

### Индивидуальное домашнее задание (3 модуль)

1. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$
  - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\mu$ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$
2. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 3) Математическое ожидание случайной величины  $\mu$ .
3. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - 1) условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ ;
  - 2) условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$ ;
4. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$  и условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ .
5. Выполните следующие задания:
  - 1) По заданным плотностям  $p_\xi(x)$  и  $p_\eta(y)$  найдите характеристические функции  $f_\xi(t)$  и  $f_\eta(t)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ; характеристическую функцию  $f_\mu(t)$  случайной величины  $\mu = \xi + \eta$
  - 2) По заданной характеристической функции  $f_\xi(t)$  вычислите математическое ожидание случайной величины  $\xi$  и дисперсию случайной величины  $\xi$ .
6. Посетитель тира платит  $a$  рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш  $b$  рублей, при попадании в десятку получает выигрыш  $c$  рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Число посетителей равно  $n$ .  
С помощью **неравенства Чебышева**:
  - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее  $\alpha$ ;
  - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше  $\beta$  % (от средней суммарной прибыли) равнялась  $p$С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
  - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$  рублей;
  - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от  $n_1$  до  $n_2$  рублей.
7. По заданным выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  объема  $n = 50$  найти и построить:
  - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
  - 2) гистограмму, полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения (для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ );
  - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
8. Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью  $p_\xi(x)$  с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
9. а) Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

б) Известно, что выборка  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

**10.** С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  непрерывному распределению с заданными параметрами.

**11.** С помощью критерия  $\chi^2$  проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

**Распределение баллов (15 баллов)**

<b>Задача 1</b>	<b>Задача 2</b>	<b>Задача 3</b>	<b>Задача 4</b>	<b>Задача 5</b>	<b>Задача 6</b>
<b>1, 5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

<b>Задача 7</b>	<b>Задача 8</b>	<b>Задача 9</b>	<b>Задача 10</b>	<b>Задача 11</b>
<b>1,5 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

28.	5.	Независимые непрерывные случайные величины $\xi$ и $\eta$ имеют плотности распределения $p_{\xi}(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ и } p_{\eta}(y) = \begin{cases} \cos 2y, & -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & y < -\frac{\pi}{4}, y > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $f(t) = \frac{\cos t}{1 + t^2}$																																					
	6.	$a = 200, b = 300, c = 750, \quad p_1 = 0,3, p_2 = 0,1, p_3 = 0,6, \quad n = 500,$ $\alpha = 0.8, \quad \beta = 15, \quad p = 0.2$ $m_1 = 0, \quad m_2 = 500, \quad n_1 = 6000, \quad n_2 = 15000$																																					
	7.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ 2 3 0 0 0 0 2 0 0 2 1 2 5 9 4 3 1 0 0 2 0 2 11 1 2 3 0 1 1 0 5 2 10 5 2 4 0 3 0 3 1 0 9 1 3 1 5 4 2 1 Выборка $Y_1, \dots, Y_n$ 0.10 7.24 2.84 10.89 4.30 7.40 0.07 0.98 0.34 1.03 6.13 15.52 7.44 0.47 2.31 1.14 18.62 5.01 20.20 1.65 5.01 4.86 8.78 17.13 5.30 12.79 15.70 15.26 0.61 13.44 10.50 8.59 2.76 11.63 9.31 1.11 4.45 0.46 7.89 24.83 1.54 4.48 4.51 1.95 9.32 6.47 3.48 1.88 0.96 3.97																																					
	8.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ – имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 0,2$ и $\lambda_2 = 0,5$ найти оценку параметра $p$ . Таблица частот <table><tr><td>интер-валы</td><td>0-2</td><td>2-4</td><td>4-6</td><td>6-8</td><td>8-10</td><td>10-12</td><td>12-14</td><td>14-16</td><td>16-18</td><td>18-20</td></tr><tr><td>частоты</td><td>299</td><td>128</td><td>53</td><td>26</td><td>12</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	интер-валы	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	частоты	299	128	53	26	12	7	6	5	5	2															
	интер-валы	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20																												
частоты	299	128	53	26	12	7	6	5	5	2																													
9.	По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров $a$ и $b$ <table><tr><td>интер-валы</td><td>1-2</td><td>2-3</td><td>3-4</td><td>4-5</td><td>5-6</td><td>6-7</td><td>7-8</td></tr><tr><td>частоты</td><td>97</td><td>321</td><td>293</td><td>184</td><td>68</td><td>29</td><td>8</td></tr></table> По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров $a$ и $b$ <table><tr><td>интер-валы</td><td>0.0-2.0</td><td>2.0-4.0</td><td>4.0-6.0</td><td>6.0-8.0</td><td>8.0-10.0</td><td>10.0-12.0</td><td>12.0-14.0</td><td>14.0-16.0</td><td>16.0-18.0</td><td>18.0-20.0</td></tr><tr><td>частоты</td><td>43</td><td>385</td><td>290</td><td>150</td><td>80</td><td>27</td><td>11</td><td>7</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>	интер-валы	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	частоты	97	321	293	184	68	29	8	интер-валы	0.0-2.0	2.0-4.0	4.0-6.0	6.0-8.0	8.0-10.0	10.0-12.0	12.0-14.0	14.0-16.0	16.0-18.0	18.0-20.0	частоты	43	385	290	150	80	27	11	7	6	1
интер-валы	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8																																
частоты	97	321	293	184	68	29	8																																
интер-валы	0.0-2.0	2.0-4.0	4.0-6.0	6.0-8.0	8.0-10.0	10.0-12.0	12.0-14.0	14.0-16.0	16.0-18.0	18.0-20.0																													
частоты	43	385	290	150	80	27	11	7	6	1																													
10.	Гипотеза $H_0$ --- распределение Пуассона $Pois(\lambda = 11)$ Гипотеза $H_1$ --- распределение Пуассона $Pois(\lambda = 12), \alpha = 0.145$ 11 14 11 9 9 14 7 8 7 10 9 10 7 9 13 4 16 11 8 15 14 14 14 13 7 11 19 14 11 10 16 11 14 16 13 9 13 15 10 4 14 16 13 7 14 11 11 14 12 13 Гипотеза $H_0$ --- экспоненциальное распределение $Exp(0.3)$ Гипотеза $H_1$ --- экспоненциальное распределение $Exp(0.2), \alpha = 0.133$ 0.07 5.43 2.13 8.16 3.23 5.55 0.05 0.73 0.26 0.77 4.60 11.64 5.58 0.36 1.73 0.85 13.97 3.76 15.15 1.24 3.76 3.65 6.58 12.84 3.98 9.59 11.77 11.44 0.46 10.08 7.88 6.44 2.07 8.72 6.98 0.83 3.34 0.34 5.92 18.62 1.16 3.36 3.38 1.46 6.99 4.85 2.61 1.41 0.72 2.98																																						

