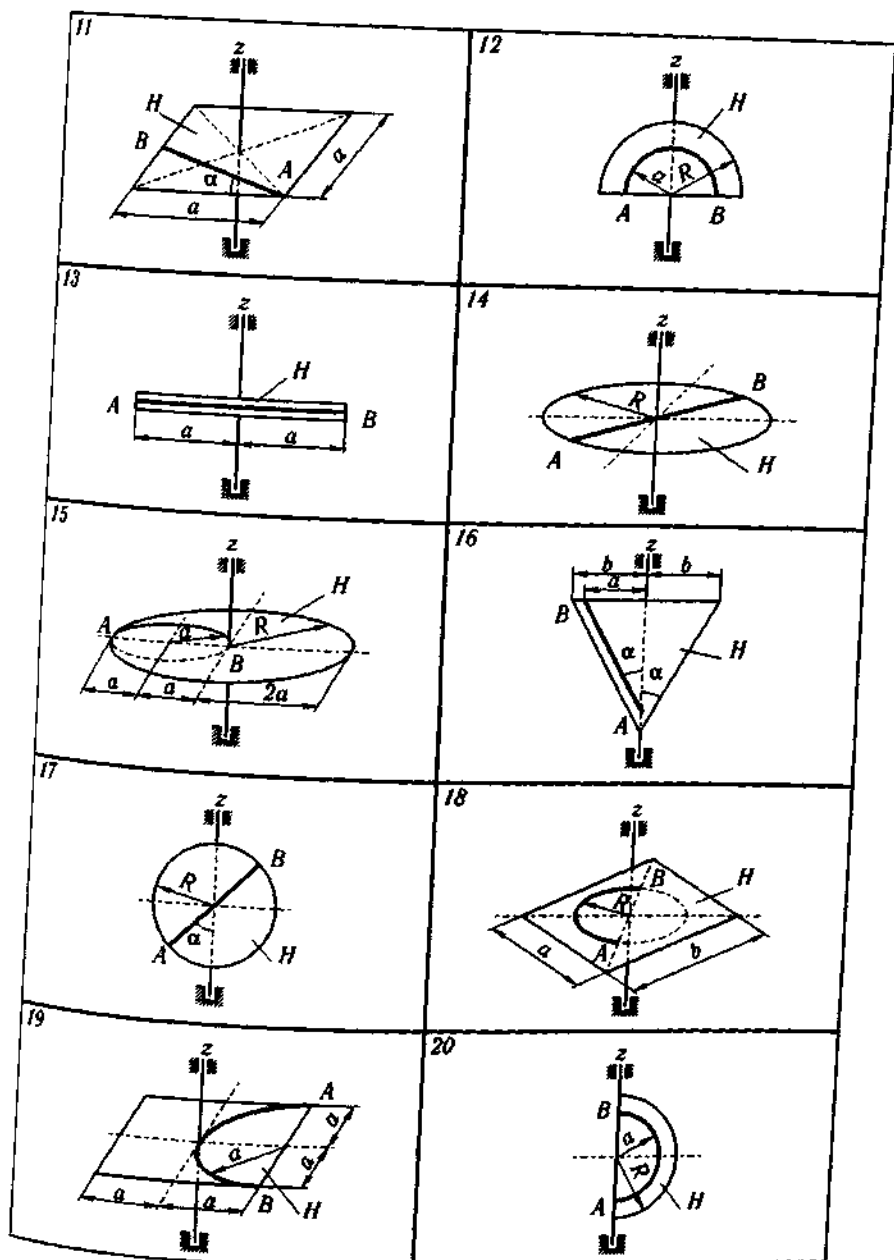


Рис. 149

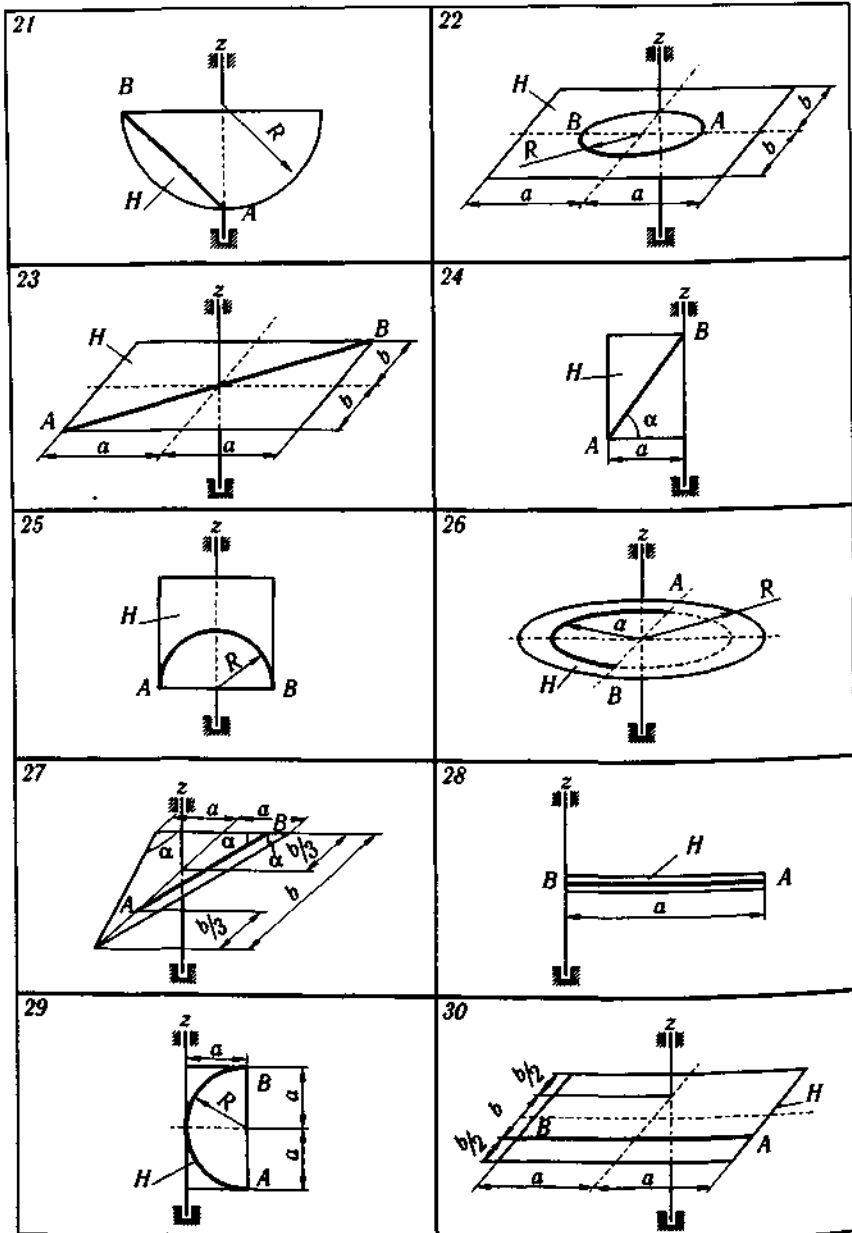


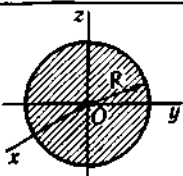
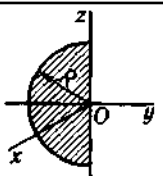
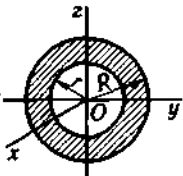
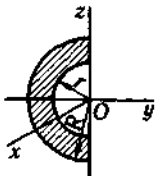
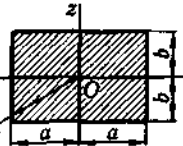
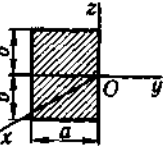
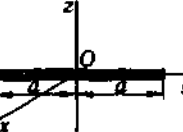
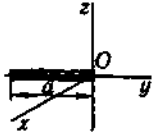
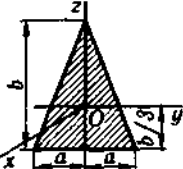
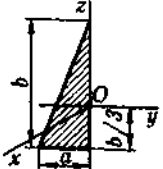
Рис. 150

Таблица 45

Номер варианта (рис. 148-150)	m_1	m_2	ω_0	a	b	R	α	AO	$M_z = M_z^*(t)$	τ	$OK = s = s(t_1)$	T
	кг		рад/с	м	м	м	град	м	Н·м	с		с
1	32	10	-1	1	1,5	1,2	-	$\pi R/6$	$-29,6t^2$	3	$(5\pi R/12)t_1$	1
2	200	60	-2	-	-	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	$\sqrt{3}t_1^2$	1
3	120	40	0	2	-	-	-	0	$-120t$	4	$(\sqrt{2}/4)t_1^2$	2
4	16	5	-3	-	-	1	30	0,4	$21t$	2	$0,6t_1$	2
5	66	10	1,5	2	1,5	-	-	0	$15\sqrt{t}$	4	$0,5t_1$	2,5
6	160	80	-1,25	1,5	-	2,5	-	$\pi a/6$	$-700t$	$\sqrt{3}$	$(5\pi a/18)t_1^2$	$\sqrt{3}$
7	300	50	-2	1,6	1	0,8	-	0	968	1	$(\pi R/2)t_1^2$	1
8	80	20	0	1,2	-	2	-	$\pi a/2$	$240\sqrt{t}$	4	$(\pi a/4)t_1$	2
9	20	5	5	1,2	-	0,4	45	$\pi R/4$	$-29,2t$	3	$(3\pi R/4)t_1^2$	1
10	100	40	2	2	$\sqrt{2}$	-	-	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	$(\sqrt{2}/4)t_1^2$	1
11	60	20	-1	2	-	-	15	0	$40t$	2	$0,4t_1^2$	2
12	40	10	-3	1	-	2	-	0	$50t^2$	3	$(\pi a/3)t_1$	2
13	24	4	4	1	-	-	-	0,5	$-27\sqrt{t}$	1	$0,3t_1$	2
14	40	10	2	-	-	1	-	0	$120t$	1	$0,5t_1$	3
15	120	50	-4	1	-	2	-	0	$330t^2$	2	$(\pi a/2)t_1^2$	1
16	60	10	-5	1	1,2	-	30	0,4	74	2	$0,3t_1^2$	$\sqrt{2}$
17	50	10	-2	-	-	1,6	30	0,6	$69t$	4	$0,6t_1$	2
18	120	50	3	2	3	0,8	-	$\pi R/2$	324	3	$(\pi R/8)t_1^2$	2
19	90	30	1	1,5	-	-	-	0	$-135t$	2	$(\pi a/4)t_1^2$	1
20	50	12	3	1	-	1,2	-	$\pi a/6$	$-14t^2$	3	$(\pi a/12)t_1^2$	2
21	40	10	-6	-	-	1	-	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	$(\sqrt{2}/16)t_1^2$	2
22	150	50	-1	1,6	1,2	0,6	-	$\pi R/2$	163	4	$(\pi R/2)t_1^2$	1
23	90	20	2	$\sqrt{2}$	1	-	-	$\sqrt{3}/2$	-210	2	$(\sqrt{3}/2)t_1$	1
24	50	12	-3	0,6	-	-	60	0,2	$27t^2$	2	$0,4t_1$	2
25	36	8	-5	-	-	0,5	-	0	$20t$	2	$(\pi R/6)t_1^2$	2
26	150	40	-4	1,5	-	2	-	$\pi a/6$	$1170\sqrt{t}$	1	$(\pi a/2)t_1^2$	1
27	120	30	0	1	-	-	60	0	-25t	2	t_1^2	1
28	15	4	-2	0,6	-	-	-	0,1	$5,6t$	3	$0,4t_1$	1
29	20	5	5	0,6	-	0,6	-	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	$(5\pi R/6)t_1$	1
30	150	50	0	1,6	1,2	-	-	1,6	$652t$	2	$0,2t_1^2$	2

Примечание. Знак минус перед M_z и ω соответствует направлению вращения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z .

Осевые моменты инерции однородных пластинок

	J_x	J_y	J_z	
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{2}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_T .

В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 — новое начало отсчета времени) точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B) по закону $OK = s = s(t_1)$.

Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1 = T$.

Тело H рассматривать как однородную пластинку, имеющую форму, показанную на рис. 148—150. Необходимые для решения данные приведены в табл. 45—46.

Пример выполнения задания (рис. 151). Дано: $m_1 = 200$ кг; $m_2 = 80$ кг; $M_z = 592$ Н·м; $\omega_0 = -2$ рад/с; $AO = 0,8$ м; $R = 2,4$ м; $a = 1,2$ м; $t = \tau = 4$ с; $OK = s = 0,5t_1^2$ м; $t_1 = T = 2$ с.

Определить ω_τ и ωT , считая тело H однородной круглой пластинкой.

Решение. К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы, выраженную уравнением

$$dL_z/dt = \sum M_{iz}^E,$$

где L_z — кинетический момент системы, состоящей в данном случае из тела H и точки K , относительно оси z ;

$\sum M_{iz}^E = M_z^E$ — главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси z .

На систему за время от $t = 0$ до $t = \tau$ действуют силы: вес $\vec{G}_1$ тела H , вес $\vec{G}_2$ точки K , пара сил с моментом M_z и реакции подпятника и подшипника (рис. 151, а).

Предположим, что вращение тела H происходит против вращения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z ; будем считать это направление положительным при определении знаков кинетических моментов.

Найдем выражение кинетического момента L_z системы, который складывается из кинетического момента тела $J_z\omega$ и момента количества движения точки K , находящейся в точке O тела H и имеющей скорость $v = \omega \cdot O_1O$:

$$m_2 v \cdot O_1O = m_2 \omega \cdot O_1O^2.$$

Таким образом,

$$L_z = J_z\omega + m_2\omega \cdot O_1O^2 = (J_z + m_2 \cdot O_1O^2)\omega.$$

Главный момент внешних сил равен вращающему моменту M_z , так как другие силы момента относительно оси z не создают.

Уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента, примет вид

$$\frac{d[(J_z + m_2 \cdot O_1O^2)\omega]}{dt} = M_z; \quad (1)$$

где $M_z = ct$ ($c = 592$ Н·м/с).

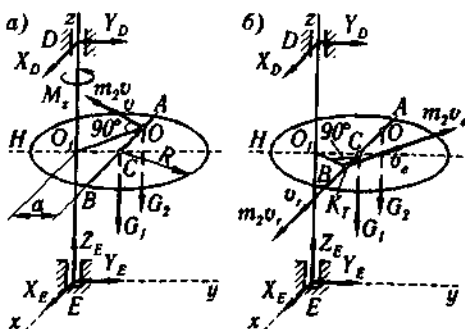


Рис. 151

Разделим в уравнении (1) переменные и проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$(J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \int_{\omega_0}^{\omega_r} d\omega = \int_0^T ct dt.$$

Тогда

$$(J_z + m_2 \cdot O_1 O^2)(\omega_r - \omega_0) = ct^2/2. \quad (2)$$

Найдем числовые значения входящих в уравнение (2) величин.

Момент инерции тела H относительно оси z найдем, используя теорему о зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$J_z = J_{zC} + m_1 a^2,$$

где J_{zC} — момент инерции тела H — однородной круглой пластинки относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс тела параллельно оси z :

$$J_{zC} = m_1 R^2/2.$$

Тогда

$$J_z = m_1 R^2/2 = m_1 a^2,$$

т. е.

$$J_z = 864 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Из чертежа (рис. 151, б) находим

$$(O_1 O^2) = (OC)^2 + (O_1 C)^2, \text{ или } (O_1 O)^2 = 4 \text{ м}^2,$$

поэтому

$$J_z + m_2 \cdot O_1 O^2 = 864 + 80 \cdot 4 = 1184 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким образом, из уравнения (2)

$$1184[\omega_r - (-2)] = 592 \cdot 4^2/2$$

имеем

$$\omega_r = 2 \text{ рад/с.}$$

После прекращения действия момента M_z тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_r ; при этом к системе приложены силы $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, реакции подпятника и подшипника (рис. 151, б).

Те же внешние силы действуют на систему и в течение промежутка времени от $t_1 = 0$ до $t_1 = T$ при движении самоходной тележки.

Уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента системы, имеет для этого периода времени вид

$$dL_z/dt = 0,$$

т. е.

$$L_z = \text{const.}$$

Определим значения кинетических моментов L_{z0} при $t_1 = 0$ и L_{zT} при $t_1 = T$ и приравняем эти значения.

Для $t_1 = 0$

$$L_{z0} = (J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \omega_T = 2368 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

При $t_1 > 0$ скорость точки K складывается из относительной скорости $\vec{v}_r$ по отношению к телу H и переносной скорости $\vec{v}_e$ в движении вместе с телом H . Поэтому для $t_1 = T$ покажем два вектора количества движения точки: $m_2 \vec{v}_r$ и $m_2 \vec{v}_e$ (рис. 151).

Для $t_1 = T$

$$L_{zT} = J_z \omega_T + m_2 \omega_T (O_1 K_T)^2 + m_2 v_r \cdot O_1 C.$$

Найдем

$$(O_1 K_T)^2 = (O_1 C)^2 + (CK_T)^2,$$

где

$$CK_T = OK_T - OC, \quad OK_T = s_{t_1=T} = 0,5T^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2 \text{ м},$$

т. е.

$$CK_T = 2 - 1,6 = 0,4 \text{ м}, \quad (O_1 K_T)^2 = 1,2^2 + 0,4^2 = 1,6 \text{ м}^2.$$

Относительная скорость

$$v_r = ds/dt = t_1,$$

при $t_1 = T = 2 \text{ с}$

$$v_r = 2 \text{ м/с}.$$

Поэтому

$$L_{zT} = 864\omega_T + 80\omega_T \cdot 1,6 - 80 \cdot 2 \cdot 1,2 = 992\omega_T - 192.$$

Приравнявая L_{z0} и L_{zT} :

$$2368 = 992\omega_T - 192,$$

находим

$$\omega_T = 2,58 \text{ рад/с}.$$

Зада н и е Д.10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 152—154. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами

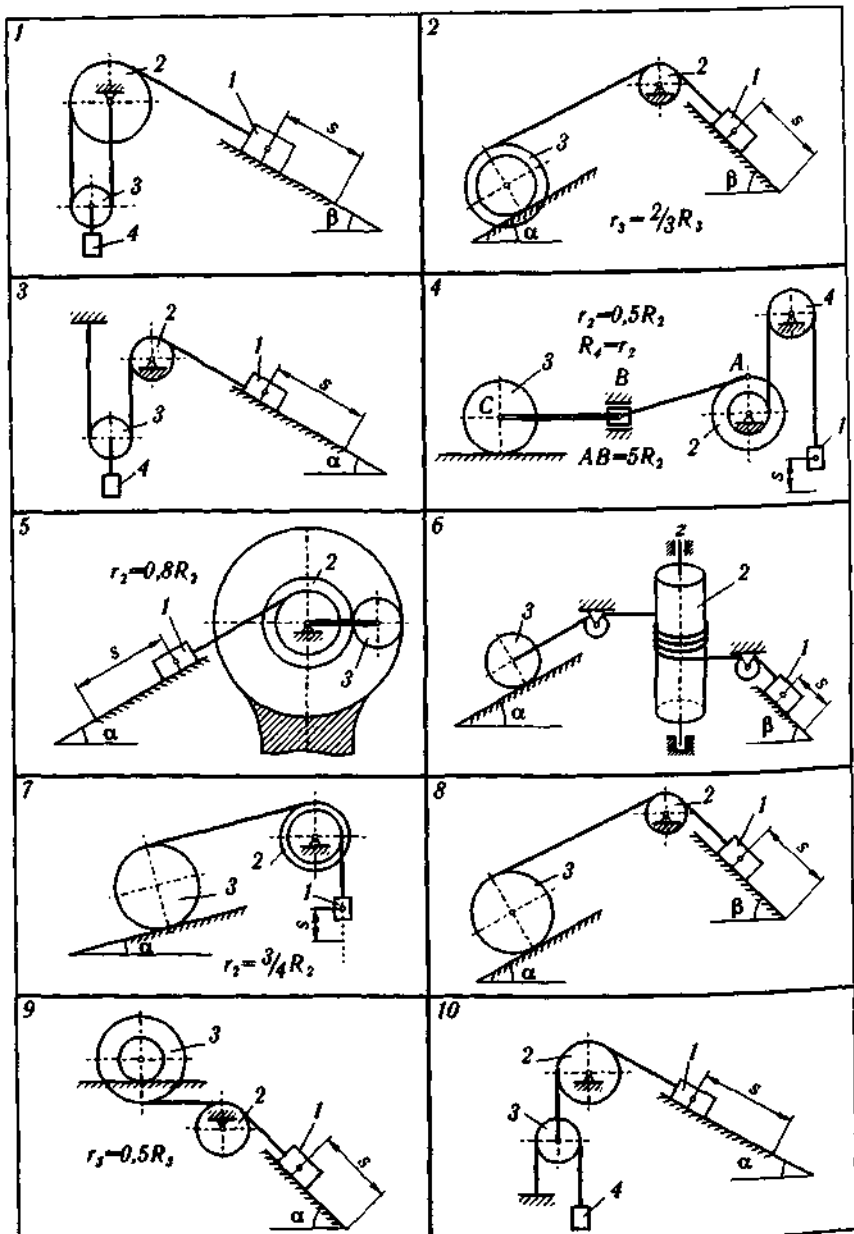


Рис. 152

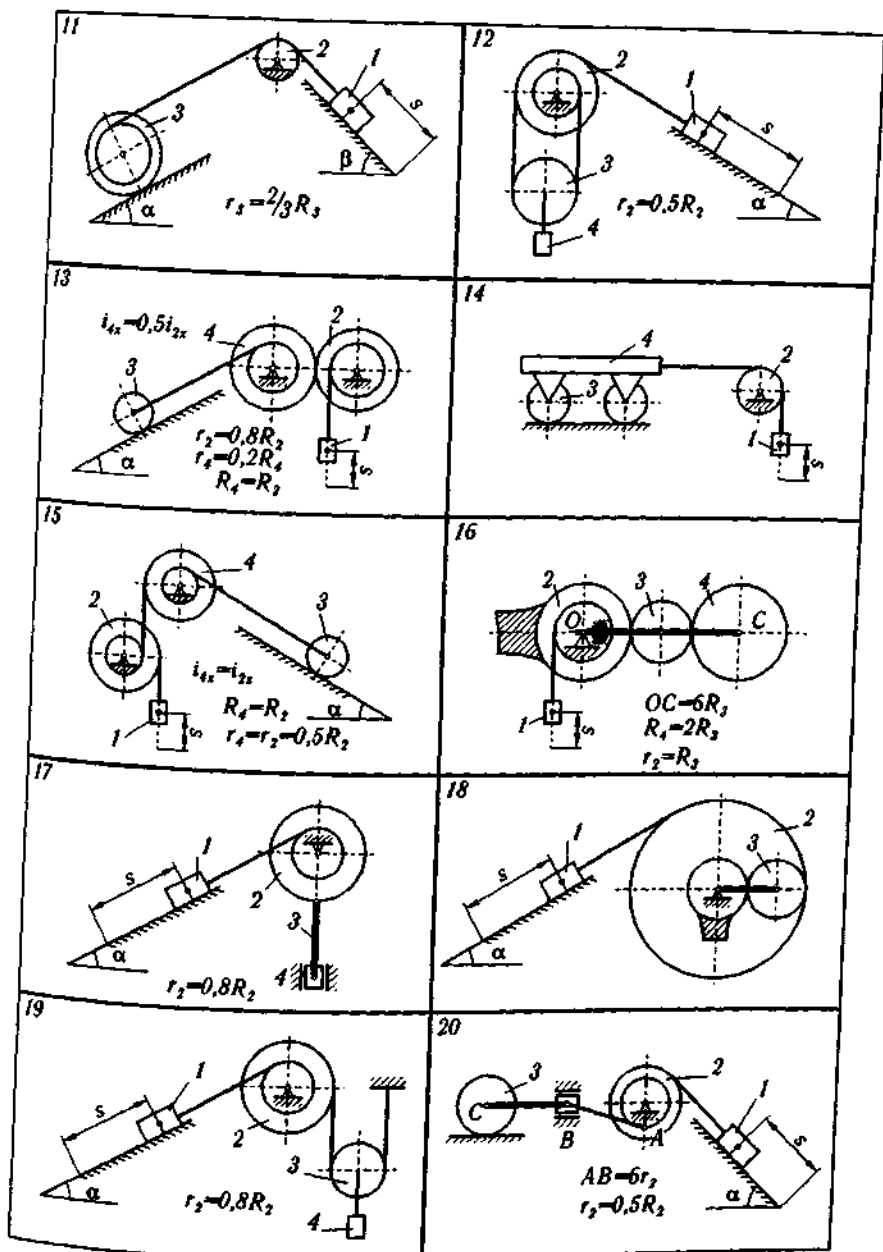


Рис. 153

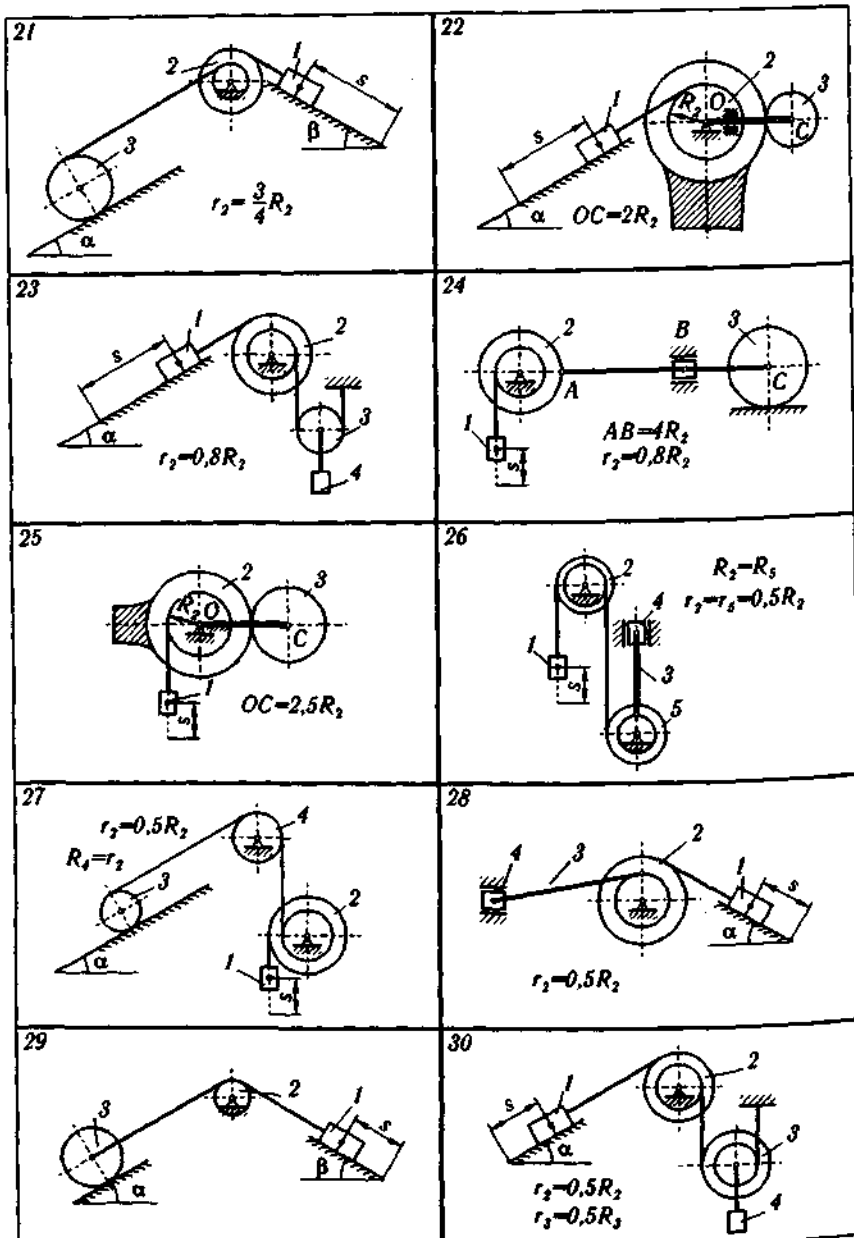


Рис. 154

нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела I в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, i_{3x} — радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; t — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 47. Блоки в катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 — масса груза 1, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0,5m_1$, $m_5 = 20m_1$, $R_2 = R_3 = 12$ см, $r_2 = 0,5R_2$, $r_3 = 0,75R_3$, $R_5 = 20$ см, $AB = l = 4R_3$, $i_{2x} = 8$ см, $i_{3x} = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0,1$, $\delta = 0,2$ см, $s = 0,06$ м. Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Шатун 4 считать тонким однородным стержнем; каток 5 — однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5 и ползуна B пренебречь. На рис. 155, а показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 — скорость груза 1 в конечном положении.

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (1)$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ — сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_i^J = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил надо изобразить систему в конечном положении (рис. 155, б, в).

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т. е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорости и перемещения груза 1.

Таблица 47

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	m_4	кг				см				град		f	δ , см	s , м	Примечание
	R_2	R_3	t_{23}	t_{34}	α	β												
	t_1	t_2	t_3	t_4														
1	m	4m	1/5m	4/3m	-	-	-	-	-	60	0,10	-	2	Массами звеньев АВ, ВС и пол- зуна В пренебречь Массой волила пренебречь				
2	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	20	30	45	0,22	0,20	2					
3	m	m	1/10m	m	-	-	-	-	-	45	-	0,10	2					
4	m	2m	40m	m	20	40	18	-	-	-	-	0,30	0,1π					
5	m	2m	m	-	20	15	18	-	-	60	-	0,12	-	0,28π	Массой волила пренебречь			
6	m	3m	m	-	-	28	-	-	30	45	0,10	0,28	1,5					
7	m	2m	2m	-	16	25	14	-	30	-	-	0,20	2					
8	m	1/2m	1/3m	-	-	30	-	-	30	45	0,15	0,20	1,75					
9	m	2m	9m	-	-	30	-	20	30	-	0,12	0,25	1,5	Массы каждого из четырех колес одинаковы				
10	m	1/4m	1/4m	1/5m	-	-	-	-	-	60	-	0,10	3					
11	m	1/2m	1/4m	-	-	30	-	25	30	45	0,17	0,20	2,5					
12	m	1/2m	1/5m	m	30	-	20	-	30	-	0,20	-	2,5					
13	m	2m	5m	2m	30	20	26	-	-	30	-	-	2	Массой волила пренебречь Шатуны 3 рассматривать как тонкий однородный стержень				
14	m	1/2m	5m	4m	-	25	-	-	-	-	-	0,24	2					
15	m	1/2m	4m	1/2m	20	15	18	-	-	60	-	0,25	1,5					
16	m	1/10m	1/20m	1/10m	10	12	-	-	-	-	-	-	0,05π					
17	m	1/4m	1/5m	1/10m	20	-	15	-	-	60	-	0,10	0,16π					

группирование табл. 47

Номер варианта (рис. 152-154)	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	R_3	i_{23}	i_{34}	α	β	f	δ , см	δ , м	Примечание
	кг				см			град							
	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	R_3	i_{23}	i_{34}	α				β	
18	т	3т	т	-	35	15	32	-	60	-	-	0,15	-	0,2π	Массой водила пренебречь
19	т	1/3т	1/10т	т	24	-	20	-	60	-	-	0,15	-	1,5	Массами звеньев АВ, ВС и ползу- на В пренебречь
20	т	2т	20т	-	20	15	16	-	30	-	-	0,10	0,20	0,2π	
21	т	т	2т	-	20	20	16	-	30	45	0,20	0,32	1,2		
22	т	1/2т	1/4т	-	20	10	-	-	60	-	-	0,17	-	0,1π	Массой водила пренебречь
23	т	т	1/10т	4/5т	20	-	18	-	30	-	-	0,10	-	1	Массами звеньев АВ, ВС и ползу- на В пренебречь
24	т	3т	20т	-	20	30	18	-	-	-	-	-	0,60	0,08π	
25	т	1/3т	1/4т	-	16	20	-	-	-	-	-	-	-	0,04π	Массой водила пренебречь
26	т	1/2т	т	1/3т	30	-	20	-	-	-	-	-	-	0,6π	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы
27	т	т	6т	1/2т	20	20	16	-	30	-	-	-	0,20	2	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
28	т	2т	3т	-	20	-	14	-	60	-	-	0,10	-	0,1π	
29	т	1/4т	1/8т	-	-	35	-	-	15	30	0,20	0,20	2,4	2	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
30	т	1/2т	3/10т	3/2т	26	20	20	18	30	-	-	0,12	-	2	

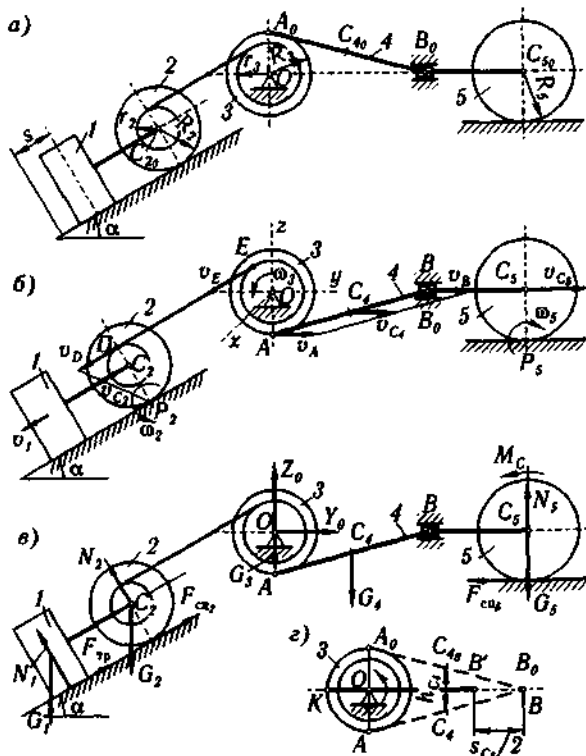


Рис. 155

Скорость центра масс C катка 2 равна скорости груза 1:

$$v_{C2} = v_1. \quad (3)$$

Угловая скорость катка 2, мгновенный центр скоростей которого находится в точке P_2 ,

$$\omega_2 = v_{C2} / (C_2 P_2).$$

Учитывая (3), получим

$$\omega_2 = v_1 / R_2. \quad (4)$$

Скорость точки D катка 2

$$v_D = \omega_2 \cdot DP_2,$$

т. е.

$$v_D = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Скорость точки E блока 3 равна скорости точки D катка 2:

$$v_E = v_D. \quad (5)$$

по

$$v_E = \omega_3 r_3.$$

Следовательно,
по (5),

$$\omega_3 r_3 = \frac{v_1}{R_2} (R_2 + r_2).$$

Так как

$$R_2 = 2r_2,$$

то

$$\omega_3 r_3 = 3/2 v_1,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{3 v_1}{2 r_3}. \quad (6)$$

Заменяя в формуле (6)

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}, \quad v_1 = \frac{ds}{dt},$$

получим

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \frac{ds}{dt},$$

или

$$d\varphi_3 = \frac{3}{2r_3} ds.$$

После интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3}. \quad (7)$$

Когда груз 1 пройдет путь $s = 0,06\pi$ м, блок 3 повернется на угол φ_3 :

$$\varphi_3 = \frac{3}{2} \frac{s}{r_3} = \frac{3}{2} \frac{0,06\pi}{0,09} = \pi.$$

При этом повороте блока 3 на 180° его точка A_0 перейдет в конечное положение A и шатун 4 из начального положения $A_0 B_0$ перейдет в конечное положение AB .

Каток 5 переместится влево при повороте блока 3 на угол $\pi/2$ и вправо при повороте блока еще на $\pi/2$; значит, конечное положение катка 5 совпадает с его начальным положением.

Таким образом, конечное положение всей системы вполне определено (рис. 155, б).

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (8)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (9)$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2\xi} \omega_2^2}{2}, \quad (10)$$

где $J_{2\xi}$ — момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси $C_{2\xi}$:

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2. \quad (11)$$

Подставляя (3), (4), (11) в формулу (10), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2}{2R_2^2} v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2. \quad (12)$$

Кинетическая энергия тела 3, вращающегося вокруг оси Ox ,

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{3x} \omega_3^2, \quad (13)$$

где J_{3x} — момент инерции блока 3 относительно оси Ox :

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2. \quad (14)$$

Подставляя (6), (14) в формулу (13), получаем

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3}{2} \frac{v_1}{r_3} \right)^2 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2. \quad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение,

$$T_4 = \frac{m_4 v_{C4}^2}{2} + \frac{J_{4\xi} \omega_4^2}{2},$$

где v_{C4} — скорость центра масс C_4 шатуна 4; ω_4 — угловая скорость шатуна 4; $J_{4\xi}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_{4\xi}$.

Для определения v_{C4} и ω_4 найдем положение мгновенного центра скоростей шатуна 4. Так как скорости точек A и B в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна 4 находится в бесконечности; следовательно, угловая скорость шатуна в данный момент $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек параллельны и равны между собой. Таким образом, кинетическая энергия шатуна 4

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2 / 2, \quad (16)$$

где

$$v_{C4} = v_A. \quad (17)$$

Вращательная скорость точки A тела 3

$$v_A = \omega_3 R_3, \quad (18)$$

или с учетом (14)

$$v_A = 3/2 R_3 v_1 / r_3.$$

Поскольку $r_3 = 3/4 R_3$, получим

$$v_A = 2v_1.$$

По (17)

$$v_{C4} = v_A, \quad v_{C4} = 2v_1. \quad (19)$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетической энергии шагуна 4 принимает вид

$$T_4 = 1/2 m_4 (2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2. \quad (20)$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение,

$$T_5 = m_5 v_{C5}^2 / 2 + J_{5\epsilon} \omega_5^2 / 2,$$

где v_{C5} — скорость центра масс C_5 катка 5; $J_{5\epsilon}$ — момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной продольной оси $C_5\epsilon$, $J_{5\epsilon} = m_5 R_5^2 / 2$; ω_5 — угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5 . Поэтому

$$\omega_5 = v_{C5} / R_5.$$

Следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2 \cdot 2 R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 v_{C5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $v_{C5} = v_B$, но $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Значит, $v_{C5} = 2v_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид

$$T_5 = 3/4 m_5 (2v_1)^2 = 3m_5 v_1^2. \quad (21)$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (8) с учетом (9), (12), (15), (20), (21):

$$T = m_2 v_1^2 / 2 + m_2 (1 + i_{2\epsilon}^2 / R_2^2) v_1^2 / 2 + 9/8 m_3 v_1^2 i_{3x}^2 / r_3^2 + 2m_4 v_1^2 + 3m_5 v_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = m_1 v_1^2 [1 + 2(1 + i_{2\epsilon}^2 / R_2^2) + 9/4 i_{3x}^2 / r_3^2 + 2 + 120] / 2,$$

или

$$T = 129 m_1 v_1^2 / 2. \quad (22)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. Покажем внешние силы, приложенные к системе (рис. 155, а).

Работа силы тяжести $\vec{G}_1$

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g s \sin \alpha. \quad (23)$$

Работа силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}} s.$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = f N_1 = f G_1 \cos \alpha,$$

то

$$A_{F_{\text{тр}}} = -f m_1 g s \cos \alpha. \quad (24)$$

Работа силы тяжести $\vec{G}_2$

$$A_{G_2} = G_2 h_{C_2} = m_2 g s \sin \alpha. \quad (25)$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{\text{сц}2}$, $\vec{F}_{\text{сц}5}$ катков 2 и 5 равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести $\vec{G}_4$

$$A_{G_4} = G_4 h_{C_4},$$

где h_{C_4} — вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рис. 155, з):

$$h_{C_4} = R_3,$$

$$A_{G_4} = m_4 g R_3. \quad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_C} = -M_C \varphi_5, \quad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ — момент пары сил сопротивления качению катка 5; φ_5 — угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота

$$\varphi_5 = s_{C_5} / R_5, \quad (28)$$

где s_{C_5} — перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и вправо:

$$s_{C_5} = 2(B_0 B'). \quad (29)$$

Определим перемещение $B_0 B'$ при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рис. 155, з). При этом повороте тела 3 шатун из положения $A_0 B_0$ перейдет в положение $K B'$. Тогда

$$B_0 B' = K B_0 - K B',$$

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},$$

$$KB' = l = 4R_3.$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1,76R_3/R_5. \quad (31)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27)

$$A_{Mc} = -\delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5. \quad (32)$$

Сумма работ внешних сил определится сложением работ, вычисляемых по формулам (23)—(26) и (32):

$$\sum A_i^E = m_1 g s \sin \alpha - f m_1 g s \cos \alpha + m_2 g s \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5.$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_i^E = m_1 g s \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1,76R_3}{R_5 s} \right),$$

или

$$\sum A_i^E = 1,51 m_1 g s. \quad (33)$$

Согласно теореме (2), приравняем значения T и $\sum A_i^E$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1,51 m_1 g s,$$

откуда

$$v_1 = 0,21 \text{ м/с.}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание Д.11. Исследование поступательного и вращательного движений твердого тела

Механическая система состоит из механизма (колес 1 и 2) и груза 3.

К колесу 1 приложена пара сил с моментом $M = M(t)$ (движущий момент) или движущая сила $P = P(t)$.

Время t отсчитывается от некоторого момента ($t = 0$), когда $\varphi_0 = 0$, а угловая скорость колеса 1 равна ω_{10} . Момент сил сопротивления ведомого колеса 2 равен M_c . Другие силы сопротивления движению системы не учитывать.

Массы колес 1 и 2 равны m_1 и m_2 , а масса груза 3 — m_3 .

Радиусы больших и малых окружностей колес R_1, r_1, R_2, r_2 .

Схемы механических систем показаны на рис. 156—158, а необходимые для решения данные приведены в табл. 48.

Найти уравнение движения тела системы, указанного в последней графе табл. 48.

Определить также натяжение нитей в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкосновение колес 1 и 2, найти, кроме того, окружное усилие в точке их касания. Колеса 1 и 2, для которых радиусы инерции i_{x_1} и i_{x_2} в табл. 48 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 100$ кг; $m_2 = 150$ кг; $m_3 = 400$ кг; $M = 4200 + 200t$ Н·м; $M_c = 2000$ Н·м = const; $R_1 = 60$ см; $R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см; $i_{x_1} = 20\sqrt{2}$ см; $i_{x_2} = 30$ см; $\omega_{10} = 2$ рад/с.

Найти уравнение $\varphi_2 = f(t)$ вращательного движения колеса 2 механизма, а также окружное усилие S в точке касания колес 1 и 2 и натяжение нити T в момент времени $t_1 = 1$ (рис. 159, а).

Решение. В данной механической системе колеса 1 и 2 механизма вращаются вокруг неподвижных осей, а поднимаемый груз 3 совершает поступательное движение.

Напишем дифференциальные уравнения движения каждого из этих трех тел, для чего отделим одно от другого, разрезав нить, удерживающую груз 3, и разъединив колеса 1 и 2 в точках соприкосновения зубцов (рис. 159, б).

К колесу 1 механизма приложены сила тяжести $\vec{G}_1$, движущий момент M , составляющие реакции подшипника $\vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, окружное усилие $\vec{S}_1$ и нормальная реакция $\vec{N}_1$ колеса 2.

К колесу 2 механизма приложены сила тяжести $\vec{G}_2$, момент сил сопротивления M_c , составляющие реакции подшипника $\vec{Y}_B, \vec{Z}_B$, натяжения $\vec{T}$ нити, к которой подвешен груз 3, окружное усилие $\vec{S}_2$ и нормальная реакция N_2 колеса 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести $\vec{G}_3$ и натяжение нити $\vec{T}'$. Очевидно,

$$\vec{S}_2 = -\vec{S}_1, \quad \vec{N}_1 = -\vec{N}_2 \quad \text{и} \quad \vec{T}' = -\vec{T}.$$

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 1 вокруг оси x_1 :

$$J_{x_1} \ddot{\varphi}_1 = M_{x_1}^E,$$

здесь $M_{x_1}^E = \sum M_{ix_1}^E$ — главный момент внешних сил, приложенных к колесу 1, относительно оси вращения x_1 :

$$\sum M_{ix_1}^E = M - S_1 R_1.$$

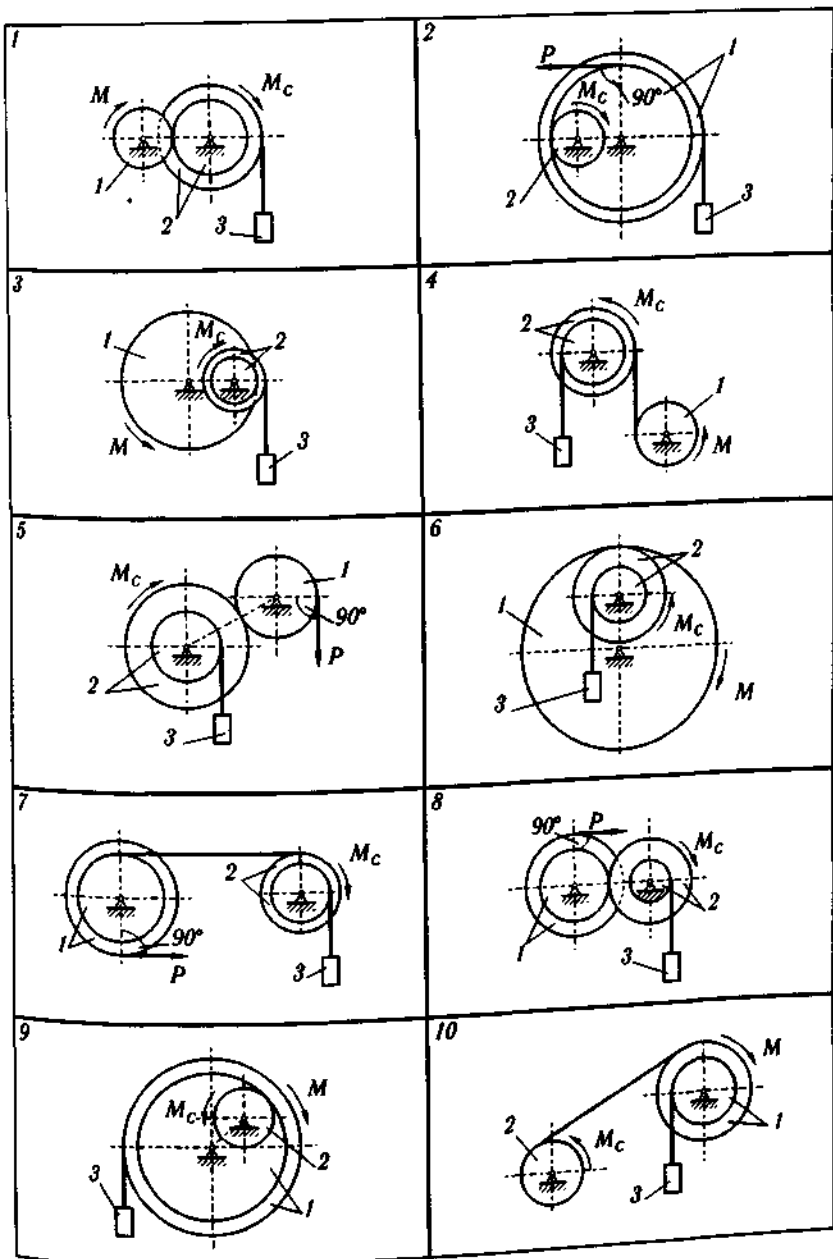


Рис. 156

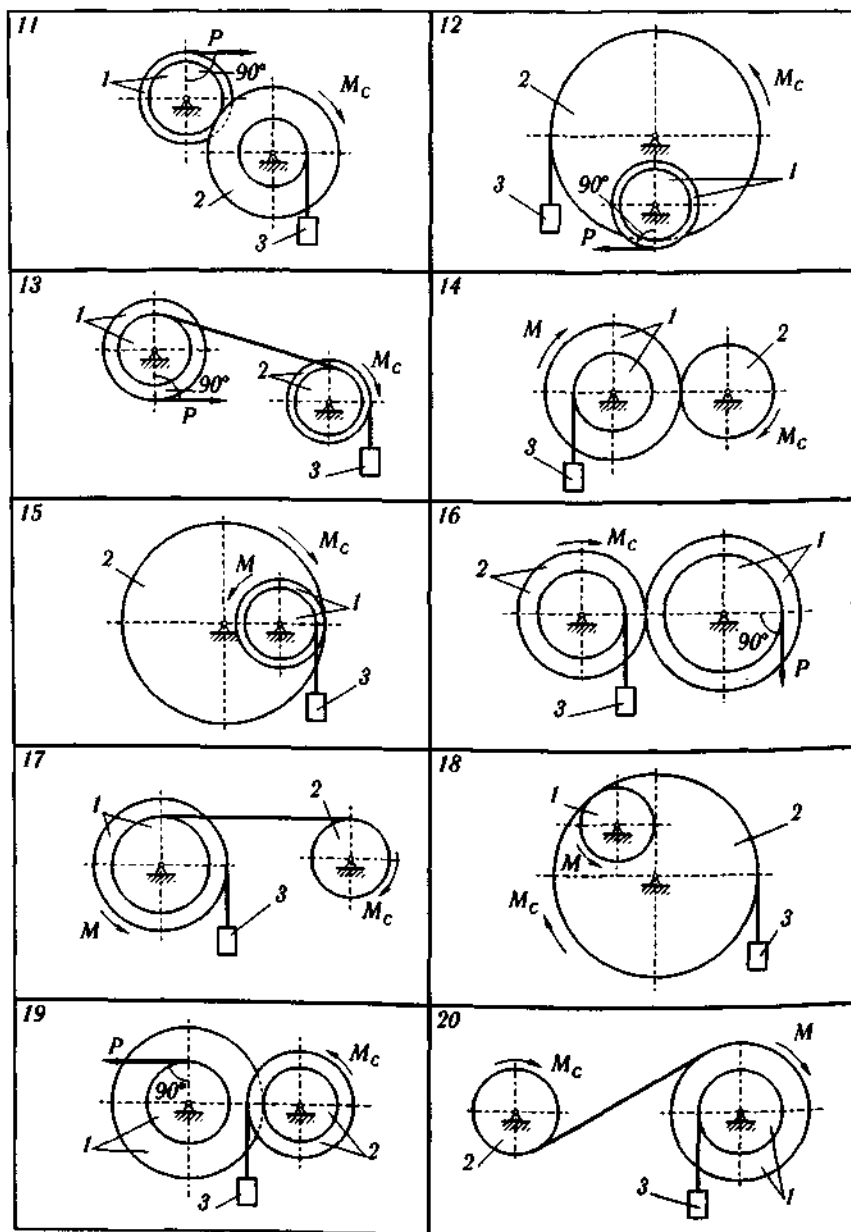


Рис. 157

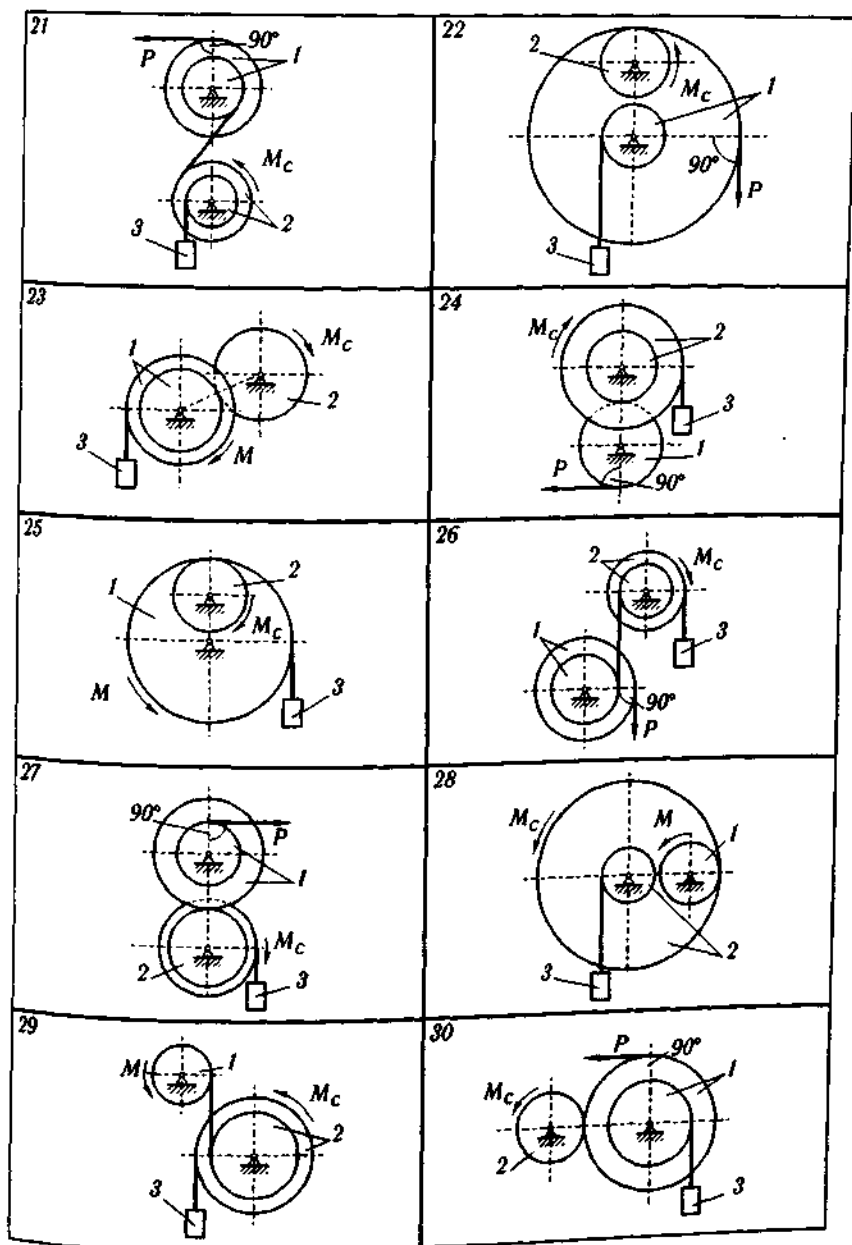


Рис. 158

Таблица 48

Номер варианта (рис. 156-158)	кг			R_1	r_1	R_2	r_2	см			M , Н·м	P , Н	M_C , Н·м	ω_{10} , рад/с	t_1 , с	Тело, для ко- торого нужно определить уравнение движения
	m_1	m_2	m_3					R_1	r_1	r_2						
1	100	300	500	20	-	60	40	50	-	50	2100+20t	-	1000	2	2	1
2	300	80	500	70	50	20	-	60	50	-	-	10200+100t	600	1	0,5	2
3	200	100	400	60	-	30	20	20 $\sqrt{2}$	60	20 $\sqrt{2}$	6100+20t	-	800	0,5	2,5	1
4	100	250	300	20	-	50	30	40	-	40	1000+40t	-	1400	1,5	2	1
5	150	300	600	30	-	50	20	30	-	30	-	5500+200t	1500	2	1	3
6	400	250	600	70	-	30	20	20 $\sqrt{2}$	70	20 $\sqrt{2}$	4800+10t	-	800	3	4	1
7	300	200	400	60	40	30	20	50	50	20	-	3000+100t	500	0	3	3
8	300	250	700	50	30	40	20	40	30	30	-	9700+50t	500	1	2	1
9	200	100	500	80	60	20	-	50 $\sqrt{2}$	-	-	5900+30t	-	600	2	3	2
10	250	100	400	40	20	30	-	30	30	-	2500+50t	-	1200	0	1,5	2
11	150	300	700	40	30	60	30	40	30	40	-	3900+50t	1000	1	2	1
12	100	200	600	30	20	60	-	20 $\sqrt{2}$	60	60	-	5700+50t	1500	2	2	1
13	180	100	300	50	40	30	20	30 $\sqrt{2}$	20	20	-	2700+200t	400	0,5	1	2
14	150	80	400	40	20	30	-	30	30	-	1800+20t	-	700	1,5	2,5	3
15	300	180	500	20	10	50	-	10 $\sqrt{2}$	50	50	700+40t	-	300	0	1,5	1

Номер варианта (рис. 156-158)	кг			см					M , Н·м	P , Н	M_C , Н·м	ω_{10} , рад/с	t_1 , с	Тело, для ко- торого нужно определить уравнение движения
	m_1	m_2	m_3	R_1	r_1	R_2	r_2	i_{x1}	i_{x2}					
16	300	250	400	60	40	50	30	50	40	7300+100t	1200	1	2	1
17	250	100	800	50	30	20	-	40	-	5400+50t	900	2	2	1
18	200	100	600	20	-	50	-	-	50	1900+20t	1500	0,5	1	2
19	250	150	400	50	30	30	20	40	$20\sqrt{2}$	14200+200t	500	0,5	2	1
20	400	100	800	50	20	30	-	40	-	3700+50t	1200	2	1	2
21	200	150	300	50	40	30	20	$30\sqrt{2}$	20	3800+100t	800	1	1,5	2
22	250	100	800	60	20	10	-	50	-	9700+200t	700	2	0,5	1
23	200	80	400	40	20	30	-	30	-	2300+20t	900	0,5	1	2
24	100	200	500	30	-	40	20	-	30	12600+100t	500	1,5	1	1
25	150	80	400	60	-	20	-	60	-	4900+40t	800	0	1,5	2
26	250	200	500	50	20	40	30	40	30	3500+150t	600	2	2	1
27	250	150	500	50	30	40	30	$30\sqrt{2}$	30	15200+100t	700	1,5	1	1
28	60	200	900	20	-	60	10	-	50	900+10t	1500	0	2	2
29	50	200	500	20	-	40	30	-	$25\sqrt{2}$	2100+20t	1000	2	0,5	1
30	300	60	600	50	30	20	-	40	-	7200+50t	700	1,5	1	2

Примечание. Радиусы инерции звеньев 1 и 2 i_{x1} и i_{x2} заданы относительно неподвижных осей этих звеньев.

(Момент M приводит в движение колесо 1 и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый окружным усилием $\vec{S}_1$, препятствует вращению колеса 1 и, следовательно, отрицателен.)

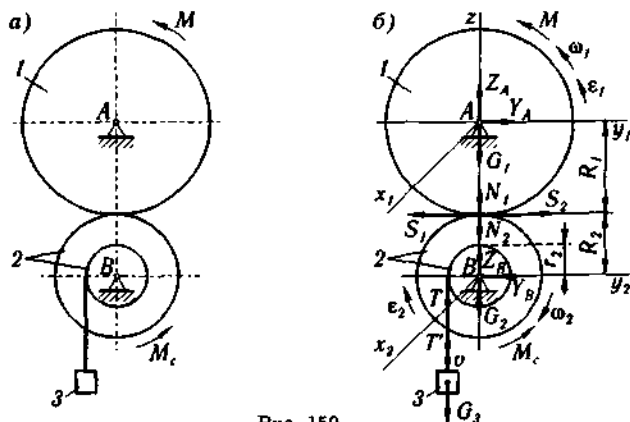


Рис. 159

Дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 1 примет вид

$$J_{x_1} \ddot{\varphi}_1 = M - S R_1. \quad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 2 вокруг оси x_2 :

$$J_{x_2} \ddot{\varphi}_2 = M_{x_2}^E.$$

Здесь $M_{x_2}^E = \sum M_{ix_2}^E$ — главный момент внешних сил, приложенных к колесу 2, относительно оси вращения x_2 :

$$\sum M_{ix_2}^E = S_2 R_2 - T r_2 - M_c.$$

(Момент, создаваемый окружным усилием $\vec{S}_2$, приводит в движение колесо 2 и поэтому принят положительным, а момент силы натяжения нити $\vec{T}$ и момент сил сопротивления M_c препятствуют движению колеса и, следовательно, отрицательны.)

Дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 2 имеет вид

$$J_{x_2} \ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - T r_2 - M_c. \quad (2)$$

Составим дифференциальное уравнение поступательного движения груза 3:

$$m_3 \ddot{z} = Z^E.$$

Здесь $Z^E = \sum Z_i^E$ — проекция главного вектора внешних сил, приложенных к грузу 3, на ось z , направленную в сторону движения груза, т. е. вверх:

$$\sum Z_i^E = T' - G_3.$$

Дифференциальное уравнение поступательного движения груза 3

$$m_3 \ddot{z} = T' - G_3. \quad (3)$$

В уравнениях (1), (2), (3) неизвестными являются силы $T' = T$ и $S_1 = S_2 = S$, а также функции $\ddot{\varphi}_1(t)$, $\ddot{\varphi}_2(t)$ и $\ddot{z}_3(t)$ — угловые ускорения колес 1, 2 и ускорение груза 3 соответственно.

Но указанные функции связаны между собой соотношениями

$$\ddot{\varphi}_1 / \ddot{\varphi}_2 = R_2 / R_1, \quad (4)$$

$$\ddot{z} = \ddot{\varphi}_2 r_2 \quad (5)$$

так, что в трех уравнениях — три неизвестные: T , S и $\ddot{\varphi}_2$.

Выразим $\ddot{\varphi}_1$ из (4):

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 R_2 / R_1$$

и подставим в (1):

$$J_{x_1} \ddot{\varphi}_2 R_2 / R_1 = M - S R_1. \quad (6)$$

Исключим из дифференциального уравнения (2) силу T , для чего выразим $T (T = T')$ из (3):

$$T = m_3 \ddot{z} + G_3.$$

Учитывая (5), напомним

$$T = m_3 \ddot{\varphi}_2 r_2 + G_3.$$

Тогда (2) приобретает вид

$$J_{x_2} \ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - (m_3 \ddot{\varphi}_2 r_2 + G_3) r_2 - M_c,$$

или

$$(J_{x_2} + m_3 r_2^2) \ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_c. \quad (7)$$

Исключим $S (S = S_1 = S_2)$ из (6) и (7), для чего умножим (6) на R_2 , а (7) — на R_1 :

$$J_{x_1} \ddot{\varphi}_2 R_2^2 / R_1 = M R_2 - S_1 R_1 R_2,$$

$$(J_{x_2} + m_3 r_2^2) \ddot{\varphi}_2 R_1 = S_2 R_2 R_1 - G_3 r_2 R_1 - M_c R_1.$$

Сложив соответствующие части полученных уравнений, имеем

$$\ddot{\varphi}_2 [J_{x_1} (R_2^2 / R_1) + J_{x_2} R_1 + m_3 r_2^2 R_1] = M R_2 - G_3 r_2 R_1 - M_c R_1,$$

откуда

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{M R_2 R_1 - (m_3 g r_2 + M_c) R_1^2}{J_{x_1} R_2^2 + (J_{x_2} + m_3 r_2^2) R_1^2}. \quad (8)$$

Выражение (8) определяет в общем виде угловое ускорение колеса 2 механизма.

Моменты инерции колес 1 и 2 относительно осей x_1 и x_2 :

$$J_{x_1} = m_1 i_{x_1}^2; \quad J_{x_2} = m_2 i_{x_2}^2.$$

Учитывая исходные данные, находим

$$J_{x_1} = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_{x_2} = 13,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Теперь по формуле (8) получаем

$$\ddot{\varphi}_2 = 4,034t + 0,4597. \quad (9)$$

Интегрируем это уравнение дважды, используя следующие начальные условия задачи: при $t = 0$

$$\varphi_{20} = 0; \quad \dot{\varphi}_{20} = \omega_{10} R_1 / R_2, \quad \text{или} \quad \dot{\varphi}_{20} = 3 \text{ рад/с}.$$

Первый интеграл $\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + C_1$.

Второй интеграл $\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + C_1t + C_2$.

Напишем полученные уравнения $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_2(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ для $t = 0$:

$$\dot{\varphi}_{20} = C_1; \quad \varphi_{20} = C_2,$$

откуда

$$C_1 = 3 \text{ рад/с}, \quad C_2 = 0.$$

Уравнение угловой скорости звена 2 имеет вид

$$\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + 3 \text{ (рад/с)}.$$

Искомое уравнение вращательного движения колеса 2 имеет вид:

$$\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + 3t \text{ (рад)}.$$

Натяжение нити T найдем, как было показано, из уравнения (3):

$$T = m_3 \ddot{z} + G_3,$$

или

$$T = m_3 \ddot{\varphi} r_2 + m_3 g.$$

При $t = 1$ с, учитывая (9) и исходные данные, имеем

$$T = 4285 \text{ Н}.$$

Окружное усилие определяем из уравнения (2):

$$S = S_2 = (J_{x_2} \ddot{\varphi}_2 + Tr_2 + M_c) / R_2;$$

при $t = 1$ с $S = 7295 \text{ Н}$.

Задание Д.12. Исследование плоского движения твердого тела

Определить значение постоянной силы $\vec{P}$, под действием которой качение без скольжения колеса массой m носит граничный характер, т. е. сцепление колеса с основанием находится на грани срыва.

Найти также для этого случая уравнение движения центра масс колеса C , если в начальный момент времени его координата $x_{C0} = 0$ и скорость $v_{C0} = 0$.

Таблица 49

Номер варианта (рис. 160-162)	m , кг	i_C , см	R , см	r , см	α , град	β , град	$f_{\text{сш}}$	δ , см
1	300	50	80	40	20	-	0,35	0
2	200	40	60	30	-	-	0,20	0,8
3	180	50	60	20	30	-	0,10	0
4	220	30	70	25	30	30	0,20	0
5	240	40	60	15	-	-	0,10	1,0
6	200	-	50	-	15	-	0,20	0
7	200	45	60	25	30	15	0,25	0
8	150	40	70	25	15	-	0,50	0
9	250	-	-	-	-	30	0,15	0
10	150	40	50	15	20	-	0,30	0,7
11	200	30	50	20	30	-	0,20	0,6
12	220	-	-	-	30	30	0,25	0
13	140	-	-	-	-	30	0,10	0
14	300	-	50	-	30	-	0,15	0,6
15	180	20	50	20	-	15	0,15	0
16	180	30	50	35	-	-	0,15	0,9
17	160	50	60	20	15	20	0,30	0
18	260	-	50	-	-	-	0,10	1,0
19	200	50	60	20	-	20	0,10	0
20	250	40	50	30	20	-	0,25	0
21	200	-	40	-	30	-	0,25	1,2
22	150	30	50	20	-	-	0,25	1,2
23	200	30	60	30	30	15	0,40	0
24	240	30	70	30	15	-	0,15	0
25	100	-	-	-	-	60	0,10	0
26	150	-	-	-	30	15	0,15	0
27	120	-	30	-	-	-	0,40	1,5
28	150	30	60	25	25	-	0,30	0
29	200	-	-	-	-	20	0,30	0
30	160	-	40	-	20	-	0,20	0

Варианты задания показаны на рис. 160—162, а необходимые для решения данные приведены в табл. 49.

В задании приняты следующие обозначения: i_C — радиус инерции колеса относительно центральной оси, перпендикулярной его плоскости; R и r — радиусы большой и малой окружностей; $f_{\text{сш}}$ — коэффициент сцепления (коэффициент трения покоя); δ — коэффициент трения качения.

Примечание. Колеса, для которых радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками.

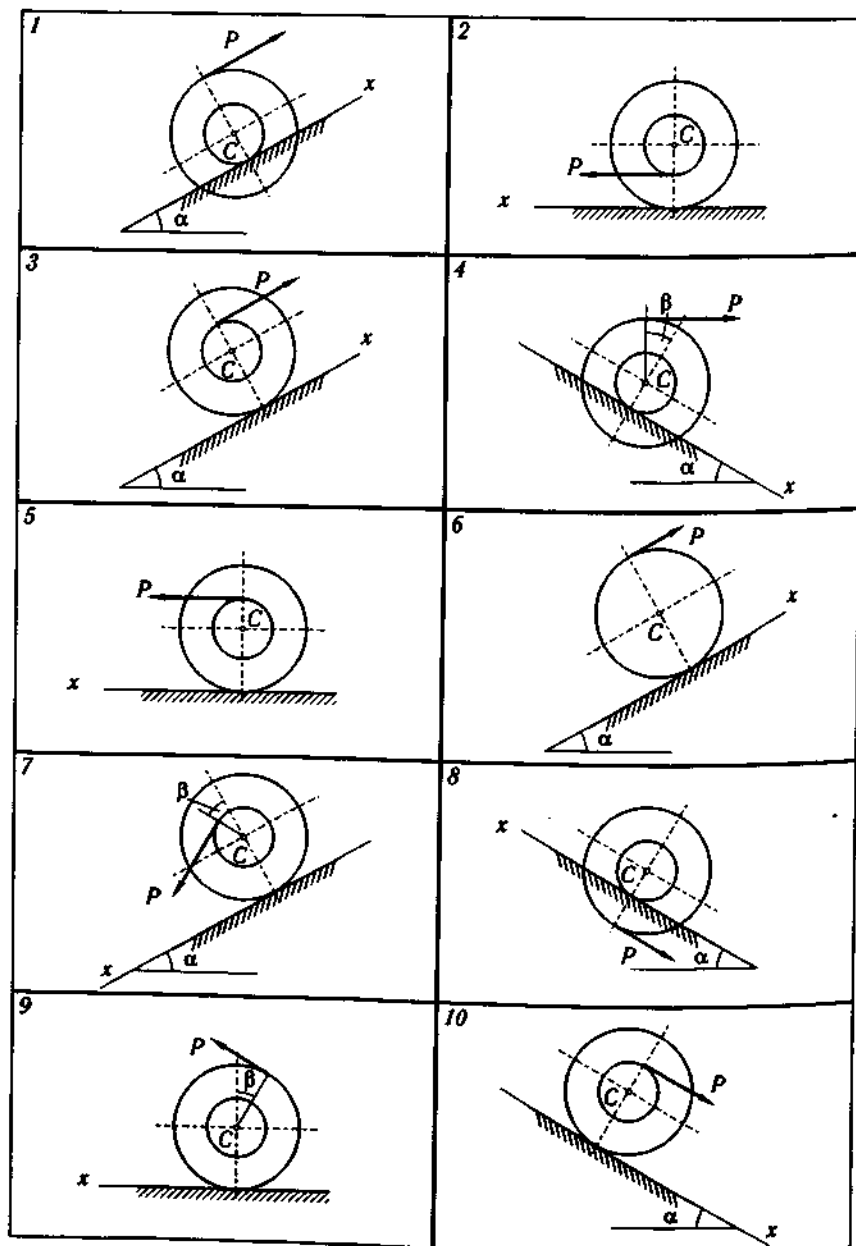


Рис. 160

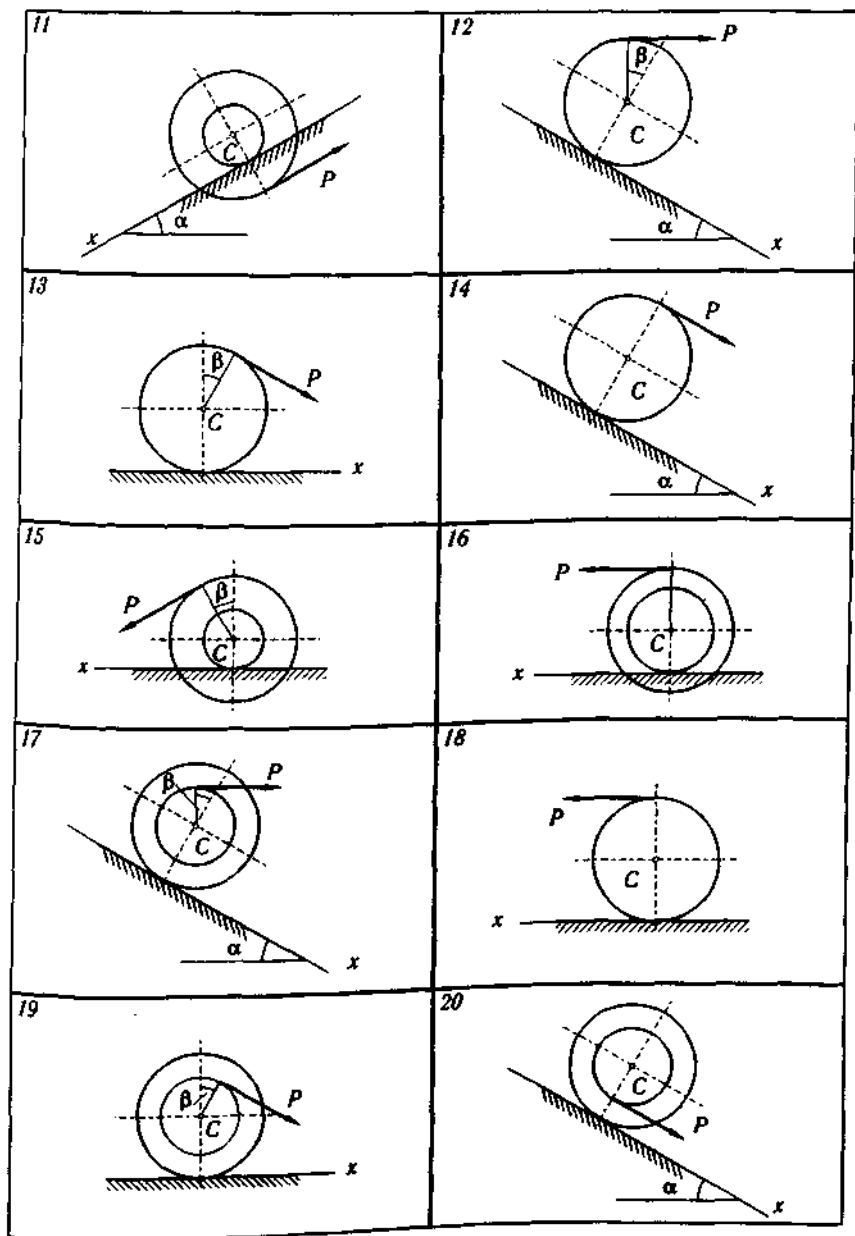


Рис. 161

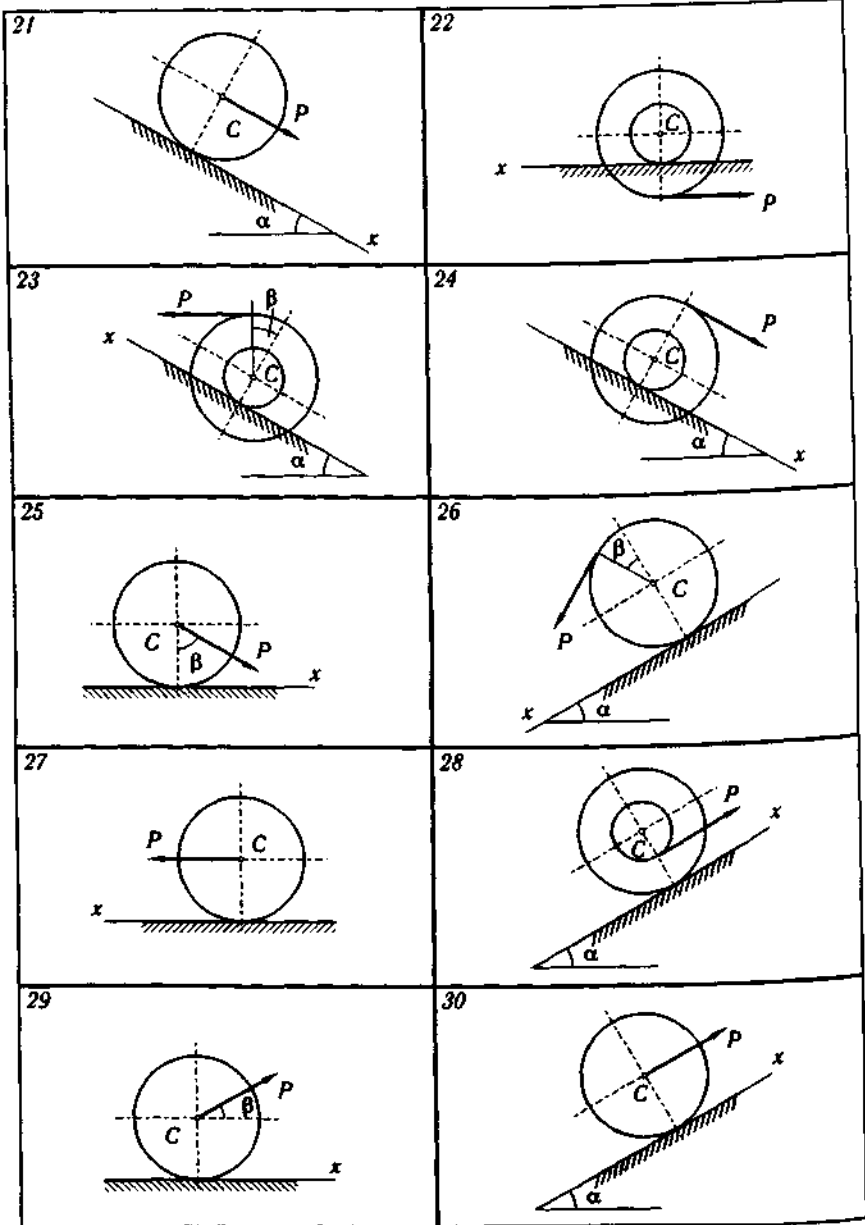


Рис. 162

Пример выполнения задания. Дано: $m = 200$ кг; $R = 60$ см; $r = 10$ см; $i_C = 50$ см; $\alpha = 15^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $f_{cu} = 0,10$; $\delta = 0$ (рис. 163, а).

Решение. На колесо действуют силы: сила тяжести колеса $\vec{G}$, нормальная реакция $\vec{N}$, сила $\vec{P}$ и сила сцепления $\vec{F}_{cu}$ (рис. 163, б) (в случае, если $\delta \neq 0$, необходимо показать момент пары сил сопротивления качению).

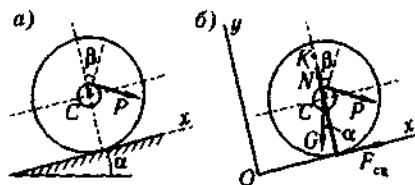


Рис. 163

Силу $\vec{F}_{cu}$ направляем условно в сторону положительного направления оси x .

Дифференциальные уравнения плоского движения колеса:

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E; \quad J_C\ddot{\varphi} = \sum M_{Ci}^E, *$$

или в данном случае

$$m\ddot{x}_C = P \cos \beta - G \sin \alpha + F_{cu}; \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - G \cos \alpha - P \sin \beta; \quad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = Pr - F_{cu}R. \quad (3)$$

Положительным направлением отсчета угла поворота колеса принято направление по часовой стрелке, что соответствует движению центра колеса в положительном направлении оси x .

В соответствии с этим направление по часовой стрелке принято положительным и при определении знаков моментов внешних сил в уравнении (3).

К дифференциальным уравнениям (1)—(3) добавим уравнения связей

$$y_C = R = \text{const}; \quad (4)$$

$$\omega = \dot{\varphi} = v_C/R = \dot{x}_C/R. \quad (5)$$

Последнее уравнение, связывающее угловую скорость колеса ω со скоростью центра v_C , выражает условие качения колеса без скольжения.

Из (4) следует

$$\ddot{y}_C = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя (5) по времени, получаем

$$\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C/R. \quad (7)$$

* Дифференциальное уравнение вращения колеса может быть записано в такой же форме и относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей не через его центр масс, а через мгновенный центр скоростей (точку контакта колеса с основанием). Такая возможность обусловлена тем, что расстояние между центром масс и мгновенным центром скоростей остается при движении колеса постоянным.

Подставляя (6) и (7) в (2) и (3) и учитывая, что $G = mg$, $J_C = mi_C^2$, получим

$$N = P \sin \beta + mg \cos \alpha; \quad (2')$$

$$mi_C^2 \ddot{x}_C / R = P r - F_{cu} R. \quad (3')$$

Исключая $\ddot{x}_C$ из уравнений (1) и (3'), находим

$$F_{cu} = [P(Rr - i_C^2 \cos \beta) + i_C^2 mg \sin \alpha] / (R^2 + i_C^2),$$

или с учетом исходных данных

$$F_{cu} = -0,257P + 208. \quad (8)$$

График зависимости (8) показан на рис. 164. График пересекает ось P в точке $P_0 = 809$ Н.

При $0 \leq P < P_0$ $F_{cu} > 0$ — сила сцепления направлена, как показано на рисунке, в положительном направлении оси x .

При $P > P_0$ $F_{cu} < 0$ — сила сцепления направлена в противоположную сторону.

Модуль силы сцепления, обеспечивающей качение колеса без скольжения, подчинен следующему ограничению:

$$|F_{cu}| \leq N f_{cu}$$

(имеется в виду, что всегда $N > 0$).

Предельное значение модуля силы сцепления согласно (2')

$$|F_{cu}|^* = N f_{cu} = (P \sin \beta + mg \cos \alpha) f_{cu},$$

или с учетом исходных данных

$$|F_{cu}|^* = 0,05P + 190. \quad (9)$$

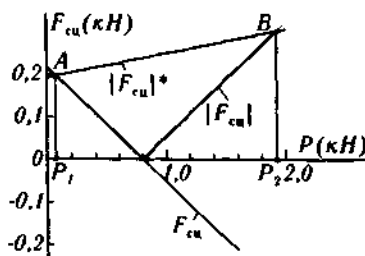


Рис. 164

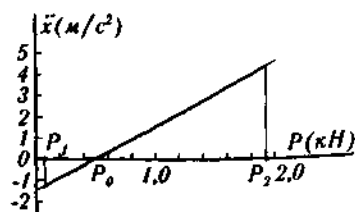


Рис. 165

На рис. 164 показан график зависимости $|F_{cu}|$ от P , представляющий собой ломаную линию. Там же проведена прямая (9). Она пересекает график $|F_{cu}|$ в точках A и B с абсциссами P_1 и P_2 .

Область значений силы P , при которых колесо катится без скольжения ($|F_{cu}| \leq N f_{cu}$),

$$P_1 \leq P \leq P_2.$$

Граничные значения силы P находим, пользуясь (8) и (9), из условий

$$F_{\text{сш}} = |F_{\text{сш}}|^* \quad \text{и} \quad -F_{\text{сш}} = |F_{\text{сш}}|^*.$$

В результате вычислений получаем $P_1 = 58,6 \text{ Н}$, $P_2 = 1923 \text{ Н}$.

Дифференциальное уравнение движения центра колеса после исключения $F_{\text{сш}}$ из (1) и (3') принимает вид

$$\ddot{x}_C = R[P(R \cos \beta + r) - mg \sin \alpha \cdot R] / [m(R^2 + i_C^2)],$$

или с учетом исходных данных

$$\ddot{x}_C = 0,003047P - 1,498. \quad (10)$$

График зависимости (10) показан на рис. 165: $\ddot{x}_C = 0$ при $P = 492 \text{ Н}$.

При $P = P_1$ имеем $\ddot{x}_C = -1,32 \text{ м/с}^2$.

Дважды интегрируя это дифференциальное уравнение и имея в виду нулевые начальные условия, находим

$$x_C = -0,66t^2;$$

колесо катится вниз по наклонной плоскости.

При $P = P_2$

$$\ddot{x}_C = 4,36 \text{ м/с}^2, \quad x_C = 2,18t^2.$$

Колесо катится в сторону положительного направления оси x вверх по наклонной плоскости.

Примечание. Равнодействующая всех сил, приложенных к колесу, катящемуся без скольжения, проходит через точку K , расположенную на диаметре, перпендикулярном скорости центра масс, на расстоянии $CK = i_C^2/R$ от него.

При этом точка K и мгновенный центр скоростей колеса находятся по разные стороны от центра масс.

В данном примере

$$CK = 50^2/60 = 41,7 \text{ см}.$$

Точка K показана на рис. 163, б.

Сумма моментов всех сил, приложенных к колесу, относительно оси, проходящей через точку K и перпендикулярной плоскости движения, равна нулю:

$$\sum M_{iK} = 0. \quad (11)$$

Условие (11) позволяет без составления дифференциальных уравнений найти зависимость силы сцепления от других сил, действующих на колесо.

Это условие можно также использовать для проверки результатов вычислений, произведенных при решении задачи на основе дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела.

Задание Д.13. Исследование соударений твердых тел

Варианты 1—10 (рис. 166). Вариант 1. Тележка 1 общей массой $m_1 = 6000$ кг, движущаяся со скоростью $v_1 = 2,5$ м/с по горизонтальному прямолинейному пути, наталкивается на неподвижную тележку 2, имеющую вместе с контейнером массу $m_2 = 4000$ кг. В конце соударения тележка 2 приобретает скорость $u_2 = 2$ м/с, а контейнер — угловую скорость вращения вокруг ребра A , закрепленного упорной планкой. Считать контейнер массой $m_0 = 500$ кг однородным прямоугольным параллелепипедом ($a = 0,8$ м, $h = 1,5$ м). Вертикальные плоскости соударения тележек полагать гладкими. Поверхности рельсов абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию колес при соударении тележек. Моменты инерции колес относительно их осей пренебрежимо малы.

Определить скорость тележки 1 в конце соударения с тележкой 2, а также ударный импульс, воспринимаемый упорной планкой.

Вариант 2. Груз массой $m_0 = 500$ кг падает с высоты $h = 1$ м в точку D абсолютно жесткой балки, имеющей шарнирно-неподвижную опору A и упругую опору B , коэффициент жесткости которой $c = 20000$ Н/см; удар груза о балку — неупругий. Масса балки $m = 6000$ кг, ее длина $l = 4$ м. Горизонтальное положение балки, показанное на чертеже, соответствует статической деформации упругой опоры под воздействием веса балки. Принять балку за тонкий однородный стержень, а груз — за материальную точку.

Определить ударный импульс, воспринимаемый балкой в точке D , а также наибольшую деформацию упругой опоры, считая, что движение точки B происходит по прямой.

Вариант 3. Вследствие разрыва удерживающего троса груз массой $m_0 = 500$ кг падает с высоты $h = 1$ м на платформу, покоящуюся на одинаковых и симметрично расположенных рессорах. Точка A , в которую падает груз, находится в вертикальной поперечной плоскости симметрии платформы и отстоит от центра тяжести C платформы на расстоянии $d = 0,6$ м.

Удар груза о платформу — неупругий. Масса платформы $m = 5000$ кг, ее радиус инерции относительно горизонтальной продольной оси симметрии $i_C = 0,5$ м.

Принимая платформу за абсолютно твердое тело и считая груз материальной точкой, определить скорость центра тяжести и угловую скорость платформы в конце удара. Определить также ударный импульс в точке A .

Вариант 4. Груз — однородный сплошной цилиндр массой $m = 200$ кг и радиусом $r = 0,2$ м — перемещается транспортером. Лента транспортера горизонтальна, ее постоянная скорость $v = 0,6$ м/с; скольжение ленты по шкивам 1 и 2 отсутствует. В некоторый момент времени движение транспортера внезапно прекращается.

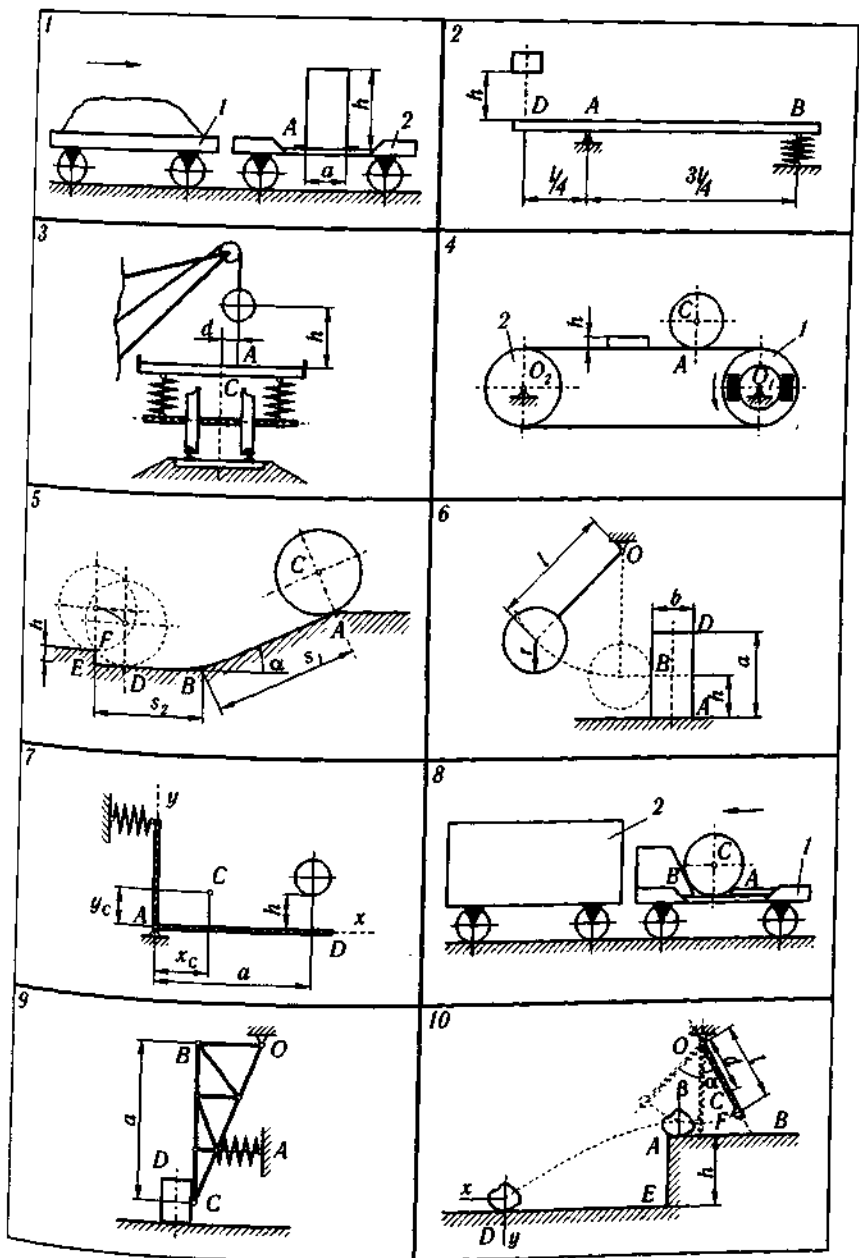


Рис. 166

Поскольку поверхность ленты транспортера абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения тела при ударном воздействии, цилиндр вследствие внезапной остановки транспортера покатится по ленте. Сопротивление качению пренебрежимо мало.

Определить ударный импульс, воспринимаемый абсолютно шероховатой поверхностью ленты при внезапной остановке транспортера.

Проверить найденную для этого скорость центра тяжести (или угловую скорость) цилиндра по теореме Карно.

Определить ударный импульс, воспринимаемый упорной ступенькой высотой $h = 0,03$ м, о которую ударяется цилиндр, пройдя некоторое расстояние, если не происходит отрыв цилиндра при ударе о ступеньку и его проскальзывание.

Вариант 5. Транспортируемые грузы катятся из положения A без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом, проходя вдоль нее расстояние $s_1 = 3$ м, и продолжают катиться по горизонтальной плоскости. Скольжение отсутствует; коэффициент трения качения $\delta = 0,8$ см.

Определить, на каком расстоянии s_2 должна быть поставлена упорная ступенька высотой $h = 0,2$ м, чтобы грузы, ударившись о ребро F ступеньки, лишь поднимались на нее, не перемещаясь дальше ребра F .

Расчет произвести для груза — однородного сплошного цилиндра массой $m = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м.

Считать, что отрыва цилиндра от ступеньки не происходит, а поверхность ступеньки абсолютно шероховата, т. е. препятствует скольжению цилиндра при ударном воздействии.

Определить также горизонтальную и вертикальную составляющие ударного импульса, воспринимаемого цилиндром со стороны ступеньки, при указанных условиях.

Вариант 6. Маятник состоит из стержня длиной $l = 1,2$ м и однородного круглого диска радиусом $r = 0,1$ м. Масса стержня пренебрежимо мала; масса диска $m_0 = 5$ кг.

Маятник, отклоненный от положения устойчивого равновесия, падает под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O ; в вертикальном положении, имея угловую скорость $\omega = 3$ рад/с, маятник ударяется о точку B боковой грани тела D — однородного прямоугольного параллелепипеда массой $m = 6$ тн ($a = 0,8$ м, $b = 0,4$ м, $h = 0,2$ м).

Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,5$. Поверхности маятника и тела D в точке соударения гладкие. Плоскость, на которой покоится тело D , абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения тела при ударном воздействии.

Определить угловую скорость вращения тела D вокруг ребра A в конце удара, а также ударный импульс, воспринимаемый шероховатой поверхностью в точке A .

Вариант 7. Рычаг состоит из двух абсолютно жестких стержней AB и AD , соединенных под прямым углом. Рычаг имеет неподвижную

горизонтальную ось вращения A и удерживается в точке B пружиной; $AB = a = 1,5$ м.

В точку D горизонтального стержня рычага, находящегося в покое, с высоты $h = 0,5$ м падает груз массой $m_0 = 100$ кг. Масса рычага $m = 1000$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $i_A = 0,5$ м. Положение центра тяжести C рычага определяется координатами $x_C = 0,4$ м и $y_C = 0,3$ м. Считать груз материальной точкой, а удар груза о рычаг принять неупругим.

Определить ударный импульс, испытываемый грузом, а также горизонтальную и вертикальную составляющие ударного импульса, воспринимаемого опорой A .

Вариант 8. На тележке 1 лежит груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 500$ кг и радиусом $r = 0,4$ м, который удерживается от возможного перемещения по тележке ступенькой и наклонной плоскостью, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом.

Тележка 1, имеющая вместе с грузом массу $m_1 = 3000$ кг, двигаясь по горизонтальному прямолинейному пути, наталкивается со скоростью $v_1 = 3$ м/с на неподвижную вагонетку 2 общей массой $m_2 = 6000$ кг. В конце соударения тележка 1 останавливается, а цилиндр, ударясь о наклонную плоскость, начинает катиться по ней.

Отрыва цилиндра при ударе о наклонную плоскость не происходит; абсолютная шероховатость наклонной плоскости исключает скольжение цилиндра при ударном воздействии. Считать вертикальные плоскости соударения тележки и вагонетки гладкими. Поверхность рельсов абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию колес при соударении тележек. Моменты инерции колес относительно их осей пренебрежимо малы.

Определить угловую скорость цилиндра в конце удара о наклонную плоскость; проверить найденное выражение угловой скорости цилиндра по теореме Карно.

Определить скорость вагонетки 2 в конце соударения с тележкой 1.

Вариант 9. Тело D массой m_0 , поступательно движущееся по горизонтальной плоскости, ударяется со скоростью $u_0 = 3$ м/с об узел C покоящейся фермы. Поверхности тела D и узла C в точке соударения — гладкие; коэффициент восстановления при ударе $k = 0,5$. Абсолютно жесткая ферма имеет шарнирно-неподвижную опору O и упругую опору A ; $BC = a = 2$ м. Масса фермы $m = 20m_0$, радиус ее инерции относительно горизонтальной оси вращения O $i_O = 1$ м.

Определить угловую скорость фермы в конце удара и проверить ее по теореме Карно.

Определить, какую скорость поступательного движения по гладкой горизонтальной плоскости получит тело D после удара.

Вариант 10. Отклоненный на угол $\alpha = 60^\circ$ от положения устойчивого равновесия маятник падает без начальной скорости под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O . В вертикальном положении маятник ударяется точкой F о покоящееся тело, находящееся в положении A .

Расстояния от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии маятника до его центра тяжести C и до точки F , находящейся в той же плоскости, $OC = d = 0,9$ м и $OF = l = 1,1$ м.

Масса маятника $m = 18$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $i_O = 1$ м. Тело имеет массу $m_0 = 6$ кг и может быть принято за материальную точку. Коэффициент восстановления при ударе маятника о тело $k = 0,2$.

Вследствие удара тело падает из точки A плоскости AB в точку D сладкой горизонтальной плоскости DE . Плоскость DE расположена ниже плоскости AB на $h = 1$ м. Удар тела в точке D можно считать неупругим ($k_1 = 0$).

Определить ударный импульс в точке D и уравнение движения тела после этого удара, отнеся движение к координатной системе $x Dy$.

Определить также угол β отклонения маятника после удара о тело в точке A .

Варианты 11—20 (рис. 167). Вариант 11. При испытании на ударную нагрузку маятник копра массой $m_0 = 500$ кг, отклоненный из положения устойчивого равновесия на угол $\alpha = 60^\circ$, падает без начальной скорости под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O .

В вертикальном положении маятник ударяется точкой A о середину D покоящейся вертикальной балки BF массой $m_0 = 2000$ кг, имеющей шарнирно-неподвижную опору B и упругую опору F ($BF = 2a = 3,2$ м); балку можно считать однородным тонким стержнем; коэффициент восстановления при ударе $k = 0,4$.

Расстояние от точки O пересечения оси вращения маятника вертикальной плоскостью его симметрии до центра тяжести C маятника $OC = d = 1,5$ м, а расстояние от точки O до точки A , лежащей в той же плоскости симметрии, $OA = l = 2$ м; радиус инерции маятника относительно оси вращения $i_O = 1,8$ м. Отклонившийся после удара на угол β маятник задерживается в этом положении специальным захватом.

Определить ударный импульс в точке D и расстояние от точки B до точки, в которую следует наносить удар, чтобы опора B не испытывала ударного импульса.

Вариант 12. Тележка 1, имеющая вместе с контейнером массу $m_1 = 2000$ кг и движущаяся по горизонтальному прямолинейному пути со скоростью $v_1 = 2,5$ м/с, наталкивается на тележку 2 общей массой $m_2 = 8000$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 0,5$ м/с по тому же пути и в том же направлении.

В конце соударения тележка 1 останавливается, а контейнер приобретает угловую скорость вращения вокруг ребра A , закрепленного упорной планкой. Считать контейнер массой $m_0 = 500$ кг однородным прямоугольным параллелепипедом ($a = 0,9$ м, $h = 1,2$ м), а вертикальные плоскости соударения тележек — гладкими. Поверхность рельсов абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию

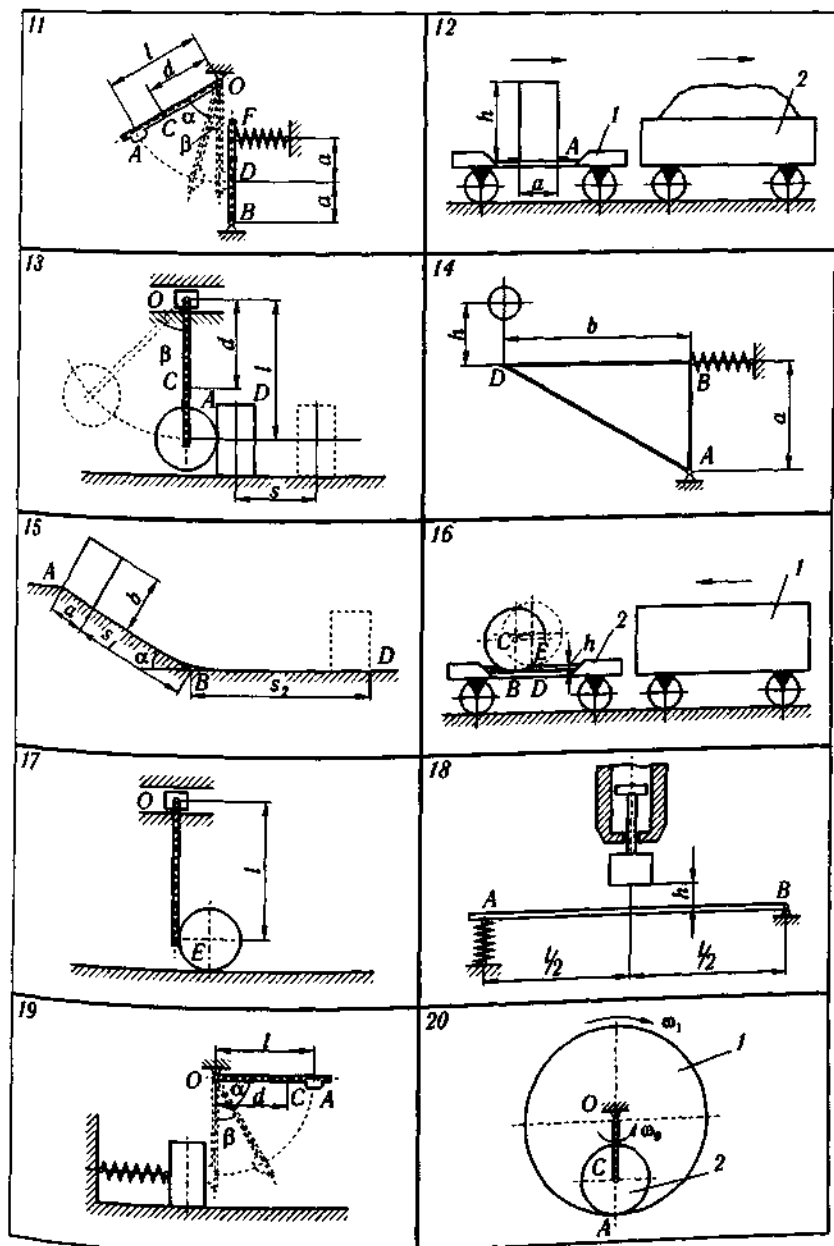


Рис. 167

колес при соударении тележек. Моменты инерции колес относительно их осей пренебрежимо малы.

Определить угловую скорость контейнера в конце соударения тележек и проверить найденное выражение по теореме Карно. Определить скорость тележки 2 в конце соударения с тележкой 1.

Вариант 13. Ось O подвеса маятника движется поступательно в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью, при этом маятник занимает вертикальное положение относительно покоя. Радиус инерции маятника относительно оси O $i_O = 0,8$ м.

При внезапной остановке оси подвеса маятник, находясь в том же положении и приобретя угловую скорость, ударяется точкой A о покоящееся тело D , имеющее массу $m_0 = 2,5m$, где m — масса маятника. Поверхности маятника и тела D в точке соударения — гладкие. Коэффициент восстановления при соударении маятника и тела $k = 0,6$.

Расстояния от точки O до точки A и до центра тяжести C маятника, отсчитываемые вдоль его вертикальной оси симметрии, $l = 1$ м и $d = 0,7$ м соответственно.

В конце соударения с маятником тело D приобрело скорость $u = 0,5$ м/с поступательного движения по гладкой горизонтальной плоскости.

Определить скорость оси O подвеса маятника перед внезапной остановкой, а также угол β отклонения маятника после удара о тело D .

Вариант 14. Абсолютно жесткая конструкция, имеющая форму прямоугольного треугольника со сторонами $AB = a = 1$ м и $BD = b = 2$ м, опирается на шарнирно-неподвижную опору A и удерживается в точке B пружиной.

В точку D конструкции, находящейся в состоянии покоя, при котором сторона BD горизонтальна, с высоты $h = 0,5$ м падает груз массой $m_0 = 200$ кг; удар груза — неупругий. Считать конструкцию, масса которой $m = 20000$ кг, однородным треугольником, а груз — материальной точкой.

Определить угловую скорость системы в конце удара и проверить найденное выражение угловой скорости по теореме Карно. Определить также ударный импульс, испытываемый опорой A .

Вариант 15. При транспортировке грузы из положения A скользят без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, проходя вдоль нее расстояние $s_1 = 3$ м, и продолжают движение по горизонтальной плоскости.

Определить, на каком наименьшем расстоянии BD должен быть поставлен упор D для остановки грузов, чтобы они при этом не опрокидывались. Расчет произвести для груза — однородного прямоугольного параллелепипеда массой $m = 500$ кг ($b = 2a = 1$ м). Принять коэффициент трения скольжения $f = 0,2$.

Определить также ударный импульс, воспринимаемый упором при указанных условиях.

Вариант 16. Вагонетка 1 общей массой $m_1 = 6500$ кг, движущаяся по горизонтальному прямолинейному пути, наталкивается на неподвижную тележку 2, имеющую вместе с грузом массу $m_2 = 4000$ кг. Груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м — удерживается от возможного перемещения по тележке двумя упорами — ступеньками.

В конце соударения вагонетка 1 и тележка 2 приобретают одинаковую скорость движения по горизонтальному прямолинейному пути, а цилиндр — угловую скорость вращения вокруг ребра E ступеньки DE . Поверхность ступеньки абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию цилиндра при ударном воздействии; отрыва цилиндра при ударе о ребро E не происходит. После удара цилиндр поднимается на ступеньку DE высотой $h = 0,1$ м. Считать, что за время подъема цилиндра на ступеньку скорость тележки 2, приобретенная ею в конце удара, остается постоянной, а вертикальные плоскости соударения вагонетки и тележки — гладкие. Поверхность рельсов абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию колес при соударении тележек. Моменты инерции колес относительно их осей пренебрежимо малы.

Определить ударный импульс, испытываемый цилиндром со стороны ступеньки DE , а также скорость вагонетки 1 до столкновения ее с тележкой 2.

Вариант 17. Ось O подвеса маятника движется поступательно в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 2$ м/с, при этом маятник занимает вертикальное положение относительно покоя. Маятник — однородный тонкий стержень длиной $l = 1$ м и массой $m_0 = 20$ кг.

При внезапной остановке оси подвеса маятник, находясь в том же положении и приобретя угловую скорость, ударяется точкой E о неподвижный однородный полый тонкостенный цилиндр радиусом $r = 0,2$ м и массой $m = 2m_0$. Коэффициент восстановления при соударении тел $k = 1/3$. Поверхности маятника и цилиндра в точке соударения — гладкие. Плоскость, на которой покоится цилиндр, абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения тела при ударном воздействии.

Определить ударный импульс, испытываемый осью O подвеса маятника при ее внезапной остановке, а также угловую скорость цилиндра в конце соударения с маятником.

Вариант 18. Абсолютно жесткая балка массой $m = 8000$ кг и длиной $l = 4$ м имеет упругую опору A и шарнирно-неподвижную опору B . Балка занимает в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины A , горизонтальное положение; коэффициент жесткости пружины $c = 10000$ Н/см. Радиус инерции балки относительно горизонтальной оси вращения B $i_B = 2,2$ м.

Балка испытывается на воздействие ударной нагрузки с помощью парового молота, в котором масса молота, штока и поршня $m_0 = 800$ кг. Молот и связанные с ним части падают под давлением

пара на середину балки с высоты $h = 0,8$ м, имея в момент соприкосновения с балкой скорость, в два раза превышающую скорость при свободном падении. Коэффициент восстановления при ударе молота о балку $k = 0,2$.

Принять молот и связанные с ним элементы за материальную точку; считать, что движение точек балки происходит по прямым.

Определить наибольшую деформацию упругой опоры A , считая, что молот, отскочив от балки, не падает снова, а удерживается обратным давлением пара; определить также ударный импульс, воспринимаемый опорой B .

Вариант 19. При испытании упорных (буферных) брусков на удар маятник копра массой $m = 500$ кг, радиус инерции которого относительно неподвижной горизонтальной оси вращения O $i_O = 1,2$ м, отклоняют от положения устойчивого равновесия на угол $\alpha = 90^\circ$ и отпускают без начальной угловой скорости. Падая, маятник точкой A ударяется о буферный брус массой $m_0 = 1000$ кг, коэффициент жесткости комплекта пружин которого $c = 10000$ Н/см. Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,5$. Отклонившийся после удара на угол β маятник задерживается в этом положении специальным захватом.

Расстояние от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии маятника до его центра тяжести C $OC = d = 0,9$ м; расстояние от точки O до точки A , находящейся в той же плоскости симметрии, $OA = l = 1,5$ м.

Пренебрегая трением скольжения бруса о горизонтальную плоскость, определить величину наибольшего сжатия буферных пружин, ударный импульс в точке A , а также расстояние от точки O до центра удара.

Вариант 20. В гипоциклическом механизме кривошип OC массой $m = 2$ кг и зубчатое колесо 1 радиусом $r = 30$ см вращаются с угловыми скоростями $\omega_0 = 1,5$ рад/с и $\omega_1 = 1$ рад/с соответственно. Зубчатое колесо 2 имеет массу $m_2 = 8$ кг и радиус $r_2 = 10$ см. В некоторый момент времени колесо 1 внезапно останавливают.

Считая кривошип однородным тонким стержнем, а колесо 2 — однородным сплошным диском, определить угловую скорость кривошипа в конце удара, а также ударные импульсы в точках A и C .

Варианты 21—30 (рис. 168). **Вариант 21.** Лента транспортера составляет угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Радиусы шкивов $r = 0,2$ м. На ленте транспортера, скольжение которой по шкивам 1 и 2 отсутствует, находится груз — однородный куб массой $m_0 = 200$ кг с ребрами длиной $a = 0,5$ м. В некоторый момент времени движение транспортера внезапно прекращается, при этом груз приобретает угловую скорость вращения вокруг ребра A , закрепленного упорной планкой.

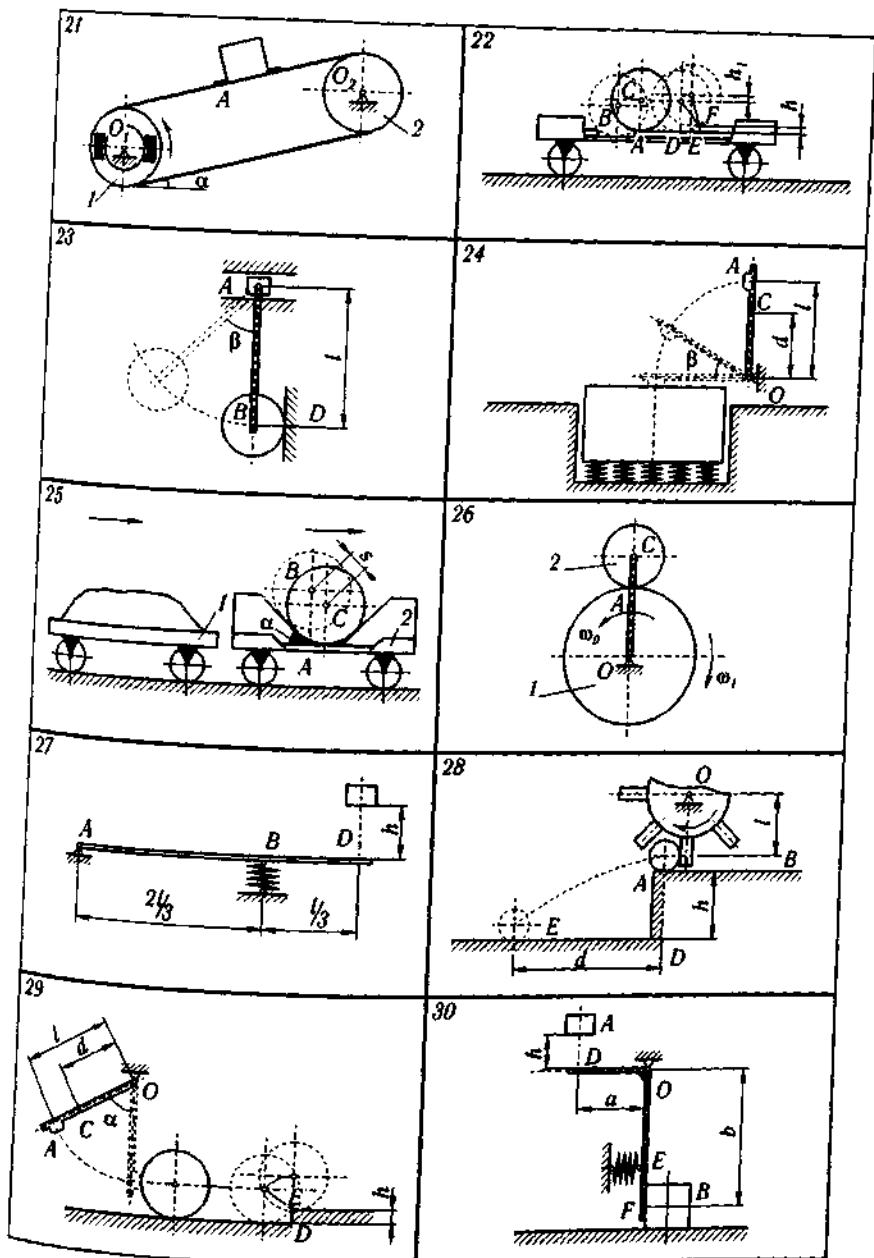


Рис. 168

Определить наименьшую угловую скорость шкивов в момент остановки, если груз опрокидывается; определить также ударный импульс, воспринимаемый упорной планкой, при внезапной остановке шкивов, вращающихся с этой угловой скоростью.

Вариант 22. Груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m = 800$ кг и радиусом $r = 0,4$ м — покоится на движущейся платформе между упорами — ступеньками. При внезапной остановке платформы ступенька AB не удерживает груз: цилиндр, поднимаясь на ступеньку, прокатывается по участку $BD = s = 1$ м горизонтальной площадки BE и, ударившись о ребро F другого упора — ступеньки EF высотой $h = 0,1$ м, поворачивается вокруг ребра F , вследствие чего центр тяжести цилиндра поднимается по вертикали на высоту $h_1 = 0,07$ м. Качение цилиндра от B до F происходит без скольжения; коэффициент сопротивления качению цилиндра $\delta = 0,1$ см. Отрыва цилиндра при ударе о ступеньку не происходит, абсолютно шероховатая поверхность ступеньки не допускает скольжения цилиндра при ударном воздействии.

Определить, какую скорость имеет центр тяжести цилиндра в начале движения на участке BD , а также ударный импульс, испытываемый ребром F ступеньки EF .

Вариант 23. Маятник состоит из тонкого однородного стержня AB массой $m = 4$ кг, длиной $l = 0,7$ м и однородного сплошного шара массой $m_0 = 2$ кг и радиусом $r = 0,1$ м. Ось A маятника движется поступательно в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 1,4$ м/с, при этом маятник занимает вертикальное положение устойчивого равновесия.

Вследствие внезапной остановки оси подвеса маятник получает угловую скорость вращения вокруг этой оси и, находясь в том же вертикальном положении, ударяется точкой D о неподвижную вертикальную плоскость. Поверхности маятника и вертикальной плоскости в точке соударения — гладкие. Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,4$.

Определить угловую скорость маятника при внезапной остановке оси его подвеса и проверить найденное выражение по теореме Карно. Определить также угол отклонения β маятника после удара о вертикальную плоскость и ударные импульсы, испытываемые осью A маятника.

Вариант 24. При испытании фундамента на ударную нагрузку маятник копра, вращаясь вокруг неподвижной оси, падает из вертикального положения, показанного на чертеже, под действием собственного веса без начальной угловой скорости. В горизонтальном положении маятник точкой A ударяется о середину верхней грани покоящегося фундамента.

Масса маятника $m_0 = 500$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $i_O = 1,8$ м, масса однородного фундамента $m = 10000$ кг. Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,2$. Отклоняющийся

после удара маятник задерживается в этом положении специальным захватом. Расстояния от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии маятника до его центра тяжести C и до точки A , находящейся в той же плоскости симметрии, $OC = d = 1,5$ м и $OA = l = 2$ м.

Определить наибольшую упругую осадку основания, имеющего коэффициент жесткости $c = 16 \cdot 10^5$ Н/см, ударный импульс в точке A и расстояние от точки O до центра удара.

Вариант 25. Тележка 1 общей массой $m_1 = 3000$ кг, двигаясь по горизонтальному прямолинейному пути со скоростью $v_1 = 5$ м/с, наталкивается на тележку 2, имеющую вместе с грузом массу $m_2 = 2000$ кг и движущуюся по тому же пути и в том же направлении со скоростью $v_2 = 1$ м/с.

Груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м — удерживается от возможного перемещения по тележке двумя упорами — наклонными плоскостями.

В конце соударения скорости движения тележек по тому же горизонтальному прямолинейному пути изменяются, а цилиндр, ударяясь о наклонную плоскость AB , составляющую угол $\alpha = 60^\circ$, начинает качение по ней.

Цилиндр по наклонной плоскости проходит без скольжения расстояние $s = 0,1$ м; сопротивление качению пренебрежимо мало. Отрыва цилиндра при ударе о наклонную плоскость не происходит, абсолютная шероховатость наклонной плоскости исключает скольжение цилиндра при ударном воздействии.

Считать, что за время подъема цилиндра на наклонную плоскость скорость тележки 2, полученная ею в конце удара, остается постоянной, а вертикальные плоскости соударения тележек — гладкие. Поверхность рельсов абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию колес при соударении тележек. Моменты инерции колес относительно их осей пренебрежимо малы.

Определить скорость тележки 1 в конце соударения с тележкой 2, а также ударный импульс, воспринимаемый наклонной плоскостью со стороны цилиндра.

Вариант 26. В эпициклическом механизме кривошип OC массой $m = 3$ кг и длиной $l = 30$ см вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ рад/с, а зубчатое колесо 1 — с угловой скоростью $\omega_1 = 3$ рад/с. Масса зубчатого колеса 2 $m_2 = 10$ кг, а радиус $r_2 = 10$ см.

В некоторый момент времени колесо 1 внезапно останавливают. Считать колесо 2 однородным сплошным диском, а кривошип — однородным тонким стержнем, определить угловую скорость колеса 2 в конце удара, а также ударные импульсы, в точках A и C .

Вариант 27. В точку D абсолютно жесткой балки массой $m = 5000$ кг и длиной $l = 3$ м с высоты $h = 1,2$ м падает груз массой $m = 400$ кг. Балка имеет шарнирно-неподвижную опору A и

упругую опору B ; в состоянии покоя балка занимает горизонтальное положение, показанное на чертеже. Удар груза о балку — неупругий.

Считать балку однородным тонким стержнем, а груз — материальной точкой.

Определить угловую скорость балки в конце удара и проверить найденное выражение угловой скорости по теореме Карно. Определить также ударный импульс, воспринимаемый опорой A .

Вариант 28. Механизм состоит из шестерни с кулачками, которая приводится во вращение вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Масса механизма $m = 50$ кг, радиус инерции относительно оси вращения $i_O = 0,2$ м. Механизм сбрасывает металлические болванки массой $m_0 = 2$ кг из точки A горизонтальной плоскости AB на горизонтальную плоскость ED на расстояние $d = 1,5$ м, отсчитываемое по горизонтали от точки A . Плоскость ED расположена ниже плоскости AB на высоту $h = 1$ м.

Неупругий удар между кулачком и болванкой ($k_1 = 0$) происходит на расстоянии $l = 0,4$ м от оси вращения механизма. Коэффициент восстановления при ударе болванки о гладкую горизонтальную плоскость в точке E $k_2 = 0,2$.

Принимая болванку за материальную точку, определить угловую скорость шестерни в начале удара, а также ударные импульсы, испытываемые болванкой в точках A и E .

Вариант 29. Маятник, отклоненный от положения устойчивого равновесия на некоторый угол α , падает без начальной скорости под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O , и в вертикальном положении точкой A ударяется о покоящийся однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 200$ кг и радиусом $r = 0,2$ м. Масса маятника $m = 100$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $i_O = 1$ м. Расстояния от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии до центра тяжести C маятника и до точки A , находящейся в той же плоскости симметрии, $OC = d = 0,8$ м и $OA = l = 1,2$ м. Коэффициент восстановления при соударении маятника и цилиндра $k = 0,6$.

После удара цилиндр скользит, не вращаясь, по гладкой горизонтальной плоскости и, натолкнувшись на ступеньку DE высотой $h = 0,05$ м, поднимается на нее, не перемещаясь дальше ребра E . Отрыва цилиндра от ребра E при ударе о ступеньку не происходит, а абсолютно шероховатая поверхность ступеньки исключает проскальзывание цилиндра при ударном воздействии.

Определить угол α первоначального отклонения маятника, а также ударный импульс, испытываемый цилиндром со стороны маятника.

Вариант 30. Рычаг состоит из двух абсолютно жестких стержней OD и OF , соединенных под прямым углом; $OD = a = 1$ м, $OF = b = 1,5$ м. Рычаг имеет шарнирно-неподвижную опору O и удерживается в точке E пружиной. Масса рычага $m = 400$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения O $i_O = 0,4$ м.

