

**Кафедра электротехники и электроснабжения**

**Ф. Д. КОСОУХОВ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**Часть 2. Индуктивно связанные электрические цепи.  
Четырехполюсники. Трехфазные цепи.  
Несинусоидальные токи в линейных цепях. Магнитные цепи**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2008**

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом СПбГАУ (протокол №6 от 27 марта 2008 г.)

Для студентов энергетического факультета по специальностям:

110302 – электрификация и автоматизация сельского хозяйства;

140106 – энергообеспечение предприятий.

Рецензенты: заведующий кафедрой Электрических машин и электропривода, профессор Епифанов А.П.

© Санкт-Петербургский государственный  
аграрный университет  
2008 г.

## ГЛАВА 4. ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### 4.1. Индуктивно связанные элементы цепи

Две катушки индуктивности являются индуктивно связанными, если при изменении тока в одной катушке индуцируется ЭДС в другой катушке. Такое явление называется **явлением взаимной индукции**. На рис. 4.1 показаны две индуктивно связанные катушки, для которых различают следующие магнитные

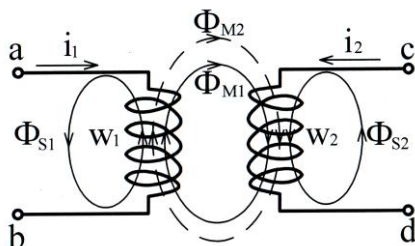


Рис. 4.1

потоки:  $\Phi_{S1}$ ,  $\Phi_{S2}$  – магнитные потоки рассеяния, соответственно, первой и второй катушек; они сцеплены с витками собственных катушек  $w_1$  и  $w_2$ ;  $\Phi_{M1}$  – магнитный поток взаимной индукции 1-й катушки: он создан током 1-й катушки  $i_1$  и сцеплен с витками 2-й катушки  $w_2$ ;  $\Phi_{M2}$  – магнитный поток взаимной индукции 2-й катушки: он создан током 2-й катушки

$i_2$  и сцеплен с витками 1-й катушки  $w_1$ .

Магнитные потоки самоиндукции 1-й  $\Phi_{L1}$  и 2-й  $\Phi_{L2}$  катушек определяются суммированием потока рассеяния и потока взаимной индукции:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{L1} &= \Phi_{S1} + \Phi_{M1}, \\ \Phi_{L2} &= \Phi_{S2} + \Phi_{M2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Направление магнитного потока самоиндукции катушки зависит от направления намотки и от направления тока в ней, и определяется по правилу правого винта (рис. 4.2).

Параметром двух индуктивно связанных катушек является *взаимная индуктивность*  $M_{12} = M_{21} = M$ , измеряемая в генри [Гн]:

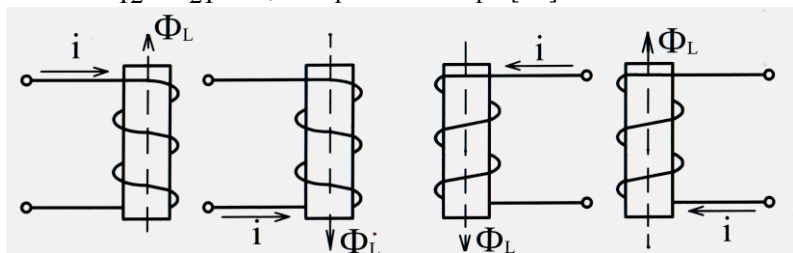


Рис. 4.2

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= \frac{\psi_{12}}{i_2} = \frac{w_1 \Phi_{M2}}{i_2}; \\ M_{21} &= \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_{M1}}{i_1}; \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где  $\psi_{12}$  – потокосцепление взаимной индукции 1-й катушки,  $\psi_{21}$  – потокосцепление взаимной индукции 2-й катушки.

$$\left. \begin{aligned} \text{Индуктивности катушек:} \quad L_1 &= \frac{\psi_{L1}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{L1}}{i_1}, \\ L_2 &= \frac{\psi_{L2}}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{L2}}{i_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

В результате изменения потокосцепления взаимной индукции 1-й катушки, на основании *закона электромагнитной индукции*, в ней наводится ЭДС взаимной индукции:

$$e_{M1} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -w_1 \frac{d\Phi_{M2}}{dt};$$

учитывая, что  $\Phi_{M2}$  из выражения (4.2):  $\Phi_{M2} = \frac{M_{12} \cdot i_2}{w_1}$ ,

$$\text{получим:} \quad e_{M1} = -w_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{M_{12} \cdot i_2}{w_1} \right) = -M_{12} \frac{di_2}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad (4.4)$$

Аналогично определим ЭДС взаимной индукции 2-й катушки:

$$e_{M2} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -w_2 \frac{d\Phi_{M1}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (4.5)$$

Напряжение взаимной индукции 1-й катушки  $u_{M1}$  уравнивает ЭДС взаимной индукции этой катушки:  $u_{M1} = -e_{M1} = M \frac{di_2}{dt}$ . (4.6)

Аналогично определяется напряжение взаимной индукции 2-й катушки:

$$u_{M2} = -e_{M2} = M \frac{di_1}{dt}. \quad (4.7)$$

Степень магнитной связи двух катушек характеризуется *коэффициентом магнитной связи*:

$$K_M = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (4.8)$$

который может изменяться от 0 до 1:  $K_M = 0$  при отсутствии магнитной связи между катушками;  $K_M = 1$  в том случае, когда  $\Phi_{L1} = \Phi_{M1}$  и  $\Phi_{L2} = \Phi_{M2}$ .