11.	<p>Геометрическое распределение с неизвестным параметром <math>p</math>, <math>\alpha = 0.05</math></p> <p>Выборка <math>X_1, \dots, X_n</math></p> <table><tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>9</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>11</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>10</td><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr></table> <p>Экспоненциальное распределение с параметром <math>\lambda</math>, <math>\alpha = 0.05</math></p> <p>Выборка <math>Y_1, \dots, Y_n</math></p> <table><tr><td>0.10</td><td>7.24</td><td>2.84</td><td>10.89</td><td>4.30</td><td>7.40</td><td>0.07</td><td>0.98</td><td>0.34</td><td>1.03</td></tr><tr><td>6.13</td><td>15.52</td><td>7.44</td><td>0.47</td><td>2.31</td><td>1.14</td><td>18.62</td><td>5.01</td><td>20.20</td><td>1.65</td></tr><tr><td>5.01</td><td>4.86</td><td>8.78</td><td>17.13</td><td>5.30</td><td>12.79</td><td>15.70</td><td>15.26</td><td>0.61</td><td>13.44</td></tr><tr><td>10.50</td><td>8.59</td><td>2.76</td><td>11.63</td><td>9.31</td><td>1.11</td><td>4.45</td><td>0.46</td><td>7.89</td><td>24.83</td></tr><tr><td>1.54</td><td>4.48</td><td>4.51</td><td>1.95</td><td>9.32</td><td>6.47</td><td>3.48</td><td>1.88</td><td>0.96</td><td>3.97</td></tr></table>	2	3	0	0	0	0	2	0	0	2	1	2	5	9	4	3	1	0	0	2	0	2	11	1	2	3	0	1	1	0	5	2	10	5	2	4	0	3	0	3	1	0	9	1	3	1	5	4	2	1	0.10	7.24	2.84	10.89	4.30	7.40	0.07	0.98	0.34	1.03	6.13	15.52	7.44	0.47	2.31	1.14	18.62	5.01	20.20	1.65	5.01	4.86	8.78	17.13	5.30	12.79	15.70	15.26	0.61	13.44	10.50	8.59	2.76	11.63	9.31	1.11	4.45	0.46	7.89	24.83	1.54	4.48	4.51	1.95	9.32	6.47	3.48	1.88	0.96	3.97
2	3	0	0	0	0	2	0	0	2																																																																																												
1	2	5	9	4	3	1	0	0	2																																																																																												
0	2	11	1	2	3	0	1	1	0																																																																																												
5	2	10	5	2	4	0	3	0	3																																																																																												
1	0	9	1	3	1	5	4	2	1																																																																																												
0.10	7.24	2.84	10.89	4.30	7.40	0.07	0.98	0.34	1.03																																																																																												
6.13	15.52	7.44	0.47	2.31	1.14	18.62	5.01	20.20	1.65																																																																																												
5.01	4.86	8.78	17.13	5.30	12.79	15.70	15.26	0.61	13.44																																																																																												
10.50	8.59	2.76	11.63	9.31	1.11	4.45	0.46	7.89	24.83																																																																																												
1.54	4.48	4.51	1.95	9.32	6.47	3.48	1.88	0.96	3.97																																																																																												