Рычаг находится в покое, соответствующем статической деформации пружины, при этом его стержень OD горизонтален. В точку D рычага падает груз A массой $m_A = 20$ кг с высоты $h = 0,5$ м. Удар груза о стержень OD рычага — неупругий ($k_1 = 0$). Приобретая угловую скорость, рычаг точкой F ударяется о неподвижное тело B массой $m_B = 120$ кг; коэффициент восстановления при этом ударе $k_2 = 0,2$. Считать груз A и тело B материальными точками.

Определить, какую скорость получает тело B в конце его соударения со стержнем OF , а также ударный импульс, воспринимаемый телом B .

Пример выполнения задания (рис. 169). Груз — однородный сплошной цилиндр массой $m = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м — лежит на движущейся платформе и удерживается от возможного перемещения по платформе упорами — ступеньками.

При внезапной остановке платформы цилиндр ударяется о ребро D ступеньки BD высотой $h = 0,1$ м и поднимается вверх на эту ступеньку. Далее цилиндр катится по участку DE горизонтальной площадки DK и, ударившись о другой упор — наклонную плоскость KN , составляющую угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, проходит по ней расстояние $FN = s = 0,1$ м. Качение цилиндра не сопровождается скольжением, сопротивление качению пренебрежимо мало.

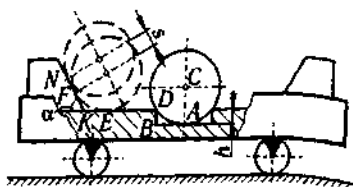


Рис. 169

Отрыва цилиндра при ударах о ступеньку и о наклонную плоскость не происходит, абсолютная шероховатость ступеньки и наклонной плоскости исключает скольжение цилиндра при ударном воздействии.

Определить скорость платформы до ее остановки, а также ударные импульсы, испытываемые цилиндром со стороны ступеньки и наклонной

Поверить найденные выражения угловых скоростей цилиндра после ударов о ступеньку и наклонную плоскость с помощью теоремы Карно.

Решение. При внезапной остановке платформы поступательное движение цилиндра мгновенно изменяется на вращательное движение вокруг ребра D ступеньки BD , т. е. цилиндр испытывает удар.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе, взяв за ось моментов горизонтальную ось, проходящую вдоль ребра D (положения I и II, соответствующие началу и концу удара о ребро D ступеньки BD , совпадают, рис. 170, а):

$$L_{II D} - L_{I D} = \sum M_D(\vec{S}_i^E).$$

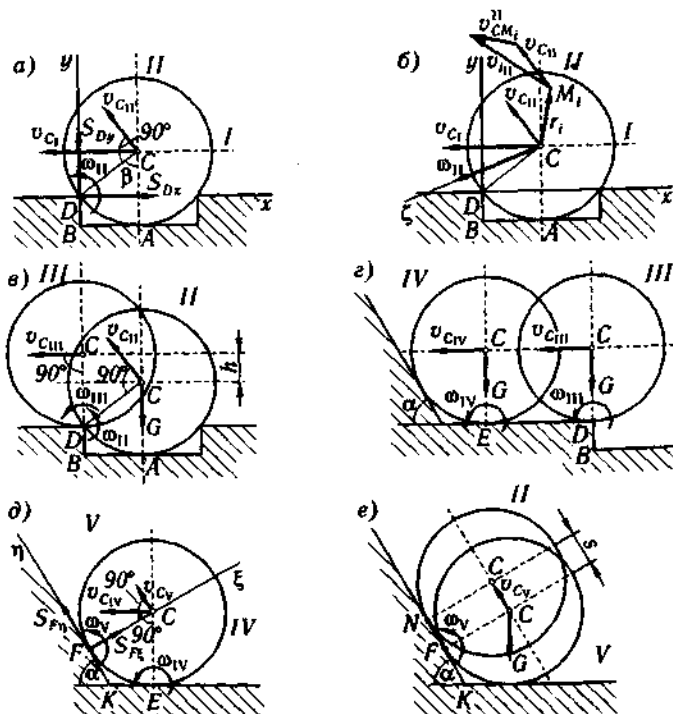


Рис. 170

Сумма моментов внешних ударных импульсов, приложенных к цилиндру, относительно оси D равна $\sum M_D(\vec{S}_i^E) = 0$ (ударный импульс $\vec{S}_D$ пересекает ось D) и потому

$$L_{IID} = L_{ID}.$$

Кинетический момент цилиндра относительно оси D в начале удара

$$L_{ID} = mv_{C1}(r - h),$$

где $v_{C1} = v$ — скорость центра тяжести цилиндра в начале удара, равная; скорости платформы до внезапной остановки.

Кинетический момент цилиндра относительно оси D в конце удара

$$L_{IID} = J_D \omega_{II},$$

где J_D — момент инерции цилиндра относительно оси D ; ω_{II} — угловая скорость цилиндра в конце удара

$$L_{IID} = (J_C + mr^2) \omega_{II} = (mr^2/2 + mr^2) \omega_{II} = 3/2 mr^2 \omega_{II}.$$

Но

$$L_{\Pi D} = L_{ID},$$

т. е.

$$3/2mr^2\omega_{\Pi} = mv(r-h),$$

откуда

$$\omega_{\Pi} = 2(r-h)v/(3r^2). \quad (1)$$

Проверим полученное выражение (1) угловой скорости цилиндра по теореме Карно:

$$T_I - T_{II} = T^*,$$

где T_I — кинетическая энергия системы материальных точек в начале удара; T_{II} — кинетическая энергия системы в конце удара; T^* — кинетическая энергия, соответствующая потерянными скоростям точек системы.

Кинетическая энергия цилиндра в начале удара о ступеньку

$$T_I = 1/2mv^2.$$

Кинетическая энергия цилиндра в конце удара о ступеньку

$$T_{II} = 1/2(mv_C^2 + J_C\omega_{\Pi}^2).$$

Теперь выведем выражение кинетической энергии, соответствующей потерянными скоростям $\Delta\vec{v}_i$ точек M_i твердого тела при плоском движении:

$$\Delta\vec{v}_i = \vec{v}_{CI} - \vec{v}_{\Pi i},$$

где

$$\vec{v}_{CI} = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM_i}^I, \quad \vec{v}_{\Pi i} = \vec{v}_{C\Pi} + \vec{v}_{CM_i}^{II},$$

причем вращательные скорости вокруг оси C имеют выражения

$$\vec{v}_{CM_i}^I = \vec{\omega}_I \times \vec{r}_i, \quad \vec{v}_{CM_i}^{II} = \vec{\omega}_{\Pi} \times \vec{r}_i.$$

Кинетическая энергия тела, соответствующая потерянными скоростям его точек,

$$T^* = 1/2 \sum m_i [(\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi}) + (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II})]^2,$$

т. е.

$$T^* = 1/2 \left[\sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi})^2 + 2 \sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi})(\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II}) + \sum m_i (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II})^2 \right].$$

Здесь

$$\sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi})^2 = m(\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi})^2;$$

$$\sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi})(\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II}) = (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{C\Pi}) \sum m_i (\vec{\omega}_I \times \vec{r}_i - \vec{\omega}_{\Pi} \times \vec{r}_i) =$$

$$= (\vec{v}_{C1} - \vec{v}_{CII}) \left[(\vec{\omega}_I - \vec{\omega}_{II}) \times \sum m_i \vec{r}_i \right] = 0;$$

так как

$$\sum m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C = 0;$$

$$\sum m_i (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II}) = \sum m_i (\omega_I \vec{r}_i - \omega_{II} \vec{r}_i)^2 = J_C (\omega_I - \omega_{II})^2.$$

Таким образом,

$$T^* = 1/2 m (\vec{v}_{C1} - \vec{v}_{CII})^2 + 1/2 J_C (\omega_I - \omega_{II})^2,$$

или

$$T^* = 1/2 m [(v_{C1x} - v_{CIIx})^2 + (v_{C1y} - v_{CIIy})^2] + 1/2 J_C (\omega_I - \omega_{II})^2. \quad (2)$$

Выражение (2) является общей формулой кинетической энергии, соответствующей потерянными скоростям точек твердого тела при плоском движении.

Для цилиндра (рис. 170, б) в рассматриваемой задаче

$$T^* = 1/2 m [(v_{C1} - v_{CII} \cos \beta)^2 + v_{CII}^2 \sin^2 \beta] + 1/2 J_C \omega_{II}^2,$$

т. е.

$$T^* = 1/2 m (v_{C1}^2 - 2 v_{C1} v_{CII} \cos \beta + v_{CII}^2) + 1/2 J_C \omega_{II}^2.$$

Так как

$$v_{C1} = v, \quad v_{CII} = \omega_{II} r, \quad J_C = m r^2 / 2,$$

то, приравнявая $T_I - T_{II}$ и T^* , получаем

$$1/2 m v^2 - 1/2 m \omega_{II}^2 r^2 - 1/4 m r^2 \omega_{II}^2 = 1/2 m v^2 + m v \omega_{II} r \cos \beta + 1/2 m \omega_{II}^2 r^2 + 1/4 m r^2 \omega_{II}^2,$$

или

$$3/2 m \omega_{II}^2 r^2 = m v \omega_{II} r \cos \beta,$$

где

$$\cos \beta = (r - h) / r.$$

Отсюда

$$\omega_{II} = 2(r - h)v / (3r^2).$$

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы и соответствующее подъему цилиндра на ступеньку BD из положения II в положение III (рис. 170, в):

$$T_{III} - T_{II} = \sum A_i^E.$$

Так как перемещение осуществляется поворотом вокруг оси D , то

$$1/2 J_D \omega_{III}^2 - 1/2 J_D \omega_{II}^2 = -Gh,$$

или

$$3/4 m r^2 \omega_{III}^2 - 3/4 m r^2 \omega_{II}^2 = -mgh,$$

откуда

$$\omega_{III} = \sqrt{\omega_{II}^2 - 4gh/(3r^2)}. \quad (3)$$

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы и соответствующее качению цилиндра на участке DE из положения III в положение IV (рис. 170, з):

$$T_{IV} - T_{III} = \sum A_i^E.$$

Так как на рассматриваемом перемещении $\sum A_i^E = 0$, то

$$T_{IV} = T_{III},$$

т. е.

$$v_{CIV} = v_{CIII} \text{ и } \omega_{VI} = \omega_{III}. \quad (4)$$

При соприкосновении цилиндра с наклонной плоскостью мгновенная ось вращения цилиндра (мгновенный центр скоростей) мгновенно перемещается из E в F , т. е. цилиндр испытывает удар.

Составим уравнение, выражающее теорему изменения кинетического момента механической системы при ударе, взяв за ось моментов горизонтальную ось, совпадающую с образующей F цилиндра (положения цилиндра IV и V, соответствующие началу и концу удара, совпадают, рис. 170, д):

$$L_{VF} - L_{IVF} = \sum M_F(\vec{S}_i^E).$$

Но $\sum M_F(\vec{S}_i^E) = 0$, так как ударный импульс $\vec{S}_F$, приложенный к цилиндру, пересекает ось F . Поэтому

$$L_{VF} = L_{IVF}.$$

При вычислении кинетических моментов цилиндра L_{IVF} и L_{VF} используем теорему о кинетическом моменте системы в общем случае ее движения.

Кинетический момент относительно оси F в начале удара

$$L_{IVF} = mv_{CIV}r \cos \alpha + J_C \omega_{IV},$$

где $v_{CIV} = \omega_{IV} EC$, поскольку мгновенный центр скоростей — в точке E ;

$$L_{IVF} = m\omega_{IV}r^2 \cos \alpha + (mr^2/2)\omega_{IV} = m\omega_{IV}r^2(\cos \alpha + 1/2).$$

Кинетический момент относительно оси F в конце удара

$$L_{VF} = mv_{CV}r + J_C \omega_V,$$

где $v_{CV} = \omega_V CF$, так как мгновенный центр скоростей — в точке F ;

$$L_{VF} = m\omega_V r^2 + (mr^2/2)\omega_V = 3/2 m\omega_V r^2.$$

Но $L_{VF} = L_{IVF}$, т. е.

$$3/2 m\omega_V r^2 = m\omega_{IV} r^2(\cos \alpha + 1/2),$$

поэтому

$$\omega_V = \omega_{IV}(2 \cos \alpha + 1)/3. \quad (5)$$

Проверим найденное выражение угловой скорости цилиндра по теореме Карно:

$$T_{IV} - T_V = T^*.$$

Кинетическая энергия цилиндра в начале удара о наклонную плоскость

$$T_{IV} = 1/2(mv_{CIV}^2 + J_C \omega_{IV}^2).$$

Кинетическая энергия цилиндра в конце удара о наклонную плоскость

$$T_V = 1/2(mv_{CV}^2 + J_C \omega_V^2).$$

Кинетическую энергию, соответствующую потерянным скоростям точек цилиндра, найдем, используя формулу (2) (рис. 170, б):

$$T^* = 1/2m[(v_{CIV} - v_{CV})^2 + (v_{CIV} - v_{CV})^2] + 1/2J_C(\omega_{IV} - \omega_V)^2,$$

т. е.

$$T^* = 1/2m[(v_{CIV} - v_{CV} \cos \alpha)^2 + v_{CV}^2 \sin^2 \alpha] + 1/2J_C(\omega_{IV} - \omega_V)^2,$$

или

$$T^* = 1/2m(v_{CIV}^2 - 2v_{CIV}v_{CV} \cos \alpha + v_{CV}^2) + 1/2J_C(\omega_{IV} - \omega_V)^2.$$

Так как

$$v_{CIV} = \omega_{IV}r, \quad v_{CV} = \omega_V r,$$

то, приравнявая $T_{IV} - T_V$ и T^* , получаем

$$\begin{aligned} 1/2m\omega_{IV}^2 r^2 + 1/4mr^2\omega_{IV}^2 - 1/2m\omega_V^2 r^2 - 1/4mr^2\omega_V^2 = 1/2m\omega_{IV}^2 r^2 + \\ + m\omega_{IV}\omega_V r^2 \cos \alpha + 1/2m\omega_V^2 r^2 + 1/4mr^2\omega_{IV}^2 - \\ - 1/2mr^2\omega_{IV}\omega_V + 1/4mr^2\omega_V^2, \end{aligned}$$

или

$$3/2\omega_V^2 = \omega_{IV}\omega_V(\cos \alpha + 1/2),$$

откуда

$$\omega_V = \omega_{IV}(2 \cos \alpha + 1)/3.$$

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы и соответствующее качению цилиндра по наклонной плоскости из положения V в положение VI на расстояние s (рис. 170, в):

$$T_{VI} - T_V = \sum A_i^E.$$

Так как $T_{VI} = 0$, то

$$-\left(\frac{mv_{CV}^2}{2} + \frac{J_C \omega_V^2}{2}\right) = -G s \sin \alpha,$$

$$-\frac{m\omega_V^2 r^2}{2} - \frac{(mr^2/2)\omega_V^2}{2} = -mgs \sin \alpha,$$

т. е.

$$3/4\omega_V^2 r^2 = gs \sin \alpha,$$

откуда

$$\omega_V = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gs \sin \alpha}{3}}. \quad (6)$$

Используя выражения (3)–(5), находим

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{9\omega_V^2}{(2 \cos \alpha + 1)^2} + \frac{4gh}{3r^2}}.$$

Учитывая выражение (6), имеем

$$\omega_{II} = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{3gs \sin \alpha}{(2 \cos \alpha + 1)^2} + \frac{gh}{3}}.$$

Таким образом, скорость платформы, по (1),

$$v = \frac{3r^2}{2(r-h)} \frac{2}{r} \sqrt{\frac{3gs \sin \alpha}{(2 \cos \alpha + 1)^2} + \frac{gh}{3}},$$

т. е.

$$v = 3,68 \text{ м/с.}$$

Найдем ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны ступеньки, для чего составим уравнения, выражающие теорему об изменении количества движения механической системы при ударе, в проекциях на оси x и y (рис. 170, а):

$$mv_{CII_x} - mv_{CI_x} = \sum S_{ix}^E; \quad mv_{CII_y} - mv_{CI_y} = \sum S_{iy}^E,$$

или

$$-mv_{CII} \cos \beta - (-mv_{CI}) = S_{Dx}; \quad mv_{CII} \sin \beta = S_{Dy},$$

откуда

$$S_{Dx} = mv_{CI} - mv_{CII} \cos \beta = mv - m\omega_{II}r(r-h)/r = mv[1 - 2/3(r-h)^2/r^2],$$

т. е.

$$S_{Dx} = 1055 \text{ Н} \cdot \text{с},$$

$$S_{Dy} = mv_{CII} \sin \beta = m\omega_{II}r\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \\ = 2/3(r-h)(mv/r)\sqrt{1 - (r-h)^2/r^2},$$

т. е.

$$S_{Dy} = 589 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны ступеньки,

$$S_D = \sqrt{S_{Dx}^2 + S_{Dy}^2},$$

или $S_D = 1208 \text{ Н} \cdot \text{с}.$

Найдем ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны наклонной плоскости, для чего составим уравнения, выражающие теорему об изменении количества движения системы при ударе, в проекциях на оси ξ и η (рис. 170, б):

$$mv_{CV\xi} - mv_{CIV\xi} = \sum S_{i\xi}^E; \quad mv_{CV\eta} - mv_{CIV\eta} = \sum S_{i\eta}^E,$$

или

$$-(-mv_{CIV} \sin \alpha) = S_{F\xi}; \quad mv_{CV} - mv_{CIV} \cos \alpha = S_{F\eta},$$

откуда

$$S_{F\xi} = mv_{CIV} \sin \alpha = m\omega_{IV}r \sin \alpha = m3\omega_{VR} \sin \alpha / [(2 \cos \alpha + 1)];$$

$$S_{F\eta} = mv_{CV} - mv_{CIV} \cos \alpha = m\omega_{VR}r - m\omega_{IV}r \cos \alpha = m\omega_{VR}r - m3\omega_{VR}r \cos \alpha / [(2 \cos \alpha + 1)].$$

Используя выражение (6), найдем

$$S_{F\xi} = 6m \sqrt{gs \sin \alpha / 3} \sin \alpha / [(2 \cos \alpha + 1)],$$

т. е.

$$S_{F\xi} = 691 \text{ Н} \cdot \text{с};$$

$$S_{F\eta} = 2m \sqrt{gS \sin \alpha / 3} [1 - 3 \cos \alpha / (2 \cos \alpha + 1)],$$

т. е.

$$S_{F\eta} = 133 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны наклонной плоскости,

$$S_F = \sqrt{S_{F\xi}^2 + S_{F\eta}^2},$$

или

$$S_F = 704 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

III. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Задание Д.14. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы

Схемы механизмов, находящихся под действием взаимно уравновешивающихся сил, показаны на рис. 171—173, а необходимые данные приведены в табл. 50.

Применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами сопротивления, определить величину, указанную в предпоследней графе табл. 50.

Примечание. Механизмы в вариантах 3, 6, 10, 14, 16, 18, 19, 25 и 30 расположены в вертикальной плоскости, а остальные — в горизонтальной.

Номер варианта (рис. 171-173)	Линейные размеры	Силы, Н		Момент пары сил M , Н·м	Коэффициент жесткости c , Н/см	Деформация пружины h , см	Величины подлежа- щие определению	Примечания
		Q	P					
1	$OA=10$ см	-	-	20	-	-	P	
2	$O_1A=20$ см	-	-	-	-	-	M	
3	$r_1=20$ см, $r_2=30$ см, $r_3=40$ см	-	100	100	-	-	Q	
4	$OC:OA=4:5$	-	200	-	-	4	c	
5	$OA=100$ см	-	-	10	-	-	P	
6	$r_1=15$ см, $r_2=50$ см, $r_3=20$ см, $O_1A=80$ см	200	-	-	-	-	P	Вес рукоятки O_1A не учи- вать
7	$OC=OA$	-	-	-	10	3	P	Пружина сжа- та
8	$OC=AC$	-	200	-	10	2	Q	То же
9	$OA=20$ см	200	-	-	-	-	M	
10	$r_1=15$ см, $r_2=40$ см, $r_3=30$ см, $OA=100$ см	$2 \cdot 10^3$	-	-	-	4	c	Вес рукоятки OA не учиты- вать
11	$OA=20$ см	-	-	300	-	-	P	
12	$O_1D=60$ см, $OA=$ $=20$ см	-	-	100	-	-	P	
13	$OA=40$ см	-	-	200	-	-	P	
14	$OB=2 \cdot OA$	20	-	-	25	3	P	Вес стержней OA и OB не учи- тывать; пружи- на растянута
15	$AC=OC=OD$	$3 \cdot 10^3$	-	-	250	3	P	Пружина сжа- та
16	$d_1=80$ см, $d_2=25$ см $l_1=100$ см, $l_2=50$ см	$5 \cdot 10^3$	-	-	100	4	P	Вес стержней O_1A и O_2B не учитывать. Пружина сжа- та
17	$OA=20$ см	-	-	200	-	-	P	
18		200	200	-	100	-	h	P — вес блока радиусом r_2
19	$r_1=20$ см, $r_2=30$ см, $OA=25$ см	-	-	100	-	-	P	Вес звена AB не учитывать
20	$OA=AB=AC=50$ см	50	100	-	-	-	M	
21	$OA=AB=AC=DC=$ $=25$ см	-	200	-	-	-	M	
22	$OA=40$ см	-	-	400	-	-	P	
23	$OC=2OA=100$ см	-	200	50	50	-	h	
24	$AD=OD=OB$ см	-	250	-	150	2,5	Q	Пружина сжа- та
25	$OD=DB=0,8 AO$	400	-	-	120	3	P	Вес стержней AO и BO не учи- тывать. Пружи- на растянута
26	$OA=25$ см	-	500	120	-	2	c	Пружина рас- тянута
27	$OB=AB$	-	-	-	180	2	P	
28	$OB=5/4OA$	-	450	-	-	-	Q	
29	$AO=30$ см, $BD=O_1D$	-	-	120	100	-	h	
30	$r_1=15$ см, $r_2=36$ см, $r_3=10$ см, $r_4=20$ см	-	600	-	-	-	Q	

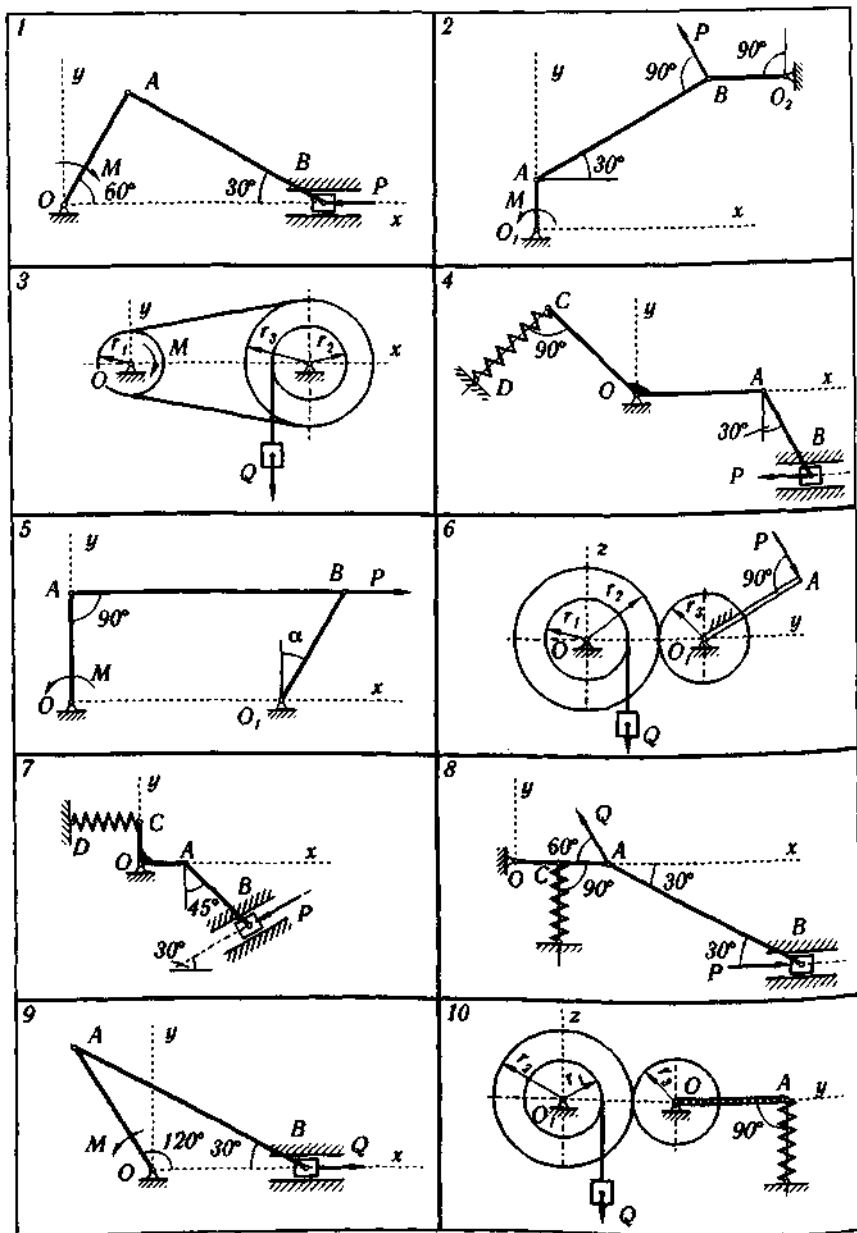


Рис. 171

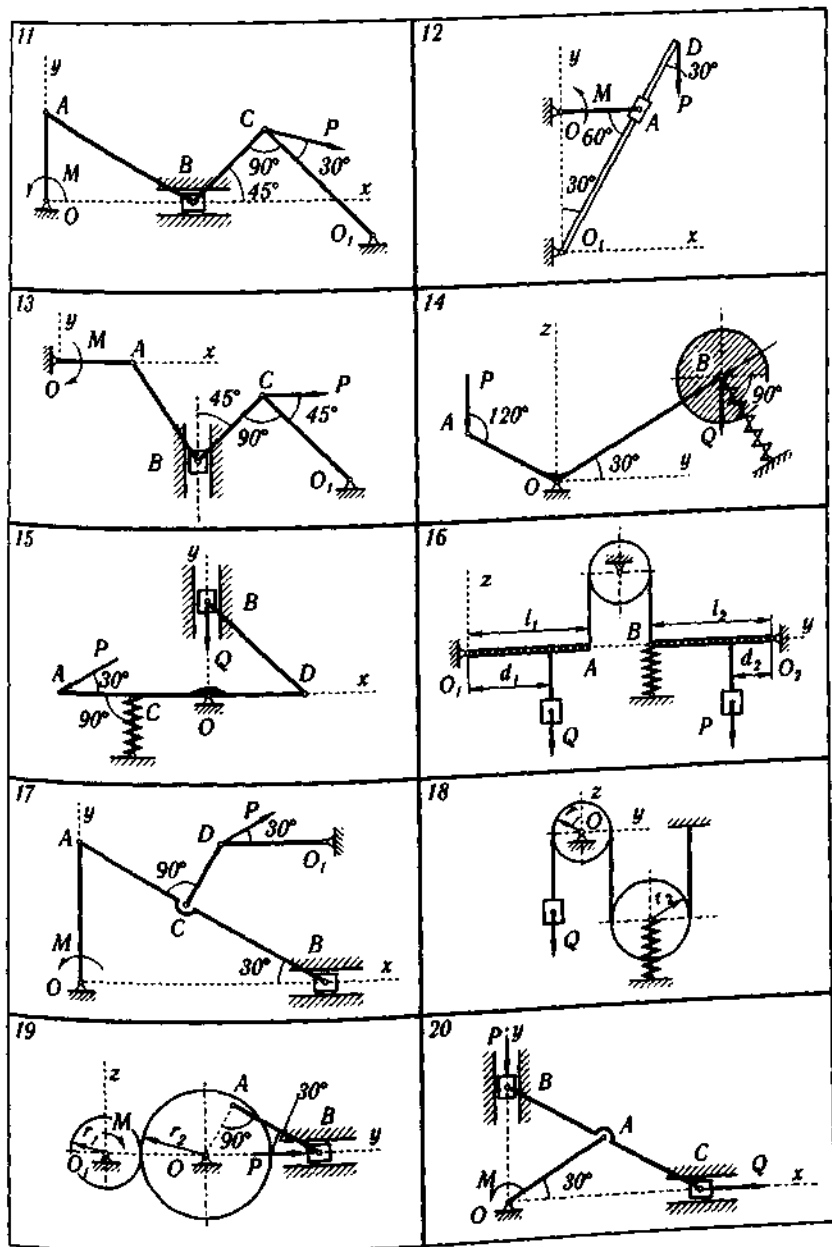


Рис. 172

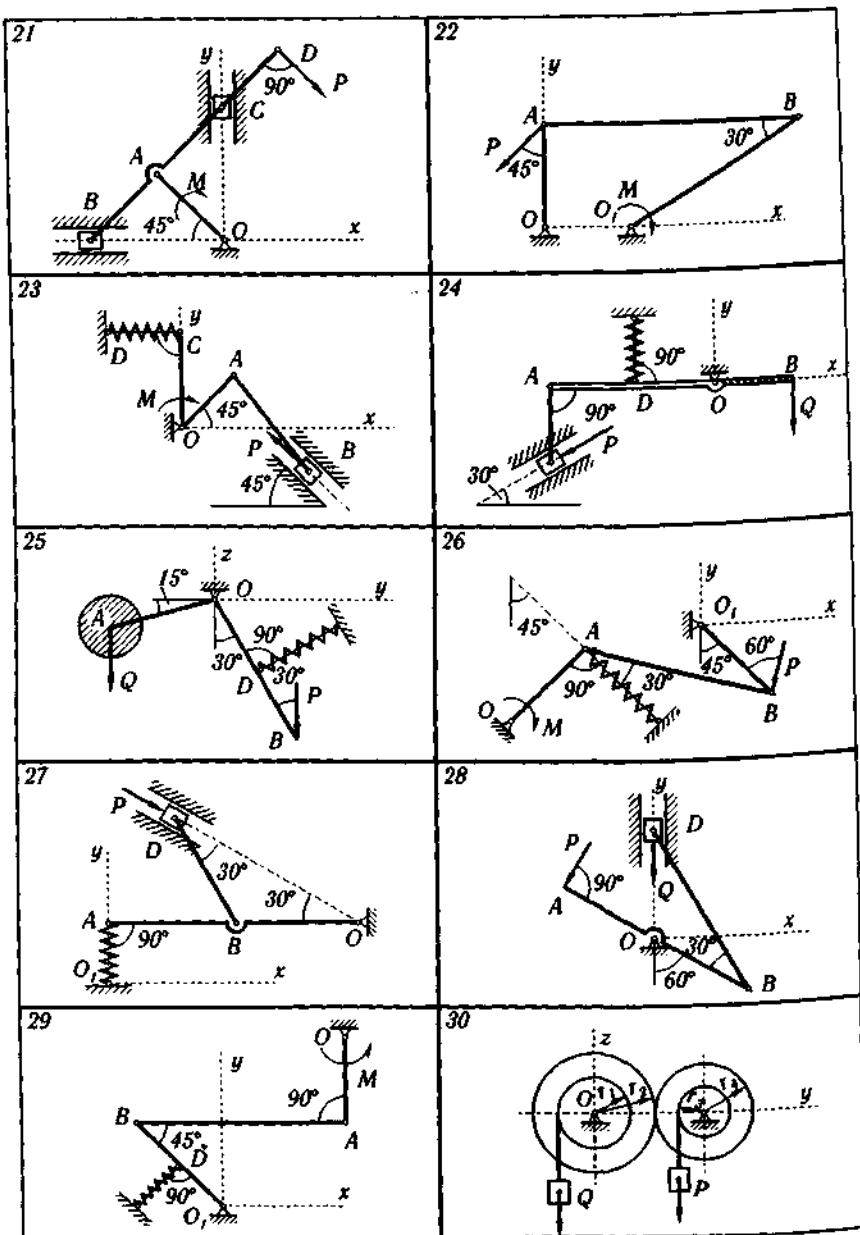


Рис. 173

Пример выполнения задания. Дано: $Q = 100 \text{ Н}$; $c = 5 \text{ Н/см}$; $r_1 = 20 \text{ см}$; $r_2 = 40 \text{ см}$; $r_3 = 10 \text{ см}$; $OA = l = 50 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 90^\circ$ (рис. 174).

Определить деформацию h пружины, пренебрегая весом звеньев OA и AB .

Решение. Рассматриваемый механизм (рис. 174) находится под действием следующей системы уравновешивающихся сил: силы упругости $\vec{F}$, сил тяжести $\vec{G}_1$ вала 1 с шестерней 2, $\vec{G}_3$ шестерни 3, $\vec{G}_4$ ползуна B , $\vec{Q}$ груза и реакций опор.

Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$\sum P_i \delta s_i \cos(\vec{P}_i, \delta \vec{s}_i) = 0.$$

Связи, наложенные на механизм, допускают следующие возможные перемещения его звеньев: поворот вала 1 с шестерней 2 на угол $\delta\varphi_1$, поворот шестерни 3 на угол $\delta\varphi_3$ и поступательное перемещение груза по вертикали на δs_Q . Ползун B может иметь перемещение δs_B (перемещение по горизонтали), а точка A — перемещение δs_A (отрезок δs_A перпендикулярен OA). Уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений, получает вид

$$Q \delta s_Q - F \delta s_B = 0. \quad (1)$$

Найдем зависимость между возможными перемещениями точек системы. Поскольку нить, к которой привязан груз Q , нерастяжима и скольжение между нитью и валом 1 отсутствует, перемещение груза Q равно перемещению точки обода колеса 1. Поэтому угол поворота вала 1 и шестерни 2

$$\delta\varphi_1 = \delta s_Q / r_1.$$

Перемещение точки K обода колеса 2

$$\delta s_1 = r_2 \delta\varphi_1 = (r_2 / r_1) \delta s_Q.$$

Так как скольжение между шестернями 2 и 3 отсутствует, то возможные перемещения точек касания этих шестерен равны и угол поворота шестерни 3

$$\delta\varphi_3 = \delta s_1 / r_3 = [r_2 / (r_1 r_3)] \delta s_Q.$$

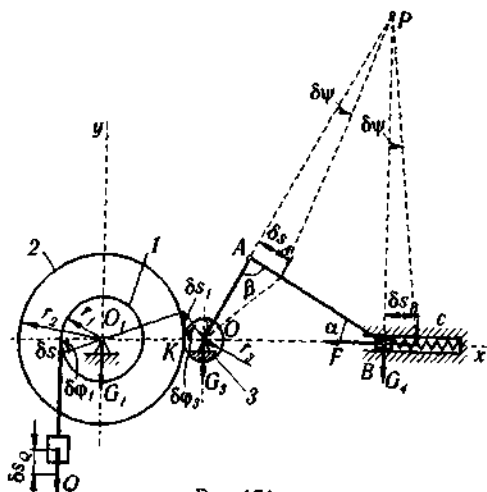


Рис. 174

Перемещение точки A кривошипа, жестко соединенного с колесом,

$$\delta s_A = OA \delta \varphi_3 = [r_2 l / (r_1 r_3)] \delta s_Q.$$

Для определения зависимости между возможными перемещениями δs_A и δs_B найдем положение мгновенного центра вращения звена AB — точки P .

Тогда

$$\delta s_B / \delta s_A = PB / PA; \quad \delta s_B = (PB / PA) \delta s_A.$$

Из $\triangle APB$

$$PB / PA = 1 / \cos 30^\circ.$$

Теперь

$$\delta s_B = [r_2 l / (r_1 r_3 \cos 30^\circ)] \delta s_Q.$$

Сила упругости пружины пропорциональна ее деформации: $F = ch$. Подставив в уравнение работ (1) выражения силы упругости и возможных перемещений точек системы, получим

$$Q \delta s_Q - ch [r_2 l / (r_1 r_3 \cos 30^\circ)] \delta s_Q = 0,$$

откуда

$$h = \frac{Q r_1 r_3 \cos 30^\circ}{c r_2 l}; \quad h \approx 1,74 \text{ см.}$$

Следовательно, пружина сжата на 1,74 см.

Решим ту же задачу составлением уравнения мощностей, выражающего принцип возможных скоростей:

$$\sum \vec{P}_i \vec{v}_i = 0,$$

или

$$\sum P_i v_i \cos(\vec{P}_i, \vec{v}_i) = 0.$$

Сообщим валу 1 с шестерней 2 возможную угловую скорость ω_{1-2} вокруг оси O_1 , допустим, по часовой стрелке (рис. 175). Груз Q получит вертикальную ско-

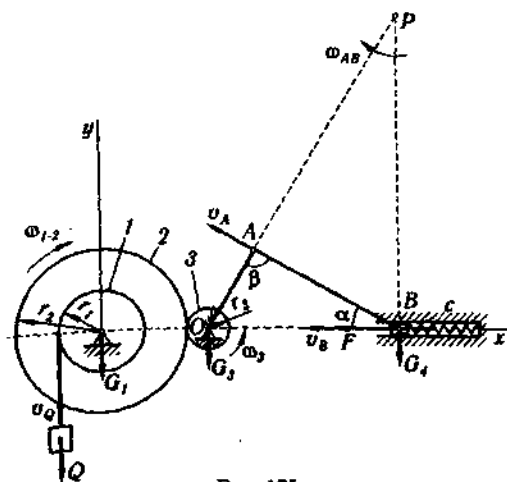


Рис. 175

рость v_Q . Шестерня 3 вместе с жестко соединенным с нею кривошипом OA приобретает угловую скорость ω_3 вокруг оси O . Звено AB будет иметь угловую скорость ω_{AB} , которую покажем вокруг мгновенного центра скоростей P_{AB} , находящегося на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ точек A и B звена AB (скорость $\vec{v}_A$

точки A , принадлежащей кривошипу OA , направлена перпендикулярно OA , а скорость v_B точки B , принадлежащей ползуну, направлена параллельно его направляющим).

Составим уравнение мощностей:

$$-Qv_Q + Fv_B = 0,$$

или

$$-Qv_Q + chv_B = 0.$$

Здесь неизвестными являются деформация пружины h , а также скорости v_Q и v_B .

Скорость груза равна скорости точек обода колеса, так как нить, к которой подвешен груз, нерастяжима, и поэтому

$$v_Q = \omega_1 \cdot 2r_1.$$

Скорости точек касания K шестерен 2 и 3 выражаются соответственно следующим образом:

$$v_K = \omega_1 \cdot 2r_2; \quad v_K = \omega_3 r_3;$$

они равны между собой, так как проскальзывание шестерен отсутствует.

Скорость точки A можно выразить двояко, поскольку она принадлежит кривошипу OA и звену AB одновременно:

$$v_A = \omega_3 \cdot OA; \quad v_A = \omega_{AB} \cdot AP.$$

Скорость точки B звена AB

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP.$$

Таким образом,

$$\omega_1 \cdot 2r_2 = \omega_3 r_3; \quad \omega_3 \cdot OA = \omega_{AB} \cdot AP,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 \cdot 2r_2}{r_3}; \quad \omega_{AB} = \frac{\omega_3 \cdot OA}{AP} = \frac{\omega_1 \cdot 2r_2 \cdot OA}{r_3 \cdot AP}.$$

Скорость точки B

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = \frac{\omega_1 \cdot 2r_2 \cdot OA \cdot BP}{r_3 \cdot AP}.$$

Из $\triangle APB$

$$AP = BP \cdot \cos 30^\circ.$$

Следовательно,

$$v_B = \frac{\omega_1 \cdot 2r_2 \cdot OA}{r_3 \cos 30^\circ}.$$

Итак, уравнение мощностей приобретает вид

$$-Q\omega_1 \cdot 2r_1 + ch \frac{\omega_1 \cdot 2r_2 l}{r_3 \cos 30^\circ} = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на ω_{1-2} , найдем искомую деформацию пружины:

$$h = \frac{Q r_1 r_2 \cos 30^\circ}{c r_2 l}.$$

Задание Д.15. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор составной конструкции.

Схемы конструкций показаны на рис. 176—178, а необходимые для решения данные приведены в табл. 51. На рисунках все размеры указаны в метрах.

Таблица 51

Номер варианта	Нагрузка				Номер варианта	Нагрузка			
	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кН·м		P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кН·м
(рис. 176—178)					(рис. 176—178)				
1	15	14	3	10	16	3	10	2	10
2	13	12	2	6	17	1	8	1	8
3	11	10	1	5	18	3	6	3	6
4	9	8	3	14	19	5	4	2	7
5	7	6	2	12	20	7	2	1	5
6	8	5	1	4	21	10	9	2	4
7	7	4	2	10	22	8	7	1	7
8	6	6	1	7	23	6	5	2	8
9	5	8	3	8	24	4	3	1	3
10	4	10	2	6	25	2	1	2	2
11	12	11	1	12	26	7	1	2	7
12	10	6	2	10	27	6	2	1	5
13	9	5	1	6	28	5	3	2	10
14	7	10	2	13	29	4	4	1	5
15	6	8	1	5	30	3	5	2	10

Пример выполнения задания. Дано: составная рама (рис. 179); $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 4$ кН; $M = 5$ кН·м; $q = 1,5$ кН/м.
Определить реакции опор рамы.

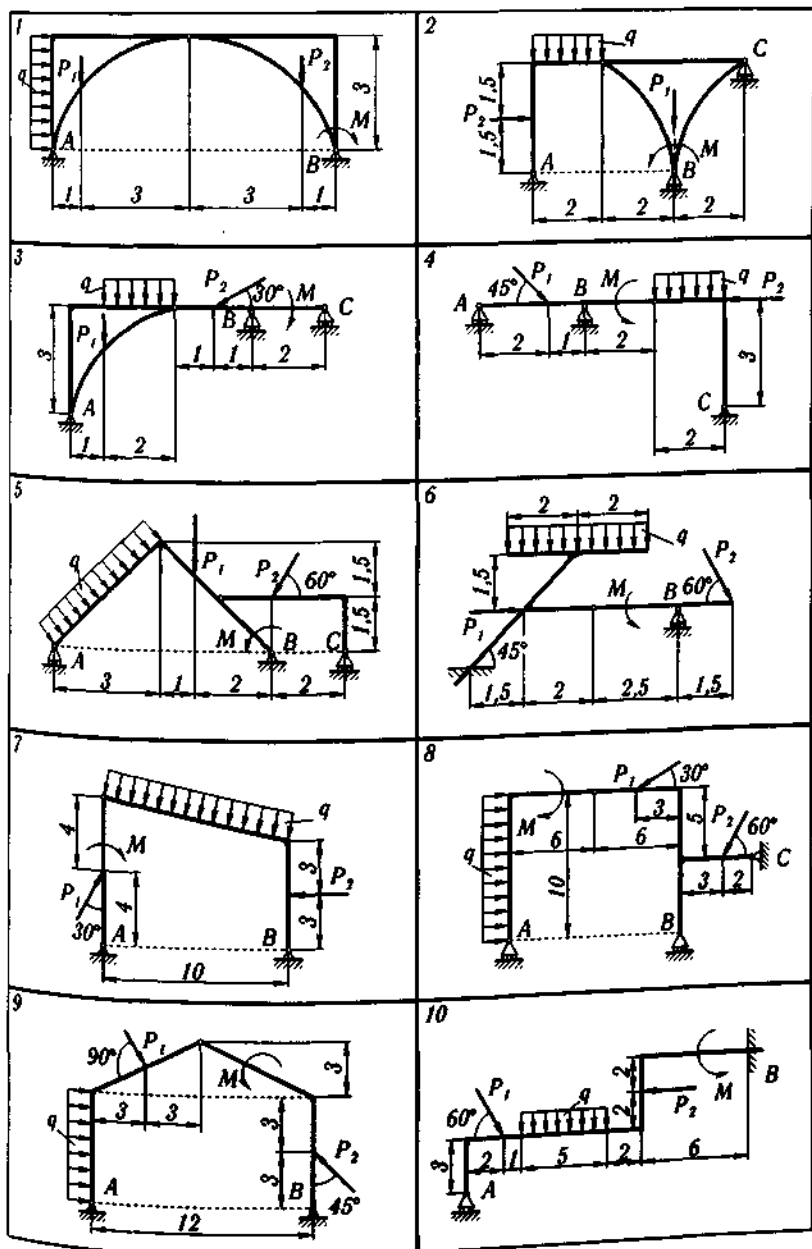


Рис. 176

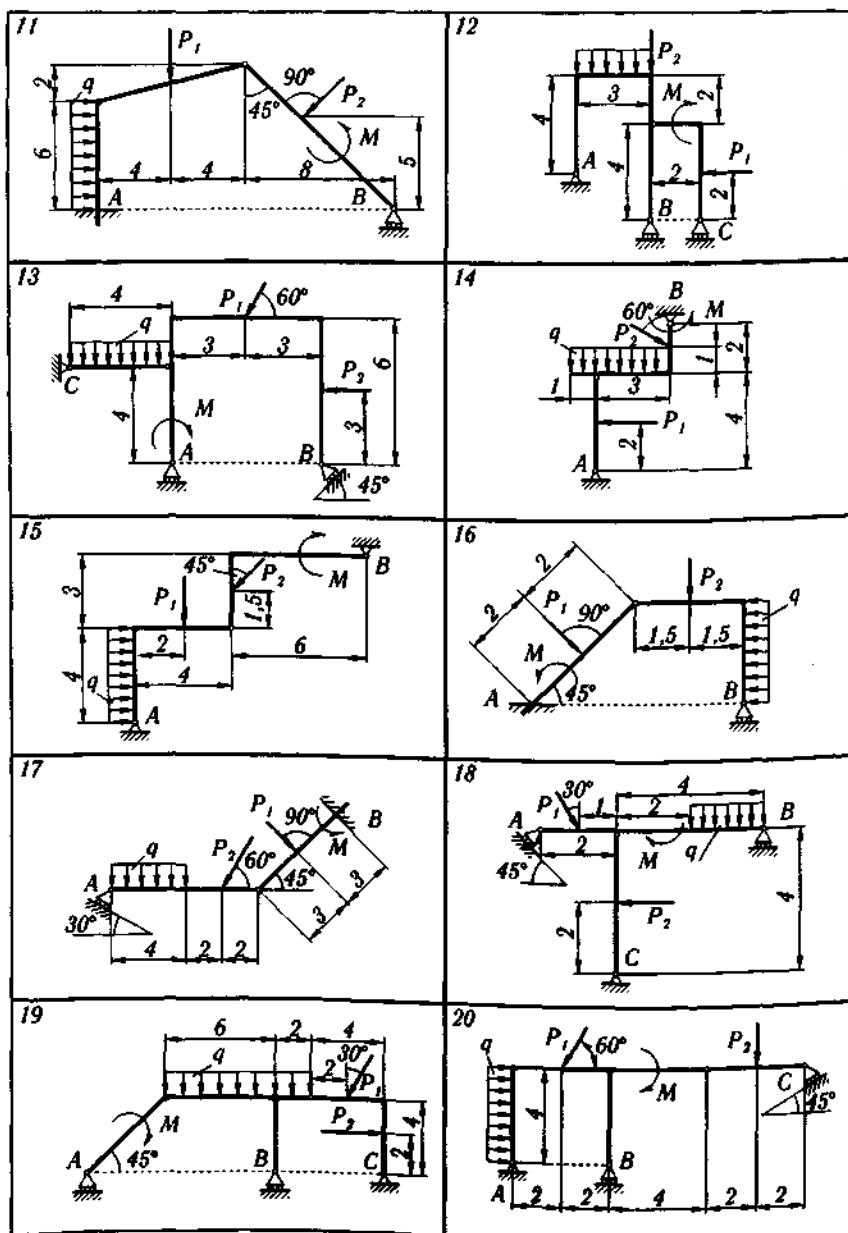


Рис. 177

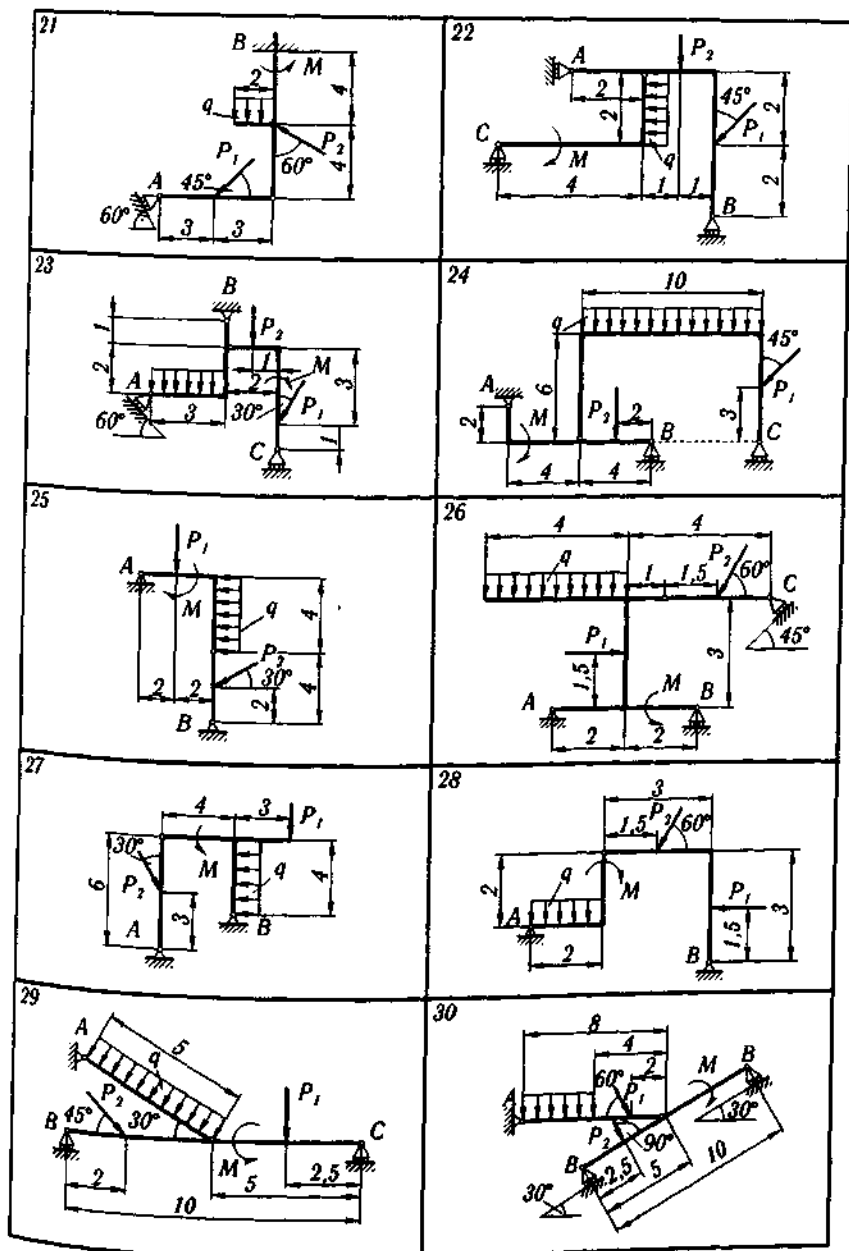


Рис. 178

Решение. Заменяем равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = q \cdot 4 = 1,5 \cdot 4 = 6$ кН, приложенной в середине загруженного участка.

Найдем реакцию подвижной опоры A , для чего мысленно отбросим эту связь, заменив ее действием реакции (рис. 180).

Возможным перемещением левой части рамы является ее поворот вокруг шарнира C на угол $\delta\varphi$, например против вращения часовой стрелки; правая часть рамы останется неподвижной.

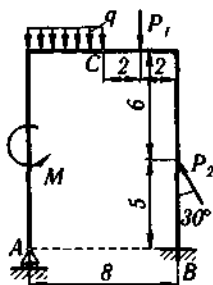


Рис. 179

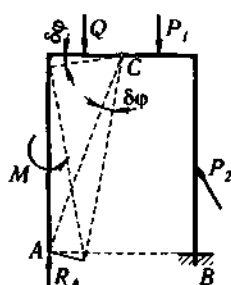


Рис. 180

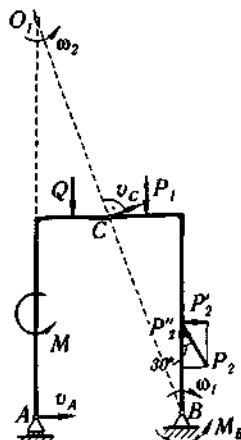


Рис. 181

Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений, при этом учтем, что работа силы при повороте тела равна произведению момента силы относительно центра вращения на угол поворота тела:

$$Q \cdot 2\delta\varphi + M\delta\varphi - R_A \cdot 4\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$R_A = (Q \cdot 2 + M)/4; \quad R_A = 4,25 \text{ кН}.$$

Для определения реакций заделки воспользуемся уравнением возможных мощностей

$$\sum \vec{F}_i \vec{v}_i = 0,$$

где $\vec{v}$ — возможные скорости.

Сначала найдем реактивный момент M_B . Для этого отбросим связь, препятствующую повороту правой части рамы, заменив заделку шарнирной неподвижной опорой и приложив искомый момент M_B (рис. 181).

Сообщим правой части рамы возможную угловую скорость ω_1 вокруг оси B по направлению вращения часовой стрелки. Левая часть рамы получит угловую скорость ω_2 вокруг мгновенного центра скоростей O_1 , находящегося на пересечении перпендикуляров к скоростям

$\vec{v}_C$ и $\vec{v}_A$ точек C и A (скорость точки C направлена перпендикулярно CB , а скорость точки подвижной опоры направлена параллельно опорной плоскости).

Скорость точки C можно выразить двояко, поскольку эта точка принадлежит левой и правой части: $v_C = \omega_1 \cdot CB$; $v_C = \omega_2 \cdot CO_1$, т. е.

$$\omega_1 \cdot CB = \omega_2 \cdot CO_1,$$

откуда

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \text{ поскольку } CB = CO_1.$$

Составим уравнение возможных мощностей:

$$M\omega - Q \cdot 2\omega - P_1 \cdot 2\omega - P'_2 \cdot 5\omega - M_B\omega = 0,$$

где

$$P'_2 = P_2 \sin 30^\circ.$$

Из уравнения следует

$$M_B = M - Q \cdot 2 - P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 0,5 \cdot 5.$$

Отсюда

$$M_B = -21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения вертикальной составляющей $\vec{Y}_B$ реакции заделки отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки B , заменив жесткую заделку скользящей (вертикальными направляющими) и приложив реакцию $\vec{Y}_B$ (рис. 182).

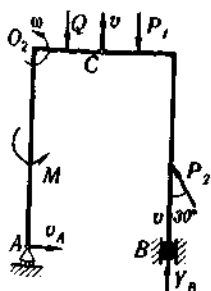


Рис. 182

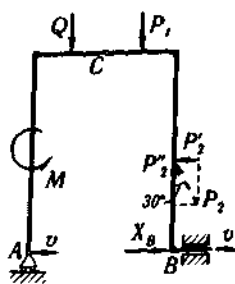


Рис. 183

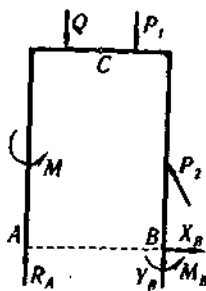


Рис. 184

Сообщим правой части рамы возможную скорость $\vec{v}$ поступательного движения вверх (направляющие исключают возможность поворота правой части).

Левая часть рамы получит угловую скорость ω вокруг мгновенного центра скоростей O_2 , находящегося на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_C$ и $\vec{v}_A$ точек C и A ($\vec{v}_C = \vec{v}$). Составим уравнение возможных мощностей:

$$M\omega - Q \cdot 2\omega - P_1 \cdot v - P'_2 \cdot v + Y_B \cdot v = 0,$$

где

$$P_2'' = P_2 \cos 30^\circ, \quad v = v_C = \omega \cdot CO_2 = \omega \cdot 4.$$

Следовательно,

$$M\omega - Q \cdot 2\omega - P_1 \cdot 4\omega + P_2 \cdot 0,866 \cdot 4\omega + Y_B \cdot 4\omega = 0,$$

откуда

$$Y_B = (-M + Q \cdot 2 + P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 0,866 \cdot 4)/4 = 0,29 \text{ кН}.$$

Для определения горизонтальной составляющей $\vec{X}_B$ реакции заделки отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению точки B , заменив жесткую заделку скользящей (горизонтальными направляющими) и приложив реакцию $\vec{X}_B$ (рис. 183).

Сообщим правой части рамы возможную скорость $\vec{v}$ поступательного движения вправо (направляющие исключают возможность поворота правой части). Скорости точек C и A левой части будут параллельны. Следовательно, левая часть рамы, как и правая, получит скорость $\vec{v}$ поступательного движения.

Составим уравнения возможных мощностей:

$$-P_2 \cos 60^\circ \cdot v + X_B \cdot v = 0,$$

откуда

$$X_B = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН}.$$

Проверим правильность решения задачи.

Убедимся, что найденные числовые значения величин удовлетворяют уравнениям равновесия сил для всей рамы (рис. 184):

$$\sum Y_i = 0 \text{ и } \sum M_{iB} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum Y_i = R_A - Q - P_1 + P_2 \cos 30^\circ + Y_B &= 4,25 - 6 - 2 + 4 \cdot 0,87 + 0,29 = \\ &= 8,02 - 8,00 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iB} = -R_A \cdot 8 + M + Q \cdot 6 + P_1 \cdot 2 + P_2 \cos 60^\circ \cdot 5 + M_B &= \\ = -4,25 \cdot 8 + 5 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 5 - 21 &= 55 - 55 = 0. \end{aligned}$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Задание Д.16. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Определить реакции внешних связей механической системы:

- а) в произвольный момент времени — для вариантов 4, 5, 10, 12—14, 16—18, 21—30 (рис. 185—187);
- б) в момент времени $t = t_1$ — для вариантов 1, 8, 9, 11, 20;
- в) в тот момент времени, когда угол поворота $\varphi = \varphi_1$, — для вариантов 2, 3, 6, 7;

г) в положении, показанном на чертеже для вариантов 15 и 19.

На схемах (рис. 185—187) плоскость xOy (xAy) горизонтальна, плоскость yOz (yAz) вертикальна. Необходимые для решения данные приведены в табл. 52, в которой ω — угловая скорость, φ_0 и ω_0 — значения угла поворота и угловой скорости в начальный момент времени.

Таблица 52

Номер варианта (рис. 185—187)	m_1	m_2	l	R	M	ω (const) рад/с	t_1	φ_1	φ_0	ω_0	Примечания
	кг		м		Н·м	с	град			рад/с	
1	20	—	0,60	—	1,0	—	10	—	0	0	При $t=t_1$ координаты центров тяжести шкивов C_1 и C_2 ; $x_{C_1}=0$; $y_{C_1}= -0,1$ см; $z_{C_1}=a+b$; $x_{C_2}=0,1$ см; $y_{C_2}=0$; $z_{C_2}=a$
2	25	—	0,50	—	—	—	—	60	0	0	
3	40	—	0,80	—	—	—	—	60	0	6,3	
4	20	—	0,80	—	—	—	—	—	—	—	
5	30	1,5	0,60	—	—	—	—	—	—	—	
6	40	—	—	0,30	—	—	—	30	0	0	
7	20	—	—	0,25	—	—	—	60	0	5,5	
8	50	—	—	0,30	4,0	—	5	—	0	0	
9	20	30	0,50	0,10	20–0,1 t	—	200	—	—	0	
10	20	5	0,25	—	—	—	—	—	—	—	При $t=t_1$ ось стержня 1 параллельна оси y , а ось стержня 2 параллельна оси x ; $l_1=25$, $l_2=40$ см
11	25	40	0,30	—	5–0,1 t	—	50	—	—	0	
12	30	—	0,40	—	—	10	—	—	—	—	
13	25	25	0,40	—	—	15	—	—	—	—	
14	20	20	0,40	—	—	—	—	—	—	—	Радиус инерции ротора 2 двигателя 3 $i_x=0,10$ м
15	20	45	0,20	—	—	8	—	—	—	—	
16	80	20	—	0,10	65	—	—	—	—	—	
17	100	10	1,50	—	160	—	—	—	—	—	
18	30	—	0,40	—	—	12	—	—	—	—	

Номер варианта (рис. 185-187)	m_1	m_2	l	R	M	$\omega, (\text{const}) \text{ рад/с}$	t_1	φ_1	φ_0	$\omega_0, \text{ рад/с}$	Примечания
	кг		м		Н·м		с	град			
19	40	-	0,60	-	-	9	-	-	-	-	Радиус инерции ротора 2 двигателя 3 $i_x=0,12 \text{ м}$
20	40	-	-	0,30	3,0	-	4	-	0	2,0	
21	80	10	1,20	0,15	124	-	-	-	-	-	
22	100	40	-	0,20	216	-	-	-	-	-	
23	30	-	0,60	-	-	9	-	-	-	-	
24	60	20	0,50	-	-	-	-	-	-	-	Радиус инерции шкива 3 $i_x=0,18 \text{ м}$ То же, $i_x=0,22 \text{ м}$ » $i_x=0,15 \text{ м}$ $P=1300 \text{ Н}$
25	50	70	-	0,20	-	-	-	-	-	-	
26	80	200	1,50	0,25	-	-	-	-	-	-	
27	100	150	1,20	0,20	-	-	-	-	-	-	
28	80	40	-	-	-	-	-	-	-	-	
29	20	20	0,42	-	-	-	-	-	-	-	
30	50	-	0,60	-	-	12	-	-	-	-	

Примечания: 1. Вращающиеся тела, для которых не указан радиус инерции, рассматривать как тонкие однородные стержни (варианты 1-5, 11-15, 18, 19, 23, 24, 29, 30) или сплошные однородные диски (варианты 6-9, 16, 20, 22, 28); в варианте 10 тело 2 рассматривать как материальную точку.