Из выражения (4.8) следует, что взаимная индуктивность катушек:

$$M = K_M \sqrt{L_1 L_2},$$

т. е. зависит от коэффициента магнитной связи и индуктивностей обеих катушек.

Изменения индуктивной (магнитной) связи между катушками можно достигнуть перемещением одной катушки относительно другой. Приборы, состоящие из двух взаимно перемещающихся катушек, предназначенные для плавного регулирования взаимной индуктивности, называются *вариометрами*.

При рассмотрении индуктивно связанных цепей вводят понятие об *одноименных зажимах* контуров (катушек). Зажимы двух контуров называются *одноименными*, если при одинаковых направлениях токов относительно этих

зажимов, магнитные потоки самоиндукции  $\Phi_L$  и взаимной индукции  $\Phi_M$  в каждом контуре совпадают по направлению. Одноименность зажимов контуров (катушек) зависит от направления их намотки и от взаимного расположения. В катушке 1 и 2 (рис. 4.1) одноименными являются зажимы *a* и *c* (обозначены  $\bullet$ ), так как при указанном направлении токов относительно этих зажимов, поток самоиндукции

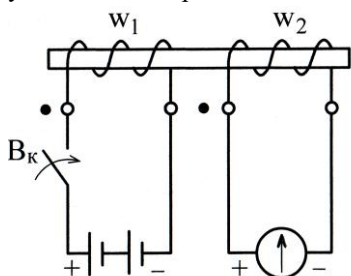


Рис. 4.3

$\Phi_{L1}$  1-й катушки имеет одинаковое направление с потоком взаимной индукции  $\Phi_{M2}$  от второй катушки, а поток самоиндукции  $\Phi_{L2}$  совпадает с потоком взаимной индукции  $\Phi_{M1}$ . Одноименные зажимы индуктивно связанных катушек определяются *экспериментально*. Для этого источник постоянного тока (батарея) Б и гальванометр Г включают к зажимам двух индуктивно связанных катушек с витками  $w_1$  и  $w_2$  по схеме (рис. 4.3), соблюдая указан-

ную на схеме полярность батареи и гальванометра. Если при включении выключателя  $B_k$  стрелка гальванометра отклоняется вправо, то зажимы катушек, подключённые к «плюсу» батареи и гальванометра, будут одноименными.

## 4.2. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек

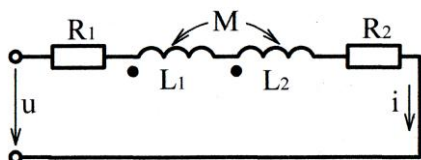


Рис. 4.4

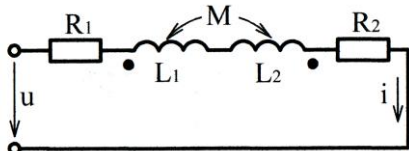


Рис. 4.5

При последовательном соединении катушек с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  и индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и взаимной индуктивностью  $M$  возможны два вида их соединения: согласное и встречное включение.

При *согласном включении* катушек (рис. 4.4) магнитные потоки самоиндукции  $\Phi_L$  и взаимной индукции  $\Phi_M$  в обеих катушках направлены одинаково и ЭДС самоиндукции  $e_L$  и взаимной индукции  $e_M$  имеют одинаковые знаки. При *встречном включении* катушек (рис. 4.5) магнитные потоки  $\Phi_L$  и  $\Phi_M$  направлены в противоположные стороны и ЭДС взаимной индукции  $e_M$  имеет знак, обратный знаку ЭДС самоиндукции  $e_L$ .

Схемы электрических цепей при согласном (рис. 4.4) и встречном (рис. 4.5) включении катушек отличаются только расположением одноименных зажимов ( $\bullet$ ) относительно направления тока в каждой катушке, а именно: при согласном

включении катушек ток  $i$  направлен в обеих катушках от начала (●) к концу каждой катушки; при встречном включении катушек ток  $i$  в первой катушке направлен от начала (●) к концу, а во второй катушке – от конца к началу (●).

Запишем по второму закону Кирхгофа уравнения для напряжений каждой катушки в дифференциальной (классической) форме:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_{R1} + u_{L1} \pm u_M = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}, \\ u_2 &= u_{R2} + u_{L2} \pm u_M = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где  $u_{R1}$ ,  $u_{R2}$  – активное напряжение 1-й и 2-й катушек;

$u_{L1}$ ,  $u_{L2}$  – индуктивные напряжения катушек;

$u_M$  – напряжение взаимной индукции катушек.