2. На схемах 1, 8, 9, 11, 16, 17, 20-22 указаны внешние моменты M .

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 5$ кг; $l_1 = 0,30$ м, $l_2 = 0,20$ м; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 120$ рад/с = const. Схема системы и необходимые размеры приведены на рис. 188, а.

Найти реакции подпятника A , подшипника B , а также пружины DN . Поперечными размерами стержней 1, 2, 3 и массой пружины пренебречь.

Решение. Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера. Так как $\omega = \text{const}$, рассмотрим только центробежные силы инерции частиц каждого стержня. Известно, что главный вектор сил инерции точек вращающегося тела определяется по формуле

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_C,$$

где m — масса тела, а $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс тела.

Равнодействующая сил инерции точек тела равна их главному вектору. Поэтому для стержней 1 и 2

$$\Phi_1 = m_1 a_{C1} = m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2);$$

$$\Phi_2 = m_2 a_{C2} = m_2 \omega^2 \cdot 0,5l_2.$$

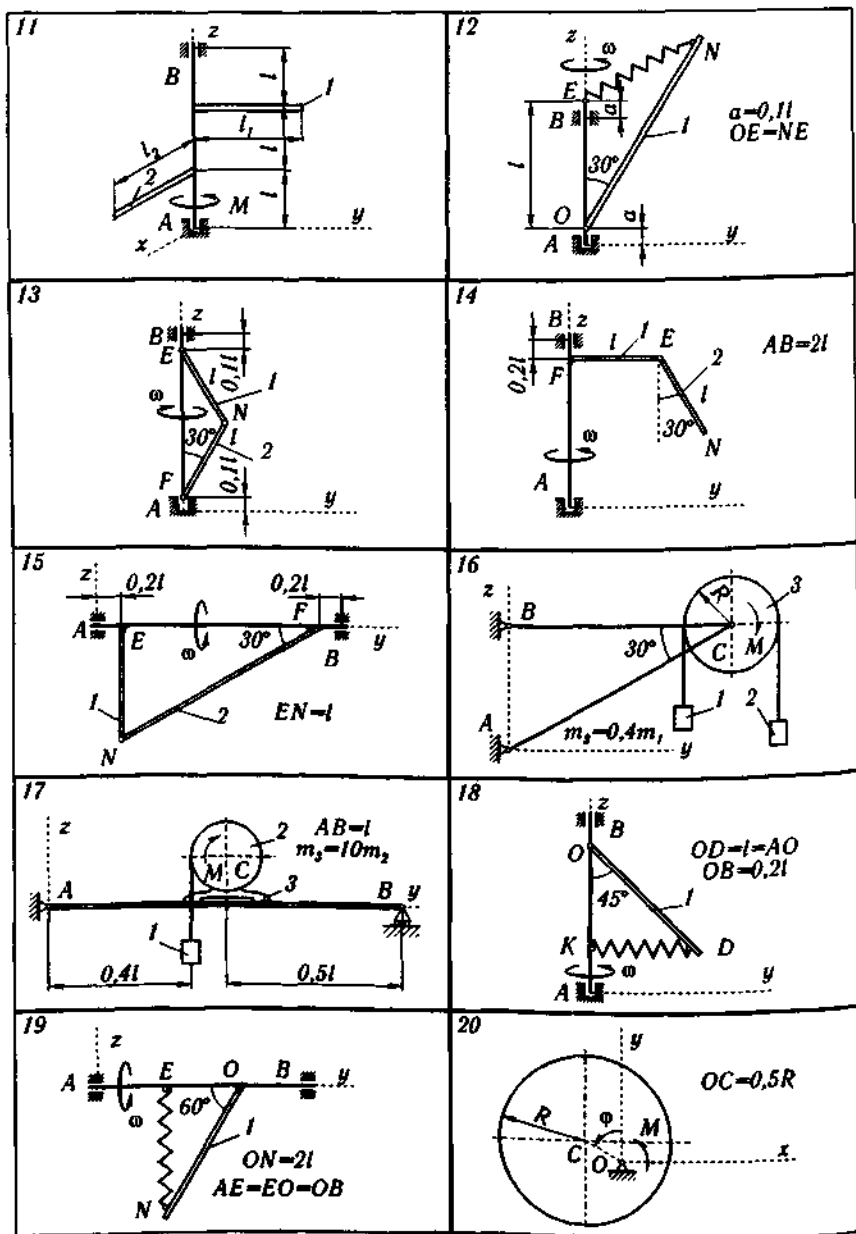


Рис. 186

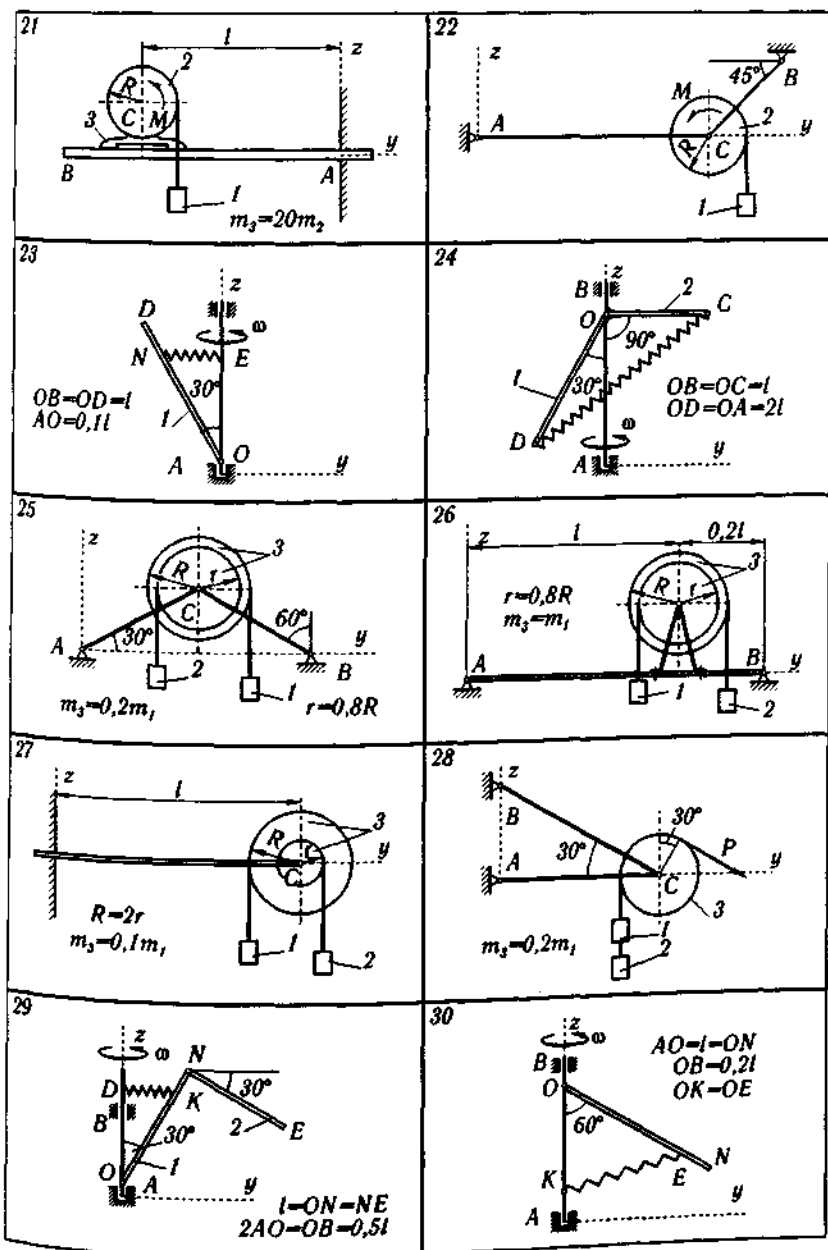


Рис. 187

Для определения реакций опор необходимо знать точку приложения силы $\vec{\Phi}_1$ (линия действия силы $\vec{\Phi}_2$ совпадает с осью стержня 2 и поэтому определена). Так как сумма моментов параллельных сил инерции точек стержня относительно точки O равна моменту равнодействующей этих сил, то

$$\Phi_1 h = \int_0^{l_1} \xi \cos \alpha d\Phi,$$

где h — плечо силы $\vec{\Phi}_1$ относительно точки O ; $d\Phi$ — сила инерции элемента стержня длиной $d\xi$; ξ — координата элемента стержня (рис. 188, б).

Используя значение силы $\vec{\Phi}_1$ и учитывая, что

$$d\Phi = (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma d\xi,$$

где γ — масса участка стержня единичной длины, получаем

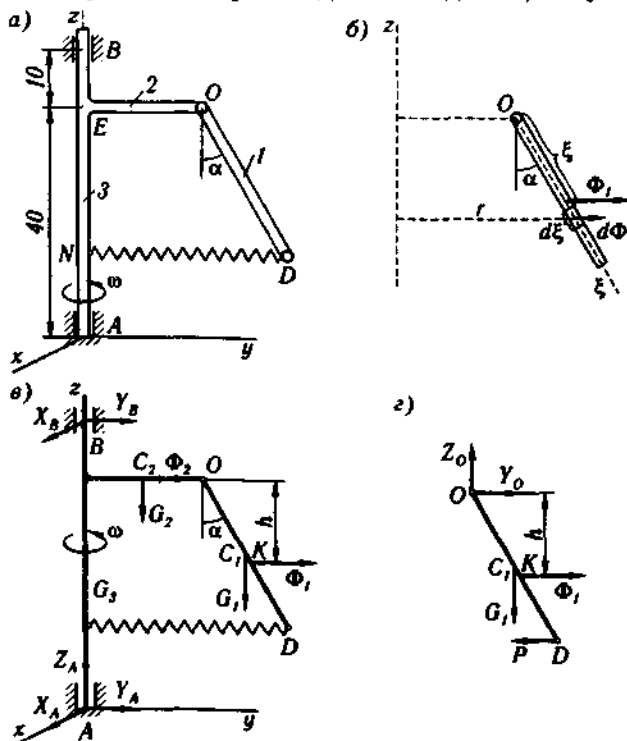


Рис. 188

$$m_1 \omega^2 (0,5 l_1 \sin \alpha + l_2) h = \int_0^{\xi} (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma \xi \cos \alpha d\xi,$$

откуда после интегрирования

$$h = \frac{l_1(l_2 + 2/3 l_1 \sin \alpha) \cos \alpha}{l_1 \sin \alpha + 2 l_2} = 16,4 \cos \alpha.$$

Показываем составляющие реакции подпятника $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, Z_A и подшипника $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, силы тяжести стержней $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ и силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ (рис. 188, в). Эти силы должны удовлетворять уравнениям, вытекающим из принципа Даламбера:

$$\sum M_{ix} = 0; \quad -Y_B \cdot 50 - \Phi_2 \cdot 40 - G_2 \cdot 10 - G_1 \cdot 27,5 -$$

$$-\Phi_1(40 - 16,4 \cos \alpha) = 0 \Rightarrow Y_B = -8,47 \text{ кН};$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B + \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \Rightarrow Y_A = -6,28 \text{ кН};$$

$$\sum Z_i = 0; \quad Z_D - G_1 - G_2 - G_3 = 0;$$

$$Z_D = 0,098 \text{ кН}.$$

Так как рассматриваемые силы расположены в плоскости yAz , то

$$X_B = X_A = 0.$$

Для определения реакции пружины DN составим уравнение $\sum M_{iy} = 0$, рассматривая силы, приложенные к стержню 1 (рис. 188, г):

$$-G_1(l_1/2) \sin \alpha + \Phi_1 h - Pl_1 \cos \alpha = 0,$$

откуда $P = 6,47 \text{ кН}$.

Задание Д.17. Определение реакций опор при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Однородное тело Q массой m вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z под действием пары сил с моментом M , расположенной в горизонтальной плоскости. Определить реакции подпятника A и подшипника B в момент времени $t = t_1$, считая, что в этот момент плоскость материальной симметрии тела совпадает с плоскостью yAz . Начальная угловая скорость $\omega_0 = 0$. Массой стержней, связанных с телом Q , пренебречь.

Варианты задания показаны на рис. 189—191, необходимые данные — в табл. 53.

Пример выполнения задания. Тело Q (однородный цилиндр, из которого вырезан конус) вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 192, а).

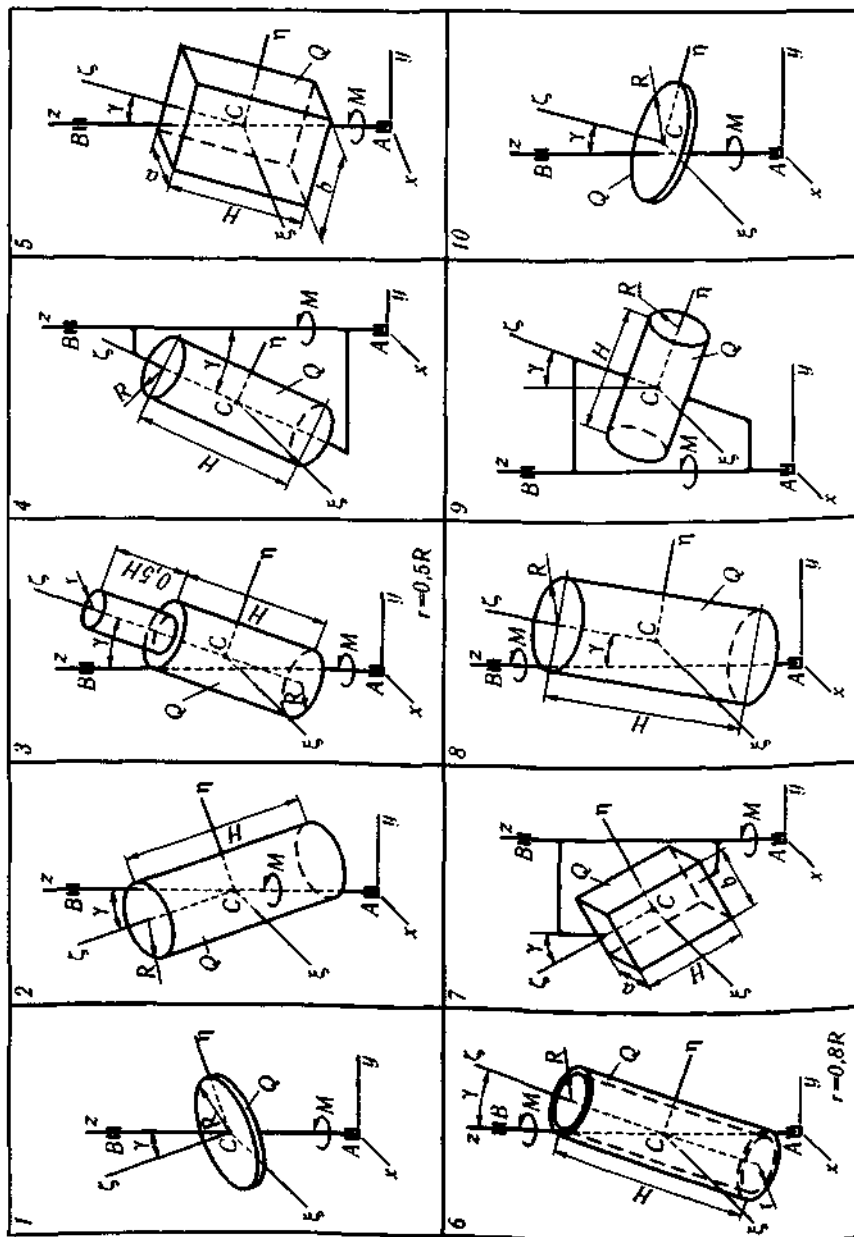


Рис. 189

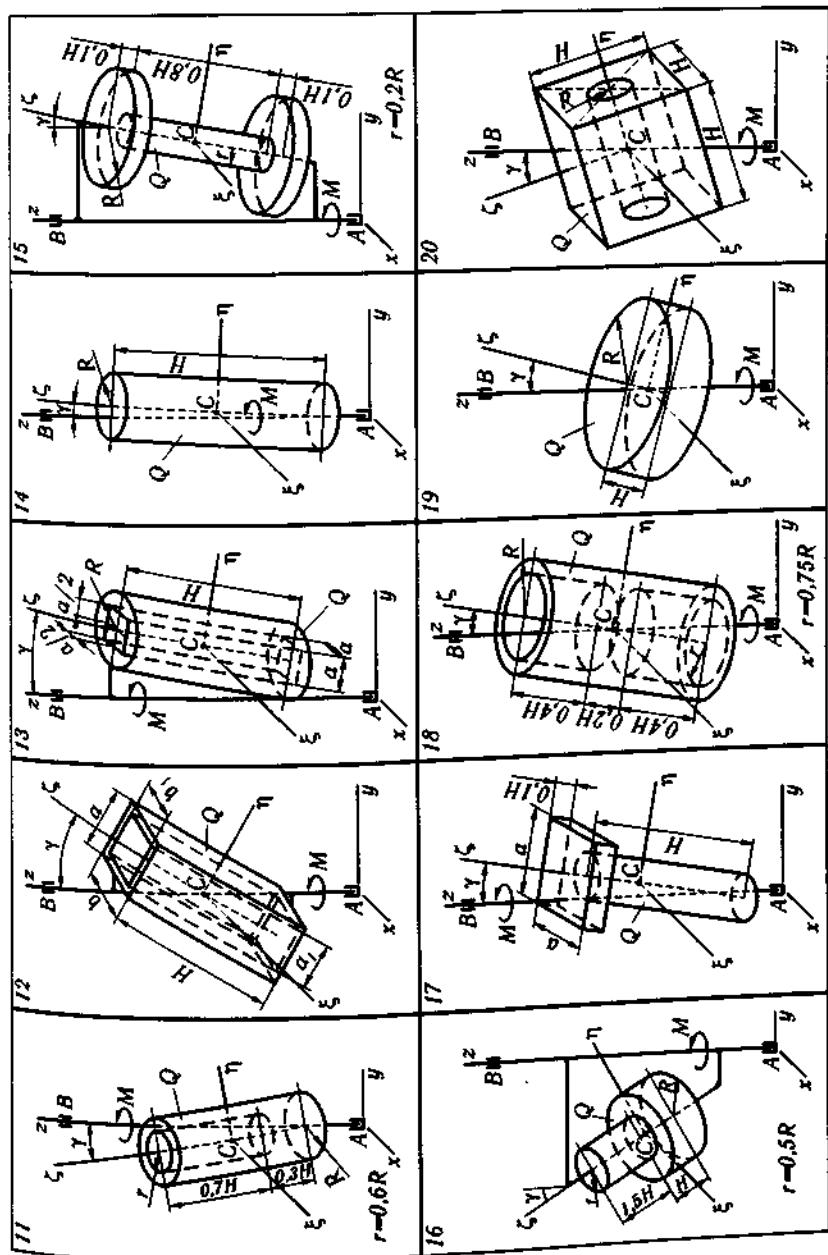


Рис. 190

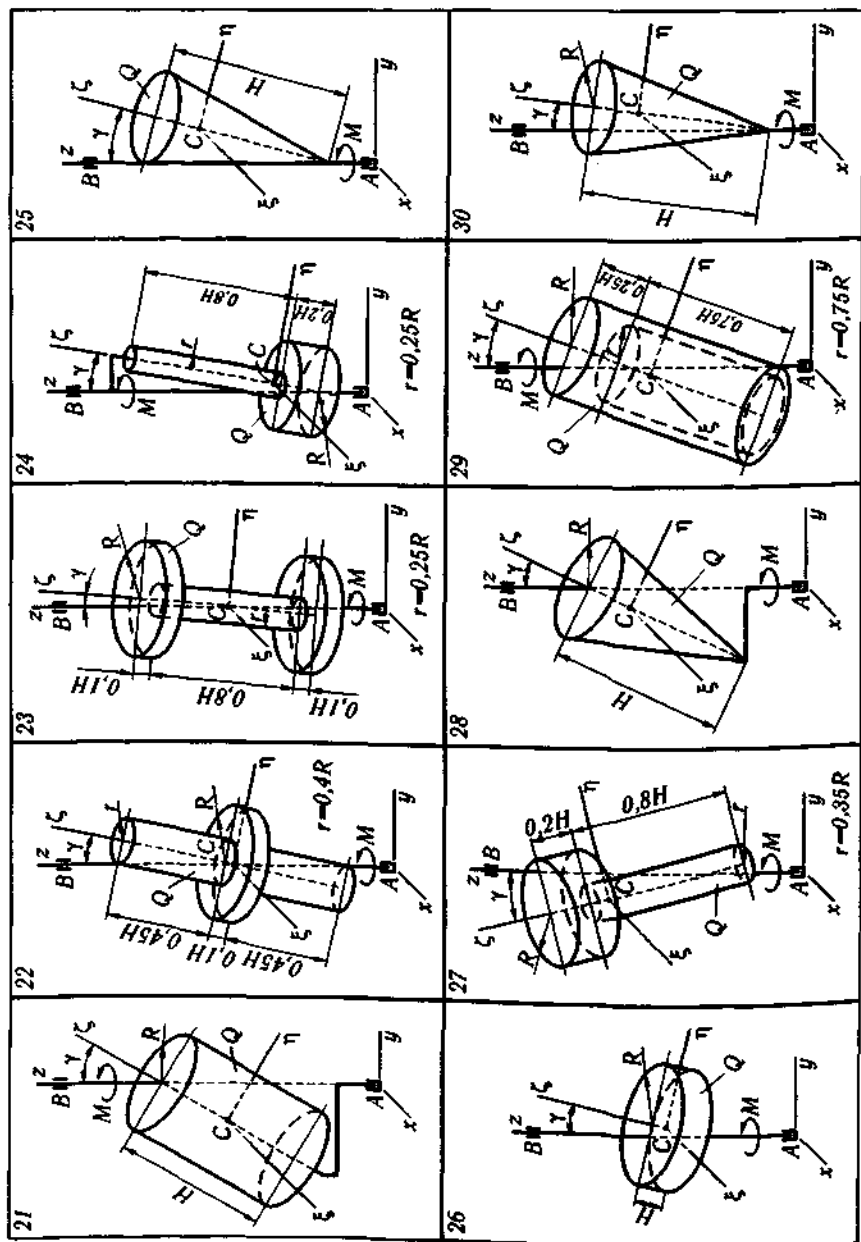


Рис. 191

Таблица 53

Таблица 3.

Номер варианта (рис. 189-191)	m ,	R	H	yc	zc	γ ,	AB ,	M ,	t_1 ,	Дополнительные размеры, см
	кг	см				град	см	Н·м	с	
1	40	25	-	0	60	20	120	10,0	10,0	$a = 40, \quad b = 40$
2	42	10	50	0	32	16	70	2,8	8,0	
3	20	8	30	3	30	20	55	2,0	3,5	
4	38	10	45	-20	38	25	80	18,0	7,0	
5	120	-	60	0	50	18	110	22,0	10,0	
6	45	10	50	0	33	20	75	3,6	7,0	$a = 24, \quad b = 20$
7	40	-	30	-20	55	30	100	12,0	12,0	
8	40	10	40	5	28	10	60	2,2	6,0	
9	26	12	48	33	50	20	100	16,0	15,0	
10	12	15	-	3	32	15	70	1,2	5,0	
11	50	10	40	-	28	12	48	4,0	6,0	$a = 18, \quad b = 30$ $a_1 = 14, \quad b_1 = 24$ $a = 15$
12	28	-	50	0	36	30	80	1,8	11,0	
13	90	12	50	14	35	10	75	13,0	7,0	
14	36	6	42	1	25	-	52	0,8	5,0	
15	8	12	50	15	36	8	70	2,4	4,5	
16	48	20	10	-22	32	30	65	15,0	18,0	$a = 30$
17	55	8	70	5	55	12	120	4,0	14,0	
18	60	16	50	0	28	10	60	5,0	16,0	
19	32	15	6	0	15	15	35	4,5	5,5	
20	65	6	30	0	36	15	75	6,2	9,0	
21	80	15	40	-	35	30	78	16,0	10,0	$a = 30$
22	24	10	40	0	28	10	60	0,6	6,5	
23	55	16	50	0	42	5	80	3,8	8,5	
24	85	14	60	-	30	10	90	4,4	9,5	
25	22	-	48	-	42	15	75	5,0	4,0	
26	64	18	8	3	36	12	70	7,0	9,0	$a = 30$
27	80	14	55	-6	50	15	80	9,0	6,0	
28	85	15	45	-	48	25	76	8,5	7,0	
29	80	12	56	-2	42	20	80	9,5	8,0	
30	110	16	52	-	50	8	85	10,5	9,0	

Дано: $m = 32$ кг; $M = 60$ Н·м; $r = 0,25$ м; $OO_1 = 0,5$ м; $h = 1$ м; $\gamma = 30^\circ$; $a = 1$ м; $b = 2$ м; $\tau = 2$ с. Стержень OO_1 совпадает с осью симметрии тела Q . Массой стержней пренебречь. Найти R_A и R_B .

Решение. Показываем главные центральные оси инерции тела Q : ξ , η и ζ , а также силу $\vec{G}$, момент M и составляющие реакции опор $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ (рис. 192, б).

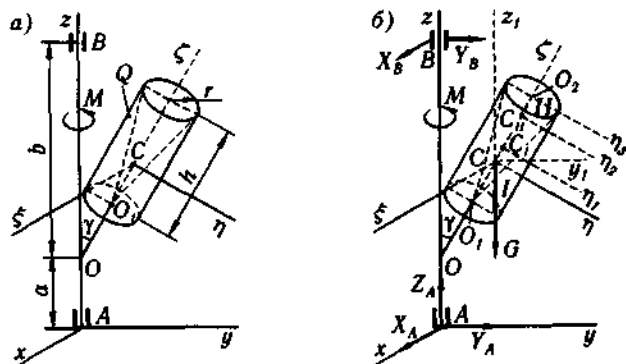


Рис. 192

Для решения задачи используем систему уравнений, вытекающую из принципа Даламбера:

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B + m x_C \omega^2 + m y_C \varepsilon &= 0; \\ Y_A + Y_B + m y_C \omega^2 - m x_C \varepsilon &= 0; & Z_A - G &= 0; \\ -Y_B(a+b) - G \cdot OC \sin \gamma - J_{yz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon &= 0; \\ X_B(a+b) + J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon &= 0; & M - J_z \varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для определения углового ускорения ε из последнего уравнения системы (1) найдем момент инерции тела Q относительно оси вращения z по формуле

$$J_z = J_{z1} + m d^2, \quad (2)$$

где J_{z1} — момент инерции тела Q относительно центральной оси C_{z1} , параллельной оси z ; d — расстояние между осями z и z_1 .

Вспользуемся формулой

$$J_{z1} = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma, \quad (3)$$

где α , β и γ — углы, составленные осью z_1 с осями ξ , η , ζ соответственно.

Так как $\alpha = 90^\circ$, то

$$J_{z1} = J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma. \quad (4)$$

Определим моменты инерции J_η и J_ζ как разности моментов инерции тела I (сплошного цилиндра) и тела II (конуса) (рис. 192):

$$J_\eta = J_\eta^I - J_\eta^{II}; \quad J_\zeta = J_\zeta^I - J_\zeta^{II}. \quad (5)$$

Зная массу тела Q , равную m , определим массу тела I и тела II:

$$m_I = \rho \pi r^2 h, \quad m_{II} = 1/3 \rho \pi r^2 h,$$

где ρ — плотность тела; r — радиус основания цилиндра и конуса. Следовательно,

$$m_{II} = 1/3 m_I,$$

$$m = m_I - m_{II} = 2/3 m_I = 32 \text{ кг.}$$

Отсюда

$$m_I = 3/2 \cdot 32 = 48 \text{ кг; } m_{II} = 48/3 = 16 \text{ кг.}$$

Для вычисления моментов инерции тела Q необходимо знать положение его центра тяжести — расстояние от точки O_1 . (Во всех вариантах координаты центра тяжести заданы, а определению подлежат другие величины, необходимые при решении задачи.)

Это расстояние

$$O_1 C = (m_{II} O_1 C_{II} - m_{II} O_1 C_{II}) / (m_I - m_{II}),$$

где

$$O_1 C_I = 1/2 h = 1/2 \text{ м; } O_1 C_{II} = 3/4 h = 3/4 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$O_1 C = \frac{48 \cdot 1/2 - 16 \cdot 3/4}{48 - 16} = \frac{3}{8} \text{ м.}$$

Момент инерции цилиндра относительно оси $C\eta$

$$J_{\eta}^I = J_{\eta_1}^I + m_I (C_1 C)^2, \quad (6)$$

где $J_{\eta_1}^I = m_I (r^2/4 + h^2/12)^*$ — момент инерции цилиндра относительно оси η_1 , проходящей через центр тяжести C_1 этого тела; $C_1 C = O_1 C_1 - O_1 C = 1/2 - 3/8 = 1/8$ — расстояние между осями η и η_1 .

Подставляя в (6) значение этих величин, получим

$$J_{\eta}^I = 48(0,25^2/4 + 1^2/12) + 48(1/8)^2 = 5,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент инерции конуса относительно оси $C\eta$

$$J_{\eta}^{II} = J_{\eta_2}^{II} + m_{II} (C_{II} C)^2, \quad (7)$$

где $J_{\eta_2}^{II}$ — момент инерции конуса относительно оси η_2 , проходящей через центр тяжести C_{II} этого тела.

В свою очередь, для конуса имеем

$$J_{\eta_2}^{II} = J_{\eta_3}^{II} - m_{II} (O_2 C_{II})^2. \quad (8)$$

Здесь $J_{\eta_3}^{II}$ — момент инерции конуса относительно оси η_3 , проходящей через центр основания конуса O_2 и параллельной оси η_2 .

Подставляя (8) в формулу (7), получим

$$J_{\eta}^{II} = J_{\eta_3}^{II} - m_{II} (O_2 C_{II})^2 + m_{II} (C_{II} C)^2 = J_{\eta_3}^{II} + m_{II} [(C_{II} C)^2 - (O_2 C_{II})^2],$$

* См., например, Лойцянский А. Г. и Лурье А. И. Теоретическая механика. Физматгиз, 1954; Фаворин М. В. Моменты инерции тел. М., 1977.

причем момент инерции конуса относительно оси η_3 определяется по формуле

$$J_{\eta_3}^{\text{II}} = 0,15m_{\text{II}}r^2 + 0,1m_{\text{II}}h^2 = (0,15 \cdot 0,25^2 + 0,1 \cdot 1^2)16 = 1,75 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$C_{\text{II}}C = O_1C_{\text{II}} - O_1C = 3/4 - 3/8 = 3/8 \text{ м};$$

$$O_2C_{\text{II}} = h/4 = 1/4 \text{ м}.$$

Таким образом,

$$J_{\eta}^{\text{II}} = 1,75 + 16[(3/8)^2 - (1/4)^2] = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Теперь J_{η} и J_{ζ} можно вычислить по формулам (5):

$$J_{\eta} = J_{\eta}^{\text{I}} - J_{\eta}^{\text{II}} = 5,5 - 3 = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_{\zeta} = J_{\zeta}^{\text{I}} - J_{\zeta}^{\text{II}},$$

где

$$J_{\zeta}^{\text{I}} = m_{\text{I}}r^2/2 = 48 \cdot 0,25^2/2 = 1,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$J_{\zeta}^{\text{II}} = 0,3m_{\text{II}}r^2 = 0,3 \cdot 16 \cdot 0,25^2 = 0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда

$$J_{\zeta} = 1,5 - 0,3 = 1,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

По формуле (4) вычисляем J_{z1} , учитывая, что $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$:

$$J_{z1} = J_{\eta} \cos^2 120^\circ + J_{\zeta} \cos^2 30^\circ = 2,5(1/2)^2 + 1,2(\sqrt{3}/2)^2 = 1,525 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент инерции тела Q относительно оси вращения z вычисляем по формуле (2):

$$J_z = J_{z1} + md^2,$$

где

$$d = OC \sin \gamma = (OO_1 + O_1C) \sin \gamma = (1/2 + 3/8) \sin 30^\circ = 0,437 \text{ м};$$

$$J_z = 1,525 + 32(0,437)^2 = 7,65 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Из последнего уравнения системы (1)

$$\varepsilon = M/J_z = 60/7,65 = 7,85 \text{ рад/с}^2 = \text{const}.$$

Угловая скорость при равноускоренном вращении тела

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

поэтому при $\omega_0 = 0$ и $t = \tau = 2 \text{ с}$

$$\omega = 7,85 \cdot 2 = 15,7 \text{ рад/с}.$$

Для определения реакций опор следует определить центробежные моменты инерции J_{yz} и J_{zx} тела $J_{zx} = 0$, так как ось x , перпендикулярная плоскости материальной симметрии тела Q , является главной осью инерции в точке A .

Центробежный момент инерции тела J_{yz} определим по формуле

$$J_{yz} = J_{y_1z_1} + m y_C z_C, \quad \text{где } J_{y_1z_1} = (J_\eta - J_\zeta)(\sin 2\gamma)/2,$$

т. е.

$$J_{y_1z_1} = (2,5 - 1,2)(\sin 60^\circ)/2 = 562 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Координаты центра тяжести тела D следующие:

$$x_C = 0; \quad y_C = d = 0,437 \text{ м};$$

$$z_C = a + OC \cos \gamma = a + (OO_1 + O_1C) \cos \gamma = 1,76 \text{ м}.$$

Таким образом,

$$J_{yz} = 0,562 + 32 \cdot 0,437 \cdot 1,76 = 25,16 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Подставляя известные величины в систему уравнений (1) и учитывая, что $d = 0,437 \text{ м}$, получаем следующие равенства:

$$X_A + X_B + 32 \cdot 0,437 \cdot 7,85 = 0;$$

$$Y_A + Y_B + 32 \cdot 0,437 \cdot (15,7)^2 = 0;$$

$$Z_A - 32 \cdot 9,81 = 0;$$

$$-3Y_B - 32 \cdot 9,81 \cdot 0,437 - 25,16 \cdot (15,7)^2 = 0;$$

$$-3X_B + 25,16 \cdot 7,85 = 0.$$

Отсюда

$$X_A = -43,6 \text{ Н}; \quad Y_A = -1340 \text{ Н}; \quad Z_A = 314 \text{ Н};$$

$$X_B = -65,8 \text{ Н}; \quad Y_B = -2120 \text{ Н}.$$

Задание Д.18. Применение теорем и принципов динамики к исследованию движения механической системы

Механическая система состоит из тела A массой m_A , колеса B массой m_B и электродвигателя, приводящего систему в движение. Тело A опирается на ось колеса B и на горизонтальную шероховатую плоскость. Вращающиеся части двигателя жестко связаны с колесом B , и их массы и моменты инерции учтены соответственно в массе и моменте инерции колеса B .

Вращающий момент $M(t)$, развиваемый электродвигателем, определяется дифференциальным уравнением

$$b_1 \frac{dM}{dt} + b_2 M = b_3 - \alpha \omega, \quad (1)$$

где b_1 , b_2 , b_3 и α — постоянные коэффициенты, а ω — угловая скорость вращения вала двигателя. Проскальзывание колеса B по опорной плоскости отсутствует.

Корпус двигателя в вариантах 1—7, 9, 11—20, 30 жестко связан с телом A и его масса учтена в m_A .

В вариантах 8, 10, 21—29 корпус двигателя не связан с телами A и B и, следовательно, вращающий момент является внешним по отношению к системе этих тел.

Двигатель включается в начальный момент времени ($t = 0$), когда система находится в покое. Наличие силы трения покоя (сцепления), приложенной к телу A со стороны опорной плоскости, приводит к тому, что движение механической системы начинается только через τ с после включения двигателя. Затем скорость поступательного движения системы возрастает до некоторого значения v_* . В дальнейшем производится торможение и скорость поступательного движения системы на пути s снижается до значения $0,9 v_*$.

Требуется:

1. Определить зависимость $M = M(t)$ при $0 \leq t \leq \tau$, значение $M_n = M(\tau)$ в начальный момент движения и время τ .

2. Определить зависимость $v = v(t)$ при $t \geq \tau$, найти значение установившейся скорости v_* и значение установившегося момента M_* .

3. На этапе торможения определить пути, проходимые системой при снижении v до значения $0,9 v_*$ для двух режимов торможения.

1-й режим — торможение двигателем — двигатель работает как тормоз. При этом момент на валу двигателя определяется уравнением

$$b_1 \frac{dM}{dt} = -\alpha \omega.$$

2-й режим — механическое торможение. При этом $M = \text{const} = 0$.

Сравнить пути торможения s и l при первом и втором режимах торможения.

Схемы механизмов приведены на рис. 193—195, а необходимые данные для расчета — в табл. 54.

На рис. 193—195 C — центр тяжести тела A , O — центр тяжести однородного колеса B , стрелкой указано направление движения; D — точка опирания тела A на шероховатую поверхность.

В вариантах 9, 11, 30 при разгоне тело A контактирует с опорной поверхностью в точке D , а при торможении — в точке D_1 .

В табл. 54 приведены значения следующих параметров: m_A, m_B — массы тел A и B ; r — радиус колеса B ; i — радиус инерции колеса B относительно оси вращения; f — коэффициент трения, OH, HC, OE, ED — см. рис. 193—195, α, b_1, b_2, b_3 — постоянные коэффициенты.

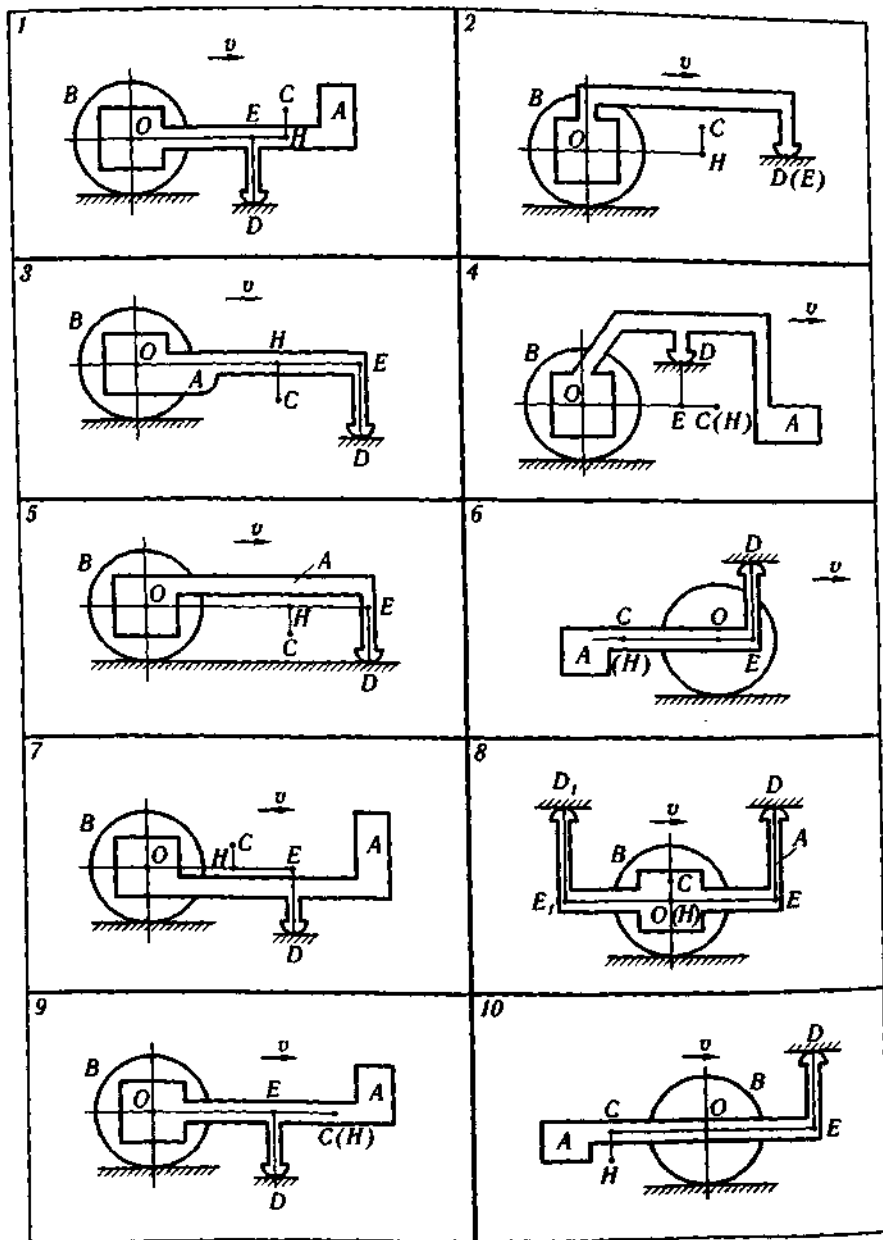
Пример выполнения задания. Дано: $m_A = 20$ кг, $m_B = 100$ кг; $r = 0,5$ м; $i = 0,4$ м; $f = 0,35$; $OH = a = 1,4$ м; $OE = b = 2,0$ м; $CH = h = 0,4$ м; $ED = c = 0,7$ м; $\alpha = 2$; $b_1 = 2,5 \cdot 10^{-2}$, $b_2 = 0,25$, $b_3 = 50$.

Найти: $M = M(t)$ при $0 \leq t \leq \tau$; $M_n, \tau, v = v(t)$ при $t > \tau, v_*, M_*, s$ и l .

Таблица 54

Таблица 5.

Номер варианта 193-195)	m _A , кг	m _B , кг	r, м	i, м	f	м				α	b ₁ ·10 ⁻²	b ₂	b ₃	Примечание
						OH	HC	OE	ED					
1	30	80	0,6	0,3	0,2	1,2	0,25	0,8	0,8	3	1,00	0,33	40	OE ₁ = OE; E ₁ D ₁ = ED OE ₁ = OE; E ₁ D ₁ = ED
2	10	50	0,3	0,2	0,35	0,5	0,3	1,0	0,7	3	1,33	0,27	30	
3	50	120	0,5	0,35	0,25	1,1	0,2	1,5	0,5	4	1,25	0,32	70	
4	40	90	0,45	0,4	0,4	1,6	0,1	1,7	0,6	3,5	2,28	0,20	60	
5	25	70	0,4	0,3	0,3	2,0	0	1,5	0,5	3	2,33	0,28	50	
6	15	60	0,35	0,25	0,35	1,2	0,2	1,8	0	4,5	1,33	0,27	40	
7	35	105	0,5	0,3	0,4	1,6	0	1,0	0,5	5	1,0	0,19	50	
8	7	18	0,4	0,3	0,3	1,0	0	0,3	0,5	4	0,75	0,22	40	
9	25	80	0,6	0,4	0,4	0	0,3	0,8	0,8	4	1,75	0,17	60	
10	5	15	0,3	0,2	0,3	0,7	0,1	0,5	0,4	4,5	1,33	0,44	40	
11	30	110	0,7	0,5	0,3	0	0,4	1,2	0,7	3	2,67	0,30	55	Размерности коэффици- ентов α, b ₁ , b ₂ и b ₃ , имеющих электромеха- ническую природу, не приводятся. Их числен- ные значения даны в СИ.
12	20	85	0,3	0,25	0,4	1,3	0,3	1,3	0,15	4	2,25	0,42	60	
13	20	70	0,4	0,3	0,4	0,9	0,3	1,8	0,4	2	1,50	0,50	50	
14	30	95	0,5	0,4	0,3	1,7	0,3	1,3	0,8	3	2,67	0,46	70	
15	25	80	0,55	0,4	0,2	1,8	0,3	1,5	0,7	3,5	2,00	0,17	50	
16	40	100	0,6	0,5	0,25	0,5	0,6	1,9	0,9	4	1,50	0,17	60	
17	35	110	0,65	0,5	0,45	0,8	0,25	1,4	0,25	5	1,60	0,16	40	
18	35	120	0,6	0,5	0,4	2,0	0	1,0	0,8	5	1,60	0,14	80	
19	10	40	0,4	0,3	0,4	1,9	0,2	1,2	0,7	3	3,00	0,26	50	
20	25	85	0,55	0,4	0,3	1,1	0,1	2,3	0	4	1,0	0,22	45	
21	2	10	0,1	0,06	0,3	0,7	0,05	1,0	0,2	1,5	3,33	1,33	30	Размерности коэффици- ентов α, b ₁ , b ₂ и b ₃ , имеющих электромеха- ническую природу, не приводятся. Их числен- ные значения даны в СИ.
22	4	30	0,2	0,15	0,4	0,5	0,1	0,9	0,3	2	3,50	0,75	40	
23	3	20	0,2	0,1	0,3	0,8	0,2	0,6	0,4	3	2,67	0,66	35	
24	5	15	0,3	0,2	0,3	0,9	0,1	0,7	0,4	2	3,00	0,45	40	
25	2,5	15	0,25	0,2	0,3	0,5	0,2	1,2	0,5	4	1,50	0,35	40	
26	4,5	18	0,35	0,25	0,4	1,9	0,2	1,2	0,5	3	2,33	0,56	35	
27	3,2	16	0,3	0,2	0,2	1,4	0	1,0	0,9	3	2,00	0,43	35	
28	2,8	15	0,25	0,2	0,3	1,1	0,3	1,3	0,2	4	1,25	0,45	45	
29	4,7	21	0,3	0,25	0,4	1,8	0,2	0,8	0,1	3,5	2,57	0,43	40	
30	10	60	0,6	0,5	0,4	0	0,3	0,8	0,7	4	1,75	0,15	70	



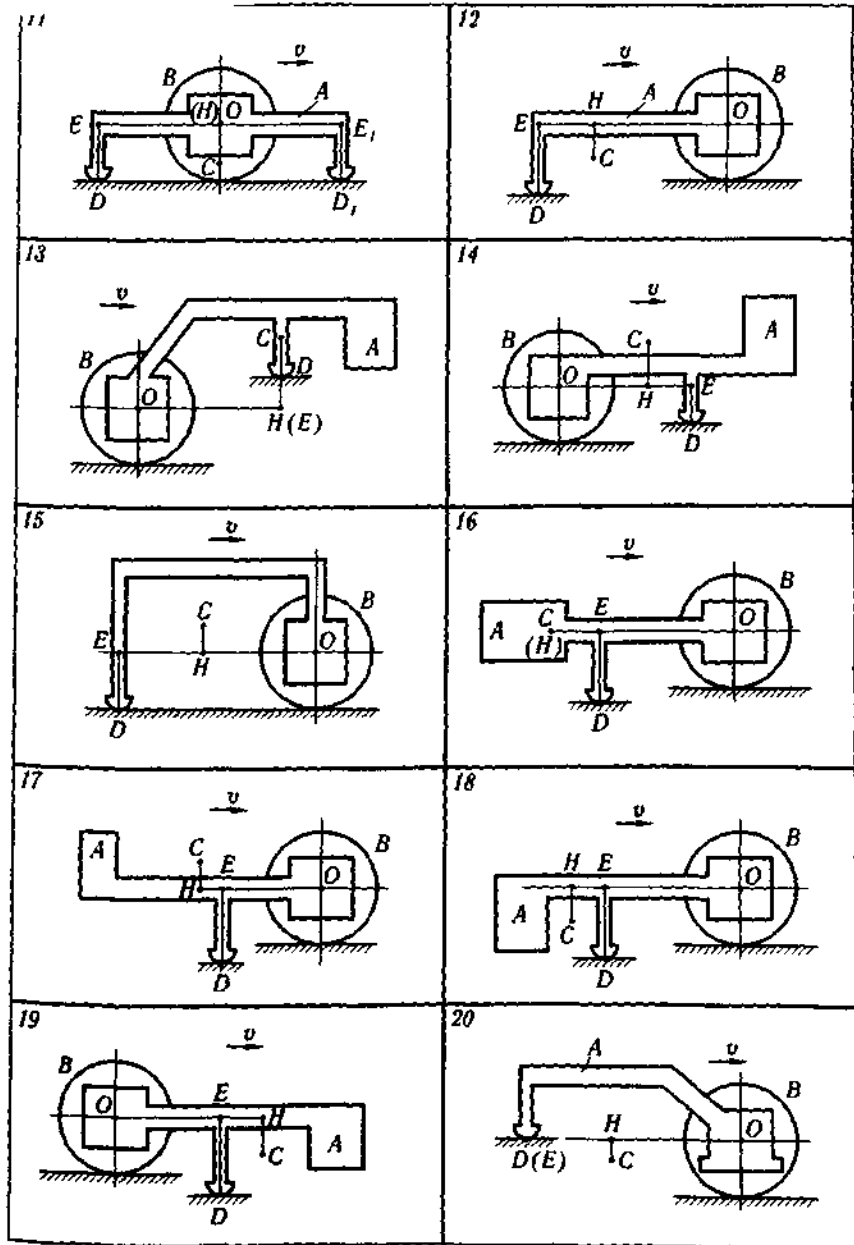


Рис 194

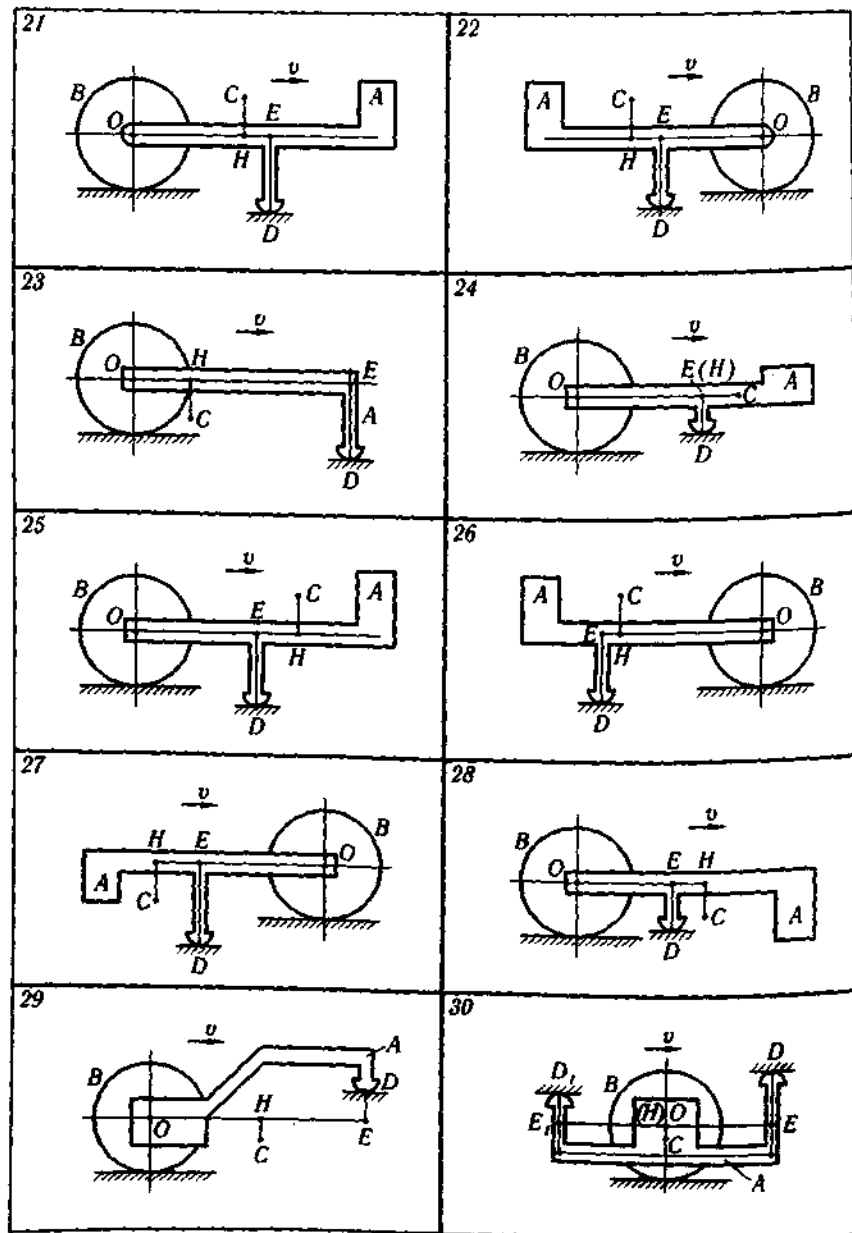


Рис. 195

Решение. 1. *Определение параметров движения системы на этапе разгона до установившейся скорости.*

Механическая система представлена на рис. 196. Расчетная схема этой системы — на рис. 197.

Составим дифференциальные уравнения, описывающие движение механической системы (рис. 197, а). К колесу B приложены вращающий момент M , сила тяжести $G = m_B g$, нормальная реакция Y_K в опорной точке K и сила сцепления $F_{сч}$, предположительно направленная вправо. На тело A действуют сила тяжести $Q = m_A g$, приложенная в центре тяжести C , реакция Y_D , сила трения $X_D = f Y_D$ и реактивный момент корпуса двигателя M' . Силы взаимодействия в точке O между телом A и колесом B являются реакциями внутренних идеальных связей и не показаны на рисунке. При расчленении системы на части (рис. 197, б, в) в точках O прикладываются силы взаимодействия $X_O = X'_O$ и $Y_O = Y'_O$ между телами A и B .

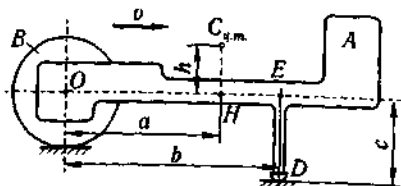


Рис. 196

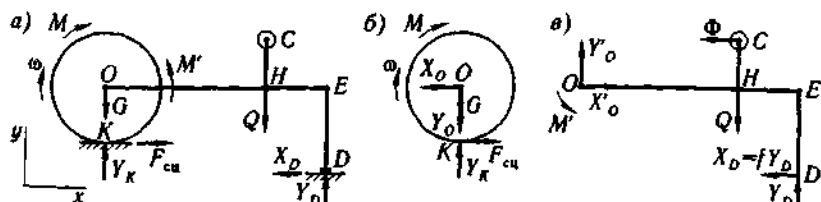


Рис. 197

Для получения дифференциальных уравнений движения воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\dot{T} = \sum N_i, \quad (2)$$

где мощность N_i определяется для всех сил и моментов, как внешних, так и внутренних.

Составим выражение для кинетической энергии системы:

$$T = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_0^2}{2} + \frac{J_{Ox} \omega^2}{2}. \quad (3)$$

Уравнения связей:

$$\dot{x} = v = v_A = v_C = v_0; \quad \omega = \dot{x}/r. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), будем иметь

$$T = 1/2 m_{np} \dot{x}^2, \quad (5)$$

где приведенная масса

$$m_{\text{пр}} = m_A + m_B \left(1 + \frac{r^2}{r'^2} \right).$$

Составим выражение для мощности сил и моментов в системе:

$$N = M\omega - X_D \dot{x} = \left(\frac{M}{r} - X_D \right) \dot{x}. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5) и (6) в (2), получаем

$$m_{\text{пр}} \ddot{x} = M/r - fY_D. \quad (7)$$

Это уравнение содержит неизвестную силу Y_D . Чтобы ее исключить, составим для тела A (рис. 197, в) в соответствии с принципом Даламбера сумму моментов всех сил и силы инерции Φ относительно точки O и приравняем ее нулю:

$$M' - Qa - fY_D c + Y_D b + \Phi \cdot h = 0.$$

Учитывая, что $\Phi = m_A \ddot{x}$, получим уравнение

$$m_A \ddot{x} h = -M' + m_A g a - Y_D d, \quad (8)$$

где

$$d = b - fc.$$

Исключая из уравнений (7) и (8) силу Y_D , получаем

$$a_3 \ddot{x} = a_1 M - a_2, \quad (9)$$

где

$$a_1 = f + d/r; \quad a_2 = f a m_A g; \quad a_3 = m_{\text{пр}} d - f h m_A. \quad (9')$$

Дифференциальное уравнение (9) описывает движение системы вдоль оси x .

Определим зависимость $M = M(t)$ в интервале изменения t от 0 до τ . Для этого проинтегрируем уравнение (1), положив в нем $\omega = 0$. Учитывая начальное условие $M(t=0) = 0$, будем иметь

$$M(t) = \frac{b_2}{b_1} \left(1 - e^{-\frac{b_2}{b_1} t} \right). \quad (10)$$

Условие трогания с места имеет вид $\ddot{x} > 0$.

Используя уравнение (9), получаем условие трогания с места для вращающего момента:

$$M > a_2/a_1.$$

Начальное значение момента M_n , при котором система приходит в движение,

$$M_n = a_2/a_1. \quad (11)$$

Определим интервал времени τ от момента включения двигателя до начала движения системы. Учитывая, что $M_n = M(\tau)$, из уравнения (10) получаем

$$M_n = \frac{b_3}{b_2} \left(1 - e^{-\frac{b_1^2}{b_2} \tau}\right); \quad \tau = \frac{b_1}{b_2} \ln \left(\frac{b_3}{b_3 - b_2 M_n}\right). \quad (12)$$

Найдем зависимость $v = v(t)$ при $t \geq \tau$.

Учитывая, что $\dot{x} = v$, уравнения (1) и (9) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} b_1 \frac{dM}{dt} + b_2 M &= b_3 - \frac{a}{r} v; \\ a_3 \frac{dv}{dt} &= a_1 M - a_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из второго уравнения этой системы находим

$$M = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_1} \frac{dv}{dt}. \quad (14)$$

Продифференцируем это уравнение по t :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{a_3}{a_1} \frac{d^2 v}{dt^2}. \quad (15)$$

Подставим (14) и (15) в первое уравнение системы (13).

После преобразований получаем

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2n \frac{dv}{dt} + k^2 v = D, \quad (16)$$

где

$$n = \frac{b_2}{2b_1}; \quad k = \sqrt{\frac{a a_1}{r a_3 b_1}}; \quad D = \frac{a_1 b_3 - a_2 b_2}{a_3 b_1}. \quad (17)$$

Начальные условия для уравнения (16):

$$\text{при } t = \tau \quad v = 0 \text{ и } dv/dt = 0. \quad (18)$$

Значение $dv/dt = 0$ следует из второго уравнения системы (13) при $M(\tau) = M_n$.

Как известно, решение уравнения (16) при $n > k$ имеет вид (в том, что $n > k$, легко убедиться подстановкой числовых значений)

$$v = A e^{-nt} \cdot \text{sh}(k_* t + \beta) + D/k^2, \quad (19)$$

где

$$k_* = \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Постоянные интегрирования A и β определим по начальным условиям (18):

$$A = \frac{-D}{k k_*} e^{n\tau}; \quad \text{th}(k_* \tau + \beta) = \frac{k_*}{n};$$

$$\beta = 0,5 \ln \left(\frac{n + k_*}{n - k_*} \right) - k_* \tau.$$

Установившееся значение скорости v_* определяется вторым членом правой части выражения (19), так как первый стремится к нулю:

$$v_* = D/k^2. \quad (20)$$

Отметим, что при движении с установившейся скоростью момент на валу электродвигателя достигает установившегося значения M_* , определяемого из второго уравнения системы (13) при $dv/dt = 0$:

$$M_* = M_n = a_2/a_1. \quad (21)$$

Подставим исходные данные и определим значения параметров движения на этапе разгона.

Значения коэффициентов, входящих в уравнение (9): $m_{пр} = 184$ кг; $d = 1,735$ м; $a_1 = 3,82$; $a_2 = 96,04$ Н·м; $a_3 = 316,44$ Н·с².

Момент электродвигателя $M = M(t)$ на этапе разгона [см. (10)]

$$M(t) = 200(1 - e^{-10t}).$$

Начальное значение момента M_n при трогании с места, определяемое (11)

$$M_n = 25,14 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Интервал времени τ от момента включения двигателя до начала движения, вычисленный в соответствии с (12), равен

$$\tau = 0,0134 \text{ с}.$$

Определим зависимость $v(t)$. Для этого вычисляем значения параметров, входящих в уравнения (16) и (19): $n = 5 \text{ с}^{-1}$; $k = 1,39 \text{ с}^{-1}$; $D = 21,11 \text{ м/с}^3$; $k_* = 4,80 \text{ с}^{-1}$; $A = -3,38 \text{ м/с}$; $\beta = 1,89$.

Значения установившейся скорости [см. (20)]

$$v_* = 10,93 \text{ м/с}.$$

Подставляя значения величин A , β и v_* в равенство (19), получаем зависимость $v(t)$ при $t \geq \tau$: $v(t) = -3,38e^{-5t} \text{ sh}(4,80t + 1,89) + 10,93$.

Значение установившегося момента на этапе разгона, как показывает (21), совпадает с начальным значением M_n :

$$M_* = 25,14 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Определение пути при торможении. Торможение начинается при скорости поступательного движения $v = v_*$ и моменте $M = M_*$, а заканчивается при $v = 0,9v_*$.

Исследуем два режима торможения.

1-й режим торможения. Для определения тормозного пути s составим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i, \quad (22)$$

где $\sum A_i$ — сумма работ внешних и внутренних сил:

$$\sum A_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi - \int_{x_1}^{x_2} X_D dx = \frac{1}{r} \int_{x_1}^{x_2} M dx - f \int_{x_1}^{x_2} Y_D dx.$$

Используя выражение (5), представим (22) в виде

$$\frac{m_{np}}{2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) = \frac{1}{r} \int_{x_1}^{x_2} M dx - f \int_{x_1}^{x_2} Y_D dx. \quad (23)$$

Здесь индексом 1 обозначены значения неизвестных в момент t_1 начала торможения, а индексом 2 — в момент t_2 конца торможения. Второе слагаемое правой части уравнения (23) содержит неизвестную Y_D . Поэтому необходимо составить еще уравнение, содержащее ту же неизвестную. Проинтегрируем выражение (8) по x .

Учитывая, что $\dot{x} dx = d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)$, получаем

$$\frac{m_A h}{2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) = - \int_{x_1}^{x_2} M dx + m_A g a(x_2 - x_1) - \int_{x_1}^{x_2} Y_D dx \cdot d. \quad (24)$$

Исключим из уравнений (23) и (24) интеграл от Y_D и, используя обозначения (9'), будем иметь

$$a_3 \left(\frac{\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2}{2} \right) = a_1 \int_{x_1}^{x_2} M dx - a_2(x_2 - x_1). \quad (25)$$

Заметим, что это уравнение можно также получить, проинтегрировав (9) по x . Дифференциальное уравнение для момента на валу двигателя при торможении имеет вид

$$b_1 \frac{dM}{dt} = -\alpha \omega.$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах от t_1 до t :

$$M - M_1 = -\frac{\alpha}{r b_1}(x - x_1). \quad (26)$$

Проинтегрируем (26) по x в пределах от x_1 до x_2 :

$$\int_{x_1}^{x_2} M dx = \left(M_1 + \frac{\alpha x_1}{r b_1} \right) (x_2 - x_1) - \frac{\alpha}{r b_1} \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \right). \quad (27)$$

Подставим (27) в (25):

$$a_3 \left(\frac{\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2}{2} \right) = a_1 \left(M_1 + \frac{\alpha x_1}{r b_1} \right) (x_2 - x_1) - \frac{\alpha a_1}{r b_1} \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \right) - a_2(x_2 - x_1). \quad (28)$$

В этом выражении следует принять:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & \dot{x}_1 &= v_*, & M_1 &= M_* = a_2/a_1, \\x_2 &= s, & \dot{x}_2 &= 0,9v_*.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (28), получим

$$\frac{a_3}{2}(0,9^2 - 1)v_*^2 = -\frac{aa_1}{2rb_1}s^2.$$

Путь s торможения, на котором скорость снижается до значения $0,9 v_*$,

$$s = v_* \sqrt{\frac{a_3rb_1}{aa_1}0,19}. \quad (29)$$

2-й режим торможения. Уравнение, характеризующее движение системы при втором режиме торможения, получается из (28) при $a_1 = 0$:

$$\frac{a_3}{2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) = -a_2(x_2 - x_1). \quad (30)$$

Принимая $x_1 = 0$; $\dot{x}_1 = v_*$; $x_2 = l$; $\dot{x}_2 = 0,9v$, получаем

$$l = \frac{0,19a_3}{2a_2}v_*^2. \quad (31)$$

Подставляя значения параметров в формулы (29) и (31), получаем

$$s = 3,43 \text{ м}; \quad l = 37,39 \text{ м}.$$

Сравнивая пути s и l при первом и втором режимах торможения, заключаем, что приложение тормозного момента двигателя значительно сокращает тормозной путь.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Задача Д.19. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Варианты механических систем показаны на рис. 198—200, а необходимые для решения данные приведены в табл. 55.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Пример выполнения задания. Дано: $G_1 = G_2 = 2G$; $G_3 = G_4 = G$; $R = 2r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$; $f = 0,2$.

Блок 3 — сплошной однородный цилиндр (рис. 201). Определить ускорения грузов 1 и 4 и натяжения ветвей нити 1—2 и 3—4.

Таблица 55

Номер варианта (рис. 198—200)	Сила тяжести				R/r	Радиусы инерции		P	Коэффициент трения скольжения f	Дополнительные данные
	G_1	G_2	G_3	G_4		i_{2z}	i_{3z}			
1	G	G	$3G$	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	$r_2=r_3$
2	G	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	-	
3	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
4	G	G	$2G$	-	-	-	-	-	0,2	
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	-	-	-	
6	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
7	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
8	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	-	0,2	
9	$2G$	G	$2G$	-	3	$2r$	-	$0,2G$	0,2	
10	$2G$	$2G$	G	-	4	-	$2r$	$G/3$	0,4	$r_2=2r_3; R_2=R_3$ $r_2=2r_3; R_3=1,5R_2$ $r_2=2r_3; R_3=1,5R_2$ $r_2=2r_3; R_3=1,5R_2$
11	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
12	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	-	-	0,2	
13	$4G$	$2G$	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	
14	-	G	G	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$8G$	-	
15	$4G$	$2G$	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	-	-	
16	-	G	$2G$	$4G$	-	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$4G$	-	
17	$2G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
18	$3G$	$0,2G$	$0,1G$	$0,5G$	2	-	-	-	0,4	$r_3=1,2r; R_3=1,2r_3$ $r_2=1,5r; R_2=1,2r_2$ $R_3=1,2r$ Массы четырех колес одинаковы $r_3=r_4$ $r_3=r_2$
19	$4G$	$0,3G$	$0,2G$	$3G$	3	$2r$	$1,2r$	-	0,1	
20	$4G$	$0,2G$	$0,1G$	$3G$	2	$1,6r$	$r\sqrt{2}$	-	0,2	
21	$5G$	$0,1G$	$0,2G$	-	3	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
22	G	$0,2G$	$0,3G$	-	2	-	$r\sqrt{2}$	G	-	
23	G	$0,2G$	$0,1G$	-	1,5	$1,2r$	-	$2G$	-	
24	$2G$	G	G	$8G$	-	-	-	-	-	
25	$6G$	$2G$	$2G$	G	-	-	-	-	-	
26	$6G$	G	$2G$	-	-	-	-	-	-	
27	G	G	G	$4G$	2	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	-	-	$i_{4z}=i_{3z}$
28	$3G$	G	G	-	2	$r\sqrt{2}$	-	-	0,1	
29	$6G$	$3G$	G	G	2	-	$r\sqrt{2}$	-	-	
30	$8G$	G	G	$2G$	-	-	-	-	0,1	

Примечания: 1. Радиусы инерции даны относительно центральных осей, перпендикулярных плоскости чертежа (рис. 198—200).
2. Коэффициент трения принимать одинаковым как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9—12).

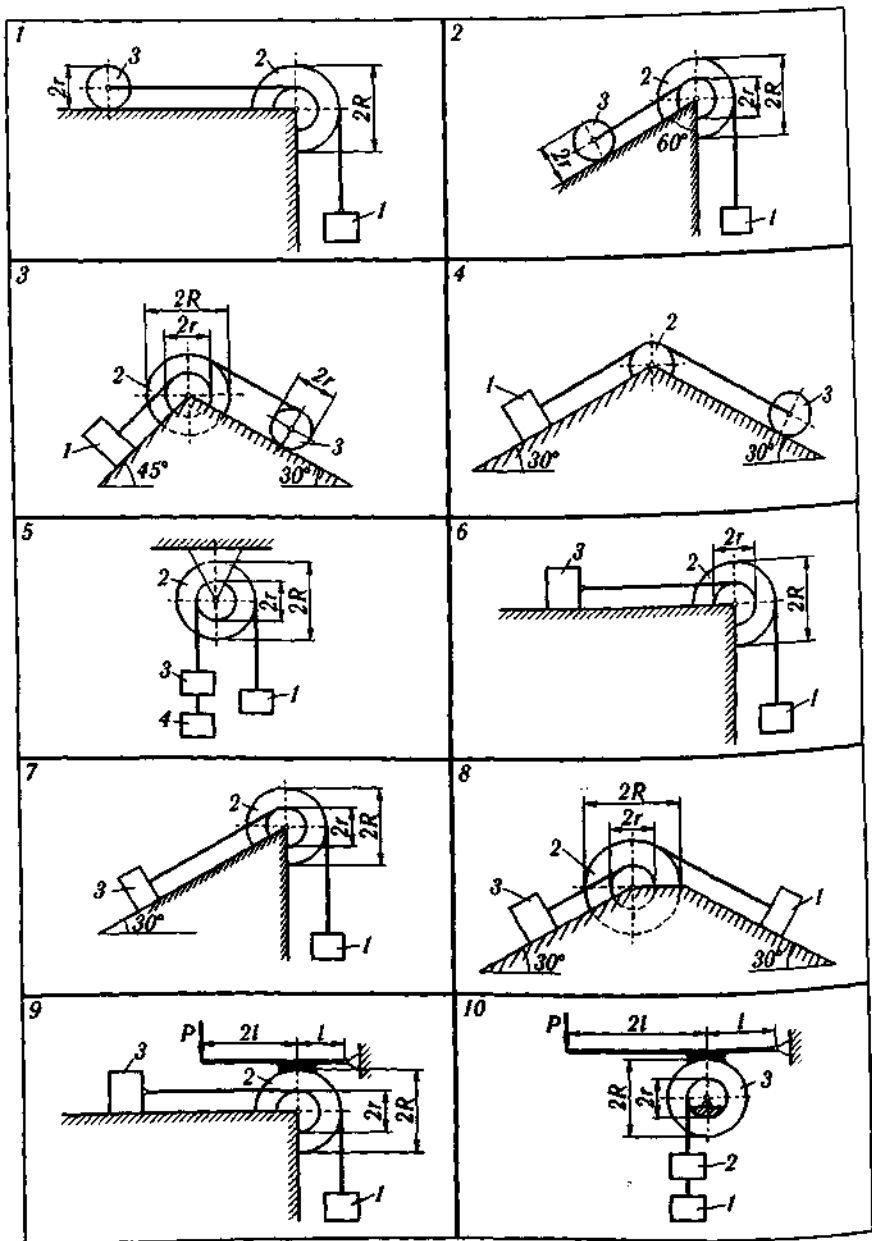


Рис. 198

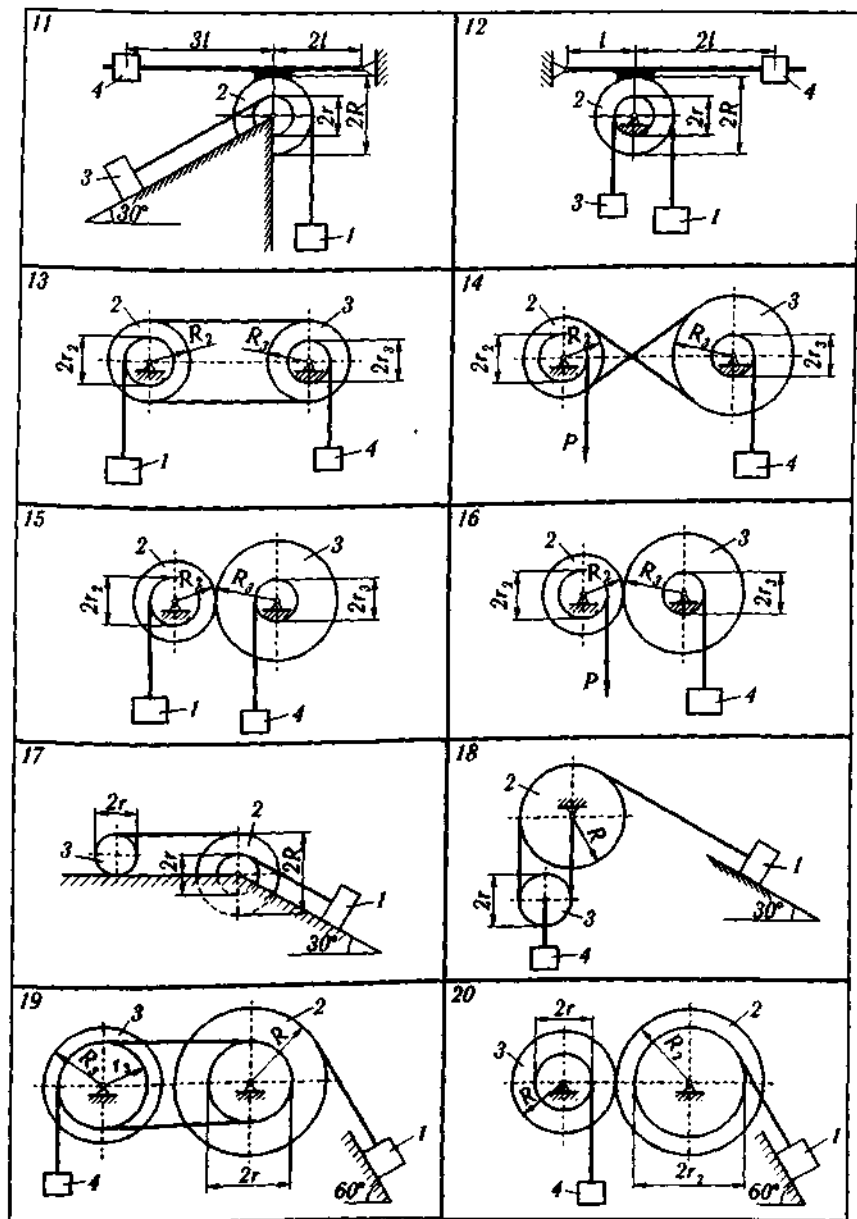


Рис. 199

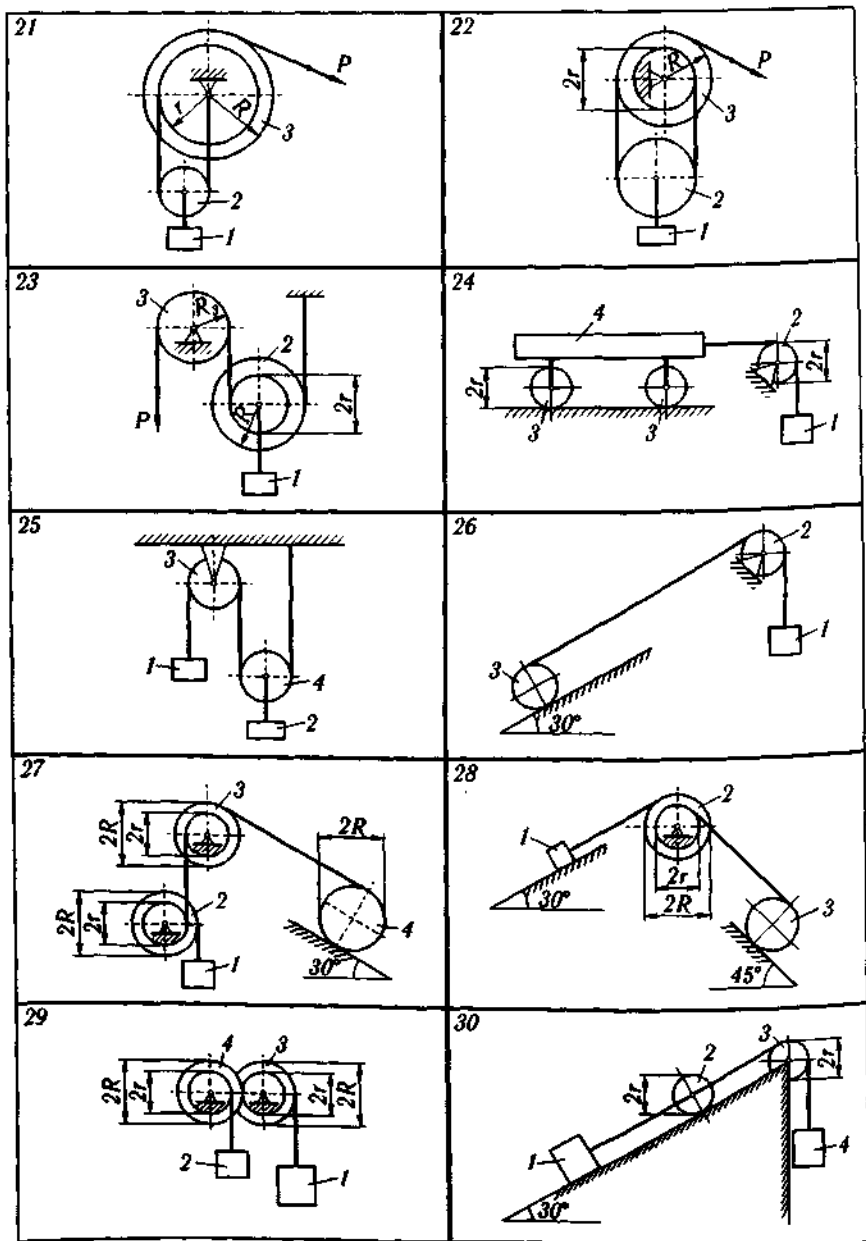


Рис. 200

Решение. Применим к решению задания общее уравнение динамики. Так как система приходит в движение из состояния покоя, направления ускорений тел соответствуют направлениям их движения.

Ввиду того, что среди сил, действующих на тела системы, есть сила трения, целесообразно по исходным данным найти истинное направление движения системы, чтобы правильно показать направление силы трения.

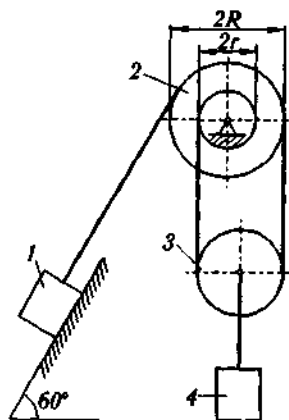


Рис. 201

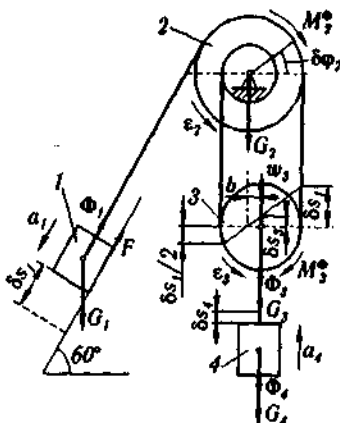


Рис. 202

Если направление движения системы выбрано ошибочно, то иско-мое ускорение получается со знаком «-». В этом случае необходимо изменить направления силы трения и сил инерции и внести соответствующие поправки в общее уравнение динамики.

В данном примере движение системы таково, что груз 1 опускается.

Покажем задаваемые силы: силы тяжести $\vec{G}_1$ — груза 1, $\vec{G}_2$ — блока 2, $\vec{G}_3$ — блока 3 и $\vec{G}_4$ — груза 4, а также $\vec{F}$ — силу трения скольжения груза 1 по наклонной плоскости (рис. 202).

Приложим силы инерции. Сила инерции груза 1, движущегося поступательно с ускорением $\vec{a}_1$, выражается вектором

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1.$$

Силы инерции блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ϵ_2 , приводятся к паре, момент которой

$$M_2^* = J_{2z} \epsilon_2.$$

Силы инерции блока 3, совершающего плоское движение, приводятся к вектору

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3 \vec{a}_3,$$

где $\ddot{a}_3$ — ускорение центра масс блока 3, и к паре сил, момент которой

$$M_3^{\Phi} = J_{3x}\varepsilon_3,$$

где ε_3 — угловое ускорение блока.

Сила инерции груза 4, движущегося поступательно с ускорением $\ddot{a}_4$,

$$\vec{F} = -m_4\ddot{a}_4.$$

Сообщим системе возможное перемещение в направлении ее действительного движения (рис. 202) (можно сообщить возможное перемещение и в обратном направлении).

Составим общее уравнение динамики:

$$G_1\delta s_1 \sin 60^\circ - F\delta s_1 - \Phi_1\delta s_1 - M_2^{\Phi}\delta\varphi_2 - G_3\delta s_3 - \Phi_3\delta s_3 - M_3^{\Phi}\delta\varphi_3 - G_4\delta s_4 - \Phi_4\delta s_4 = 0, \quad (1)$$

где $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$ — углы поворотов блоков 2 и 3.

Зависимости между возможными перемещениями такие же, как и между соответствующими скоростями.

Выразим скорости центров масс и угловые скорости тел системы через скорость тела 1 (составим уравнения связей).

Как показано на рис. 202, мгновенный центр скоростей блока 3 находится на одной вертикали с центром блока 2. Расстояние между мгновенным центром скоростей и центром блока 3

$$b = 3r/2 - r = r/2.$$

Теперь находим

$$\left. \begin{aligned} \omega_2 = \omega_3 = v_1/R = v_1/2r; \\ v_3 = v_4 = \omega_3 b = v_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Такие же зависимости и между возможными перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = \delta s_1/(2r); \\ \delta s_3 = \delta s_4 = \delta s_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнение (1) с учетом (3) принимает вид

$$G_1 \sin 60^\circ - F - \Phi_1 - M_2^{\Phi}/(2r) - G_3/4 - \Phi_3/4 - M_3^{\Phi}/(2r) - G_4/4 - \Phi_4/4 = 0^*. \quad (4)$$

Учитывая, что

$$G_1 = G_2 = 2G = 2mg; \quad G_3 = G_4 = G = mg,$$

* Это же уравнение можно получить, если вместо (1) составить уравнение мощностей, сообщив системе возможные скорости. Соотношения (2), приведенные для действительных скоростей тел системы, те же, что и для любых возможных скоростей.

имеем

$$\left. \begin{aligned} F &= fG_1 \cos 60^\circ = fmg; \\ \Phi_1 &= m_1 a_1 = 2ma_1; \\ M_2^\Phi &= J_{2x} \varepsilon_2 = m_2 i_{2x}^2 \varepsilon_2 = 4mr^2 \varepsilon_2; \\ \Phi_3 &= m_3 a_3 = ma_3; \\ M_3^\Phi &= J_{3x} \varepsilon_3 = [m_3 (1,5r)^2 / 2] \varepsilon_3 = 9mr^2 \varepsilon_3 / 8; \\ \Phi_4 &= m_4 a_4 = ma_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

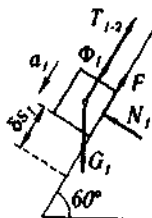


Рис. 203

Зависимости между ускорениями в соответствии с (2)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 = a_1 / (2r); \\ a_3 &= a_4 = a_1 / 4. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим

$$g\sqrt{3} - fg - 2a_1 - a_1 - g/4 - a_1/16 - 9a_1/32 - g/4 - a_1/16 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{g(\sqrt{3} - f - 0,5)}{3,41}; & a_1 &= 2,69 \text{ м/с}^2; \\ a_4 &= a_1/4; & a_4 &= 0,74 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Для определения натяжения в ветви нити 1—2 мысленно разрежем нить и заменим ее действие на груз 2 реакцией T_{1-2} (рис. 203).

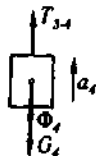


Рис. 204

Общее уравнение динамики

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - T_{1-2} \delta s_1 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \sin 60^\circ - F - \Phi_1 = 2G \sin 60^\circ - 2Gf \cos 60^\circ - 2(G/g)a_1; \\ T_{1-2} &= 0,93G. \end{aligned}$$

Для определения натяжения в нити 3—4 мысленно разрежем эту нить и заменим ее действие на груз 4 реакцией T_{3-4} (рис. 204).

Не составляя общего уравнения динамики, на основании принципа Даламбера имеем

$$T_{3-4} = G_4 + \Phi_4 = G + (G/g)a_4; \quad T_{3-4} = 10,8G.$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА

Задание Д.20. Применение уравнений Лагранжа II рода к определению сил и моментов, обеспечивающих программное движение манипулятора

Манипулятор (рис. 205—207), состоящий из звеньев 1, 2 и захвата D, приводится в движение приводами A и B. Захват D перемещается вдоль прямой ON. Со стороны привода A к звену 1 прикладывается

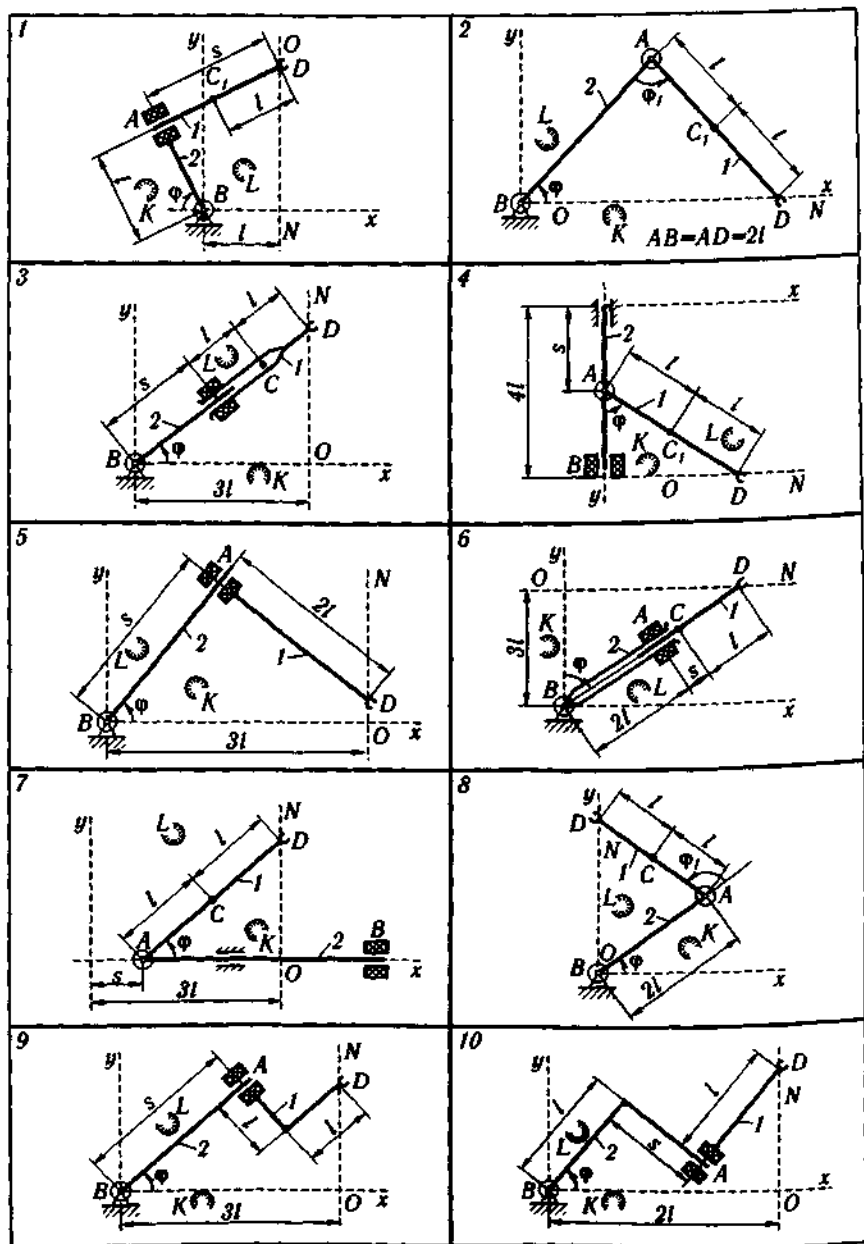


Рис. 205

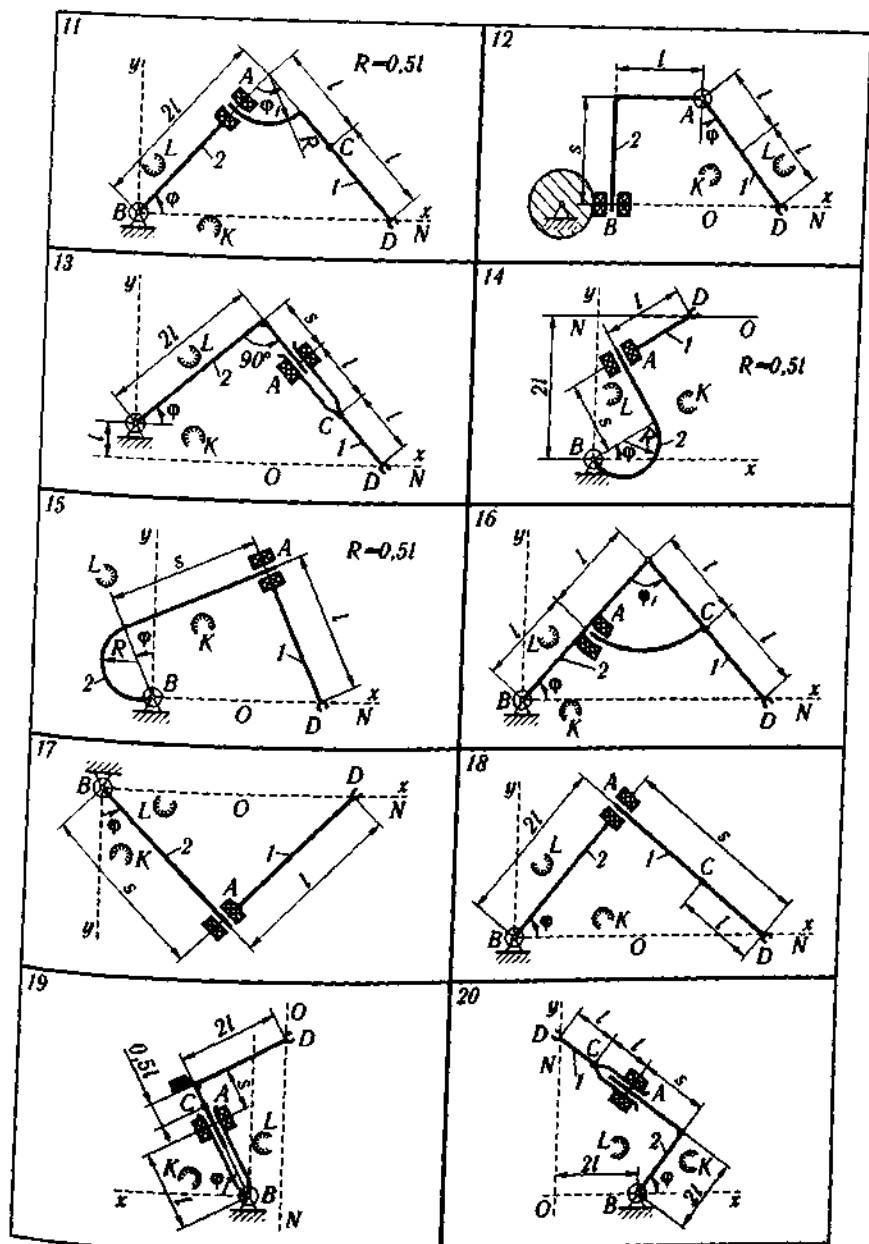


Рис. 206

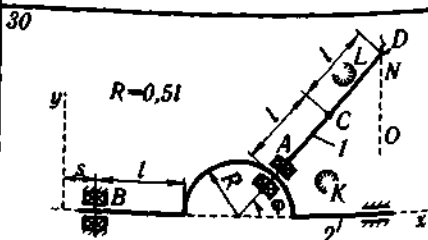
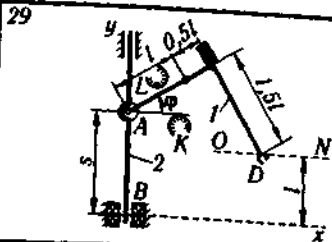
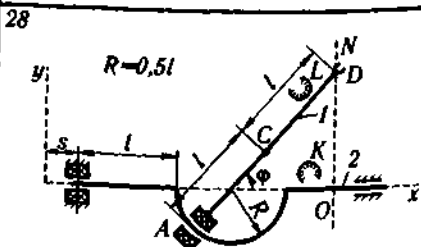
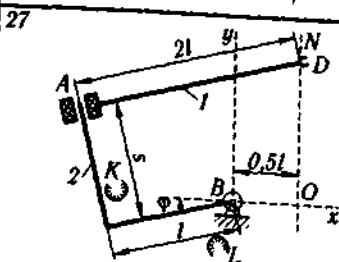
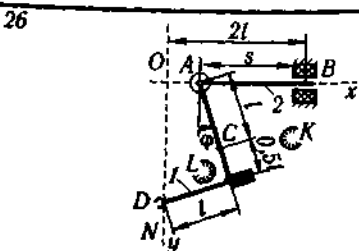
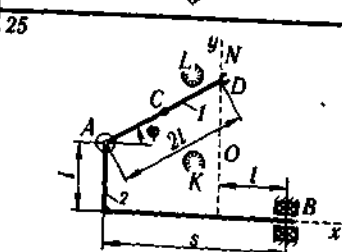
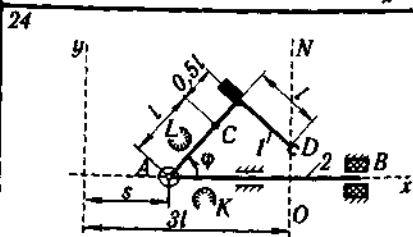
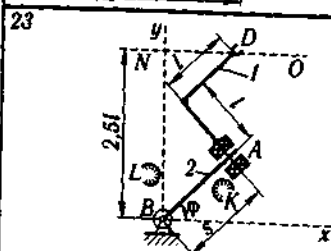
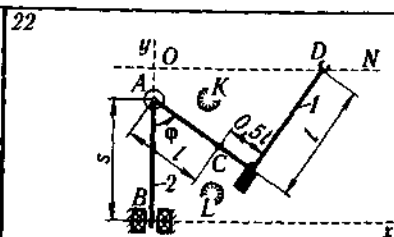
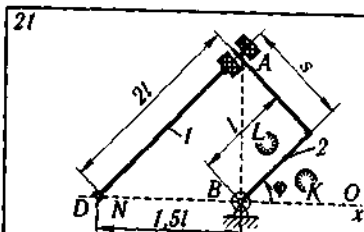


Рис. 207

либо управляющий момент M_A (варианты 2, 4, 7, 8, 12, 22, 24—26, 29), либо управляющее усилие P_A (варианты 1, 3, 5, 6, 9—11, 13—21, 23, 27, 28, 30). Привод B действует на звено 2 либо моментом M_B (варианты 1—3, 5, 6, 8—11, 13—21, 23, 27), либо управляющим усилием P_B (варианты 4, 7, 12, 22, 24—26, 28—30).

Перемещение звена 1 (варианты 3, 4, 7, 12, 22, 24—26, 28—30) или звена 2 (варианты 1, 2, 5, 6, 8—11, 13—21, 23, 27) манипулятора ограничено препятствиями K и L , поэтому изменение угла поворота $\varphi = \varphi(t)$ этого звена возможно лишь в интервале $[\varphi(0), \varphi(\tau)]$, где τ — время движения звена.

Технические условия работы манипулятора требуют, чтобы указанное звено сошло со связи K при $t = 0$ и «мягко» коснулось препятствия L при $t = \tau$, т. е. так, чтобы были удовлетворены условия

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi(t) \right|_{t=0, t=\tau} = 0; \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) \right|_{t=0, t=\tau} = 0.$$

Программные движения звена 1, удовлетворяющие требованиям «мягкого» касания, приняты в таком виде:

1) $\varphi(t) = \varphi(0) + [\varphi(\tau) - \varphi(0)](10 - 15t/\tau + 6t^2/\tau^2)t^3/\tau^3$ (варианты 2, 4, 6, 7, 11, 12, 16, 19, 22, 24—26, 28—30);

2) $\varphi(t) = \varphi(0) + [\varphi(\tau) - \varphi(0)][t/\tau - (1/(2\pi)) \sin(2\pi t/\tau)]$ (варианты 1, 3, 5, 8—10, 13—15, 17, 18, 20, 21, 23, 27).

Значения $\varphi(0)$ и $\varphi(\tau)$ заданы в табл. 56, а график $\varphi = \varphi(t)$ показан на рис. 208. Силами сопротивления движению пренебречь. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Движением захвата относительно звена 1 пренебречь.

Таблица 56

Номер варианта (рис. 205—207)	m_1	m_2	J_1	J_2	$l, \text{ м}$	$\tau, \text{ с}$	$\varphi(0)$	$\varphi(\tau)$
	кг		кг · м ²				рад	
1	3	—	0,5	0,6	0,5	1	$\pi/3$	$2\pi/3$
2	4	—	1	2	0,3	0,25	0	$\pi/3$
3	2	—	1	2	0,2	1	0	$\pi/3$
4	2,5	2,5	0,8	—	0,8	0,5	$\pi/6$	$\pi/3$
5	4	—	2	2	0,5	2	$\pi/6$	$\pi/3$
6	2,5	—	1,2	1,5	0,3	0,9	0	$\pi/3$
7	2	3	0,6	—	0,7	0,5	$\pi/6$	$\pi/3$
8	3	—	0,9	2	0,4	0,3	$\pi/6$	$\pi/3$
9	2	—	0,8	1,4	0,3	1	0	$\pi/3$
10	3,5	—	1,4	1,6	0,4	2	$0,1\pi$	$\pi/6$
11	2,5	—	1	1,4	0,5	0,5	0	$\pi/4$
12	3	3	0,7	—	0,7	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$

Номер варианта (рис. 205—207)	m_1	m_2	J_1	J_2	$l, \text{ м}$	$\tau, \text{ с}$	$\varphi(0)$	$\varphi(\tau)$
	кг		кг · м ²				рад	
13	4	—	1,5	2	0,3	0,5	0	$\pi/6$
14	3	—	1,4	1,8	0,4	1,5	$\pi/6$	$\pi/3$
15	2,5	—	1	1,2	0,5	0,5	$\pi/6$	$\pi/3$
16	3	—	1,2	2	0,3	0,3	0	$\pi/4$
17	3	—	1,2	2	0,3	1,8	$\pi/6$	$\pi/3$
18	2	—	0,6	0,8	0,4	0,8	$\pi/6$	$\pi/3$
19	3	—	1,7	2	0,3	0,6	$\pi/6$	$\pi/3$
20	3,5	—	1,2	1,6	0,4	0,6	$\pi/4$	$\pi/2$
21	4	—	2	2	0,5	0,5	$\pi/6$	$\pi/4$
22	2,5	4	1,2	—	0,3	0,8	$\pi/6$	$\pi/2$
23	4	—	1,1	1,7	0,4	1	$\pi/3$	$\pi/2$
24	3	3	1,4	—	0,6	1	0	$\pi/3$
25	2,5	3	1	—	0,8	0,5	0	$\pi/3$
26	3,5	4	1,6	2	0,4	0,9	0	$\pi/6$
27	2	—	1,1	1,5	0,4	0,7		$\pi/3$
28	3	2,5	0,7		0,7	0,4	$\pi/6$	$\pi/3$
29	2	3	1,3	—	0,5	1,2	0	$\pi/3$
30	2,5	4	0,8	—	0,6	0,4	$\pi/6$	$\pi/4$

В задании приняты следующие обозначения:

m_1 — масса первого звена, захвата и переносимого в захвате объекта;

m_2 — масса второго звена;

J_1 — момент инерции звена 1, захвата и переносимого в захвате объекта относительно главной центральной оси инерции;

J_2 — момент инерции звена 2.

Центр тяжести звена 1 находится в точке C (варианты 1—4, 6—8, 11—13, 16, 18—20, 22—30) или в точке A (варианты 5, 9, 10, 14, 15, 17, 21).

Требуется:

1. Вычислить значения управляющих сил и моментов в начале торможения звена 1. Считать, что торможение звена 1 начинается в тот момент, когда угловое ускорение звена обращается в ноль.

2. Построить графики зависимости управляющих моментов и сил от времени.

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 3$ кг; $J_1 = 0,8$ кг·м²; $l = 1$ м; $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) = \pi/6$ рад; $\tau = 0,5$ с.

Центр тяжести звена 1 находится в точке C_1 (рис. 209):

$$\varphi(t) = \varphi(0) + [\varphi(\tau) - \varphi(0)][t/\tau - (1/(2\pi)) \sin(2\pi t/\tau)].$$

Найти управляющий момент M и управляющую силу P .

Решение. Для решения задачи применим уравнения Лагранжа II рода. Будем рассматривать механическую систему как систему с двумя степенями свободы, приняв за обобщенные координаты угол φ поворота звена 1 и смещение x звена 2.

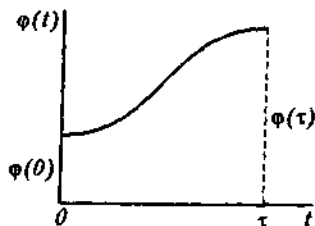


Рис. 208

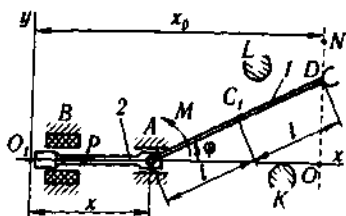


Рис. 209

Для рассматриваемой механической системы можно записать:

$$y_{C2} = \text{const}; \quad x_{C1} = x + l \cos \varphi; \quad y_{C1} = l \sin \varphi. \quad (1)$$

Эти равенства играют роль уравнений связей.

В соответствии с выбранными обобщенными координатами имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Совокупность уравнений (1) и (2) позволяет составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

Составим выражение для кинетической энергии системы T как функцию обобщенных скоростей $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$ и обобщенных координат φ и x .

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии T_1 звена 1 и кинетической энергии T_2 звена 2.

Кинетическая энергия звена 1, совершающего плоское движение,

$$T_1 = \frac{m_1 v_{C1}^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия звена 2, совершающего поступательное движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где

$$\omega_1 = \dot{\varphi}; \quad v_2 = \dot{x}.$$

Продифференцировав (1) по времени, будем иметь

$$\dot{x}_{C1} = \dot{x} - l \dot{\varphi} \sin \varphi; \quad \dot{y}_{C1} = l \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

откуда

$$v_{C1}^2 = \dot{x}_{C1}^2 + \dot{y}_{C1}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l \dot{\varphi} \dot{x} \sin \varphi.$$

Таким образом,

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + m_1 l^2 \dot{\varphi}^2 / 2 - 2m_1 l \dot{x} \dot{\varphi} (\sin \varphi) / 2 + J_1 \dot{\varphi}^2 / 2 + m_2 \dot{x}^2 / 2 = \\ = (m_1 + m_2) \dot{x}^2 / 2 + (m_1 l^2 + J_1) \dot{\varphi}^2 / 2 - m_1 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Найдем значения слагаемых уравнений Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \dot{x} - m_1 l \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_1 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_1 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= (m_1 l^2 + J_1) \dot{\varphi} - m_1 l \dot{x} \sin \varphi; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= (m_1 l^2 + J_1) \ddot{\varphi} - m_1 l \ddot{x} \sin \varphi - m_1 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -m_1 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определим обобщенные силы Q_x и Q_φ .

Для определения Q_x мысленно наложим на систему связь $\varphi = \text{const}$ и, сообщив системе возможную скорость $\dot{x}$, вычислим возможную мощность сил, действующих на нее:

$$N_x = Q_x \dot{x} = P \dot{x},$$

отсюда

$$Q_x = P. \quad (4)$$

Аналогично, мысленно наложив на механическую систему связь $x = \text{const}$ и сообщив ей возможную скорость $\dot{\varphi}$, получим выражение возможной мощности N_φ :

$$N_\varphi = Q_\varphi \dot{\varphi} = M \dot{\varphi},$$

отсюда

$$Q_\varphi = M. \quad (5)$$

Обобщенные силы Q_x и Q_φ можно определить и из выражения работы сил на элементарных перемещениях системы, соответствующих вариации каждой обобщенной координаты:

$$\delta A_x = Q_x \delta x = P \delta x; \quad \delta A_\varphi = Q_\varphi \delta \varphi = M \delta \varphi.$$

Подставляя (3), (4) и (5) в (2), получим

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_1 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_1 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= P; \\ (m_1 l^2 + J_1) \ddot{\varphi} - m_1 l \ddot{x} \sin \varphi &= M. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Так как захват D манипулятора по условию задачи должен двигаться вдоль прямой, перпендикулярной оси x , на механизм дополнительно оказывается наложенная связь $x + 2l \cos \varphi = x_0$, или

$$x = x_0 - 2l \cos \varphi \quad (x_0 = \text{const}),$$

следовательно,

$$\dot{x} = 2l\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Отсюда

$$\ddot{x} = 2l\ddot{\varphi} \sin \varphi + 2l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), приходим к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} M &= (m_1 l^2 + J_1) \ddot{\varphi} - 2l^2 m_1 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi - l^2 m_1 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi; \\ P &= (m_1 + 2m_2)(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)l. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Равенства (8) представляют собой зависимость управляющего момента M и управляющего усилия P от известных функций φ , $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$. Так как φ является заданной функцией времени, то вычисление производных $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$, а следовательно, и управляющего момента M и усилия P не представляет труда.

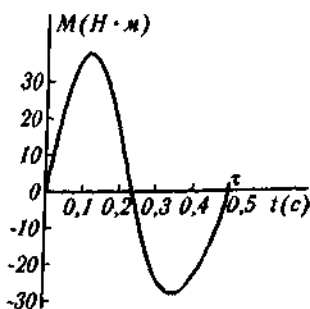


Рис. 210

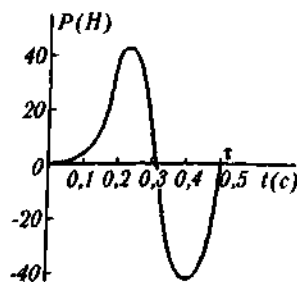


Рис. 211

Вычислим M и P в момент начала торможения звена 1.

В этот момент угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ обращается в нуль. Производные $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ соответственно равны:

$$\dot{\varphi} = [\varphi(\tau) - \varphi(0)](1 - \cos 2\pi t/\tau)/\tau; \quad \ddot{\varphi} = 2\pi[\varphi(\tau) - \varphi(0)](\sin 2\pi t/\tau)/\tau^2.$$

Отсюда

$$\frac{2\pi[\varphi(\tau) - \varphi(0)]}{\tau^2} \sin \frac{2\pi}{\tau} t = 0,$$

или

$$\frac{2\pi}{\tau} t = \pi \text{ и } t = \frac{\tau}{2}.$$

Таким образом, торможение звена I начинается в момент времени $t = \tau/2$. В этот момент времени

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\tau/2) &= [\varphi(0) + \varphi(\tau)]/2, \\ \dot{\varphi}(\tau/2) &= 2[\varphi(\tau) - \varphi(0)]/\tau, \quad \ddot{\varphi}(\tau/2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$M(\tau/2) = -4m_1 l^2 [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 (1/\tau^2) \sin[\varphi(0) + \varphi(\tau)];$$

$$P(\tau/2) = 4l(m_1 + 2m_2)[\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 (1/\tau^2) \cos[(\varphi(0) + \varphi(\tau))/2].$$

Учитывая условие задачи, имеем

$$M(\tau/2) = -4,39 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad P(\tau/2) = 33,90 \text{ Н}.$$

Обратимся, наконец, к построению графиков зависимостей управляющих моментов и сил от времени.

Вычисления будем производить в интервале $[0; \tau]$ с шагом 0,1 τ . Графики зависимостей M и P от времени показаны на рис. 210, 211.

Так как вычисления заключены в простом обсчете формул (8) при разных значениях аргумента, то они могут быть легко организованы на любых клавишных вычислительных машинах.

Задание Д.21. Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система тел 1—6 (рис. 212—214) движется под воздействием постоянных сил $\vec{F}$ и пар сил с моментами M или только сил тяжести.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах q_1 и q_2 при заданных начальных условиях. Необходимые данные приведены в табл. 57; там же указаны рекомендуемые обобщенные координаты (x и φ — обобщенные координаты для абсолютного движения, а ξ — для относительного движения).

При решении задачи массами нитей пренебречь. Считать, что качение колес происходит без проскальзывания. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Колеса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Водила (кривошпы) рассматривать как тонкие однородные стержни. Принять, что в вариантах 6, 9, 11, 20, 22 и 30 механизм расположен в горизонтальной плоскости.

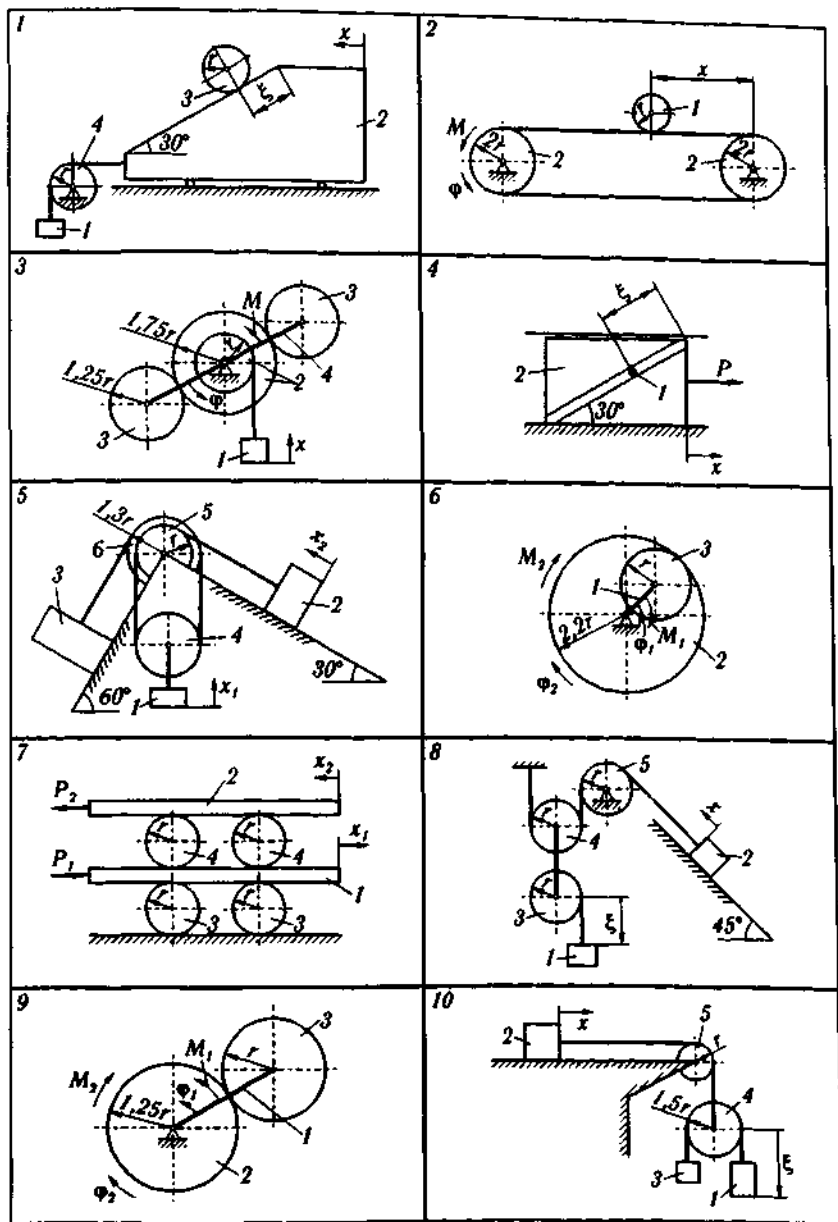


Рис. 212

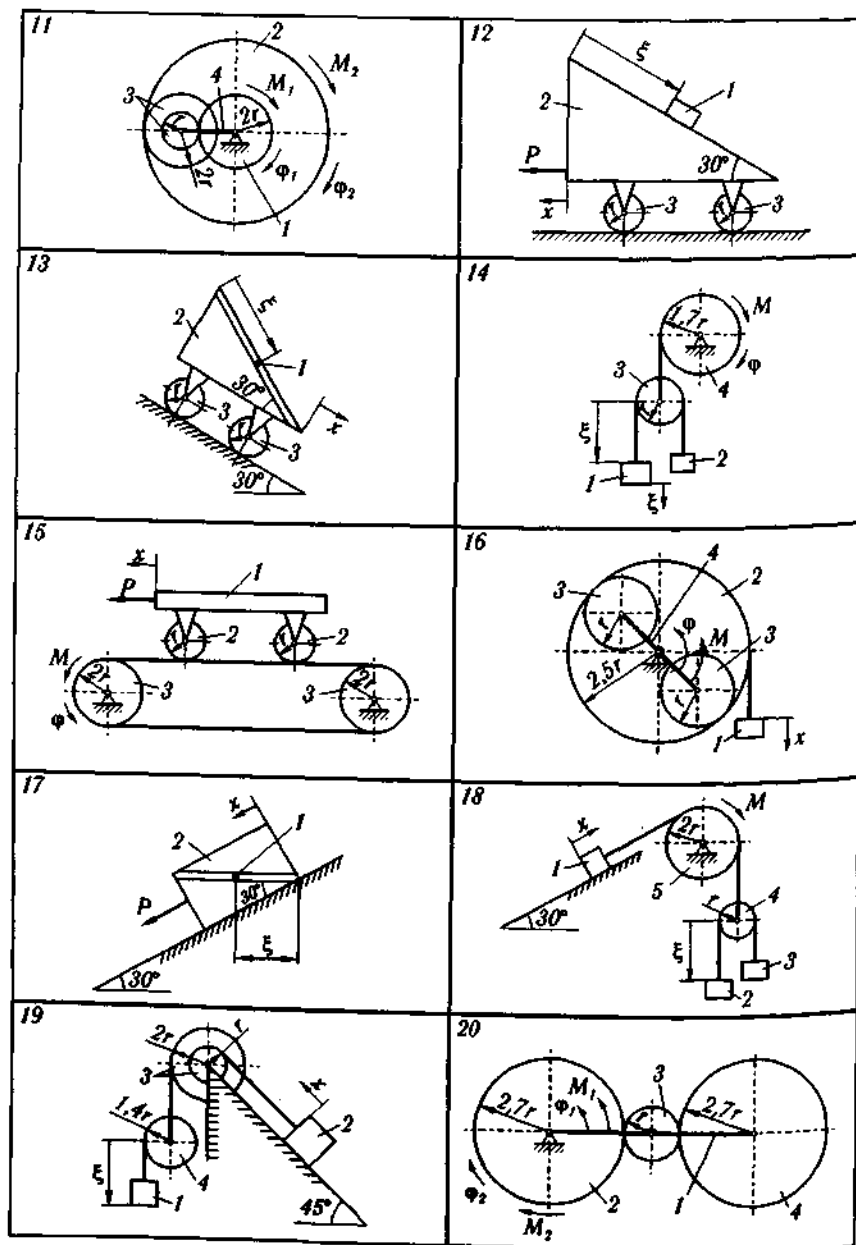


Рис. 213

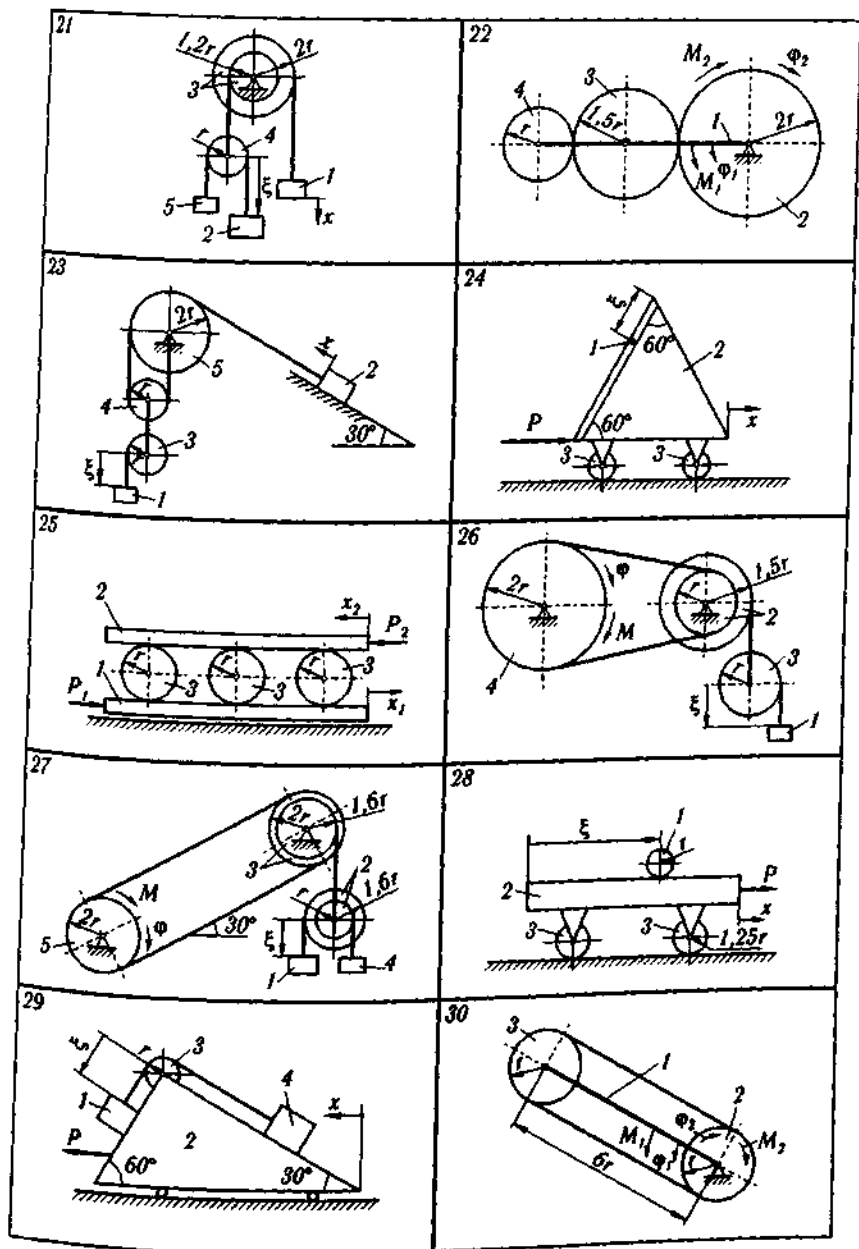


Рис. 214

Таблица 57

Таблица 57

Номер варианта (рис. 212-214)		Массы тел					Радиус инерции		Силы P	Моменты M	Коэффициенты		Обобщенные координаты		Начальные условия				Дополнительные данные
		1	2	3	4	5	i_{2y}	i_{3y}			трения скользя- щая	вязкого сопро- тивле- ние	q_1	q_2	q_{10}	q_{20}	$\dot{q}_{10}$	$\dot{q}_{20}$	
1	2m	6m	m	m	m	-	-	-	-	-	-	-	x	ξ	0	0	0	0	Массу ленты не учитывать
2	m	3m	-	-	-	-	-	-	-	M	-	-	φ	x	0	0	0	0	Момент M приложен к водилу
3	m	3m	2m	-	-	-	$r\sqrt{2}$	-	-	M	-	-	φ	x	0	0	0	0	Момент M приложен к водилу
4	m	4m	-	-	-	-	-	-	-	-	0	b	x	ξ	0	0	0	0	1 — материальная точка
5	m	2m	4m	2m	2m	2m	-	-	-	-	f	-	x ₁	x ₂	0	0	0	0	Блоки 5 и 6 посажены на общую ось свободно, их массы одинаковы
6	m	2m	3m	-	-	-	2r	-	-	M ₁ ; M ₂	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	Момент M ₁ приложен к водилу
7	3m	3m	m	m	m	-	-	-	P ₁ ; P ₂	-	-	-	x ₁	x ₂	0	0	0	0	
8	m	2m	2m	2m	2m	2m	-	-	-	-	f	-	x	ξ	0	0	0	0	
9	m	2m	3m	-	-	-	-	-	-	M ₁ ; M ₂	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	Момент M ₁ приложен к водилу
10	2m	2m	m	2m	m	m	-	-	-	-	f	-	x	ξ	0	0	0	0	
11	m	3m	2m	m	m	-	4r	$r\sqrt{2}$	-	M ₁ ; M ₂	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	
12	2m	5m	m	-	-	-	-	-	P	-	f	-	x	ξ	0	0	0	0	
13	m	3m	2m	-	-	-	-	-	-	-	-	b	x	ξ	0	0	0	0	1 — материальная точка
14	2m	m	m	2m	-	-	-	-	-	M	-	-	φ	ξ	0	0	0	0	Момент M приложен к водилу
15	3m	m	2m	-	-	-	-	-	P	M	-	-	φ	x	0	0	0	0	Момент M приложен к водилу
16	2m	3m	2m	m	-	-	2r	-	-	M	-	-	φ	x	0	0	0	0	

Продолжение табл. 57

Номер варианта (рис. 212-214)	Массы тел					Радиус инерции		Силы P	Моменты M	Трение скольж. коэфф.	Коэффициенты		Обобщенные координаты		Начальные условия					Дополнительные данные				
	1	2	3	4	5	i_{2y}	i_{3y}				вязкого сопрот. коэфф.	q_1	q_2	q_{10}	q_{20}	$\dot{q}_{10}$	$\dot{q}_{20}$	$\ddot{q}_{10}$	$\ddot{q}_{20}$					
17	m	3m	-	-	-	-	-	P	-	0	b	x	ξ	0	ξ_0	0	0	0	0	I — материальная точка				
18	2m	2m	m	m	3m	-	-	-	M	f	-	x	ξ	0	0	0	0	0	0	Момент M_1 приложен к водилу				
19	2m	2m	3m	m	-	-	$r\sqrt{2}$	-	-	f	-	x	ξ	0	0	x_0	0	0	0					
20	2m	3m	m	3m	-	-	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	0	0					
21	2m	2m	3m	2m	m	-	$r\sqrt{2}$	-	-	-	-	x	ξ	0	0	x_0	0	0	0	То же				
22	m	3m	2m	m	3m	-	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	0	0					
23	2m	3m	m	m	-	-	-	-	-	f	-	x	ξ	0	0	0	0	0	ξ_0					
24	m	3m	m	-	-	-	-	P	-	-	b	x	ξ	0	ξ_0	0	0	0	0	I — материальная точка				
25	2m	2m	m	-	-	-	-	$P_1; P_2$	-	-	-	x_1	x_2	0	0	0	0	0	0					
26	m	3m	2m	3m	-	-	r	-	-	f	-	x	ξ	0	0	0	0	0	0					
27	2m	2m	3m	m	2m	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{3}$	-	M	-	-	φ	ξ	0	0	0	0	0	ξ_0	Момент M_1 приложен к водилу				
28	m	3m	m	-	-	-	-	-	M	-	-	φ	ξ	0	0	0	0	0	0					
29	2m	4m	m	m	-	-	-	P	-	-	-	x	ξ	0	0	0	0	0	ξ_0					
30	3m	2m	2m	-	-	-	-	P	$M_1; M_2$	f	-	x	ξ	0	0	x_0	0	0	0					

Примечания: 1. Радиус инерции относительно центра масс.

Примечания:

1. Радиус инерции тела 2 или 3 определены относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа.
2. Коэффициентом вязкого сопротивления назван коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления относительному движению тел 1 и 2 $\vec{R} = -b\vec{v}$, где $\vec{v}$ — относительная скорость тела.

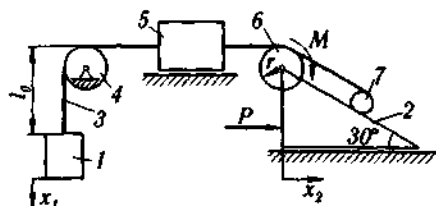


Рис. 215

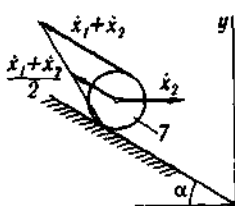


Рис. 216

Пример выполнения задания. Дано: массы тел механической системы (рис. 215) $m_1 = 3m$; $m_2 = 8m$; $m_3^* = m_4 = m_6 = 2m$; $m_5 = 4m$; $m_7 = m$; $\vec{P}$ — постоянная сила, приложенная к телу 2; M — постоянный момент, приложенный к колесу 6; b — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления движению тела 5 $\vec{R} = -b\vec{v}_5$ ($\vec{v}_5$ — скорость тела 5), L — длина нити 3; r — радиус колес 4 и 6.

Все колеса считать сплошными однородными дисками. Трение скольжения тела 2 не учитывать.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах $q_1 = x_1$; $q_2 = x_2$.

Начальные условия: $q_{10} = 0$ (при этом начальное расстояние по вертикали от нижнего конца нити 3 до ее горизонтального участка равно l_0), $q_{20} = 0$, $\dot{q}_{10} = 0$, $\dot{q}_{20} = \dot{x}_{20}$.

На рис. 215 система изображена в начальном положении.

Решение. Для решения задачи применим уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + Q_1; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + Q_2. \quad (2)$$

Здесь T — кинематическая энергия системы; Π — потенциальная энергия; Q_1 и Q_2 — обобщенные силы, соответствующие неконсервативным силам.

Для данной системы

$$T = \sum_{i=1}^7 T_i. \quad (3)$$

Выразим скорости центров масс твердых тел системы через обобщенные скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_5 = \dot{x}_1; \\ v_2 &= v_6 = \dot{x}_2; \\ v_7^2 &= (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2/4 + \dot{x}_2^2 - (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\dot{x}_2 \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* Здесь нить 3 принята весомой — это усложнение в сравнении с общим условием задания. Провисание нити не учитывается.

или, имея в виду, что $\alpha = 30^\circ$,

$$v_7^2 = 0,25[\dot{x}_1^2 + (5 - 2\sqrt{3})\dot{x}_2^2 - 2(\sqrt{3} - 1)\dot{x}_1\dot{x}_2].$$

Здесь учитывалось, что $(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/2$ — скорость центра масс тела 7 относительно тела 2, а $\dot{x}_2$ — его переносная скорость (рис. 216).

Угловые скорости тел (см. рис. 215—217)

$$\left. \begin{aligned} \omega_4 &= \dot{x}_1/r; \\ \omega_6 &= \omega_7 = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)/r. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Моменты инерции колес относительно центральных осей

$$J_4 = J_6 = 2mr^2/2 = mr^2;$$

$$J_7 = (m/2)(r/2)^2 = mr^2/8.$$

Кинетическая энергия тел 1, 2, 4—7:

$$T_1 = m_1 v_1^2/2 = 3m\dot{x}_1^2/2;$$

$$T_2 = m_2 v_2^2/2 = 4m\dot{x}_2^2;$$

$$T_4 = J_4 \omega_4^2/2 = m\dot{x}_1^2/2;$$

$$T_5 = m_5 v_5^2/2 = 2m\dot{x}_1^2;$$

$$T_6 = m_6 v_6^2/2 + J_6 \omega_6^2/2 = 0,5m(\dot{x}_1^2 + 3\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2);$$

$$T_7 = m_7 v_7^2/2 + J_7 \omega_7^2/2 = (m/16)[3\dot{x}_1^2 + (11 - 4\sqrt{3})\dot{x}_2^2 - 2(2\sqrt{3} - 3)\dot{x}_1\dot{x}_2].$$

Кинетическую энергию нити 3 $T_3 = 0,5 \sum m_{3i} v_{3i}^2$, находим, учитывая, что скорости всех ее точек одинаковы, т. е. $v_{3i} = v_3 = \dot{x}_1$ и $\sum m_{3i} = m$:

$$T_3 = m_3 v_3^2/2 = m\dot{x}_1^2.$$

Подставляя все эти величины в (3), получим

$$T = (m/16)[75\dot{x}_1^2 + (99 - 4\sqrt{3})\dot{x}_2^2 + 2(11 - 2\sqrt{3})\dot{x}_1\dot{x}_2]. \quad (6)$$

Потенциальную энергию системы находим как работу сил тяжести твердых тел 1 и 7 и нити 3 при их перемещении из данного положения, характеризуемого координатами x_1 и x_2 , в некоторое исходное нулевое, например то, от которого ведется отсчет обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_7 + \Pi_3; \quad \Pi_1 = -m_1 g x_1; \quad \Pi_7 = m_7 g \cdot y_7, \quad (7)$$

где y_7 — высота центра колеса 7 над уровнем, где он находится при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Так как проекция скорости центра колеса на ось y (см. рис. 216)

$$v_{7y} = \dot{y}_7 = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)0,5 \sin \alpha,$$



Рис. 217

то, интегрируя это выражение при нулевых начальных условиях, получим

$$y_7 = (x_1 + x_2)0,5 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\Pi_7 = m_7 g (x_1 + x_2) 0,5 \sin \alpha.$$

Для определения Π_3 заметим, что работа силы тяжести нити 3 при ее перемещении из положения $a'b'$ в положение ab , при котором $x_1 = 0$, равна работе силы тяжести участка нити bb' при его перемещении в положение aa' (рис. 218).

Таким образом,

$$\Pi_3 = -m_3 x_1 g (x_1/2 + l_0)/L.$$

Подставляя эти значения в (7), находим

$$\Pi = g[-m_1 x_1 + m_7 (x_1 + x_2) 0,5 \sin \alpha - m_3 x_1 (x_1/2 + l_0)/L],$$

или

$$\Pi = mg[-x_1^2/L - (2,75 + 2l_0/L)x_1 + x_2/4]. \quad (8)$$

Обобщенные силы Q_1 и Q_2 можно определить из выражений работы неконсервативных сил на элементарных перемещениях системы, соответствующих вариации каждой обобщенной координаты, или, что то же самое, из выражений мощности N_1 и N_2 неконсервативных сил на возможных скоростях системы, соответствующих возрастанию каждой обобщенной координаты

$$Q_1 = N_1/\dot{x}_1; \quad Q_2 = N_2/\dot{x}_2.$$

В данном случае

$$N_1 = -Rv_{5(\dot{x}_2=0)} - M\omega_{6(\dot{x}_2=0)},$$

или с учетом (4) и (5)

$$N_1 = -R\dot{x}_1 - M\dot{x}_1/r.$$

Отсюда

$$Q_1 = -R - M/r,$$

или

$$Q_1 = -b\dot{x}_1 - M/r. \quad (9)$$

Аналогично,

$$N_2 = P v_{2(\dot{x}_1=0)} - M\omega_{6(\dot{x}_1=0)}.$$

Учитывая (4) и (5), имеем

$$N_2 = P\dot{x}_2 - M\dot{x}_2/r;$$

$$Q_2 = P - M/r. \quad (10)$$

Подставляя (6), (8), (9) и (10) в (1) и (2), получаем дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{75}{8}m\ddot{x}_1 + \frac{11-2\sqrt{3}}{8}m\ddot{x}_2 = 2mg\frac{x_1}{L} + mg\left(2,75 + \frac{2l_0}{L}\right) - b\dot{x}_1 - \frac{M}{r}; \quad (11)$$

$$\frac{99-4\sqrt{3}}{8}m\ddot{x}_2 + \frac{11-2\sqrt{3}}{8}m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{4} + P - \frac{M}{r}. \quad (12)$$

Выражая $\ddot{x}_2$ из (12) и подставляя в (11), получаем

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 - cx_1 = a. \quad (13)$$

Здесь $n = 0,0538b/m$; $c = 0,215g/L$; $a = g(0,298 + 0,215l_0/L) - 0,099M/(rm) - 0,0088P/m$. Найдем решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (13).

Характеристическое уравнение

$$z^2 + 2nz - c = 0.$$

Его корни

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 + c}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (13) имеет вид

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2+c}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2+c}t}) - \frac{a}{c}. \quad (14)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 дифференцируем (14):

$$\dot{x}_1 = e^{-nt}[(-n + \sqrt{n^2+c})C_1 e^{\sqrt{n^2+c}t} - (n + \sqrt{n^2+c})C_2 e^{-\sqrt{n^2+c}t}]. \quad (15)$$

Пользуясь начальными условиями: при $t = 0$ $x_1 = 0$; $\dot{x}_1 = 0$, находим из (14) и (15)

$$C_1 + C_2 - a/c = 0;$$

$$(-n + \sqrt{n^2+c})C_1 - (n + \sqrt{n^2+c})C_2 = 0.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{a}{2c\sqrt{n^2+c}}(n + \sqrt{n^2+c}); \\ C_2 &= \frac{a}{2c\sqrt{n^2+c}}(-n + \sqrt{n^2+c}). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Уравнение (14) с учетом (16) является уравнением движения системы, описывающим изменение первой обобщенной координаты.

Чтобы получить второе уравнение движения, находим из (12)

$$\ddot{x}_2 = \frac{8}{99-4\sqrt{3}}\left(-\frac{g}{4} + \frac{P}{m} - \frac{M}{m \cdot r}\right) - \frac{11-2\sqrt{3}}{99-4\sqrt{3}}\dot{x}_1,$$

или

$$\ddot{x}_2 = k - 0,0818\dot{x}_1, \quad (17)$$

где $k = 0,0869 \left[\frac{1}{m} \left(P - \frac{M}{r} \right) - \frac{g}{4} \right]$.

Интегрируя (17), получаем

$$\dot{x}_2 = kt - 0,0818\dot{x}_1 + C_3; \quad (18)$$

$$x_2 = kt^2/2 - 0,0818x_1 + C_3t + C_4. \quad (19)$$

Для определения постоянных C_3 и C_4 используем все четыре начальных условия: при $t = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $\dot{x}_1 = 0$; $\dot{x}_2 = \dot{x}_{20}$.

Из (18) и (19) следует

$$C_3 = \dot{x}_{20}; \quad C_4 = 0.$$

Теперь вместо (19) с учетом (14) имеем

$$x_2 = \frac{kt^2}{2} - 0,0818 \left[e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2+ct}} + C_2 e^{-\sqrt{n^2+ct}}) - \frac{a}{c} \right] + \dot{x}_{20}t.$$

Это второе уравнение движения системы.

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ (ПОКОЯ) КОНСЕРВАТИВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задание Д.22. Определение положений равновесия (покоя) консервативной механической системы с одной степенью свободы и исследование их устойчивости

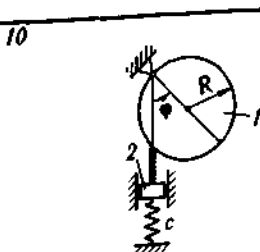
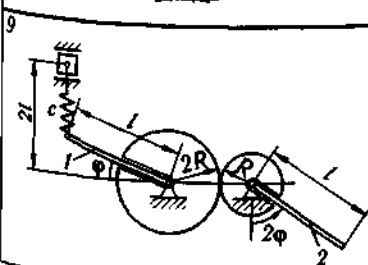
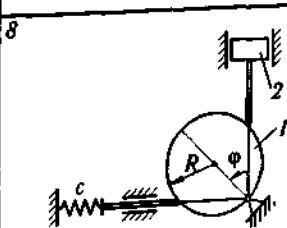
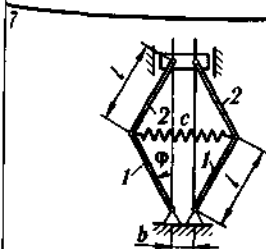
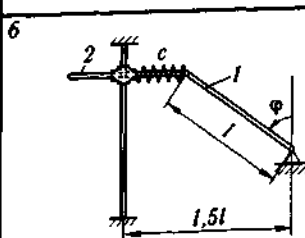
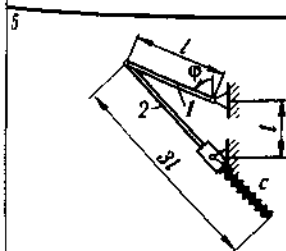
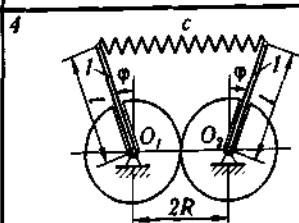
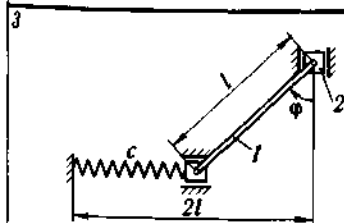
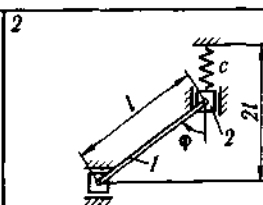
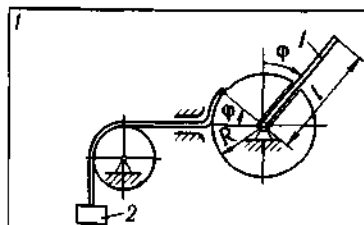
Для консервативной механической системы с одной степенью свободы требуется:

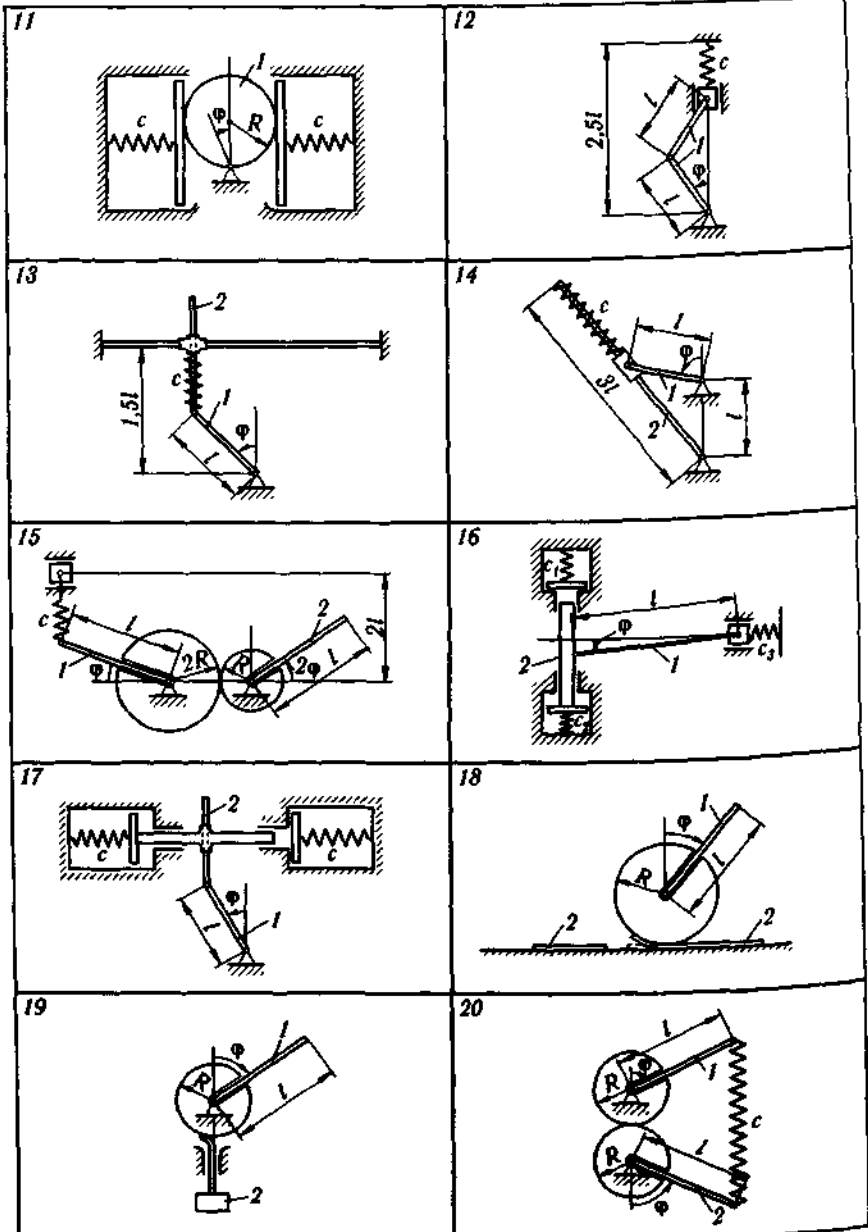
1. Определить положения равновесия, пренебрегая массами упругих элементов.
2. Провести исследование устойчивости найденных положений равновесия.

Варианты механических систем показаны на рис. 219—221, а необходимые соотношения приведены в табл. 58.

В качестве обобщенной координаты выбрать угол φ . На рис. 219—221 показаны механические системы при некотором положительном угле φ . Во всех вариантах качение колес происходит без проскальзывания и трение в сочленениях отсутствует. При решении задачи считать все стержни и диски однородными.

Пример выполнения задания. Консервативная механическая система (рис. 222) состоит из однородного стержня AB длиной $2l$, тел 1 и 2, пружины с коэффициентом жесткости c и тяжелой нити BE длины L . Вес единицы длины нити ρ . В качестве обобщенной координаты примем угол φ . При $\varphi = 0$ пружина сжата на величину f . Вес тел 1 и 2 соответственно G_1 и G_2 . Провисанием нити пренебречь.





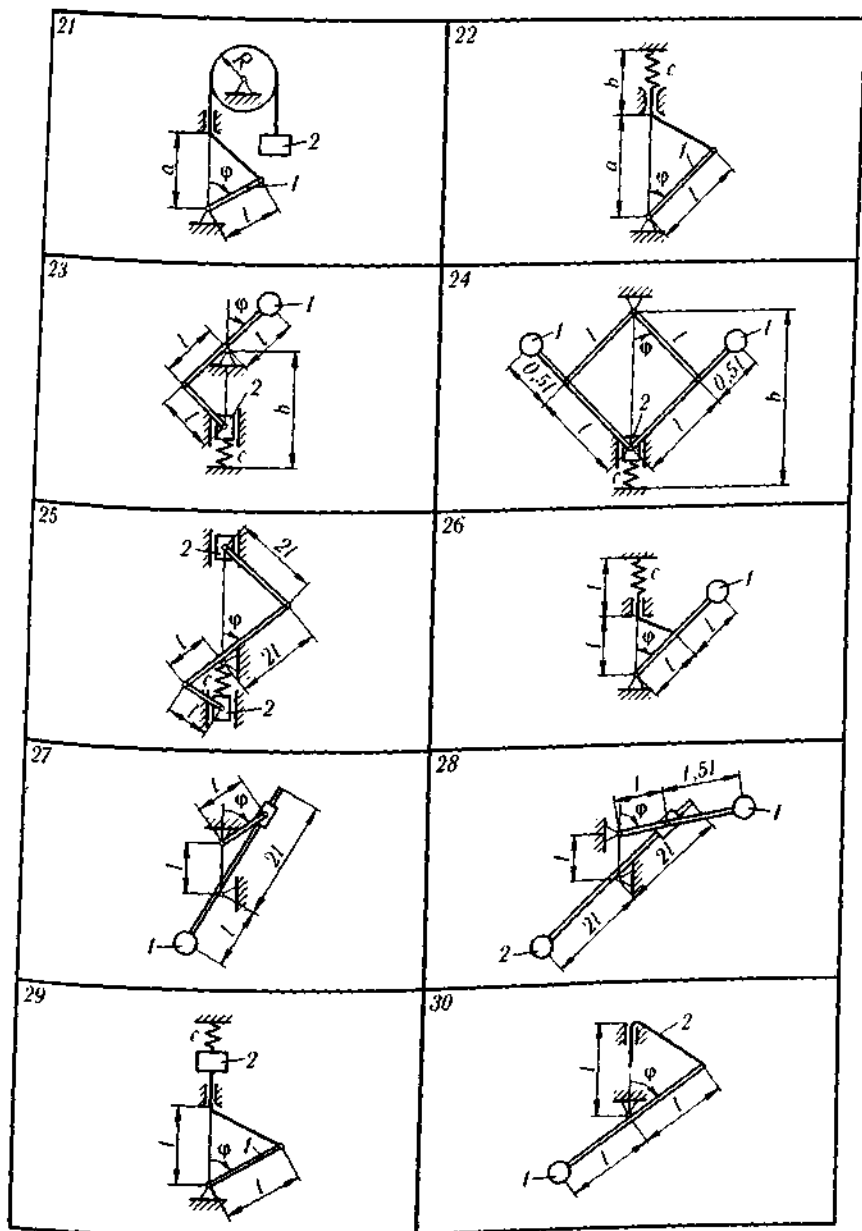


Рис. 221

Номер варианта (рис. 219—221)	Соотношения между параметрами	Примечания
1	$lG_1 = 8RG_2$	Весом нити пренебречь
2	$G_2 = 1,5G_1; l_0 = 2l; 5cl = 12G_1$	
3	$G_2 = 1,5G_1; cl = 4G_1; l_0 = 2l$	
4	$16cl = 5G_1; l_0 = 2R$	
5	$G_2 = 3G_1; l_0 = 2l; cl = 8G_1$	
6	$G_2 = 2,5G_1; l_0 = 1,5l; cl = 12G_1$	
7	$G_2 = G_1; 4cl = 5G_1; l_0 = b$	
8	$G_1 + 2G_2 = 2cR; f = 0$	
9	$G_1 = G_2 = cl; l_0 = l$	Трением пренебречь
10	$G_1 = 2G_2; cR = 6G_2; f = 2R$	
11	$R = 2\sqrt{2}f; G_1 = cf$	
12	$G_1 = cl; l_0 = 0,5l$	
13	$G_1 = G_2; G_1 = cl; l_0 = 0,5l$	
14	$G_2 = 3G_1; G_2 = cl; l_0 = 0,5l$	
15	$l_0 = l; G_2 = 0,1cl; G_1 = 4cl(1 - \sqrt{2}/2)$	
16	$G_2 = 1,5G_1 = 0,15c_3l; c_1 = c_2 = 2c_3;$ $f_1 = 0,2l; f_2 = 0; f_3 = l$	
17	$0,5G_1 + G_2 = cf; f = l$	
18	$G_1l = 2\rho R^2$	К цилиндру приклеивается лента 2
19	$G_1l = 4G_2R$	Весом нити пренебречь
20	$G_1 = 2G_2; l_0 = R; cR = 0,5G_2; l = 2R$	
21	$G_1 = 2G_2; l = 0,52a$	Весом нити пренебречь
22	$G_1 = 6cl; a = 2l; b = 1,5l_0; l_0 = \sqrt{3}l$	То же
23	$G_1 = 3G_2 = 3cl; b = 2l + l_0$	Весом стержней пренебречь
24	$G_1 = G_2 = cl; b = 3l; l_0 = 4l$	То же
25	$G_2 = 1,5\gamma l; 4cl_0 - 18\gamma l - 5cl = 0$	Учесть вес стержней
26	$G_1 = cl; 4(b - l_0 - L) = 3l$	Весом нити пренебречь
27	$G_1 = 0,5\gamma l$	Учесть вес стержней
28	$4G_2 = 15G_1$	Весом стержней пренебречь
29	$G_1 = cl; G_2 = c(f + 0,5l)$	Весом нити пренебречь
30	$G_1 = 0,5\rho l; L = 2l$	Провисанием нити пренебречь

В таблице обозначено: G_1, G_2 — веса тел; ρ — вес единицы длины тяжелой нити, ленты; L — длина нити; c — коэффициент жесткости пружины; f — деформация пружины при $\varphi = 0$; γ — вес единицы длины стержня; l_0 — длина недеформированной пружины; R — радиус диска; b, l — конструктивные размеры.

Параметры системы удовлетворяют условиям

$$L = 3l; \quad G_2 = cf - 7\rho l/4; \quad G_1 = (\rho + c)l.$$

Найти положения равновесия системы и исследовать их на устойчивость.

1. *Определение положений равновесия системы.* Для исследования равновесных состояний системы составим выражение потенциальной энергии. Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии элементов системы в поле силы тяжести $\Pi_{c.r}$ и потенциальной энергии сил упругости деформированных пружин $\Pi_{c.y}$

$$\Pi = \Pi_{c.r} + \Pi_{c.y}. \quad (1)$$

В качестве нулевого уровня потенциальной энергии элементов в поле сил тяжести выберем горизонтальную прямую, проходящую через точку O . Тогда для каждого i -го элемента при выбранном направлении оси Oy получим

$$\Pi_{c.r}(G_i) = G_i y_i,$$

где G_i — вес i -го элемента, а y_i — вертикальная координата центра тяжести i -го элемента.

Для рассматриваемой системы $\Pi_{c.r}$ имеет вид

$$\Pi_{c.r} = G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_{BK} y_3 + G_{KE} y_4.$$

Здесь G_{BK} и G_{KE} — вес участков BK и KE тяжелой нити BE , а y_3 и y_4 — вертикальные координаты их центров тяжести (рис. 223):

$$G_{BK} = \rho \cdot BK; \quad G_{KE} = \rho \cdot KE = \rho(L - BK).$$

Длину BK определим из равнобедренного треугольника OBK , в котором $OB = OK = l$:

$$BK = 2l \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|.$$

Модуль при $\sin \frac{\varphi}{2}$ введен для того, чтобы формула была верна как для $\varphi > 0$, так и для $\varphi < 0$. Тогда имеем

$$G_{BK} = 2\rho l \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|; \quad G_{KE} = \rho \left(L - 2l \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right).$$

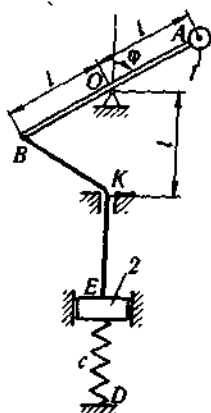


Рис. 222

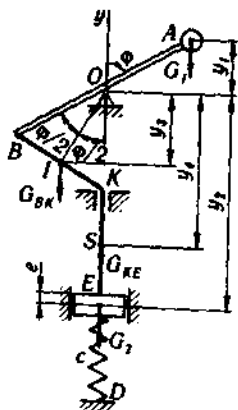


Рис. 223

Координаты y_i равны:

$$y_1 = l \cos \varphi = l \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right);$$

$$y_3 = -OI \cos \frac{\varphi}{2} = -l \cos^2 \frac{\varphi}{2} = -l \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right);$$

$$y_4 = -\left\{l + \frac{1}{2}KE\right\} = -\left\{l + \frac{1}{2}\left(L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right)\right\};$$

$$y_2 = -\{l + KE + e\} = -\left\{l + e + L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right\}.$$

Подставив найденные соотношения в выражения для $\Pi_{c,\tau}$, имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{c,\tau} = & G_1 l \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) - G_2 \left\{l + e + L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right\} - \\ & - 2\rho l^2 \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right| \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) - \rho \left(L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right) \left\{l + \frac{1}{2}\left(L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right)\right\}. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия силы упругости пружины определяется равенством

$$\Pi_{c,y} = 1/2 c \lambda^2,$$

где λ — деформация пружины, равная

$$\lambda = f + BK = f + 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|;$$

$f > 0$, если при $\varphi = 0$ пружина растянута,

$f < 0$, если при $\varphi = 0$ пружина сжата,

$$\Pi_{c,y} = \frac{c}{2} \left(f + 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right)^2.$$

Складывая выражения для $\Pi_{c,\tau}$ и $\Pi_{c,y}$, получаем выражения для потенциальной энергии системы в виде

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi(\varphi) = & G_1 l \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) - G_2 \left\{l + e + L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right\} - \\ & - 2\rho l^2 \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right| \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) - \rho \left(L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right) \left[l + 0,5 \left(L - 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right)\right] + \\ & + \frac{c}{2} \left(f + 2l \left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|\right)^2. \end{aligned}$$

Функция $\Pi(\varphi)$ зависит от $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ и $\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|$ и потому является четной, т. е. $\Pi(\varphi) = \Pi(-\varphi)$.

Так как функции $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ и $\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|$ удовлетворяют равенствам $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \sin^2 \left(k\pi + \frac{\varphi}{2}\right)$; $\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right| = \left|\sin \left(k\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\right|$ для любого целого k , то график функции $\Pi(\varphi)$ симметричен относительно вертикалей $\varphi = k\pi$.

Это позволяет провести анализ функции $\Pi(\varphi)$ только на участке $0 \leq \varphi \leq \pi$ и, пользуясь соображениями симметрии, распространить результаты на любой другой интервал изменения φ .

Удобно ввести обозначение

$$x = \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Тогда

$$\Pi = \Pi(x(\varphi)) = G_1 l (1 - 2x^2) - G_2 (l + e + L - 2|x|) - 2\rho l^2 |x| (1 - x^2) - \rho (L - 2|x|) [l + 0,5(L - 2|x|)] + \frac{c}{2} (f + 2|x|)^2. \quad (2)$$

Положения равновесия определим из условия равенства нулю обобщенной силы Q :

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Выражение (2) содержит функцию $|x|$, график которой при $x = 0$ ($\varphi = 0$) имеет излом, т. е. производная $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ при $x = 0$ не определена. Поэтому сначала определим корни уравнения (3) при $x > 0$ ($\varphi > 0$), а затем проведем исследование положения $x = 0$ ($\varphi = 0$).

Для интервала $0 < \varphi \leq \pi$ потенциальная энергия может быть представлена выражением

$$\Pi(x(\varphi)) = 2l \left(\frac{a}{3} x^3 - bx^2 + d \cdot x \right) + \text{const}, \quad (4)$$

где $a = 3\rho l$; $b = G_1 + (\rho - c)l$; $d = G_2 + \rho L + cf$. Учитывая соотношения, заданные в условии, получаем:

$$a = 3\rho l; \quad b = (\rho + c)l + (\rho - c)l = 2\rho l;$$

$$d = c|f| + \frac{1}{4}\rho l + \rho l - c|f| = \frac{5}{4}\rho l;$$

$$\Pi(x(\varphi)) = 2\rho l^2 (x^3 - 2x^2 + 1,25x) + \text{const}. \quad (5)$$

Слагаемые в правой части (4) и (5), не зависящие от x , выписывать подробно нет надобности.

Получим $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ и $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2\rho l^2 (3x^2 - 4x + 1,25); \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0,5 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right).$$

Условие (3) дает два уравнения:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \quad \text{или} \quad \cos \frac{\varphi}{2} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad 3x^2 - 4x + 1,25 = 0. \quad (7)$$

В интервале $0 < \varphi \leq \pi$ уравнение (6) имеет единственный корень $\varphi_1 = \pi$ ($\varphi_1 = 180^\circ$).

Рассмотрим квадратное уравнение (7). Его корни:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1,25}}{6} = \frac{5}{6}; \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot 1,25}}{6} = 0,5.$$

Так как x_1 и x_2 по модулю меньше единицы, то им соответствуют положения покоя системы, определяемые равенствами

$$\sin \frac{\varphi_2}{2} = x_1; \quad \sin \frac{\varphi_3}{2} = x_2.$$

В интервале $0 < \varphi \leq \pi$ получаем два положения равновесия:

$$\varphi_2 = 2 \arcsin x_1 = 2 \arcsin(5/6) = 112,89^\circ, \\ \varphi_3 = 2 \arcsin x_2 = 2 \arcsin 0,5 = 60^\circ.$$

Исследуем теперь положение системы при $\varphi = 0$. Легко видеть, что при $\varphi = 0$ ($x = 0$) механическая система находится в равновесии, так как все активные силы направлены вдоль вертикали OD и уравновешиваются реакцией R_0 опоры O (рис. 224).

Отметим, что при $\varphi = 0$ нить растянута вдоль всей длины L , так как, по условию задачи, $c|f| < G_2$.

Итак, в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ система имеет четыре положения равновесия: $\varphi_1 = 180^\circ$; $\varphi_2 = 112,89^\circ$; $\varphi_3 = 60^\circ$; $\varphi_4 = 0$.

Примечание. При других значениях параметров механическая система может иметь в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$ три или два положения равновесия.

Положения равновесия рассматриваемой системы в интервале $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ (или $-\pi \leq \varphi \leq 0$) определяются из условия четности функции $\Pi(\varphi)$ и равны

$$\varphi_5 = -\varphi_3 = -60^\circ = 300^\circ;$$

$$\varphi_6 = -\varphi_2 = -112,89^\circ = 247,11^\circ.$$

2. *Исследование положений равновесий на устойчивость.* Исследуем на устойчивость положения равновесия в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi$. Для этого определим вид экстремума функции $\Pi(\varphi)$ (максимум или минимум) в положениях равновесия. Составим вторую производную от Π по φ :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}. \quad (8)$$

При $\varphi = \varphi_1 = \pi$ производная $\partial x / \partial \varphi = 0$ [см. (6)], поэтому из (8) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi_1} = \left[\frac{\partial \Pi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{\varphi_1}.$$

Учитывая, что при $\varphi_1 = \pi$ $x = 1$, получаем

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi_1} = 2\rho^2(3 - 4 + 1,25) \left(-0,25 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{\rho^2}{8} < 0.$$



Рис. 224

Следовательно, при $\varphi = \varphi_1 = \pi$ функция $\Pi(\varphi)$ имеет максимум. При $\varphi = \varphi_2$ и $\varphi = \varphi_3$ производная $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$ [см. (7)], поэтому

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi_2, \varphi_3} = \left[\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \right]_{\varphi_2, \varphi_3}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что знак второй производной при $\varphi = \varphi_2$ и $\varphi = \varphi_3$ определяется знаком $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$.

Так как $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 2\rho l^2(6x - 4)$, то при $\varphi = \varphi_2$ $x = x_1 = 5/6$ и $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 2\rho l^2(6 \cdot 5/6 - 4) = 2\rho l^2 > 0$, при $\varphi = \varphi_3$ $x = x_2 = 0,5$ и $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 2\rho l^2(6 \cdot 0,5 - 4) = -2\rho l^2 < 0$.

Таким образом, при $\varphi = \varphi_2$ функция $\Pi(\varphi)$ имеет минимум, а при $\varphi = \varphi_3$ — максимум.

В положении равновесия при $\varphi = \varphi_4 = 0$ не определены ни первая, ни вторая производные от потенциальной энергии по углу φ . Поэтому проведем исследование функции $\Pi(\varphi)$ при $\varphi = 0$ по знаку $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$ в окрестности положения $\varphi = 0$.

Производная в нуле справа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi \rightarrow +0} &= \lim_{\substack{\varphi \rightarrow +0 \\ x > 0}} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right) \lim_{\varphi \rightarrow +0} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \lim_{\substack{\varphi \rightarrow +0 \\ x > 0}} 2\rho l^2(3x^2 - 4x + 1,25) \lim_{\substack{\varphi \rightarrow +0 \\ x > 0}} 0,5 \cos \frac{\varphi}{2} = 1,25\rho l^2 > 0. \end{aligned}$$

Так как производная в нуле справа положительна, то функция $\Pi(\varphi)$ возрастает при увеличении φ ($\varphi > 0$), т. е.

$$\Pi(\Delta\varphi) > \Pi(\varphi = 0)$$

при малом $\Delta\varphi > 0$.

Вследствие четности функции $\Pi(\varphi)$ она удовлетворяет также неравенству $\Pi(-\Delta\varphi) > \Pi(\varphi = 0)$. Следовательно, при $\varphi = 0$ функция $\Pi(\varphi)$ имеет минимум. Таким образом, при $\varphi = \varphi_1 = 180^\circ$ и $\varphi = \varphi_3 = 60^\circ$ функция $\Pi(\varphi)$ имеет максимум, а при $\varphi = \varphi_2 = 112,89^\circ$ и $\varphi = \varphi_4 = 0$ — минимум. На основании те-

оремы Лагранжа—Дирихле при $\varphi = \varphi_2$ и $\varphi = \varphi_4$ система имеет положения устойчивого равновесия, а на основании теоремы Н. Г. Четаева при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_3$ — положения неустойчивого равновесия.

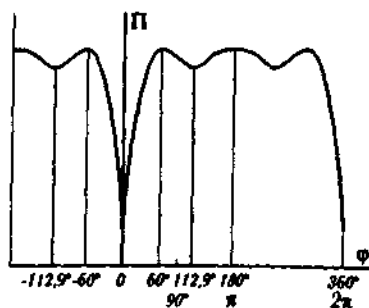


Рис. 225

Теорема Н. Г. Четаева. Если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия, предполагаемая аналитической функцией обобщенных координат, не имеет минимума, то равновесие неустойчиво.

Положение равновесия $\varphi = \varphi_5$ является, как и $\varphi = \varphi_3$, неустойчивым, а положение равновесия $\varphi = \varphi_6$, соответствующее положению $\varphi = \varphi_2$, — устойчивым.

Сведем результаты исследования в табл. 59 и отметим положения равновесия на графике функции $\Pi(\varphi)$ (рис. 225).

Таблица 59

Положение равновесия	Устойчивость положения равновесия	Положение равновесия	Устойчивость положения равновесия
$\varphi_1 = 180^\circ$	Неустойчиво	$\varphi_4 = 0$	Устойчиво
$\varphi_2 = 112,89^\circ$	Устойчиво	$\varphi_5 = -60^\circ$	Неустойчиво
$\varphi_3 = 60^\circ$	Неустойчиво	$\varphi_6 = -112,89^\circ$	Устойчиво

IV. КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задание Д.23. Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей.

Найти уравнение движения груза 1 $y = y(t)$, приняв за начало отсчета положение покоя груза 1 (при статической деформации пружин). Найти также амплитуду колебаний груза 1.

Схемы систем показаны на рис. 226—228, а необходимые данные приведены в табл. 60.

В задании приняты следующие обозначения: 1 — груз массой m_1 ; 2 — блок массой m_2 и радиусом r_2 (сплошной однородный диск); 3 — блок массой m_3 и радиусом инерции i_x ; 4 — сплошной однородный диск массой m_4 и радиусом r_4 ; 5 — диск массой m_5 и радиусом инерции i'_x ; 6 — тонкий однородный стержень массой m_6 и длиной l ; 7 — стержень, масса которого не учитывается; c — коэффициент жесткости пружины; y_0 — начальное отклонение груза 1 по вертикали от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины; $\dot{y}_0$ — проекция начальной скорости $\dot{y}_0$ груза 1 на вертикальную ось.

На рис. 226—228 системы тел 1—7 показаны в положении покоя (при статической деформации пружин).

В вариантах 5, 6, 14 и 23 стержень 6 жестко соединен с диском 4.

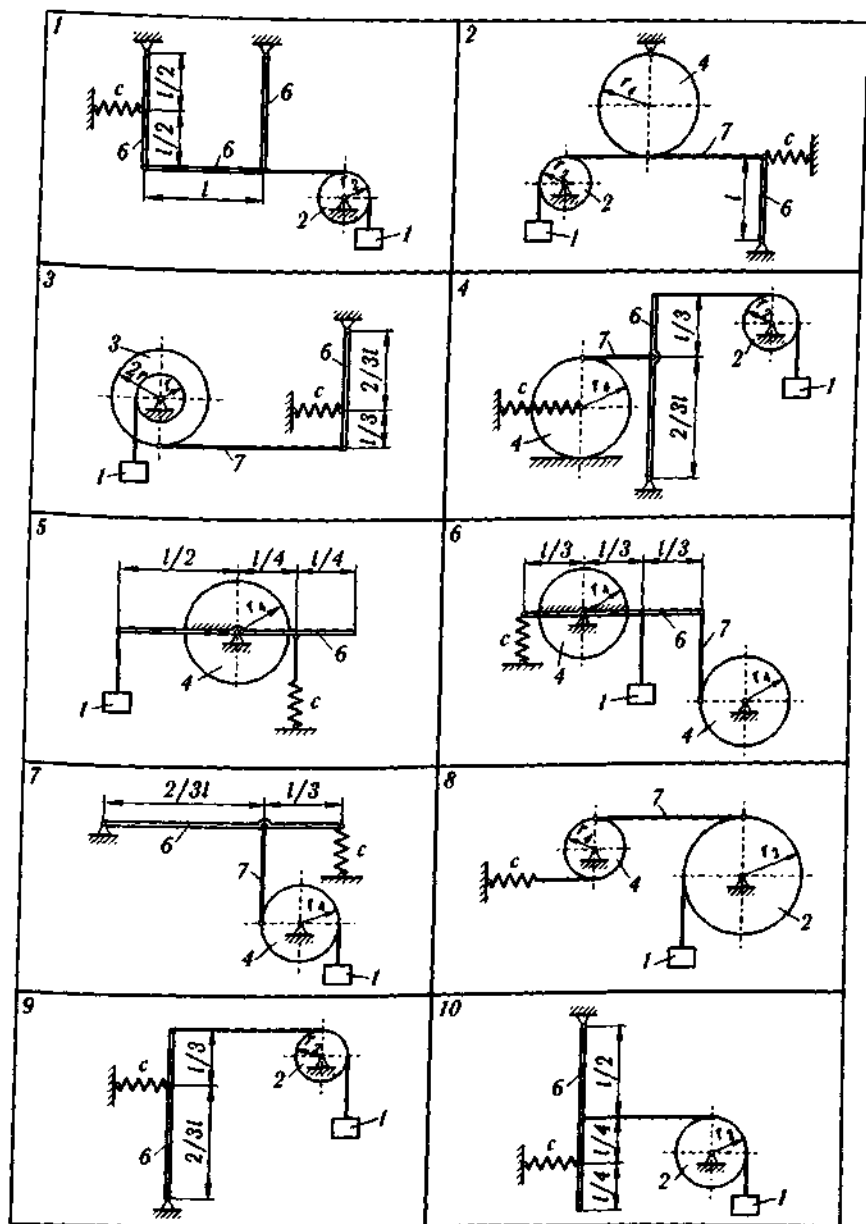


Рис. 226

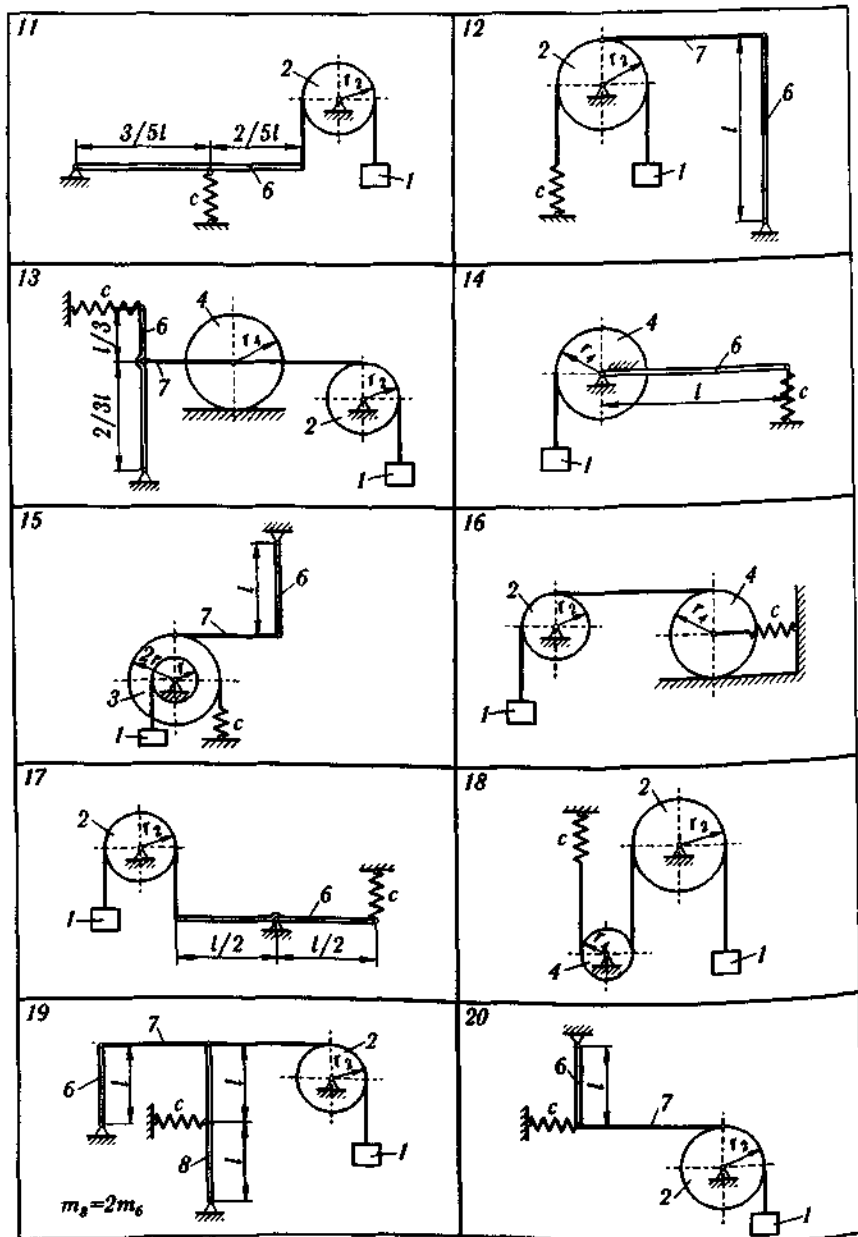


Рис. 227

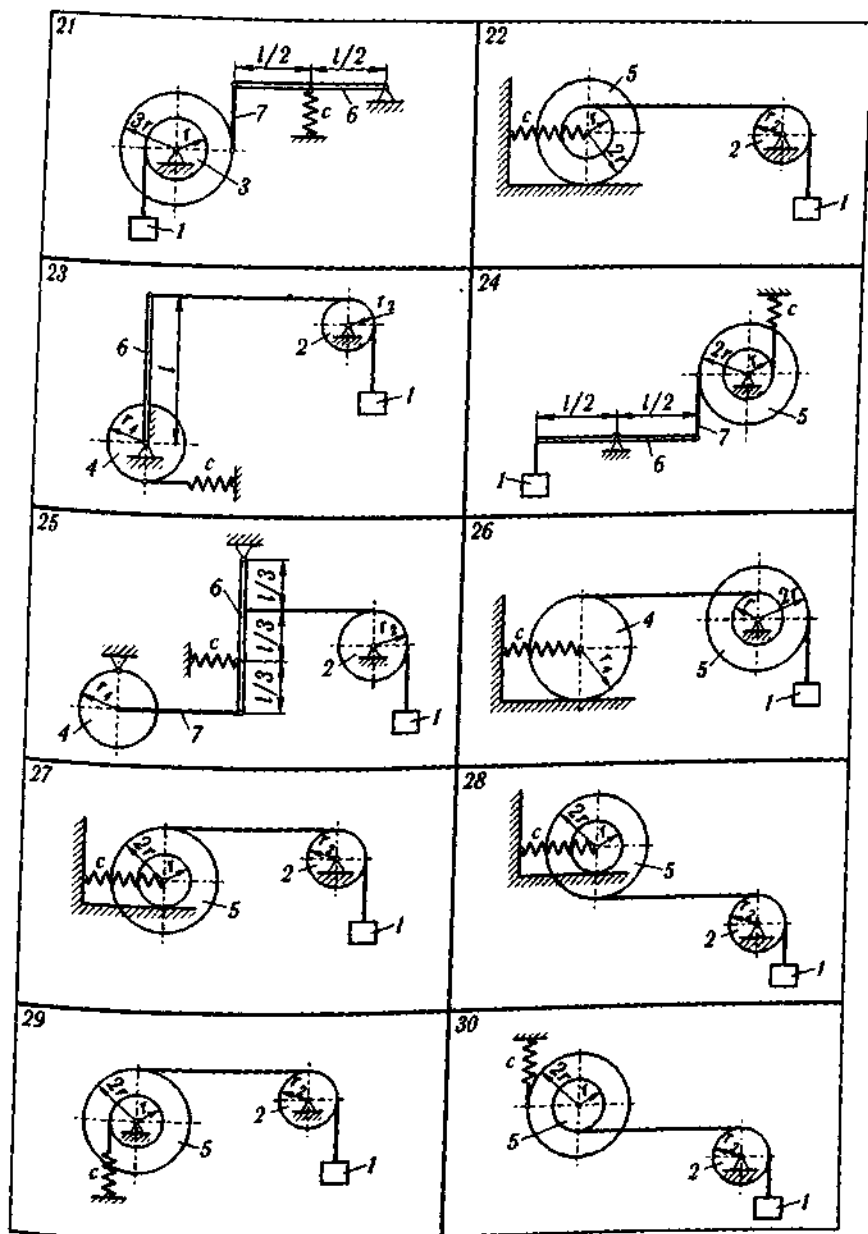


Рис. 228

Номер варианта (рис. 226-228)	l	i_x	i'_x	r_4	m_1	m_2	$m_3,$ $m_4,$ m_5	m_6	c	Начальные условия ($t = 0$)	
	м				кг				Н/см	$y_0, \text{см}$	$\dot{y}_0, \text{м/с}$
1	0,5	-	-	-	1	2	-	3	40	0,1	5,0
2	0,5	-	-	0,2	1	2	2	3	40	0	6,0
3	0,5	$3/2r$	-	-	1	-	4	3	20	0,2	7,0
4	0,6	-	-	-	1	2	3	2	36	0,2	0
5	0,6	-	-	0,15	1	-	3	3	16	0	8,0
6	0,6	-	-	0,15	1	-	1	1	40	0,3	7,0
7	-	-	-	-	1	-	2	2	40	0,4	0
8	-	-	-	-	1	3	2	-	40	0	6,0
9	0,6	-	-	-	1	2	-	3	38	0,5	5,0
10	0,6	-	-	-	1	2	-	3	32	0	6,0
11	-	-	-	-	1	2	-	3	30	0,4	7,0
12	0,5	-	-	-	1	2	-	3	20	0,2	0
13	0,3	-	-	-	1	1	1	2	32	0	8,0
14	0,4	-	-	0,1	1	-	2	3	20	0	7,0
15	0,4	$r\sqrt{3}$	-	-	1	-	2	2	20	0,1	0
16	-	-	-	-	1	2	3	-	32	0,3	6,0
17	-	-	-	-	1	2	-	2	20	0	5,0
18	-	-	-	-	1	2	1	-	40	0	6,0
19	0,2	-	-	-	1	1	-	1	32	0,1	0
20	0,5	-	-	-	1	2	-	3	20	0,4	7,0
21	-	$2r$	-	-	1	-	2	3	32	0	8,0
22	-	-	$r\sqrt{2}$	-	1	2	4	-	40	0,1	7,0
23	0,4	-	-	0,2	1	2	2	3	40	0,3	0
24	-	-	$r\sqrt{3}$	-	1	-	3	2	40	0	6,0
25	0,3	-	-	0,1	1	2	2	1	40	0,2	5,0
26	-	$r\sqrt{2}$	-	-	1	-	2	-	40	0,3	0
27	-	-	$3r/2$	-	1	2	3	-	40	0	6,0
28	-	-	$r\sqrt{3}$	-	1	2	3	-	40	0,2	0
29	-	-	$4r/3$	-	1	2	3	-	40	0	7,0
30	-	-	$r\sqrt{2}$	-	1	2	3	-	40	0,3	7,0

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_4 = 1$ кг, $m_6 = 3$ кг; $l = 0,6$ м; $c = 20$ Н/см; $y_0 = 0,2$ см; $\dot{y}_0 = 8$ см/с (рис. 229).

Определить циклическую частоту k и период T малых свободных колебаний системы, а также получить уравнение $y = y(t)$ колебаний груза 1 и найти амплитуду a его колебаний.

Решение. Воспользуемся уравнением Лагранжа II рода для консервативной системы. Приняв за обобщенную координату системы вертикальное отклонение y груза 1 от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad (1)$$

где T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия системы.

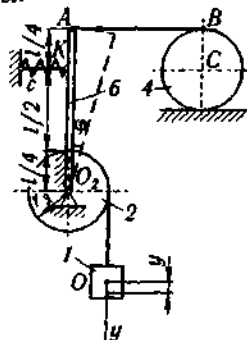


Рис. 229

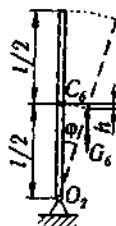


Рис. 230

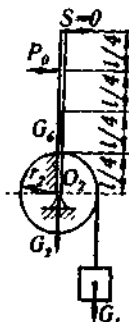


Рис. 231

Кинетическую энергию T вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно $\dot{y}$ и y , а потенциальную энергию Π — с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y .

Найдем кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий тел 1, 2, 6 и 4:

Выразим скорость центра масс тела 4 и угловые скорости тел 2, 4 и 6 через обобщенную скорость $\dot{y}$:

$$v_1 = \dot{y}; \quad \omega_2 = \dot{y}/r_2; \quad \omega_6 = \omega_4 = \dot{y}/r_2.$$

Так как рассматриваются малые колебания, то $v_B = v_A$, а ввиду того, что диск 4 катится без скольжения, $v_C = v_B/2$; следовательно,

$$v_C = v_A/2 = \omega_6 l/2 = \omega_2 l/2 = \dot{y}l/(2r_2) = 2\dot{y};$$

$$\omega_4 = v_C/r_4 = 2\dot{y}/r_4.$$

Момент инерции тела 4 относительно центральной оси

$$J_C = m_4 r_4^2/2.$$

Моменты инерции тел 2 и 6 относительно оси вращения

$$J_2 = m_2 r_2^2/2; \quad J_6 = m_6 l^2/3.$$

Кинетическая энергия тел 1, 2, 4 и 6 имеет следующий вид:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2}; \quad T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \dot{y}^2}{4};$$

$$T_4 = \frac{m_4 v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_4^2}{2} = 3m_4 \dot{y}^2; \quad T_6 = \frac{J_6 \omega_6^2}{2} = \frac{8m_6 \dot{y}^2}{3}.$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой механической системы

$$T = T_1 + T_2 + T_6 + T_4 = m_1 \dot{y}^2/2 + m_2 \dot{y}^2/4 + 8/3 m_6 \dot{y}^2 + 3m_4 \dot{y}^2 = \\ = 1/2 [m_1 + m_2/2 + 16/3 m_6 + 6m_4] \dot{y}^2.$$

Найдем потенциальную энергию системы, которая определится работой сил тяжести системы и силы упругости пружины на перемещении системы из отклоненного положения, когда груз имеет координату y , в нулевое положение, которым считаем положение покоя системы;

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}.$$

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести при указанном перемещении,

$$\Pi_I = -G_1 y - G_6 h,$$

где h — вертикальное смещение центра тяжести стержня 6, которое вычисляем с точностью до величины второго порядка малости относительно обобщенной координаты y .

По рис. 230

$$h = l/2 - (l/2) \cos \varphi = (l/2)(1 - \cos \varphi).$$

Ограничиваясь в формуле разложения

$$\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2! + \varphi^4/4! - \dots$$

двумя первыми членами и учитывая, что

$$\varphi = y/r_2 = 4y/l,$$

имеем

$$h = (l/2) \varphi^2/2 = (l/4) \left(\frac{4y}{l}\right)^2 = 4y^2/l.$$

Таким образом,

$$\Pi_I = -G_1 y - G_6 \cdot 4y^2/l.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна

$$\Pi_{II} = c(f_{ст} + \lambda_K)^2/2 - c f_{ст}^2/2,$$

где $f_{ст}$ — статическая деформация пружины; λ_K — перемещение точки прикрепления пружины K , соответствующее координате y .

Так как (см. рис. 229)

$$\frac{\lambda_K}{y} = \frac{3/4l}{1/4l},$$

т. е. $\lambda_K = 3y$, то

$$\Pi_{II} = \frac{c(f_{ст} + 3y)^2}{2} - \frac{c f_{ст}^2}{2} = 3f_{ст} y + \frac{9}{2} c y^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = -G_1 y - (4G_6/l)y^2 + 3cf_{ст}y + 9/2cy^2.$$

Так как в положении покоя, соответствующем статической деформации пружины,

$$(\partial \Pi / \partial y)_{y=0} = 0, \text{ то } -G_1 + 3cf_{ст} = 0. \quad (a)$$

Уравнение (a) можно получить также, составив уравнение моментов сил $\sum M_{iO_2} = 0$ для положения покоя системы (рис. 231):

$$\sum M_{iO_2} = P_0 \cdot 3/4l - G_1 r_2 = 0,$$

или

$$cf_{ст} \cdot 3/4l - G_1 l/4 = 0, \text{ т. е. } 3cf_{ст} - G_1 = 0.$$

Таким образом, потенциальная энергия рассматриваемой механической системы

$$\Pi = 9/2cy^2 - \frac{4G_6}{l}y^2 = 1/2 \left(9c - \frac{8G_6}{l} \right) y^2.$$

Найдем значения членов уравнения (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4 \right) \ddot{y};$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \left(9c - \frac{8G_6}{l} \right) y.$$

Уравнение (1) приобретает вид

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4 \right) \ddot{y} + \left(9c - \frac{8G_6}{l} \right) y = 0,$$

или

$$\ddot{y} + \frac{9c - 8G_6/l}{m_1 + m_2/2 + 16m_6/3 + 6m_4} y = 0.$$

Обозначив k^2 коэффициент при y , имеем

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (2)$$

Циклическая частота свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{9c - 8G_6/l}{m_1 + m_2/2 + 16m_6/3 + 6m_4}}, \quad k = 27,1 \text{ 1/с.}$$

Период свободных колебаний

$$T = 2\pi/k = 2 \cdot 3,14/27,1 = 0,23 \text{ с.}$$

Интегрируя уравнение (2), получаем уравнение движения груза 1:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 найдем уравнение скорости груза

$$\dot{y} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

и воспользуемся начальными условиями задачи. Из уравнений $y = y(t)$ и $\dot{y} = \dot{y}(t)$ при $t = 0$ имеем:

$$y_0 = C_1; \quad \dot{y}_0 = kC_2.$$

Следовательно,

$$C_1 = y_0; \quad C_2 = \dot{y}_0/k.$$

Подставляем эти значения C_1 и C_2 в уравнение $y = y(t)$:

$$y = y_0 \cos kt + (\dot{y}_0/k) \sin kt;$$

$$y = 0,2 \cos 27,1t + 0,3 \sin 27,1t.$$

Уравнение $\dot{y} = y(t)$ можно получить в другом виде, если перейти к другим постоянным интегрирования a и β , приняв

$$C_1 = a \sin \beta; \quad C_2 = a \cos \beta.$$

Тогда $y = a \sin(kt + \beta)$, где $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\beta = \arctg(C_1/C_2)$ или $a = \sqrt{y_0^2 + (\dot{y}_0/k)^2}$; $\beta = \arctg(ky_0/\dot{y}_0)$.

Найдем числовые значения a и β : $a = 3,6 \cdot 10^{-2}$ м, $\beta = \arctg 0,68$.

Так как $\sin \beta > 0$ ($C_1 > 0$), то $\beta = 34^\circ 12' = 0,597$ рад.

Окончательно

$$y = 3,6 \cdot 10^{-2} \sin(27,1t + 0,597) \text{ м.}$$

Задание Д.24. Исследование свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Определить частоты малых свободных колебаний и формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая силами сопротивления, массами пружин и моментами инерции скручиваемых валов.

Схемы механических систем тел 1—3 в положении покоя показаны на рис. 232—234, а необходимые для решения данные приведены в табл. 61.

Примечание. Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными дисками, стержни — тонкими однородными. Во всех случаях качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, указанной на рис. 235.

Дано: $l_1 = 0,2$ м; $l_2 = 0,6$ м; $l_3 = 0,3$ м; масса груза $m_1 = 0,5$ кг; масса однородного стержня ED $m_2 = 3$ кг; коэффициенты жесткости пружин: $c_1 = 60$ Н/см; $c_2 = 40$ Н/см; $c_3 = 40$ Н/см.

Решение. Система состоит из груза B , подвешенного к рычагу ED на пружине с коэффициентом жесткости c_3 . В точках E и D рычаг опирается на пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 .

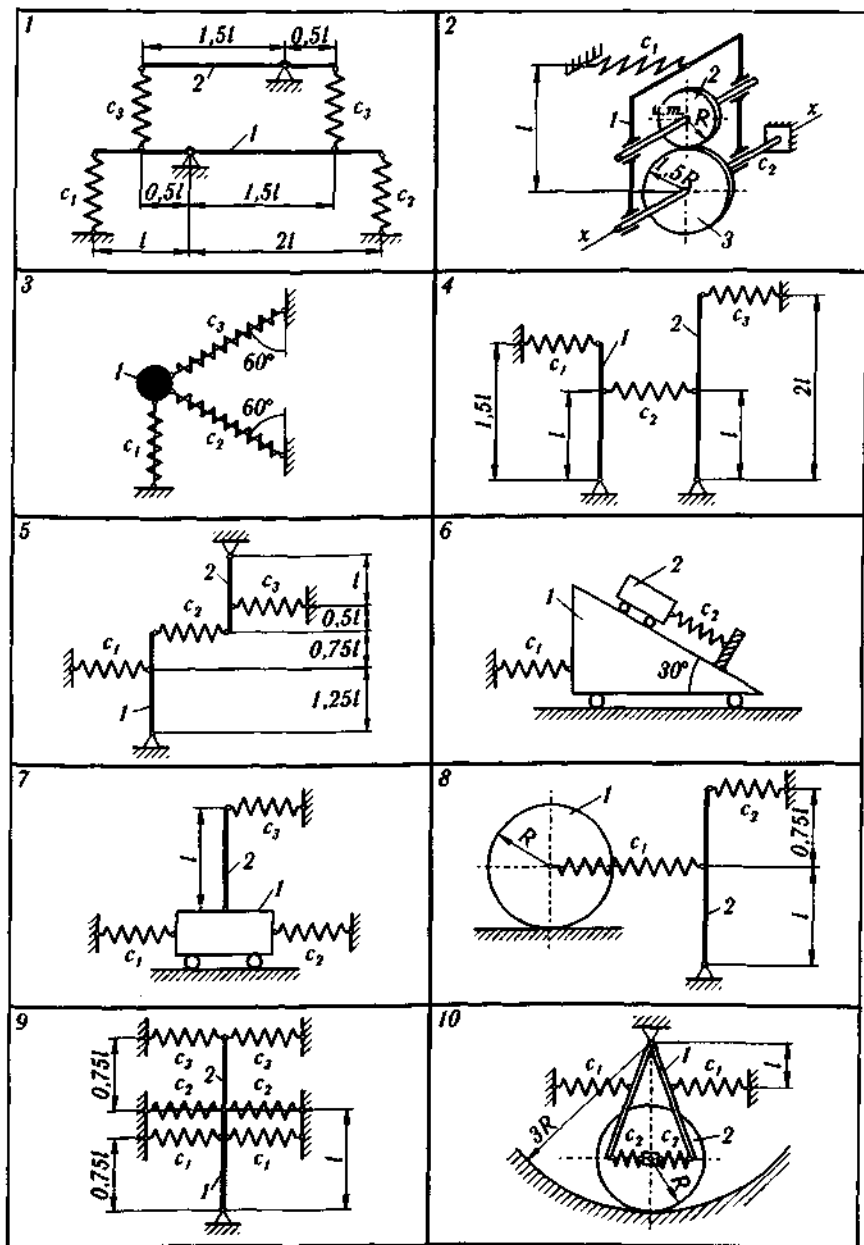
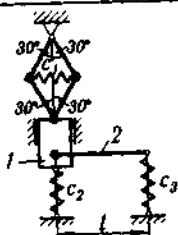
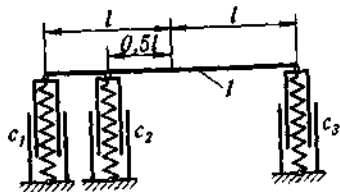


Рис. 232

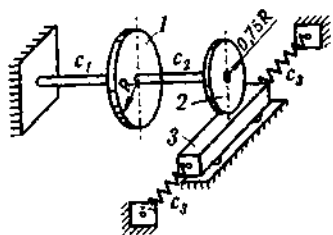
11



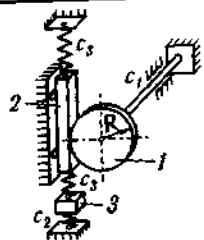
12



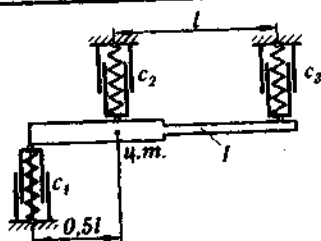
13



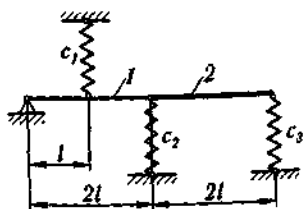
14



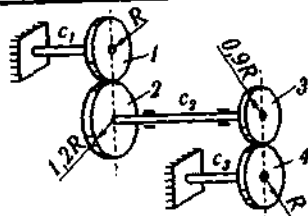
15



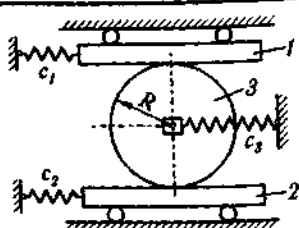
16



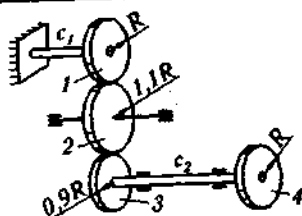
17



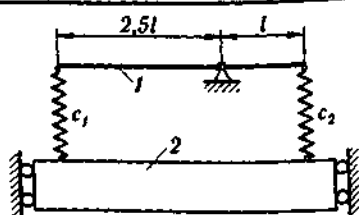
18



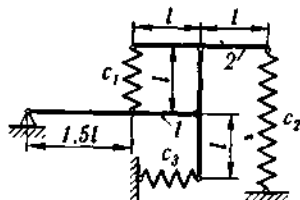
19



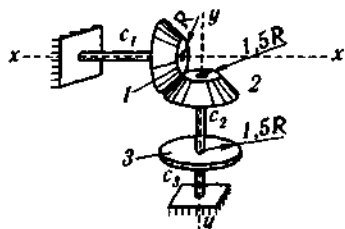
20



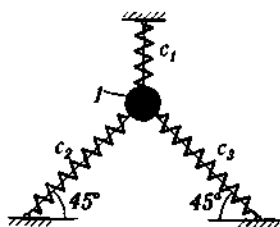
21



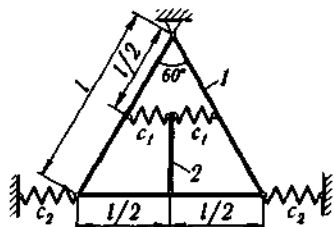
22



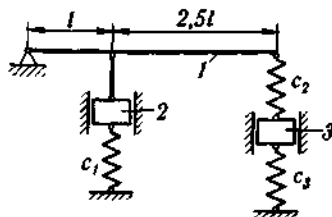
23



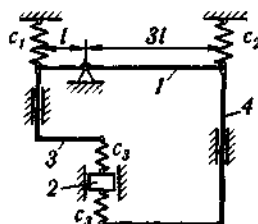
24



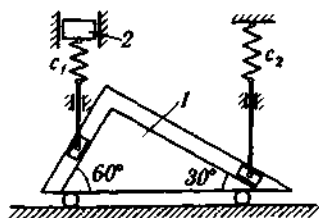
25



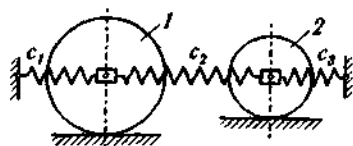
26



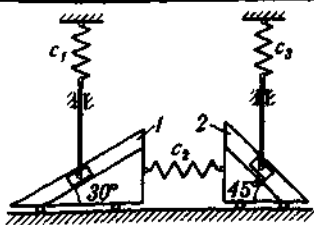
27



28



29



30

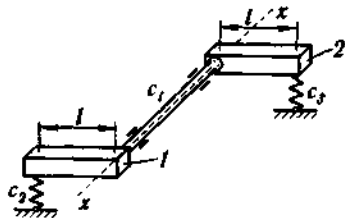


Рис. 234

Номер варианта (Рис. 232-234)	Масса тел, кг			Ради- ус $R, м$	Радиус инерции тела J от- носитель- но оси вра- щения $i_x, м$	Коэффициенты жесткости упругих элементов						Расстояние $L, м$	Примечания
	m_1	m_2	m_3			c_1		c_2		c_3			
						$\frac{H}{см}$	$\frac{Hм}{рад}$	$\frac{H}{см}$	$\frac{Hм}{рад}$	$\frac{H}{см}$	$\frac{Hм}{рад}$		
1	1	2	-	-	-	40	-	30	-	20	-	0,5	Корпус редуктора имеет возможность поворачиваться вокруг оси колеса 3. Ось колеса 2 неизменно связана с корпусом. Центр тяжести корпуса совпадает с центром колеса 2
2	10	2	4	0,2	0,6	400	-	-	$2 \cdot 10^3$	-	-	1	
3	4	-	-	-	-	30	-	20	-	10	-	-	Система расположена в горизонтальной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы. Тело 1 принять за материальную точку
4	2	5	-	-	-	6	-	8	-	7	-	0,5	Центр тяжести тела 1 находится на оси пружины с коэффициентом жесткости c_1 . В положении покоя пружины не деформированы
5	5	2	-	-	-	8	-	6	-	7	-	0,5	
6	8	2	-	-	-	20	-	15	-	-	-	-	Центр тяжести тела 1 находится на оси пружины с коэффициентом жесткости c_1 . В положении покоя пружина с коэффициентом жесткости c_1 не деформирована
7	3	1	-	-	-	6	-	4	-	8	-	0,5	
8	4	1	-	0,2	-	40	-	30	-	-	-	0,3	В положении покоя пружины не деформированы
9	1	0,5	-	-	-	80	-	10	-	60	-	0,4	
10	6	4	-	0,2	0,3	4	-	3	-	-	-	0,1	В положении покоя пружина с коэффициентом жесткости c_1 не деформирована
11	10	3	-	-	-	10	-	10	-	5	-	0,4	
12	6	-	-	-	-	20	-	30	-	40	-	0,5	
13	30	30	10	0,4	-	-	$2 \cdot 10^4$	-	$1 \cdot 10^4$	200	-	-	
14	40	20	10	-	-	-	$3 \cdot 10^4$	100	-	150	-	-	

Номер варианта (Рис. 232-234)	Масса тел, кг			Ради- ус $R, м$	Радиус инерции тела I от- носитель- но оси вра- щения $i_x, м$	Коэффициенты жесткости упругих элементов						Расстояние $l, м$	Примечания	
	m_1	m_2	m_3			c_1		c_2		c_3				
						$\frac{H}{см}$	$\frac{Hm}{рад}$	$\frac{H}{см}$	$\frac{Hm}{рад}$	$\frac{H}{см}$	$\frac{Hm}{рад}$			
15	6	-	-	-	0,6	40	-	30	-	50	-	1	i_x — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной плоскости рисунка	
16	4	6	-	-	-	60	-	100	-	80	-	0,4	$m_4 = m_1$	
17	50	60	40	0,2	-	-	$2 \cdot 10^4$	-	$3 \cdot 10^4$	-	$1 \cdot 10^4$	-	-	$m_4 = m_1$
18	2	3	8	0,4	-	20	-	40	-	30	-	-	-	$m_4 = m_1$
19	40	60	30	0,35	-	-	$1 \cdot 10^4$	-	$3 \cdot 10^4$	-	-	-	0,5	Система расположена в горизонталь- ной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы
20	8	10	-	-	-	40	-	60	-	30	-	-	-	$i_{x1} = i_{x2}$
21	4	2	-	-	0,6	20	-	30	-	30	-	-	-	Система расположена в горизонталь- ной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы
22	30	40	20	0,4	0,5	-	$1 \cdot 10^4$	-	$5 \cdot 10^3$	-	$2 \cdot 10^4$	-	-	$i_{x1} = i_{x2}$
23	3	-	-	-	-	10	-	20	-	30	-	-	-	Система расположена в горизонталь- ной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы. Тело I принять за материальную точку
24	40	2	-	-	-	2	-	1	-	-	-	0,4	-	В положении покоя пружины не де- формированы. Тело I состоит из трех одинаковых стержней
25	2	1	0,5	-	-	20	-	40	-	30	-	0,3	-	$m_4 = m_1$
26	6	2	3	-	-	40	-	30	-	10	-	0,2	-	$m_4 = m_1$
27	8	2	-	-	-	30	-	60	-	-	-	-	-	$m_4 = m_1$
28	6	4	-	-	-	20	-	10	-	30	-	-	-	$m_4 = m_1$
29	4	3	-	-	-	30	-	20	-	40	-	-	-	$m_4 = m_1$
30	30	30	-	-	0,4	-	$2 \cdot 10^4$	80	-	100	-	0,5	-	$i_{x1} = i_{x2}$

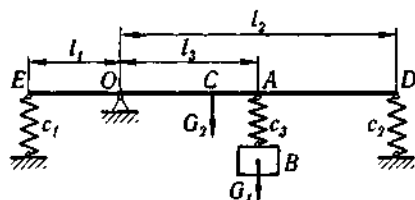


Рис. 235

В состоянии покоя рычаг занимает горизонтальное положение. Пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 деформированы (сжаты или растянуты) соответственно на величины $f_{ст1}$; $f_{ст2}$. Пружина с коэффициентом жесткости c_3 растянута на величину $f_{ст3}$.

За обобщенные координаты примем: z — вертикальное смещение груза от положения покоя; φ — угол поворота рычага ED от положения покоя. На рис. 236 показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

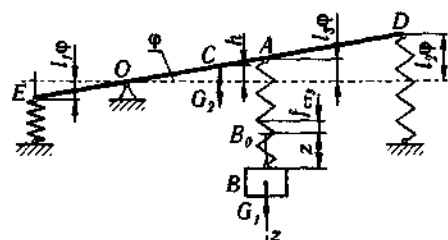


Рис. 236

Найдем кинетическую и потенциальную энергии системы. Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии груза и кинетической энергии рычага:

$$T = m_1 \dot{z}^2 / 2 + J_0 \dot{\varphi}^2 / 2,$$

где $\dot{z}$, $\dot{\varphi}$ — обобщенные скорости; J_0 — момент инерции стержня ED относительно оси вращения O .

Момент инерции

$$J_0 = m_2 l^2 / 12 + m_2 d^2,$$

где l — длина стержня ED , $d = OC$ — расстояние от центра тяжести C стержня до оси вращения O (см. рис. 235):

$$d = (l_1 + l_2) / 2 - l_1 = (l_2 - l_1) / 2.$$

Момент инерции стержня будет $J_0 = 0,28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Потенциальная энергия системы равна работе сил при перемещении системы из отклоненного положения в нулевое (положение статического равновесия).

Потенциальную энергию системы вычислим как сумму:

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II},$$

где Π_I — потенциальная энергия груза и рычага в поле сил тяжести; Π_{II} — потенциальная энергия деформированных пружин;

$$\Pi_I = -G_1 z + G_2 h.$$

Так как

$$h = OC \varphi = \frac{l_2 - l_1}{2} \varphi,$$

$$\Pi_1 = -G_1 z + G_2 \frac{l_2 - l_1}{2} \varphi.$$

Потенциальную энергию пружин найдем, рассматривая сначала перемещение системы из отклоненного положения в положение, соответствующее недеформированным пружинам, а затем из этого положения — в положение покоя.

Деформации пружин следующие: $\lambda_1 = l_1 \varphi \pm f_{c1}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_1 ; $\lambda_2 = l_2 \varphi \pm f_{c2}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_2 ; $\lambda_3 = f_{c3} + l_3 \varphi + z$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_3 .

Следовательно,

$$\Pi_{II} = 1/2 c_1 (l_1 \varphi \pm f_{c1})^2 - 1/2 c_1 f_{c1}^2 + 1/2 c_2 (l_2 \varphi \pm f_{c2})^2 - 1/2 c_2 f_{c2}^2 + 1/2 c_3 (f_{c3} + l_3 \varphi + z)^2 - 1/2 c_3 f_{c3}^2,$$

или после упрощений

$$\Pi_{II} = 1/2 c_1 l_1^2 \varphi^2 + 1/2 c_2 l_2^2 \varphi^2 + 1/2 c_3 (l_3 \varphi + z)^2 \pm c_1 l_1 f_{c1} \varphi \pm \pm c_2 l_2 f_{c2} \varphi + c_3 f_{c3} (l_3 \varphi + z).$$

Потенциальная энергия всей системы

$$\Pi = -G_1 z + [G_2 (l_2 - l_1)/2] \varphi + 1/2 c_1 l_1^2 \varphi^2 + 1/2 c_2 l_2^2 \varphi^2 + 1/2 c_3 l_3^2 \varphi^2 + + c_3 l_3 \varphi z + 1/2 c_3 z^2 \pm c_1 l_1 f_{c1} \varphi \pm c_2 l_2 f_{c2} \varphi + c_3 f_{c3} l_3 \varphi + c_3 f_{c3} z.$$

Из условий покоя рассматриваемой системы, находящейся под действием сил, имеющих потенциал, имеем

$$(\partial \Pi / \partial z)_{\varphi=0} = -G_1 + c_3 f_{c3} = 0;$$

$$(\partial \Pi / \partial \varphi)_{z=0} = G_2 \frac{l_2 - l_1}{2} \pm c_1 l_1 f_{c1} \pm c_2 l_2 f_{c2} + c_3 l_3 f_{c3} = 0.$$

Потенциальная энергия системы с учетом условий покоя имеет вид

$$\Pi = 1/2 c_1 l_1^2 \varphi^2 + 1/2 c_2 l_2^2 \varphi^2 + 1/2 c_3 l_3^2 \varphi^2 + c_3 l_3 z \varphi + 1/2 c_3 z^2.$$

Таким образом,

$$T = 1/2 m_1 \dot{z}^2 + 1/2 J_0 \dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = 1/2 c_3 z^2 + c_3 l_3 z \varphi + 1/2 (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2) \varphi^2$$

или

$$T = 1/2 (a_{11} \dot{z}^2 + 2 a_{12} \dot{z} \dot{\varphi} + a_{22} \dot{\varphi}^2);$$

$$\Pi = 1/2 (c_{11} z^2 + 2 c_{12} z \varphi + c_{22} \varphi^2).$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты инерции:

$$a_{11} = m_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{22} = J_0;$$

c_{ij} — коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = c_3, \quad c_{12} = c_3 l_3, \quad c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2.$$

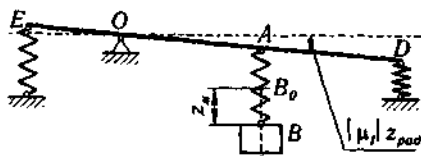
Для рассматриваемой консервативной системы уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Вычислив производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= a_{11} \dot{z}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) &= a_{11} \ddot{z}, & \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= c_{11} z + c_{12} \varphi; \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= a_{22} \dot{\varphi}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= a_{22} \ddot{\varphi}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= c_{12} z + c_{22} \varphi \end{aligned}$$

- а) Первое главное колебание системы
 $k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}; \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}$



- б) Второе главное колебание системы
 $k_2 = 104 \text{ с}^{-1}; \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}$

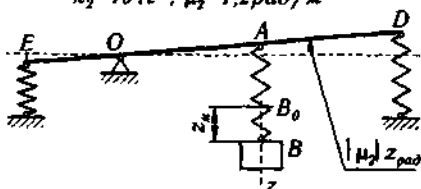


Рис. 237

где A_z и A_φ — амплитуды главных колебаний; k — частоты свободных колебаний; β — начальная фаза колебаний.

Уравнение частот, вытекающее из данной системы дифференциальных уравнений, имеет вид

$$(c_{11} - a_{11} k^2)(c_{22} - a_{22} k^2) - c_{12}^2 = 0.$$

Корни этого биквадратного уравнения, соответствующие квадратам частот, определим по формулам

$$k_{1,2}^2 = \frac{a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11} \mp \sqrt{(a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11})^2 - 4 a_{11} a_{22} (c_{11} c_{22} - c_{12}^2)}}{2 a_{11} a_{22}}.$$

В рассматриваемой задаче: $a_{11} = m_1 = 0,5 \text{ кг}$; $c_{11} = c_3 = 4000 \text{ Н/м}$; $c_{12} = c_3 l_3 = 1200 \text{ Н}$; $a_2 = J_0 = 0,28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 2040 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

и подставив их в уравнения Лагранжа, получим

$$a_{11} \ddot{z} = -c_{11} z - c_{12} \varphi;$$

$$a_{22} \ddot{\varphi} = -c_{21} z - c_{22} \varphi,$$

где $c_{21} = c_{12}$.

Таким образом, для данной системы дифференциальные уравнения свободных колебаний имеют вид

$$a_{11} \ddot{z} + c_{11} z + c_{12} \varphi = 0;$$

$$a_{22} \ddot{\varphi} + c_{21} z + c_{22} \varphi = 0.$$

Частное решение этих уравнений:

$$z = A_z \sin(kt + \beta);$$

$$\varphi = A_\varphi \sin(kt + \beta),$$

Следовательно, частоты свободных колебаний

$$k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}; \quad k_2 = 104 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты распределения, соответствующие частотам k_1 и k_2 , в общем случае имеют вид

$$\mu_1 = \frac{A_{\varphi 1}}{A_{z1}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2};$$

$$\mu_2 = \frac{A_{\varphi 2}}{A_{z2}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

В данном случае $\mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}$; $\mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}$.

Уравнения, определяющие первое главное колебание, примут следующий вид:

$$z_1 = A_{z1} \sin(66,4t + \beta_1); \quad \varphi_1 = -1,49 A_{z1} \sin(66,4t + \beta_1).$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание,

$$z_2 = A_{z2} \sin(104t + \beta_2); \quad \varphi_2 = 1,2 A_{z2} \sin(104t + \beta_2).$$

Формы колебаний показаны на рис. 237, а, б.

Общее решение дифференциальных уравнений представляет собой сумму частных решений:

$$z = z_1 + z_2 = A_{z1} \sin(66,4t + \beta_1) + A_{z2} \sin(104t + \beta_2);$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -0,0149 A_{z1} \sin(66,4t + \beta_1) + 0,012 A_{z2} \sin(104t + \beta_2).$$

Значения A_{zi} и β_i определяются по начальным условиям задачи.

Задание Д.25. Исследование вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы

Исследовать вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы при силовом (варианты 2—5, 7—9, 12—15, 17, 18, 20, 22, 25, 27, 28, 30) или кинематическом (варианты 1, 6, 10, 11, 16, 19, 21, 26, 29) возмущении.

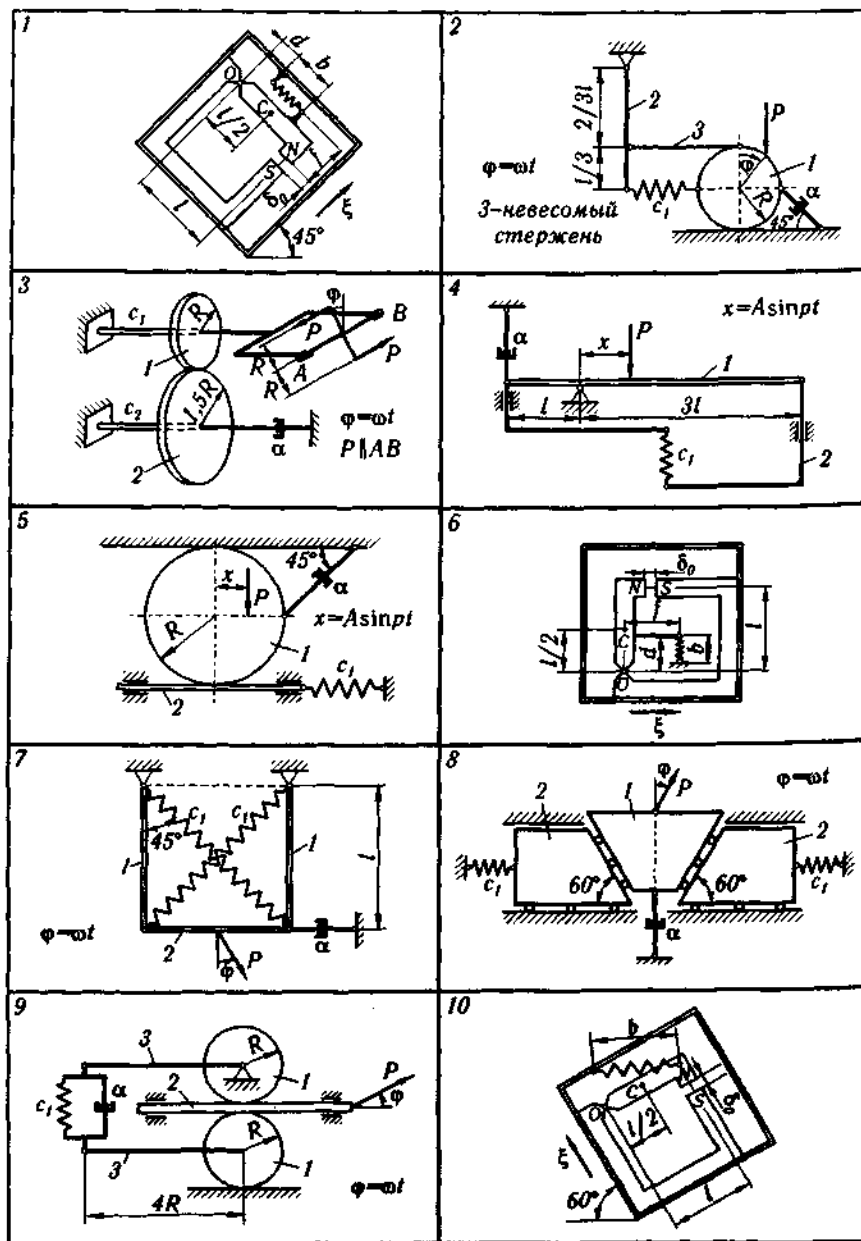
Схемы механических систем показаны на рис. 238—240.

Силовое возмущение. Необходимые сведения о параметрах системы и силового возмущения приведены в табл. 62. Диссипативные свойства системы заданы логарифмическим декрементом затухания системы η .

В вариантах 9, 23, 30 механические системы расположены в горизонтальной плоскости.

В вариантах 2, 7, 9, 18 пружины с коэффициентом жесткости c_1 в положении покоя не деформированы.

Определить: коэффициент α , характеризующий вязкое сопротивление, осуществляемое в демпфере, уравнение вынужденных колебаний



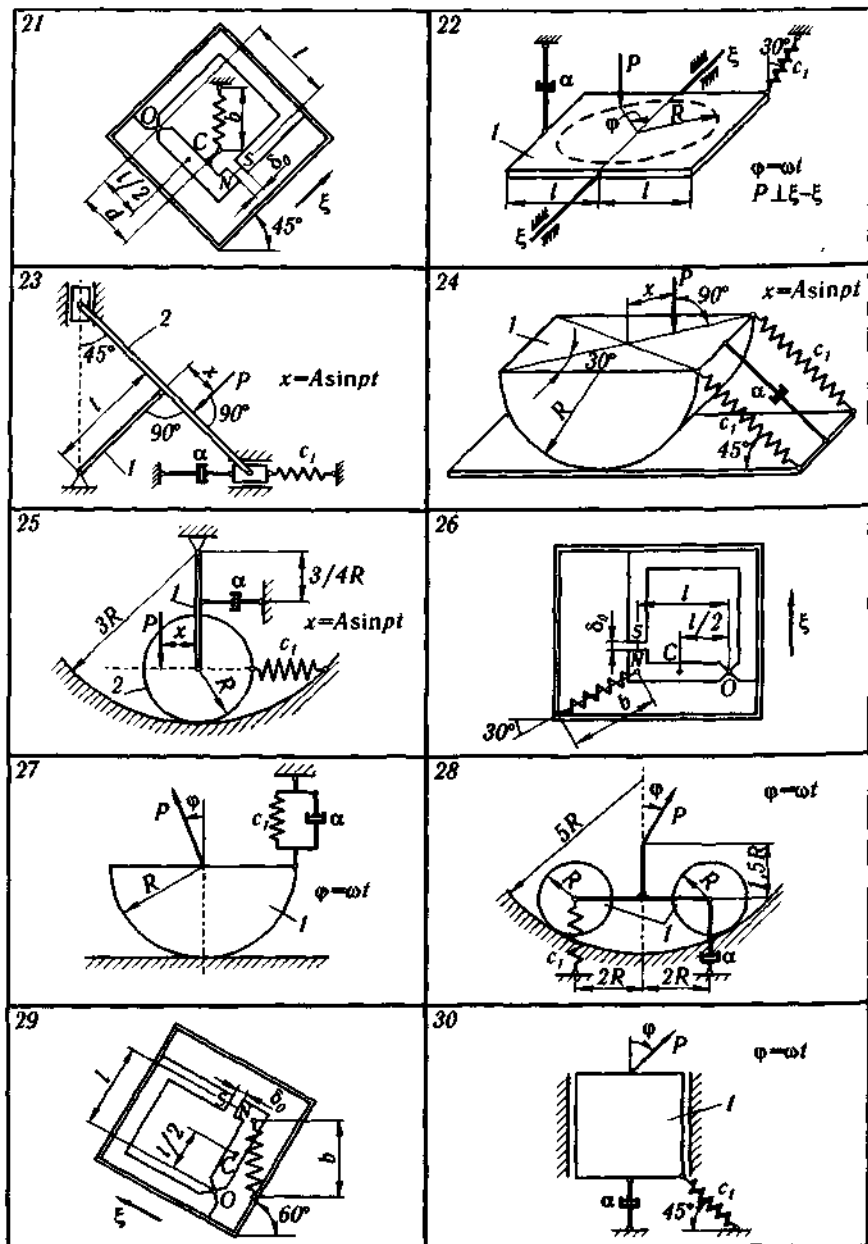


Рис. 240

Номер варианта (рис. 238-240)	Масса тел, кг			Радиус R, м	Расстояние l, м	Радиус инерции i _c тела относительно оси ξ - ξ, м	Коэффициенты жесткости пружин				P, Н	A, м	p	ω	Логарифмический декремент
							c ₁		c ₂						
	m ₁	m ₂	m ₃				H / см	H · m / рад	H / см	H · m / рад					
2	8	2	-	0,3	0,9	-	50	-	-	-	50	-	2π	-	0,48
3	2	4	-	0,2	-	-	-	2·10 ⁴	-	3·10 ⁴	40	-	-	-	1,75
4	20	5	-	-	0,1	-	10	-	-	-	30	0,2	4π	-	0,50
5	40	10	-	0,4	-	-	20	-	-	-	10	0,1	4π	-	0,40
7	5	5	-	-	0,6	-	15	-	-	-	15	-	3,5π	-	0,35
8	40	30	-	-	-	-	20	-	-	-	35	-	2π	-	0,62
9	40	15	10	0,3	-	-	10	-	-	-	8	-	1,5π	-	1,70
12	40	-	-	0,2	0,5	0,4	18	-	-	-	12	-	2,5π	-	0,66
13	30	30	-	0,3	-	-	-	1·10 ⁴	-	-	25	0,4	4,5π	-	1,32
14	20	15	-	0,2	-	-	12	-	-	-	20	-	2,2π	-	0,50
15	45	30	-	0,3	-	-	-	2·10 ⁴	-	3·10 ⁴	16	-	3π	-	1,10
17	40	30	-	-	0,4	-	14	-	-	-	24	0,1	2π	-	1,08
18	50	10	-	0,4	-	-	10	-	-	-	26	-	3π	-	0,56
20	80	20	-	-	-	-	22	-	-	-	18	-	1,4π	-	1,60
22	40	-	-	0,4	0,6	0,5	16	-	-	-	14	-	3,2π	-	1,04
23	30	15	-	-	0,4	-	12	-	-	-	18	0,15	2,2π	-	0,95
24	70	-	-	0,2	-	-	14	-	30	-	24	0,1	3π	-	1,62
25	10	50	-	0,3	-	-	25	-	-	-	40	0,05	2,5π	-	0,98
27	40	-	-	0,2	-	-	14	-	-	-	12	-	1,5π	-	1,14
28	25	-	-	0,3	-	-	15	-	-	-	18	-	3,2π	-	0,86
30	40	-	-	-	-	-	12	-	-	-	20	-	2,5π	-	1,35

системы при заданной частоте возмущения; максимальные и резонансные значения амплитуд изменения обобщенных координат, скорости и ускорения в предположении, что частота возмущения может изменяться.

Примечание. Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными дисками, стержни — тонкими однородными, качение колес происходит без скольжения.

Кинематическое возмущение. Условия к вариантам с кинематическим возмущением 1, 6, 10, 11, 16, 19, 21, 26, 29 см. в табл. 63.

Система состоит из подвижного якоря массы m , который с помощью пружины удерживается в положении покоя, изображенном на чертеже (см. рис. 238—240).

Таблица 63

Номер варианта (рис. 238—240)	m, кг	D 10 ⁻⁵ Н·м ²	β Н·м/с	δ	l	f	d	b
				м				
1	0,08	1	0,009	0,005	0,12	0,02	0,01	0,07
6	0,09	2	0,009	0,006	0,12	0,04	0,06	0,05
10	0,1	2,5	0,008	0,008	0,09	—	—	0,07
11	0,08	1	0,008	0,005	0,008	0,02	0,06	0,04
16	0,15	1,5	0,01	0,006	0,1	—	0,06	0,08
19	0,05	1	0,007	0,007	0,08	0,03	0,06	0,05
21	0,07	1,1	0,08	0,014	0,12	0,03	0,09	0,04
26	0,12	3,6	0,08	0,011	0,08	—	—	0,07
29	0,1	1,5	0,007	0,006	0,12	—	—	0,06

Якорь считать тонким однородным стержнем. Центр тяжести якоря находится в точке C . При движении якоря на него действует со стороны шарнира момент сил вязкого сопротивления, пропорциональный угловой скорости якоря (коэффициент пропорциональности β).

На якорь со стороны постоянного магнита действует сила притяжения, направленная вдоль оси воздушного зазора. Эта сила $F = D/\delta^2$, где D — некоторая постоянная; δ — величина воздушного зазора.

Плоскость чертежа совпадает с вертикальной плоскостью. Величина воздушного зазора в положении покоя равна δ_0 .

Корпус устройства вибрирует, перемещаясь поступательно вдоль указанного на чертеже направления, по закону $\xi = \xi_0 \sin pt$, где ξ_0 — малая величина; p — циклическая частота вибрации.

Для нормального функционирования устройства должны быть удовлетворены следующие условия:

1. Амплитуда относительного перемещения конца якоря при резонансе $A_{\text{рез}}$ ($p = k$, где k — циклическая частота свободных колебаний) должна составлять $2/3$ величины δ_0 .

2. Амплитуда относительного перемещения конца якоря A_∞ при высоких частотах возмущения ($p \gg k$) должна быть равна $1/3$ от величины δ_0 .

Исходя из этих требований, определить:

1. Циклическую частоту малых свободных колебаний якоря.
2. Статическую деформацию λ_0 и коэффициент жесткости c_1 пружины.

3. Максимально допустимую величину ξ_0 амплитуды вибрации корпуса устройства.

4. Максимальную амплитуду вынужденных колебаний якоря.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 63.

Пример выполнения задания к вариантам 2—5, 7—9, 12—15, 17, 18, 20, 22—25, 27, 28, 30.

Дано: $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 2$ кг, $m_4 = 18$ кг; $R = 0,3$ м; $l = 0,9$ м; $c_1 = 40$, $c_2 = 70$ Н/см; $P = 20$ Н; $x = A \sin pt$; $A = 0,1$ м; $p = 4\pi$ с⁻¹; $\eta = 0,812$. Обе пружины в положении покоя не деформированы.

покоя, находится в бесконечности. Следовательно, для обеспечения указанной выше точности выражения кинетической энергии системы можно считать, что $\omega_3 = 0$ и $v_{C3} = v_D = v_B = v_2 = 2R\dot{\varphi}_1$, $\omega_4 = v_D/l = 2R\dot{\varphi}_1/l$.

Момент инерции тела 1 относительно центральной оси $J_{C1} = m_1 R^2/2$. Момент инерции тела 4 относительно оси вращения $J_4 = m_4 l^2/3$. Кинетическая энергия тел 1, 2, 3 и 4 имеет вид

$$T_1 = 1/2 m_1 v_{C1}^2 + 1/2 J_{C1} \omega_1^2 = 3/4 m_1 R^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_2 = 1/2 m_2 v_2^2 = 2 m_2 R^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_3 = 1/2 m_3 v_{C3}^2 = 2 m_3 R^2 \dot{\varphi}_1^2;$$

$$T_4 = 1/2 J_4 \omega_4^2 = 2/3 m_4 R^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = 3/4 m_1 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 m_2 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2 m_3 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2/3 m_4 R^2 \dot{\varphi}_1^2 = 1/2 \alpha \dot{\varphi}_1^2,$$

где коэффициент инерции системы

$$\alpha = [3/2 m_1 + 4 m_2 + 4 m_3 + 4/3 m_4] R^2.$$

Найдем функцию рассеяния системы:

$$\Phi = 1/2 \alpha v_2^2 = 1/2 \alpha (2R\dot{\varphi}_1)^2 = 1/2 b \dot{\varphi}_1^2,$$

где

$$b = 4R^2 \alpha.$$

Переходим к определению потенциальной энергии системы.

В положении покоя

$$(\partial \Pi / \partial \varphi_1)_{\varphi_1=0} = 0,$$

поэтому в выражении для Π сумма всех членов первого порядка малости равна нулю. Это позволяет непосредственно производить определение потенциальной энергии системы, вычисляя только члены второго порядка малости.

Найдем потенциальную энергию системы как сумму работ сил тяжести и сил упругости пружин на перемещении системы из отклоненного положения, определяемого углом φ_1 , в нулевое положение, каковым считаем положение покоя системы. При этом в выражениях для деформации пружин, не нагруженных в положении покоя, учитываются только те слагаемые, которые имеют первый порядок малости относительно φ_1 , а в выражениях для вертикальных смещений центров тяжести элементов системы — слагаемые, имеющие

второй порядок малости. Деформации пружин, нагруженных в положении покоя, вычисляются с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Потенциальная энергия Π_I , соответствующая силам тяжести, равна

$$\Pi_I = -G_3 h_{C3} - G_4 h_{C4},$$

где h_{C3} и h_{C4} — вертикальные смещения центров тяжести элементов 3 и 4, вычисленные с точностью до величин второго порядка малости.

Из рис. 242 видно, что

$$h_{C4} = l/2 - (l/2) \cos \varphi_4 = (l/2)(1 - \cos \varphi_4).$$

Ограничиваясь в формуле разложения

$$\cos \varphi_4 = 1 - \varphi_4^2/2! + \varphi_4^4/4! - \dots$$

двумя первыми членами и учитывая, что

$$\varphi_4 = \lambda_D/l = \lambda_B/l = \lambda_A/l = 2R\varphi_1/l,$$

имеем

$$h_{C4} = (l/2)\varphi_4^2/2 = (l/4)4R^2\varphi_1^2/l^2 = (R^2/l)\varphi_1^2.$$

Учитывая, что $h_{C3} = h_D/2 = h_{C4}$, получаем

$$\Pi_I = -G_3 h_{C3} - G_4 h_{C4} = -G_3 \cdot R^2 \varphi_1^2 / l - G_4 \cdot R^2 \varphi_1^2 / l = -(R^2 / l)(G_3 + G_4) \varphi_1^2.$$

Потенциальная энергия Π_{II} деформированных пружин при указанном перемещении системы равна

$$\Pi_{II} = 1/2 c_1 \lambda_E^2 + 1/2 c_2 (\lambda_F \cos 45^\circ - \lambda_K)^2,$$

где λ_E , λ_F , λ_K — перемещения точек прикрепления пружин, вызванные поворотом диска I на угол φ_1 .

Вычисляя эти величины с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно φ_1 , имеем

$$\lambda_E = LE \cdot \varphi_1 = R\sqrt{2}\varphi_1; \quad \lambda_F = LF \cdot \varphi_1 = R\sqrt{2}\varphi_1;$$

$$\lambda_K = OK \cdot \varphi_4 = 4/3 R \varphi_1.$$

Таким образом,

$$\Pi_{II} = (c_1 + c_2/18)R^2\varphi_1^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = -(R^2/l)(G_3 + G_4)\varphi_1^2 + (c_1 + c_2/18)R^2\varphi_1^2 = 1/2 c \varphi_1^2,$$

где коэффициент жесткости системы

$$c = [2c_1 + c_2/9 - 2(G_3 + G_4)/l]R^2.$$

Определим обобщенную силу Q_P , соответствующую возмущающей силе P :

$$Q_P = P x \delta \varphi_1 / (\delta \varphi_1) = P x = P \cdot A \sin pt.$$

Здесь $\delta\varphi_1$ — приращение обобщенной координаты; $P\delta\varphi_1$ — работа силы P на элементарном перемещении системы, соответствующем приращению $\delta\varphi_1$ обобщенной координаты.

Используя полученные для T , Φ , Π и Q_P выражения, получаем уравнение (1) в следующем виде:

$$a\ddot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_1 + c\varphi_1 = P \cdot A \sin pt,$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = h \sin pt, \quad (2)$$

где $b/a = 2n$; $c/a = k^2$; $PA/a = h$.

Уравнение вынужденных колебаний системы является частным решением неоднородного дифференциального уравнения (2) и имеет вид

$$\varphi_1 = A_{\varphi_1} \sin(pt - \varepsilon), \quad (3)$$

где A_{φ_1} — амплитуда вынужденных колебаний; ε — сдвиг фазы вынужденных колебаний;

$$A_{\varphi_1} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (4)$$

Определим h , k , n :

$$h = P \cdot A/a; \quad k = \sqrt{c/a};$$

откуда $h = 0,271 \text{ с}^{-2}$; $k = 10,2 \text{ с}^{-1}$.

Величину n определим по заданному логарифмическому декременту затухания системы:

$$\eta = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}} = n \frac{T^*}{2}, \quad \text{где } T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Отсюда

$$n = \frac{k}{\sqrt{1 + \pi^2/\eta^2}}, \quad \text{т. е. } n = 2,55 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент α , характеризующий сопротивление, осуществляемое в демпфере, вычисляем по формуле

$$\alpha = \frac{b}{4R^2} = \frac{an}{2R^2}.$$

Таким образом, $\alpha = 104,5 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$.

Амплитуду изменения угла φ_1 и сдвиг фазы вынужденных колебаний системы при $p = 4\pi \text{ с}^{-1} = 12,57 \text{ с}^{-1}$ определяем по формулам (4):

$$A_{\varphi_1} = 0,00325 \text{ рад}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -1,19; \quad \varepsilon = 130^\circ 04' = 2,27 \text{ рад}.$$

Окончательно по формуле (3) имеем

$$\varphi_1 = 0,00325 \sin(4\pi t - 2,27) \text{ рад}.$$

Определяем максимальные значения амплитуд изменения φ_1 , $\dot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_1$ при условии, что частота возбуждения p может изменяться.

Амплитуда колебаний A_{φ_1} имеет максимум при

$$p = p_1 = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{10,2^2 - 2 \cdot 2,55^2} = 9,53 \text{ с}^{-1},$$

откуда

$$A_{\varphi_1 \text{ max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{0,271}{2 \cdot 2,55\sqrt{10,2^2 - 2,55^2}} = 0,00537 \text{ рад.}$$

Обобщенная скорость

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{hp}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \cos(pt - \varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2/p^2 + 4n^2}} \cos(pt - \varepsilon).$$

Следовательно, амплитуда обобщенной скорости имеет максимум при $p = p_2 = k$:

$$A_{\dot{\varphi}_1 \text{ max}} = h/(2n); \quad A_{\dot{\varphi}_1 \text{ max}} = 0,0531 \text{ рад/с.}$$

Обобщенное ускорение

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{hp^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \sin(pt - \varepsilon) = -\frac{h}{\sqrt{\left(\frac{k^2 - p^2}{p^2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{p}\right)^2}} \sin(pt - \varepsilon).$$

Найдем то значение $p = p_3$, при котором амплитуда обобщенного ускорения имеет максимум, а следовательно, подкоренное выражение $[(k^2 - p^2)/p^2]^2 + 4(n/p)^2$ имеет минимум. Для этого вычислим производную этого выражения по p и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left[\left(\frac{k^2 - p^2}{p^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{n}{p} \right)^2 \right] &= 2 \left(\frac{k^2 - p^2}{p^2} \right) \left[\frac{-2pp^2 - 2p(k^2 - p^2)}{p^4} \right] + \\ &+ \left(-\frac{2 \cdot 4n^2}{p^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

После упрощений получаем

$$k^4 - p^2k^2 + 2n^2p^2 = 0,$$

откуда

$$p = k^2 / \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

В рассматриваемой задаче

$$p = p_3 = 10,9 \text{ с}^{-1}.$$

Максимальное значение амплитуды обобщенного ускорения

$$A_{\ddot{\varphi}_1 \text{ max}} = \frac{h}{\sqrt{[(k/p_3)^2 - 1]^2 + 4(n/p_3)^2}};$$

после вычислений получим $A_{\ddot{\varphi}_1 \text{ max}} = 0,559 \text{ рад/с}^2$.

Определим теперь амплитуды изменения обобщенных координат, скорости и ускорения при резонансе:

$$A_{\varphi_1(p=k)} = h/(2nk) = 0,271/(2 \cdot 2,55 \cdot 10,2) = 0,00520 \text{ рад};$$

$$A_{\dot{\varphi}_1(p=k)} = A_{\dot{\varphi}_1 \max} = 0,0531 \text{ рад/с};$$

$$A_{\ddot{\varphi}_1(p=k)} = hk/2n = 0,271 \cdot 10,2/(2 \cdot 2,55) = 0,54 \text{ рад/с}^2.$$

Из вычислений следует, что амплитуды изменения обобщенной координаты и ускорения при резонансе ($p = k$) весьма близки к максимальным значениям.

Пример выполнения задания к вариантам 1, 6, 10, 11, 16, 19, 21, 26, 29.

Схема устройства показана на рис. 243.

Дано: $m = 0,1 \text{ кг}$; $\beta = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $\delta_0 = 0,006 \text{ м}$; $l = 0,1 \text{ м}$; $f = 0,04 \text{ м}$; $d = 0,05 \text{ м}$; $b = 0,08 \text{ м}$; $D = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$.

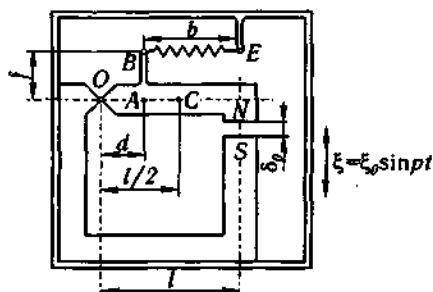


Рис. 243

Решение. За обобщенную координату примем угол φ поворота якоря (рис. 244), который будем отсчитывать от положения покоя в сторону уменьшения воздушного зазора δ .

Уравнение Лагранжа II рода, описывающее относительное движение якоря, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad (1)$$

где $Q_{\varphi} = Q_{\Pi} + Q_M + Q_R + Q_{\Phi}$.

Здесь T — кинетическая энергия якоря; $Q_{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}$ — обобщенная сила от механических сил, имеющих потенциал (Π — потенциальная энергия); Q_M — обобщенная сила от сил притяжения якоря; $Q_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$ — обобщенная сила от сил вязкого сопротивления; Q_{Φ} — обобщенная сила от переносной силы инерции Φ_e .

При изучении колебательного движения системы функции T , Π и Φ будем вычислять с точностью до величин второго, а обобщенные силы — до величин первого порядка малости относительно φ , $\dot{\varphi}$, ξ , и $\dot{\xi}$.

Вычисление обобщенных сил. Обобщенную силу Q_M найдем по формуле

$$Q_M = \frac{N_F}{\dot{\varphi}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}_M}{\dot{\varphi}},$$

где N_F — мощность силы притяжения якоря F ; v_M — скорость точки приложения силы F .

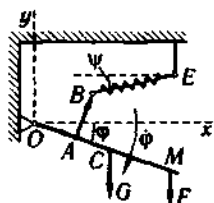


Рис. 244

Так как $v_M = l\dot{\varphi}$, а векторы $\vec{v}_M$ и $\vec{F}$ направлены по одной прямой в одну сторону, то, учитывая, что $\delta = \delta_0 - l\varphi$, будем иметь

$$Q_M = \frac{Fl\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = Fl = \frac{Dl}{(\delta_0 - l\varphi)^2} = Dl(\delta_0 - l\varphi)^{-2}.$$

Разложим Q_M в ряд Маклорена с точностью до величин первого порядка малости относительно φ :

$$Q_M = Q_M(0) + Q'_M(0)\varphi/1! + \dots, \quad (Q' = dQ/d\varphi). \quad (2)$$

Так как

$$Q'_M = Dl(-2)(\delta_0 - l\varphi)^{-3}(-l),$$

то

$$Q'_M(0) = 2Dl^2/\delta_0^3.$$

Учитывая, что $Q_M(0) = Dl/\delta_0^2$, получим

$$Q_M = Dl(\delta_0 + 2l\varphi)/\delta_0^3. \quad (3)$$

Обобщенная сила Q_R равна

$$Q_R = N_R/\dot{\varphi} = -M_R\dot{\varphi}/\dot{\varphi} = -M_R,$$

где N_R — мощность момента сил вязкого сопротивления; $M_R = \beta\dot{\varphi}$ — момент сил вязкого сопротивления.

Таким образом,

$$Q_R = -\beta\dot{\varphi}. \quad (4)$$

Обобщенную силу Q_Φ , соответствующую переносной силе инерции $\vec{\Phi}_e$, определим по формуле

$$Q_\Phi = N_\Phi/\dot{\varphi} = \vec{\Phi}_e \cdot \vec{v}_C/\dot{\varphi}, \quad (5)$$

где N_Φ — мощность переносной силы инерции $\vec{\Phi}_e$; $\vec{v}_C$ — скорость точки приложения силы $\vec{\Phi}_e$; $v_C = (l/2)\dot{\varphi}$.

Переносная сила инерции

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e,$$

где $\vec{a}_e = \ddot{\xi}$ — переносное ускорение.

Подставляя значения $\vec{\Phi}_e$ и v_C в (5), получаем

$$Q_\Phi = -m\ddot{\xi}(l/2)\dot{\varphi} \cos \varphi/\dot{\varphi} = -m\ddot{\xi}(l/2) \cos \varphi.$$

Разложив Q_Φ в ряд Маклорена и удержав в этом разложении слагаемые не выше первого порядка малости относительно φ , получим

$$Q_\Phi = -ml\ddot{\xi}/2. \quad (6)$$

Для вычисления Q_Π найдем потенциальную энергию Π , складывающуюся из потенциальной энергии якоря Π_I в поле сил тяжести и потенциальной энергии Π_{II} деформированной пружины:

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}. \quad (7)$$

Потенциальная энергия Π_I с принятой выше точностью

$$\Pi_I = -G(l/2) \sin \varphi \simeq -G(l/2)\varphi. \quad (8)$$

Потенциальная энергия Π_{II} определяется выражением

$$\Pi_{II} = c_1(\lambda_0 + \lambda_\varphi)^2/2 - c_1\lambda_0^2/2, \quad (9)$$

где λ_0 — деформация пружины в положении покоя; λ_φ — дополнительная деформация пружины, вызванная поворотом якоря на угол φ .

Из (9) следует, что для обеспечения принятой погрешности в вычислении потенциальной энергии достаточно λ_φ подсчитать с точностью до величин второго порядка малости относительно φ .

Вычисление λ_φ удобно произвести следующим образом. Придадим отрезкам OA , AB и BE ориентацию, показанную на рис. 244. Тогда

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \text{const}. \quad (10)$$

Спроецируем (10) на оси x и y , выбравшие так, чтобы одна из осей была параллельна оси пружины в положении покоя:

$$\left. \begin{aligned} b + d &= d \cos \varphi + f \sin \varphi + (b - \lambda_\varphi) \cos \psi; \\ f &= -d \sin \varphi + f \cos \varphi + (b - \lambda_\varphi) \sin \psi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где ψ — угол поворота оси пружины (рис. 244).

Разложим (11) в ряд по степеням малых величин φ , λ_φ и ψ и удержим слагаемые до второго порядка малости включительно:

$$b + d = d(1 - \varphi^2/2) + f\varphi + b - \lambda_\varphi - b\psi^2/2, \quad (12)$$

$$f = -d\varphi + f(1 - \varphi^2/2) + (b - \lambda_\varphi)\psi. \quad (13)$$

Перепишем эти уравнения так, чтобы слагаемые, содержащие первые порядки малости относительно искомых величин λ_φ и ψ , находились в левых частях равенств:

$$\lambda_\varphi = f\varphi - d\varphi^2/2 - b\psi^2/2, \quad (14)$$

$$b\psi = d\varphi + f\varphi^2/2 + \lambda_\varphi\psi. \quad (15)$$

Выражение (14) содержит квадрат угла ψ , поэтому для сохранения принятой точности вычисления λ_φ нужно угол подсчитывать с точностью до величин первого порядка малости относительно φ . Для этого отбросим в (15) величины второго порядка малости:

$$b\psi = d\varphi \text{ или } \psi = (d/b)\varphi.$$

Следовательно,

$$\lambda_\varphi = f\varphi - d(\varphi^2/2)(1 + d/b) = f\varphi - e\varphi^2/2, \quad (16)$$

где $e = d(1 + d/b)$.

Подставим (16) в (9). С точностью до величин второго порядка малости относительно φ функция (9) принимает вид

$$\Pi = (1/2)c_1(f^2 - \lambda_0 e)\varphi^2 + c_1\lambda_0 f\varphi. \quad (17)$$

Складывая (8) и (17) в соответствии с (7), получим

$$\Pi = -G(l/2)\varphi + 1/2c_1(f^2 - \lambda_0 e)\varphi^2 + c\lambda_0 f\varphi. \quad (18)$$

Отсюда обобщенная сила

$$Q_\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = Gl/2 - c_1(f^2 - \lambda_0 e)\varphi - c_1\lambda_0 f. \quad (19)$$

Подставив выражения Q_M , Q_A , Q_Φ и Q_Π из (3), (4), (6) и (19) в (2), получаем

$$Q_\varphi = Dl/\delta_0^2 + 2Dl^2\varphi/\delta_0^3 - \beta\dot{\varphi} - ml\ddot{\xi}/2 + Gl/2 - c_1(f^2 - \lambda_0 e)\varphi - c_1\lambda_0 f,$$

или

$$Q_\varphi = -c\varphi - \beta\dot{\varphi} - ml\ddot{\xi}/2 - c_1\lambda_0 f + Gl/2 + Dl/\delta_0^2, \quad (20)$$

где

$$c = c_1(f^2 - \lambda_0 e) - 2Dl^2/\delta_0^3.$$

Условие относительного покоя (равновесия) механической системы при $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ и $\ddot{\xi} = 0$ имеет вид

$$Q_\varphi \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \dot{\varphi}=0 \\ \ddot{\xi}=0}} = 0.$$

Отсюда

$$Gl/2 - c_1\lambda_0 f + Dl/\delta_0^2 = 0. \quad (21)$$

Таким образом,

$$Q_\varphi = -c\varphi - \beta\dot{\varphi} - (ml/2)\ddot{\xi}. \quad (22)$$

Вычисление кинетической энергии. Так как в относительном движении якорь совершает вращение вокруг оси, проходящей через точку O , то его кинетическую энергию вычисляют по формуле

$$T = J_0\dot{\varphi}^2/2,$$

где $J_0 = ml^2/3$ — момент инерции якоря относительно оси вращения, т. е.

$$T = (ml^2/3)(\dot{\varphi}^2/2) = a\dot{\varphi}^2/2, \quad (23)$$

где $a = ml^2/3$ — коэффициент инерции системы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний якоря получим, подставив (22) и (23) в (1):

$$a\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = -(ml/2)\ddot{\xi},$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = hp^2 \sin pt, \quad (24)$$

где $2n = \beta/a$, $h = ml\xi_0/(2a)$; $k = \sqrt{c/a}$ — циклическая частота свободных колебаний.

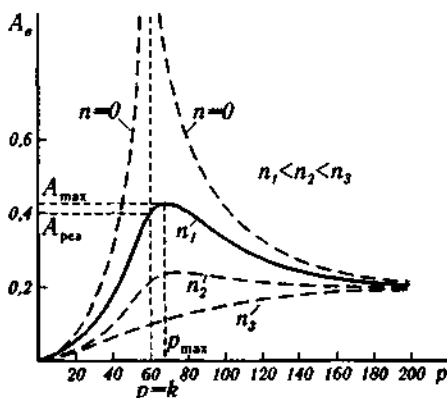


Рис. 245

Функция $A_\varphi = A_\varphi(p)$ имеет максимум (см. аналогичную функцию в предыдущем примере) при

$$p_* = k^2 / \sqrt{k^2 - 2n^2} \quad (k^2 > 2n^2).$$

Этот максимум будет равен

$$A_{\varphi \max} = \frac{h}{\sqrt{[(k/p_*)^2 - 1]^2 + 4(n/p_*)^2}}. \quad (26)$$

При неограниченном увеличении p амплитуда вынужденных колебаний A_φ асимптотически стремится к h .

При резонансе, когда $k = p$, имеем

$$A_{\varphi \text{ рез}} = hk / (2n). \quad (27)$$

На рис. 245 показан вид графика функции $A_\varphi = A_\varphi(p)$ при различных n . Сплошной линией выделен график $A_\varphi = A_\varphi(p)$ для рассматриваемой задачи.

Вычисляем искомые параметры. Из условия известна амплитуда относительного перемещения конца якоря при резонансе; следовательно, из (27) можно определить циклическую частоту его свободных колебаний. Учитывая, что $A_{\text{рез}} = lA_{\varphi \text{ рез}}$ и $A_\infty = lh$, получим

$$k = 2A_{\varphi \text{ рез}} n / h = 3A_{\text{рез}} \beta / (ml^2 A_\infty). \quad (28)$$

Для определения статической деформации пружины λ_0 и ее коэффициента жесткости c_1 выразим λ_0 из уравнения (21):

$$\lambda_0 = [1/(c_1 f)](Gl/2 + Dl/\delta_0^2). \quad (29)$$

Тогда из (20) находим

$$c = c_1 f^2 - c_1 \lambda_0 e - 2Dl^2 \delta_0^3 = c_1 f^2 - (e/f)(Gl/2 + Dl/\delta_0^2) - 2Dl^2/\delta_0^3.$$

Вынужденные колебания системы описываются частным решением неоднородного дифференциального уравнения (24)

$$\varphi = A_\varphi \sin(pt - \varepsilon),$$

где A_φ — амплитуда вынужденных колебаний; ε — сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы:

$$A_\varphi = \frac{hp^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

так как $c = ak^2$, то

$$c_1 = [ml^2 k^2 / 3 + (e/f)(Gl/2 + Dl/\delta_0^2) + 2Dl^2/\delta_0^3]/f^2. \quad (30)$$

Для вычисления ξ_0 воспользуемся тем, что задается амплитуда относительного перемещения конца якоря A_∞ при высоких частотах возмущения. При $p \gg k$ имеем $A_\varphi \simeq h = \xi_0 ml / (2a)$. Отсюда максимально допустимая амплитуда вибрации корпуса устройства может быть найдена по формуле

$$\xi_0 = 2ah/(ml) = 2aA_\infty/(ml^2) = 2/3 A_\infty. \quad (31)$$

Подставляя в формулы (28)–(31) числовые значения входящих в них величин, получаем: $k = 60 \text{ с}^{-1}$; $c_1 = 2654 \text{ Н/м}$; $\lambda_0 = 0,00125 \text{ м} = 1,25 \text{ мм}$; $\xi_0 = 0,00133 \text{ м} = 1,33 \text{ мм}$.

Подсчитаем с помощью формулы (26) максимальную амплитуду вынужденных колебаний конца якоря и частоту возмущающей силы, при которой этот максимум наступает:

$$p_* = k^2 / \sqrt{k^2 - 2n^2} = k^2 / \sqrt{k^2 - 9\beta^2/(2m^2/l^4)} = 64,14 \text{ с}^{-1},$$

$$A_{\text{max}} = lA_{\varphi \text{ max}} = \frac{A_\infty}{\sqrt{[(k/p_*)^2 - 1]^2 + 4(n/p_*)^2}} = 0,0041 \text{ м}.$$

Видно, что A_{max} практически не отличается от $A_{\text{рез}}$.

Задание Д.26. Исследование вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система с двумя степенями свободы находится под действием силового гармонического возмущения в виде силы $P = P_0 \cos pt$ или момента $M = M_0 \cos pt$. Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы.

Схемы механических систем в положении покоя показаны на рис. 232–234. Необходимые сведения об инерционных и упругих свойствах системы, а также ее размеры приведены в табл. 61. Массами пружин и скручиваемых валов пренебречь.

В табл. 64 указано, к какому из тел системы приложена возмущающая сила $\vec{P}$ или пара сил с моментом $\vec{M}$. Линия действия силы $\vec{P}$ во всех случаях проходит через центр тяжести тела, к которому она приложена. В процессе колебаний линия действия силы остается либо вертикальной, либо горизонтальной.

Пара сил с моментом $\vec{M}$ расположена в плоскости колебаний тела, к которому она приложена. Во всех вариантах положительное направление силы $\vec{P}$ и момента $\vec{M}$, изменяющихся по гармоническому закону, можно выбирать произвольно.

В табл. 64 задано линейное или угловое смещение от положения покоя для тела, к которому приложено силовое возмущение при условии воздействия постоянной силы $P = P_0$ или момента $M = M_0$

Таблица 64

Номер варианта (рис. 232—234)	Вид возму- щения	Номер тела, к которому приложено возмущение	Линия дей- ствия силы $\vec{P}$	Линейное смещение при $P = P_0$, м	Угловое смещение при $M = M_0$, рад
1	M	1	—	—	0,01
2	M	3	—	—	0,01
3	P	1	Вертикальна	0,002	—
4	M	2	—	—	0,005
5	M	1	—	—	0,02
6	P	1	Горизонтальна	0,001	—
7	P	1	»	0,002	—
8	P	1	»	0,001	—
9	M	1	—	—	0,005
10	M	1	—	—	0,01
11	P	1	Вертикальна	0,001	—
12	P	1	»	0,002	—
13	P	3	Горизонтальна	0,003	—
14	P	2	Вертикальна	0,001	—
15	M	1	—	—	0,01
16	M	1	—	—	0,02
17	M	2	—	—	0,005
18	P	2	Горизонтальна	0,002	—
19	M	1	—	—	0,005
20	P	2	Вертикальна	0,001	—
21	M	1	—	—	0,01
22	M	2	—	—	0,005
23	P	1	Горизонтальна	0,003	—
24	M	1	—	—	0,01
25	P	2	Вертикальна	0,005	—
26	M	1	—	—	0,02
27	P	1	Горизонтальна	0,004	—
28	P	1	»	0,003	—
29	P	2	»	0,002	—
30	M	1	—	—	0,005

(случай нулевой частоты изменения возмущения силы или момента). Для систем, находящихся под действием силы, смещение задается вдоль линии ее действия, а для систем, находящихся под действием пары сил, задается угловое смещение в плоскости действия этой пары сил.

Пример выполнения задания. Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы, изображенной в положении покоя (рис. 246). Колебания происходят под действием пары сил, приложенной к стержню DE и расположенной в плоскости чертежа. Момент возмущающей пары изменяется по закону

$$M = M_0 \cos pt.$$

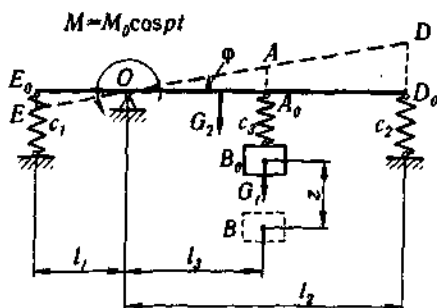


Рис. 246

Дано: массы элементов системы $m_1 = 0,5$ кг, $m_2 = 3$ кг, коэффициенты жесткости пружин (Н/см): $c_1 = 60$, $c_2 = 40$, $c_3 = 40$; линейные размеры (см): $l_1 = 20$, $l_2 = 60$, $l_3 = 30$. Угол поворота стержня DE под действием пары сил с постоянным моментом $M = M_0$ равен $\varphi = 0,01$ рад.

Решение. За обобщенные координаты примем: z — вертикальное смещение груза от положения покоя и φ — угол поворота рычага DE от положения покоя.

На рис. 246 пунктиром показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + Q_z; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi, \quad (1)$$

где Q_z и Q_{ω} — обобщенные возмущающие силы.

Выражения для кинетической и потенциальной энергии получены в примере к заданию Д.24, где исследовались свободные колебания рассматриваемой системы:

$$\left. \begin{aligned} T &= 1/2a_{11}\dot{z}^2 + a_{12}\dot{z}\dot{\varphi} + 1/2a_{22}\dot{\varphi}^2; \\ \Pi &= 1/2c_{11}z^2 + c_{12}z\varphi + 1/2c_{22}\varphi^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где a_{ij} и c_{ij} — коэффициенты инерции и жесткости системы, равные:
 $a_{11} = m_1 = 0,5$ кг, $a_{12} = 0$, $a_{22} = J_0 = 0,28$ кг·м²; $c_{11} = c_3 = 4000$ Н/м,
 $c_{12} = c_{21} = c_3 l_3 = 1200$ Н; $c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 2040$ Н·м.

Частоты свободных колебаний и соответствующие коэффициенты распределения получены в примере к заданию Д.24:

$$k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}; \quad k_2 = 104 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}.$$

Определим обобщенные силы Q_z и Q_φ , увязанные с действием возмущающего момента:

$$Q_z = \delta A_{Mz}/(\delta z); \quad Q_\varphi = \delta A_{M\varphi}/(\delta \varphi), \quad (4)$$

где δA_{M_z} — элементарная работа возмущающего момента на перемещении системы, вызванном элементарным приращением обобщенной координаты z при $\varphi = \text{const}$; δA_{M_φ} — элементарная работа возмущающего момента на перемещении системы, вызванном элементарным приращением обобщенной координаты φ при $z = \text{const}$; δz , $\delta \varphi$ — элементарные приращения обобщенных координат.

Если принять направление возмущающего момента при $t = 0$ положительным и считать, что оно совпадает с направлением отсчета положительных значений угла φ , то из соотношений (4) получаем

$$Q_z = 0;$$

$$Q_\varphi = M_0 \cos pt.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения (1), описывающие вынужденные колебания системы в обобщенных координатах z и φ , имеют вид

$$a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \quad a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}z + c_{22}\varphi = M_0 \cos pt. \quad (5)$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (5), определяющее вынужденные колебания, находим в виде

$$z = A_z \cos pt, \quad \varphi = A_\varphi \cos pt.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения (5), получаем

$$(c_{11} - a_{12}p^2)A_z + c_{12}A_\varphi = 0; \quad c_{21}A_z + (c_{22} - a_{22}p^2)A_\varphi = M_0.$$

Из этой системы двух алгебраических уравнений относительно A_z и A_φ находим:

$$A_z = M_0 c_{12} / [(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - c_{12}^2], \quad (6)$$

$$A_\varphi = M_0 (c_{11} - a_{11}p^2) / [(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - c_{12}^2]. \quad (7)$$

Амплитуды вынужденных колебаний равны абсолютным значениям A_z и A_φ . Воспользуемся формулой (7) для определения амплитуды M_0 возмущающего момента. По условию задачи при $p = 0$ угол поворота стержня DE равен φ_0 ; следовательно, при $p = 0$

$$A_{\varphi_0} = \varphi_0 = M_0 c_{11} / (c_{11} c_{22} - c_{12}^2),$$

откуда $M_0 = \varphi_0 (c_{22} - c_{12}^2 / c_{11}) = 16,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Перемещение груза под действием постоянного момента $M = M_0$, приложенного к стержню DE , можно найти из соотношения (6) при $p = 0$:

$$A_{z0} = z_0 = -M_0 c_{12} / (c_{11} c_{22} - c_{12}^2); \quad A_{z0} = -0,003 \text{ м}.$$

Так как знаменатель в формулах (6) и (7) является квадратным многочленом относительно p^2 , а корнями этого многочлена являются

квадраты частот свободных колебаний системы k_1^2 и k_2^2 , то формулы (6) и (7) можно представить в виде

$$A_z = -\frac{M_0 c_{12}}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} = -\frac{144000}{(p^2 - 4414)(p^2 - 10870)}; \quad (8)$$

$$A_\varphi = \frac{M_0(c_{11} - a_{11} p^2)}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} = \frac{120(4000 - 0,5 p^2)}{(p^2 - 4414)(p^2 - 10870)}. \quad (9)$$

Формулы (6), (7) или (8), (9) позволяют проследить за зависимостью A_z и A_φ от частоты p и построить соответствующие графики (рис. 247, а, б).

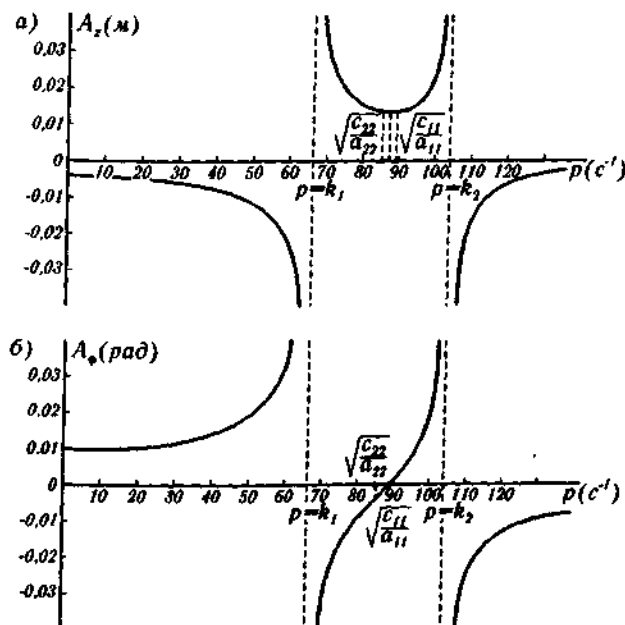


Рис. 247

Рассмотрим поведение A_z и A_φ для трех интервалов изменения циклической частоты возмущающего момента:

$$0 \leq p < k_1, \quad k_1 < p < k_2 \text{ и } k_2 < p < \infty.$$

1. $0 \leq p < k_1$. Так как $k_1 < k_2$, то $p^2 - k_1^2 < 0$ и $p^2 - k_2^2 < 0$; следовательно, знаменатель формул (8) и (9) положителен. Из этого вытекает, что в первом интервале $A_z < 0$ и $A_\varphi > 0$. С ростом величины p амплитуды колебаний стержня и груза возрастают, при этом колебания стержня происходят в одной фазе с изменением возмущающего момента, а колебания груза — в противофазе (рис. 248, а).

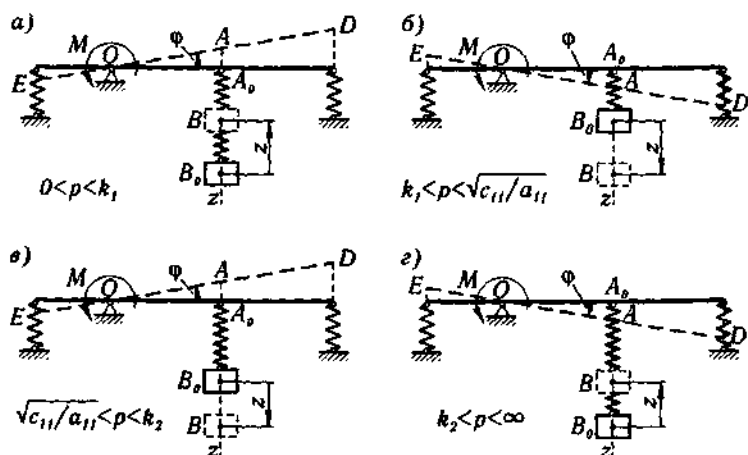


Рис. 248

При $p = 0$ имеем $A_\varphi = \varphi_0 = 0,01$ рад и $A_z = z_0 = -0,03$ м.

При $p = k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}$ в системе наступает первый резонанс и функции A_z и A_φ претерпевают бесконечный разрыв (см. рис. 247).

2. $k_1 < p < k_2$. Так как $k_1 < k_2$, то $p^2 - k_1^2 > 0$, а $p^2 - k_2^2 < 0$. Следовательно, знаменатель формул (8) и (9) отрицателен. Из этого следует, что во втором интервале $A_z > 0$, т. е. колебания груза происходят синфазно с изменением возмущающего момента (рис. 248, б, в).

При определении знака функции A_φ необходимо рассмотреть числитель формулы (9). Если $k_1 < p < \sqrt{c_{11}/a_{11}}$, то $A_\varphi < 0$ и колебания стержня происходят в противофазе с возмущающим моментом (рис. 248, б). Если $\sqrt{c_{11}/a_{11}} < p < k_2$, то $A_\varphi > 0$ и колебания стержня, так же как и груза, синфазны с изменением M (рис. 248, в).

При $p = \sqrt{c_{11}/a_{11}} = \sqrt{4000/0,5} = 89,4 \text{ с}^{-1}$ первая парциальная частота (частота собственных колебаний системы, изображенной на рис. 249, а) амплитуды вынужденных колебаний стержня равна нулю ($A_\varphi = 0$ — случай антрирезонанса). В этом случае груз массой m_1 может рассматриваться как гаситель колебаний стержня. Величину A_z в этом режиме проще определить по формуле (6): $A_z = M_0/c_{12}$; $A_z = 0,014$ м.

Амплитуда колебаний стержня $|A_z|$ убывает до нуля при возрастании p от k_1 до $\sqrt{c_{11}/a_{11}}$, а затем с увеличением p от $\sqrt{c_{11}/a_{11}}$ до k_2 возрастает. При $p = \sqrt{c_{22}/a_{22}} = 2040/0,28 = 85,4 \text{ с}^{-1}$, т. е. при второй парциальной частоте (частоте собственных колебаний системы, изображенной на рис. 249, б), амплитуды вынужденных колебаний A_z и A_φ , определяемые по формулам (6) и (7) равны:

$$A_z = M_0/c_{12}; \quad A_z = 0,014 \text{ м};$$

$$A_\varphi = -M_0(c_{11} - a_{11}c_{22}/a_{22})/c_{12}^2; \quad A_\varphi = -0,00414 \text{ м}.$$

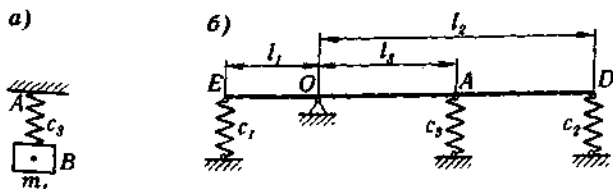


Рис. 249

При изменении p в интервале от k_1 до k_2 функция A_z для амплитуды вынужденных колебаний груза имеет минимум, соответствующий максимуму знаменателя формул (6) и (7). Взяв от этого выражения производную по p и приравняв ее нулю, получим

$$2a_{11}a_{22}p^2 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11}) = 0,$$

откуда найдем значение p , при котором A_z достигает минимума:

$$p = \sqrt{0,5(c_{22}/a_{22} + c_{11}/a_{11})} = 87,4 \text{ с}^{-1}. \quad (10)$$

При $p = k_2 = 104 \text{ с}^{-1}$ в системе наступает второй резонанс.

3. $k_2 < p < \infty$. Так как $k_1 < k_2$, то $p^2 - k_1^2 > 0$ и $p^2 - k_2^2 > 0$; следовательно, знаменатель формул (8) и (9) положителен. Учитывая, что $k_2 > \sqrt{c_{11}/a_{11}}$, можно заключить, что в этом интервале и $A_z < 0$, и $A_\varphi < 0$, т. е. колебания происходят в противофазе с возмущающим моментом (см. рис. 248, 2). С возрастанием p амплитуды вынужденных колебаний $|A_z|$ и $|A_\varphi|$ уменьшаются, стремясь к нулю.

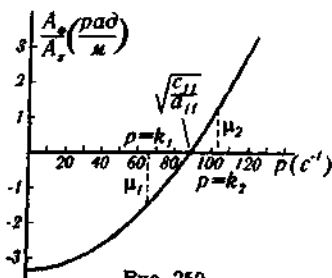


Рис. 250

Отношение функций A_φ и A_z , определяющих амплитуды вынужденных колебаний, получим, разделив (9) и (8):

$$A_\varphi/A_z = -(c_{11} - a_{11}p^2)/c_{12} = -(4000 - 0,5p^2)/1200. \quad (11)$$

При $p = 0$ $A_\varphi/A_z = -c_{11}/a_{12}$; $A_\varphi/A_z = -3,33 \text{ рад/м}$. При $p = k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}$ $A_\varphi/A_z = \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}$. При $p = \sqrt{c_{11}/a_{11}} = 89,4 \text{ с}^{-1}$ $A_\varphi/A_z = 0$. При $p = k_2 = 104 \text{ с}^{-1}$; $A_\varphi/A_z = \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}$.

График зависимости A_φ/A_z от частоты возмущения p показан на рис. 250. При резонансах формы вынужденных и свободных колебаний совпадают (см. рис. 247).

Для исследования резонансных колебаний ($p = k_1$ и $p = k_2$) осуществим переход к главным координатам системы: η_1 и η_2 . Они связаны с координатами z и φ соотношениями

$$z = \eta_1 + \eta_2; \quad \varphi = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения колебаний механической системы с двумя степенями свободы в главных координатах η_1 и η_2 при обобщенных возмущающих силах $Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta)$; $Q_2 = H_2 \sin(pt + \delta)$, соответствующих обобщенным координатам q_1 и q_2 , имеют вид

$$\ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 = \frac{H_1 + \mu_1 H_2}{a_1} \sin(pt + \delta), \quad (13)$$

$$\ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 = \frac{H_1 + \mu_2 H_2}{a_2} \sin(pt + \delta), \quad (14)$$

где $a_1 = a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2$; $a_2 = a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2$, μ_1 и μ_2 — коэффициенты распределения обобщенных координат q_1 и q_2 при свободных колебаниях.

В данном случае $H_1 = 0$; $H_2 = M_0$; $\delta = \pi/2$.

Поэтому дифференциальные уравнения (13) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 &= \frac{\mu_1 M_0}{a_1} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right); \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 &= \frac{\mu_2 M_0}{a_2} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При $p = k_1$ (первый резонанс) частный интеграл первого дифференциального уравнения системы (15) имеет вид

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t.$$

Частный интеграл второго дифференциального уравнения:

$$\eta_2 = \frac{\mu_1 M_0}{a_2(k_2^2 - k_1^2)} \sin\left(k_1 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Переходя к обобщенным координатам z и φ , по формулам (12) получаем

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\mu_1 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t + \frac{\mu_2 M_0}{a_2(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_1 t; \\ \varphi &= \frac{\mu_1^2 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t + \frac{\mu_2^2 M_0}{a_2(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При $p = k_2$ (второй резонанс) частные интегралы дифференциальных уравнений (15) имеют вид

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 M_0}{a_1(k_1^2 - k_2^2)} \sin\left(k_2 t + \frac{\pi}{2}\right); \quad \eta_2 = \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t,$$

откуда обобщенные координаты z и φ :

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_1 M_0}{a_1(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_2 t, \\ \varphi &= \frac{\mu_2^2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_1^2 M_0}{a_1(k_2^2 - k_1^2)} \cos k_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Параметры, входящие в уравнения (16) и (17), имеют следующие числовые значения: $M_0 = 16,8$ Н·м; $\mu_1 = -1,49$ рад/м; $\mu_2 = 1,2$ рад/м. Согласно (14) $a_1 = 1,13$ кг; $a_2 = 0,9$ кг.

Подставляя эти значения в формулы (16) и (17), получаем уравнения вынужденных колебаний при первом и втором резонансах.

Первый резонанс: $p = k_1 = 66,4$ с⁻¹;

$$z = -0,168t \sin 66,4t + 0,0035 \cos 66,4t;$$

$$\varphi = 0,252t \sin 66,4t + 0,0042 \sin 66,4t.$$

Второй резонанс: $p = k_2 = 104$ с⁻¹;

$$z = 0,108t \sin 104t + 0,0035 \cos 104t;$$

$$\varphi = 1,30t \sin 104t - 0,0052 \cos 104t.$$

Полученные результаты позволяют оценить колебания, происходящие в системе при резонансе в том случае, когда силы сопротивления незначительны, а резонансные режимы кратковременны.

V. ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Задание Д.27. Интегрирование дифференциального уравнения свободных колебаний механической системы с помощью ЭВМ

Механическая система с одной степенью свободы (рис. 251—253) может совершать колебания относительно положения равновесия. В начальный момент ($t = 0$) система выведена из положения равновесия и скорости всех ее точек равны нулю. Предоставленная далее самой себе система колеблется, находясь под действием только консервативных сил.

В схемах вариантов 8 и 20 применены пружины, сила упругости которых связана с деформацией λ соотношением $P(\lambda) = c\lambda + \alpha\lambda^3$. В остальных схемах использованы пружины, для которых зависимость силы упругости P от деформации λ — линейная, т. е. $P = c\lambda$. В вариантах 3, 4, 7, 9—11, 21, 22 пружины имеют деформацию f в положении покоя (предварительный натяг). В схемах вариантов 12—17, 23—28 пружины установлены с зазором z .

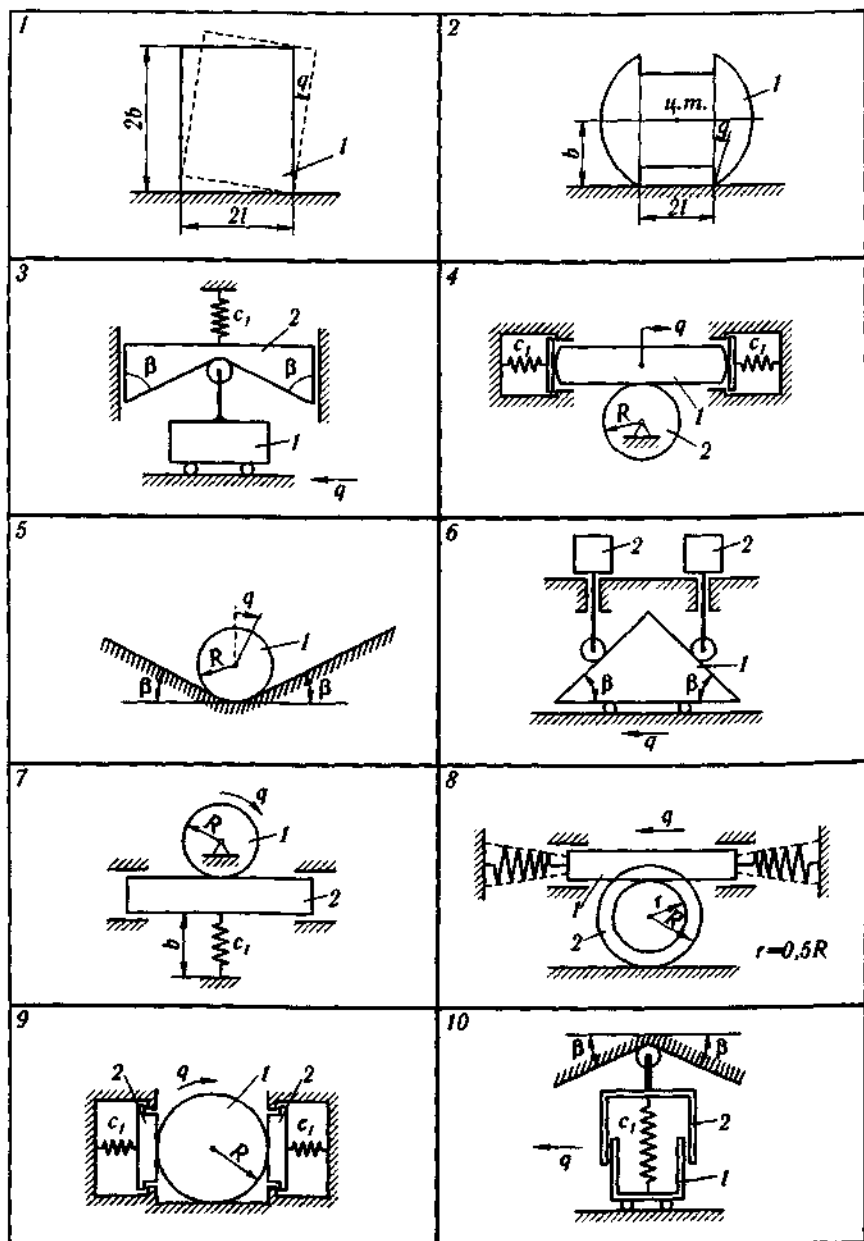


Рис. 251

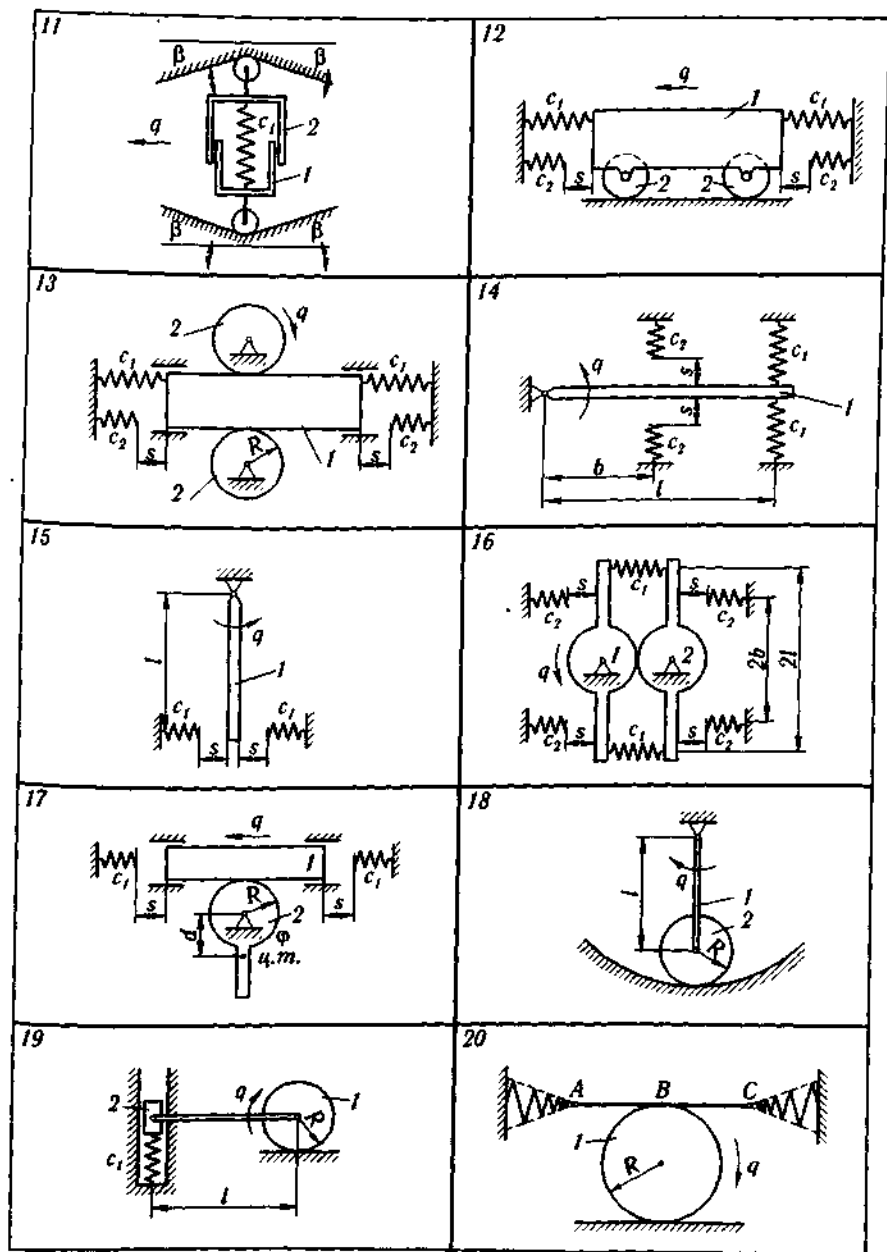


Рис. 252

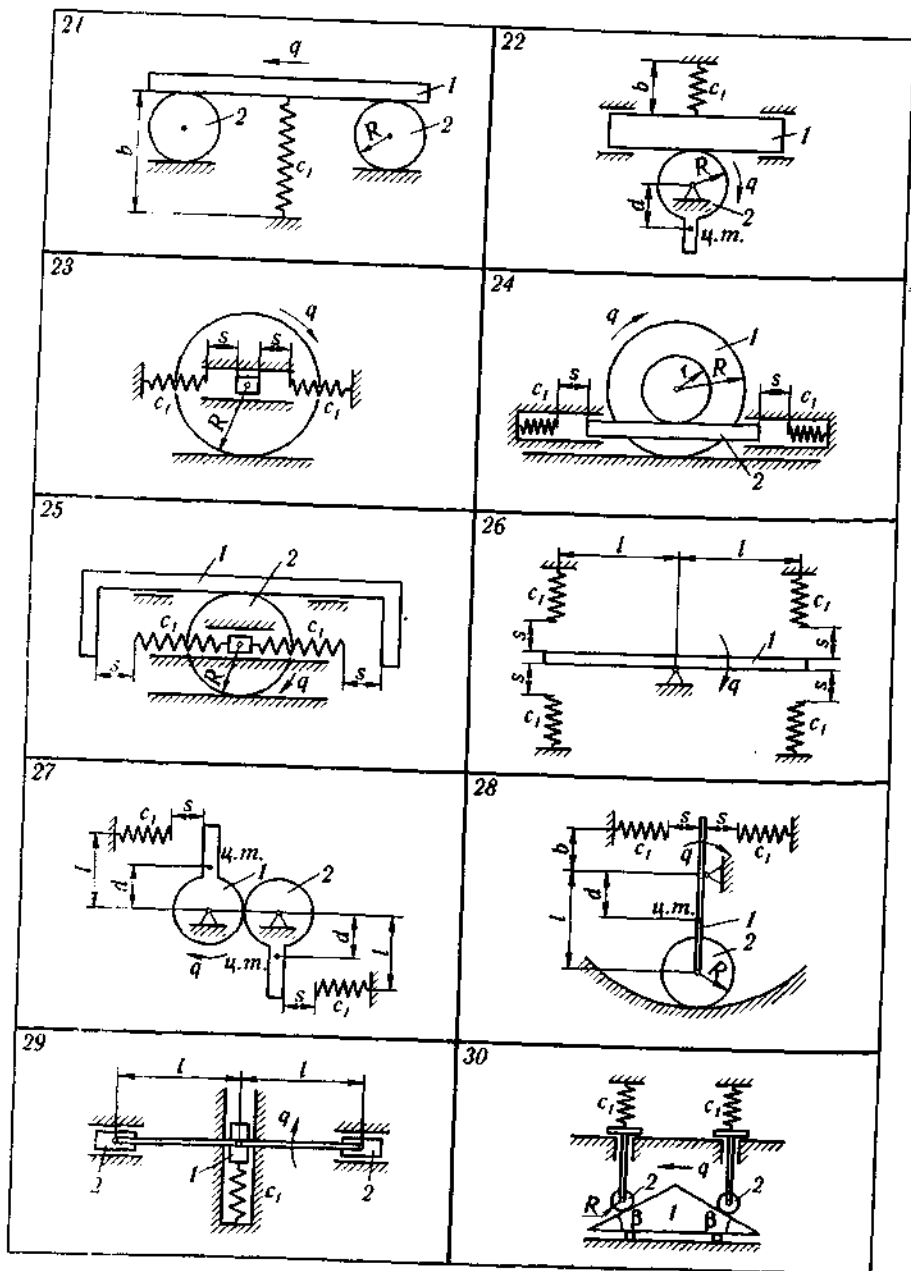


Рис. 253

Таблица 65

Таблица 68

Номер варианта (рис. 251-253)	m_1 кг	m_2 кг	i м	c_1 $\frac{H}{\text{см}}$	c_2 $\frac{H}{\text{см}}$	α_1 $\frac{H}{\text{см}^2}$	f м	β град	l	d	м			R	φ_0 град	ε м	Примечание
											b	δ	R				
1	15	-	0,25	-	-	-	-	-	0,2	-	0,4	-	-	0,122	-	-	$\sin q \approx q$
2	25	-	0,22	-	-	-	-	-	0,1	-	0,39	-	-	0,07	-	-	$\sin q \approx q$
3	10	15	-	5	-	-	0,05	60	-	-	-	-	-	0,1	-	-	Массой диска пренебречь
4	15	10	-	7	-	-	0,08	-	-	-	-	0,2	0,2	0,12	-	-	При $q = 0$ пружина сжата
5	30	-	-	-	-	-	-	30	-	-	-	0,25	0,25	1,2	-	-	Пружина сжата при $q \approx 0$
6	20	15	-	-	-	-	-	45	-	-	-	-	-	0,2	-	-	Массой роликов пренебречь
7	30	20	-	8	-	-	0,05	-	-	-	0,2	0,2	0,2	0,35	-	-	Пружина растянута при $q = 0$
8	7	12	0,2	3	-	0,02	0	-	-	-	-	-	-	0,8	-	-	Параметры пружин одинаковы
9	14	5	-	14	-	-	0,15	-	-	-	-	-	0,3	0,2	-	-	Пружина сжата при $q = 0$
10	10	16	-	20	-	-	0,1	30	-	-	-	-	-	0,1	-	-	Массой ролика пренебречь
11	12	8	-	15	-	-	0,08	30	-	-	-	-	-	0,14	-	-	Пружина сжата при $q \approx 0$
12	25	5	-	5	10	-	0	-	-	-	-	-	-	0,2	0,1	-	Массой ролика пренебречь
13	20	10	-	12	8	-	-	-	-	-	-	0,15	0,15	1,0	0,06	-	Пружина сжата при $q \approx 0$
14	12	-	-	15	10	-	-	-	0,8	-	0,5	-	-	0,122	0,03	-	Массой ролика пренебречь
15	15	-	-	23	-	-	-	-	0,7	-	-	-	-	0,1	0,02	-	Пружина сжата при $q \approx 0$
16	10	10	0,25	5	2	-	-	-	0,6	-	0,4	-	-	0,11	0,02	-	$i_1 \approx i_2$
17	16	0,24	0,35	21	-	-	-	-	-	0,35	-	0,3	0,3	0,04	0,01	-	$\sin(q/R) \approx \frac{q}{R}$

Номер варианта (рис. 251-253)	m_1 , кг	m_2 , кг	i , м	c_1 , $\frac{H}{CM}$	c_2 , $\frac{H}{CM}$	α , $\frac{H}{CM^2}$	f , м	β , град	м				q_0 , град	s , м	Примечание
									l	d	b	R			
18	12	20	-	-	-	-	-	-	0,6	-	-	0,25	0,5	-	$\sin q \approx q - \frac{q^3}{6}$
19	20	30	-	3	-	-	-	-	0,8	-	-	0,3	0,35	-	$\sin q \approx q - \frac{q^3}{6}$
20	30	-	-	10	-	0,1	0	-	-	-	-	0,35	0,5	-	Пружины одинаковы. АВ и ВС — нити
21	12	10	-	15	-	-	0,2	-	-	-	0,6	0,2	0,3	-	Пружина растянута при $q = 0$
22	10	14	0,43	25	-	-	0,1	-	-	0,48	0,3	0,4	0,14	-	Пружина растянута при $q = 0$, $\sin q \approx q$
23	25	-	0,3	20	-	-	-	-	-	-	-	0,35	0,6	0,08	$r/R = 0,5$
24	30	10	0,3	22	-	-	-	-	-	-	-	0,4	0,75	0,06	
25	12	20	-	20	-	-	-	-	-	-	-	0,3	0,5	0,07	
26	16	-	-	5	-	-	-	-	0,4	-	-	-	0,13	0,016	
27	18	18	0,04	26	-	-	-	-	0,5	0,35	-	-	0,15	0,03	$i_1 = i_2$
28	8	18	-	6	-	-	-	-	0,5	0,1	0,3	0,3	0,10	0,015	Механизм расположен в горизонтальной плоскости, $\sin q \approx q - \frac{q^3}{6}$
29	20	10	-	7	-	-	0	-	0,4	-	-	-	0,4	-	
30	25	10	-	23	-	-	-	30	-	-	-	0,15	0,15	-	

Примечание. В вариантах 7, 21 и 22 выражение для обобщенной силы разложить в ряд Маклорена и удержать члены не выше третьего порядка малости относительно обобщенной координаты. В вариантах 1 и 2 принять, что колебания «перевалки» вокруг опорных ребер происходят без потери энергии.

В задании требуется:

1. Составить дифференциальное уравнение, описывающее движение системы (свободные колебания системы).
2. Численным интегрированием на ЭВМ найти решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.
3. По результатам численного интегрирования определить циклическую частоту k и период T колебаний.

Схемы механических систем приведены на рис. 251—253 в положении покоя. На каждой схеме указана координата, которую нужно принять в качестве обобщенной. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 65. Здесь m_1, m_2 — массы тел системы; i — радиус инерции тела, участвующего во вращательном движении относительно центральной оси; c_1, c_2 — коэффициенты жесткости для линейных пружин; c_1 и α — коэффициенты для определения зависимости силы упругости от деформации для нелинейных пружин, f — деформация пружины в положении покоя (в примечании указано, сжата пружина или растянута); q_0 — начальное значение обобщенной координаты, s — величина зазора, d — расстояние от оси вращения до центра тяжести тела. Качение тел во всех случаях происходит без проскальзывания. Тела, для которых радиус инерции не указан, считать сплошными цилиндрами.

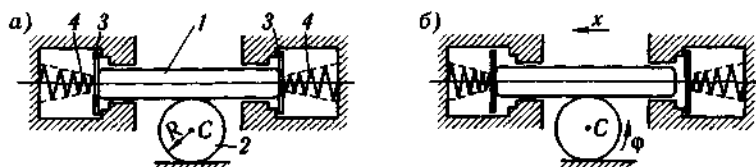


Рис. 254

Пример выполнения задания. Механическая система представлена на рис. 254, а. При поступательном движении тела 1 в направляющих диск 2 катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Система удерживается в положении равновесия двумя пружинами, которые сжаты в положении покоя на величину f . Силы упругости пружин передаются на тело 1 через шайбы 3. Перемещение правой шайбы ограничено левым упором, а левой — правым. Расстояние между упорами равно длине тела 1. Поэтому при перемещении тела 1 от положения равновесия влево на него действует сила упругости только от левой пружины (рис. 254, б), а при перемещении вправо от положения равновесия — только правой. Сила упругости P каждой пружины связана с ее деформацией λ зависимостью $P(\lambda) = c\lambda + \alpha\lambda^3$ (рис. 255, а). Зависимость силы $P(x)$, действующей на тело 1 со стороны пружины, представлена на рис. 255, б, где P_0 — значение силы упругости в положении покоя, а x — смещение тела 1 по горизонтали. При решении задачи не учитывать массы шайб 3 и силы сопротивления движению.



Рис. 255

Решить задачу при следующих данных: $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 40$ кг; $c = 10$ Н/см, $\alpha = 0,03$ Н/см³, $R = 0,3$ м, $t_0 = 0$, $q_0 = 0,5$ рад; $\dot{q}_0 = 0$; $f = 0,1$ м.

Решение. Для получения дифференциального уравнения движения системы воспользуемся уравнением Лагранжа II рода для консервативных систем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}, \quad (1)$$

где T и Π — кинетическая и потенциальная энергии системы. В качестве обобщенной координаты q примем угол поворота φ диска 2 ($q = \varphi$).

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2} + \frac{J_{C_2} \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Учитывая уравнения связей

$$v_C = R\dot{\varphi} = R\dot{q}; \quad \dot{x} = 2R\dot{q} \quad (2)$$

и выражение для момента инерции $J_{C_2} = \frac{m_2 R^2}{2}$ однородного диска 2 относительно центральной оси, получаем выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}, \quad (3)$$

где

$$a = (4m_1 + 1,5m_2)R^2; \quad a = 12,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Потенциальная энергия системы определяется как работа сил упругости на перемещении из отклоненного положения в нулевое (положение покоя):

$$\Pi(x) = \int_x^0 P(x) dx = \int_0^x (-P(x)) dx. \quad (4)$$

Зависимость $P(x)$ (рис. 255, б) определяется выражением

$$P(x) = \begin{cases} -P_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \alpha x^3, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ P_0 - b_1 x + b_2 x^2 - \alpha x^3, & x < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $P_0 = f(c + \alpha f^2)$; $b_1 = c + 3\alpha f^2$; $b_2 = 3\alpha f$. Это выражение можно представить более компактной записью, если использовать функцию $\frac{x}{|x|}$, которая принимает значение $+1$ при $x > 0$ и -1 при $x < 0$. Условимся, что значение $\frac{x}{|x|}$ при $x = 0$ равно нулю.

Зависимость $P(x)$ принимает вид

$$P(x) = -(P_0 + b_2 x^2) \frac{x}{|x|} - b_1 x - \alpha x^3. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем выражение для $\Pi(x)$:

$$\Pi(x) = (P_0 + \frac{b_2}{3} x^2) |x| + \frac{b_1}{2} x^2 + \frac{\alpha x^4}{4}. \quad (7)$$

Выразим потенциальную энергию, как функцию от q , учитывая, что $x = 2Rq$

$$\Pi(q) = (2RP_0 + \frac{8b_2 R^3}{3} q^2) |q| + 2R^2 b_1 q^2 + 4\alpha R^4 q^4. \quad (8)$$

В уравнение Лагранжа II рода следует подставить производную от Π по q .

Функция (8) имеет производную $\frac{\partial \Pi}{\partial q} = F(q)$ всюду, кроме точки $q = 0$,

$$F(q) = (2P_0 R + 8b_2 R^3 q^2) \frac{q}{|q|} + 4R^2 b_1 q + 16\alpha R^4 q^3. \quad (9)$$

При $q = 0$ функция $F(q)$ должна быть принята равной нулю, ибо в этом положении силы, действующие на тела системы, взаимно уравновешены. Подставляя (3) и (9) в уравнение (1), получим нелинейное дифференциальное уравнение движения системы:

$$a\ddot{q} + F(q) = 0. \quad (10)$$

Вычислим коэффициенты выражения (9):

$$P_0 = cf + \alpha f^3 = 10^3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 10^5 \cdot 0,1^3 \approx 130 \text{ Н};$$

$$2RP_0 = 2 \cdot 0,3 \cdot 130 = 78 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad b_1 = 1900 \text{ Н/м}; \quad 4R^2 b_1 = 684 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$16\alpha R^4 = 16 \cdot 0,3 \cdot 10^5 \cdot 0,3^4 = 3888 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad 8R^3 b_2 = 1944 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Функция $F(q)$ имеет вид:

$$F(q) = (78 + 1944q^2) \frac{q}{|q|} + 684q + 3888q^3. \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы

$$12,6\ddot{q} + (78 + 1944q^2) \frac{q}{|q|} + 684q + 3888q^3 = 0. \quad (12)$$

Для определения движения системы следует численно проинтегрировать на ЭВМ уравнение (12) при начальных условиях:
при $t = 0$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0,5 \text{ рад,} \\ \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

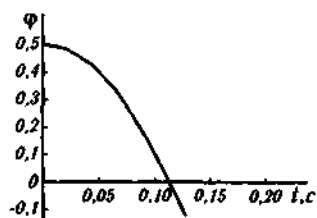


Рис. 256

Результаты вычислений сведены в табл. 66. На рис. 256 по результатам вычислений представлена зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Достаточно построить лишь ту часть графика, где φ изменяется от максимального значения φ_0 до нуля. Продолжение графика можно построить из соображений симметрии.

По графику легко определить четверть периода колебаний $0,25 T$: в момент $t_* = 0,25T$ значение φ обращается в ноль. Так как $t_* = 0,114$ с, то период колебаний составляет $T = 0,456$ с, а циклическая частота $k = 13,77 \text{ с}^{-1}$.

Таблица 66

$t, \text{с}$	$\varphi(t), \text{рад}$	$t, \text{с}$	$\varphi(t), \text{рад}$	$t, \text{с}$	$\varphi(t), \text{рад}$	$t, \text{с}$	$\varphi(t), \text{рад}$
0,000	0,5000	0,088	0,1618	0,176	-0,3687	0,264	-0,4268
0,011	0,4933	0,099	0,0927	0,187	-0,4164	0,275	-0,3814
0,022	0,4737	0,110	0,0220	0,198	-0,4546	0,286	-0,3279
0,033	0,4420	0,121	-0,0488	0,209	-0,4818	0,297	-0,2682
0,044	0,3999	0,132	-0,1189	0,220	-0,4966	0,308	-0,2038
0,055	0,3491	0,143	-0,1871	0,231	-0,4982	0,319	-0,1363
0,066	0,2913	0,154	-0,2524	0,242	-0,4867	0,330	-0,0667
0,077	0,2284	0,165	-0,3134	0,253	-0,4625	0,341	+0,042

**ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ,
ВХОДЯЩИХ В КУРСОВЫЕ РАБОТЫ**

Ш И Ф Р	Номера заданий						Ш И Ф Р	Номера заданий						Ш И Ф Р	Номера заданий					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12		7	8	9	10	11	12		7	8	9	10	11	12
Варианты заданий	Варианты заданий						Варианты заданий	Варианты заданий						Варианты заданий	Варианты заданий					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	23	25	19	3	5	1	35	19	4	8	18	17	13	69	21	9	29	7	1	24
2	20	22	2	6	8	3	36	16	30	11	21	24	16	70	18	6	1	10	29	27
3	17	19	20	9	11	6	37	13	27	14	24	21	19	71	15	3	7	13	18	2
4	14	10	28	12	17	9	38	10	24	17	27	28	22	72	12	1	6	16	6	5
5	11	13	22	15	14	12	39	7	21	20	30	1	25	73	9	29	9	19	8	18
6	8	10	5	18	20	15	40	4	18	23	4	29	28	74	6	26	12	22	15	11
7	5	7	8	21	23	18	41	30	15	20	7	3	30	75	3	23	15	25	12	14
8	2	4	11	24	26	21	42	27	12	29	10	6	4	76	1	20	18	28	11	17
9	19	30	14	27	29	24	43	24	9	1	13	9	7	77	29	17	21	2	19	20
10	16	27	17	30	1	27	44	21	6	3	16	12	10	78	26	14	24	5	20	23
11	13	24	20	4	3	2	45	18	3	6	19	15	12	79	9	11	27	8	23	26
12	10	21	23	7	6	5	46	15	1	9	22	18	16	80	20	8	30	11	3	29
13	7	18	26	10	9	8	47	12	29	12	25	21	19	81	17	5	4	14	18	2
14	15	29	13	12	30	11	48	9	26	15	28	24	22	82	14	2	7	17	8	5
15	30	12	1	16	15	14	49	6	23	18	2	27	25	83	11	19	10	20	16	8
16	27	9	3	19	18	17	50	3	20	21	5	30	28	84	8	16	13	23	7	11
17	24	6	9	11	21	20	51	1	17	24	8	4	1	85	5	13	16	26	6	14
18	21	3	6	25	24	23	52	29	14	27	11	7	30	86	2	10	19	29	9	17
19	18	1	12	28	27	26	53	26	11	30	14	10	6	87	25	7	2	1	22	20
20	15	29	18	5	4	29	54	23	8	4	17	13	9	88	21	4	5	9	25	23
21	12	26	15	2	30	2	55	20	5	7	20	16	12	89	7	27	8	12	28	26
22	9	23	21	8	7	5	56	17	2	10	23	19	15	90	19	24	11	15	2	29
23	6	20	24	11	10	8	57	28	19	13	26	22	18	91	30	21	19	18	5	30
24	3	17	27	14	13	11	58	25	16	19	29	25	21	92	27	18	17	21	8	4
25	1	14	30	17	16	14	59	22	13	16	6	28	24	93	24	15	20	24	11	7
26	29	11	4	20	19	17	60	18	10	15	9	2	27	94	21	12	23	27	14	10
27	28	8	7	23	22	20	61	16	4	5	12	5	17	95	18	9	26	30	17	13
28	23	5	10	26	25	23	62	13	30	8	15	11	3	96	15	6	29	4	9	16
29	20	2	13	29	28	26	63	10	27	11	18	8	16	97	12	3	1	7	23	22
30	14	19	22	3	2	29	64	7	24	14	21	14	9	98	9	1	3	10	26	25
31	11	16	25	6	5	30	65	4	21	17	24	17	12	99	6	29	6	13	19	28
32	8	13	28	9	8	4	66	30	18	20	27	20	15	100	26	28	16	1	2	16
33	5	10	2	12	11	7	67	27	15	23	30	23	18							
34	2	7	5	15	14	10	68	24	12	26	4	26	21							

ЛИТЕРАТУРА

- Бабаков И. М.* Теория колебаний, М., 1965.
- Бутенин Н. В.* Введение в аналитическую механику. М., 1971
- Бутенин Н. В.* Теория колебаний. М., 1963.
- Бутенин Н. В., Луцк Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики, ч. I и II. М., 1971 и последующие издания.
- Воронков И. М.* Курс теоретической механики. М., 1954 и последующие издания.
- Гернет М. М.* Курс теоретической механики. М., 1965 и последующие издания.
- Доброправов В. В., Никитин Н. Н.* Курс теоретической механики. М., 1983.
- Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. М., 1954.
- Лойцянский Л. Г., Лурье А. И.* Курс теоретической механики, ч. I и II. М., 1954 и последующие издания.
- Николаи Е. Л.* Теоретическая механика. М., 1952.
- Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М., 1964
- Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М., 1971.
- Пановко Я. Г.* Введение в теорию механического удара. М., 1977.
- Савин Г. П., Кильчевский Н. А., Путьята Т. В.* Курс теоретической механики. Киев, 1963.
- Старминский В. М.* Теоретическая механика. М., 1980.
- Тарг С. М.* Курс теоретической механики. М., 1963 и последующие издания.
- Яблонский А. А., Никифорова В. М.* Курс теоретической механики, ч. I, М., 1971 и последующие издания.
- Яблонский А. А.* Курс теоретической механики, ч. II. М., 1971 и последующие издания.
- Яблонский А. А., Норейко С. С.* Курс теории колебаний. М., 1966 и последующие издания.

Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1968.

Батъ М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, ч. I и II. М., 1961 и последующие издания.

Бражниченко Н. А. и др. Сборник задач по теоретической механике. М., 1967 и последующие издания.

Мецкерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1971 и последующие издания.

Пятницкий Е. С., Турхан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. Сборник задач по аналитической механике. М., 1980.

Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний. М., 1973 и последующие издания.

Сборник задач по теоретической механике/Под ред. проф. К. С. Колесникова М., 1984.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	5
Используемые обозначения.....	7

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

I. Плоская система сил.....	8
Система произвольно расположенных сил.....	8
Задание С.1. Определение реакций опор твердого тела.....	8
Задание С.2. Определение реакций опор и сил в стержнях плоской фермы.....	14
Задание С.3. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел).....	21
Задание С.4. Определение реакций опор составной конструкции (система трех тел).....	28
Задание С.5. Равновесие тел с учетом сцепления (трения покоя).....	34
II. Система сил, не лежащих в одной плоскости.....	41
Задание С.6. Приведение системы сил к простейшему виду.....	41
Задание С.7. Определение реакций опор твердого тела.....	45
Центр тяжести.....	49
Задание С.8. Определение положения центра тяжести тела.....	49
III. Применение ЭВМ к решению задач статики.....	54
Задание С.9. Определение реакций опор составных конструкций с внутренними односторонними связями.....	54

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ КИНЕМАТИКА

I. Кинематика точки.....	64
Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.....	64
II. Кинематика твердого тела.....	67
Поступательное и вращательное движения твердого тела.....	67
Задание К.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях.....	67
Плоское движение твердого тела.....	72
Задание К.3. Кинематический анализ плоского механизма.....	72

Задание К.4. Кинематический анализ многозвенного механизма	80
Сферическое движение твердого тела	92
Задание К.5. Определение кинематических характеристик движения твердого тела и его точек по уравнениям Эйлера	92
Задание К.6. Кинематический анализ движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности и имеющего неподвижную точку	96
III. Сложное движение	104
Сложное движение точки	104
Задание К.7. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки	104
Сложное движение твердого тела, сложение вращений вокруг параллельных и пересекающихся осей	111
Задание К.8. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора	111
IV. Применение ЭВМ к решению задач кинематики	120
Задание К.9. Определение угловых скоростей и угловых ускорений звеньев механизма манипулятора по заданному движению рабочей точки	120

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ ДИНАМИКА

I. Динамика материальной точки	130
Дифференциальные уравнения движения материальной точки	130
Задание Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил	130
Задание Д.2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил	136
Задание Д.3. Исследование колебательного движения материальной точки	144
Задание Д.4. Исследование относительного движения материальной точки	155
Основные теоремы динамики материальной точки	163
Задание Д.5. Применение теоремы об изменении количества движения к определению скорости материальной точки	163
Задание Д.6. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки	168
II. Динамика механической системы	174
Основные теоремы динамики механической системы	174
Задание Д.7. Применение теоремы о движении центра масс к исследованию движения механической системы	174
Задание Д.8. Применение теоремы об изменении количества движения к исследованию движения механической системы	184
Задание Д.9. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела	193
Задание Д.10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы	201
Дифференциальные уравнения движения твердого тела	213
Задание Д.11. Исследование поступательного и вращательного движений твердого тела	213
Задание Д.12. Исследование плоского движения твердого тела	222
Удар	230
Задание Д.13. Исследование соударений твердых тел	230

III. Аналитическая механика	250
Принцип возможных перемещений	250
Задание Д.14. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы	250
Задание Д.15. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции	258
Принцип Даламбера	264
Задание Д.16. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей	264
Задание Д.17. Определение реакций опор при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси	271
Задание Д.18. Применение теорем и принципов динамики к исследованию движения механической системы	279
Общее уравнение динамики	290
Задание Д.19. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы	290
Уравнение Лагранжа II рода	297
Задание Д.20. Применение уравнения Лагранжа II рода к определению сил и моментов, обеспечивающих программное движение манипулятора .	297
Задание Д.21. Применение уравнения Лагранжа II рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы	306
Устойчивость состояния равновесия (покоя) консервативной механической системы	316
Задание Д.22. Определение положений равновесия (покоя) консервативной механической системы с одной степенью свободы и исследование их устойчивости	316
IV. Колебания механической системы	326
Задание Д.23. Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы	326
Задание Д.24. Исследование свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы	334
Задание Д.25. Исследование вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы	343
Задание Д.26. Исследование вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы	359
V. Применение ЭВМ к решению задач динамики	367
Задание Д.27. Интегрирование дифференциального уравнения свободных колебаний механической системы с помощью ЭВМ	367
Таблица вариантов заданий, входящих в курсовые работы	377
Литература	378