В уравнениях (4.9) знак «+» соответствует согласному включению катушек, а знак «-» – встречному включению.

Определим входное напряжение на зажимах цепей (рис. 4.4 и 4.5):

$$u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt}. \quad (4.10)$$

$$\text{В уравнении (4.10):} \quad L_c = L_1 + L_2 + 2M; \quad (4.11)$$

$$L_g = L_1 + L_2 - 2M; \quad (4.12)$$

$L_c$ ,  $L_g$  – представляют собой эквивалентные индуктивности электрических цепей при согласном (4.11) и встречном (4.12) включении катушек.

Вычитая из уравнения (4.11) уравнение (4.12), получим:  $L_c - L_g = 4M$ , откуда

$$M = \frac{L_c - L_g}{4}, \quad (4.13)$$

т. е. зная эквивалентные индуктивности цепи при согласном ( $L_c$ ) и встречном ( $L_g$ ) включении катушек, можно определить взаимную индуктивность катушек.

Запишем уравнения (4.9) и (4.10) в комплексной форме:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} \pm j\omega M \underline{I} = \underline{Z}_1 \underline{I} \pm \underline{Z}_M \underline{I}; \quad (4.14)$$

$$\underline{U}_2 = R_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} \pm j\omega M \underline{I} = \underline{Z}_2 \underline{I} \pm \underline{Z}_M \underline{I}; \quad (4.15)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M) \underline{I}, \quad (4.16)$$

где  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$  – комплексные сопротивления 1-й и 2-й катушек;

$\underline{Z}_M = j\omega M$  – комплексное сопротивление взаимной индукции;

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M$  – комплексное сопротивление всей цепи.

На основании уравнений (4.14) – (4.16) строим векторные диаграммы в координатах комплексной плоскости для согласного (рис. 4.6) и встречного (рис. 4.7) включения катушек, используя следующие обозначения:

$\underline{U}_{R1} = R_1 \underline{I}$ ,  $\underline{U}_{R2} = R_2 \underline{I}$  – комплексные активные напряжения 1-й и 2-й катушек;

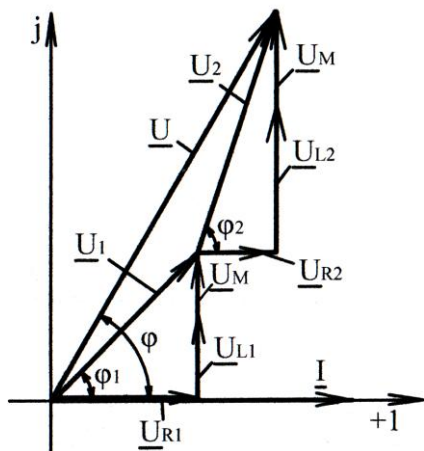


Рис. 4.6

при согласном включении катушек совпадает с  $\underline{U}_{L1}$ . Сумма трёх векторов в соответствии с уравнением (4.14):  $\underline{U}_{R1} + \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{M1} = \underline{U}_1$ .

Из конца вектора  $\underline{U}_1$  строим векторы  $\underline{U}_{R2}$ ,  $\underline{U}_{L2}$ ,  $\underline{U}_{M2} = \underline{U}_M$  для 2-й катушки аналогично построению соответствующих векторов для 1-й катушки. Соединив начало вектора  $\underline{U}_{R2}$  с концом вектора  $\underline{U}_{M2}$ , получим вектор  $\underline{U}_2$ , а

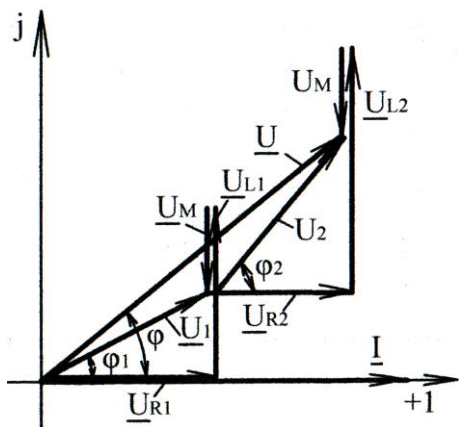


Рис. 4.7

соединив начало вектора  $\underline{U}_1$  с концом вектора  $\underline{U}_2$ , получим вектор входного напряжения  $\underline{U}$ .

$\underline{U}_{L1} = j\omega L_1 I$ ,  $\underline{U}_{L2} = j\omega L_2 I$  — комплексные индуктивные напряжения катушек;

$\underline{U}_M = j\omega M I$  — комплексное напряжение взаимной индукции.

**Построение векторной диаграммы для согласного включения катушек (рис. 4.4).**

Общим для всех элементов схемы является ток  $I$ , поэтому в качестве исходного вектора на диаграмме принимаем комплексный ток, который направляем по оси вещественных (рис.4.6). Вектор  $\underline{U}_{R1}$  1-й катушки совпадает по направлению с  $I$ , вектор  $\underline{U}_{L1}$  опережает  $I$  на угол  $90^\circ$ , вектор  $\underline{U}_{M1} = \underline{U}_M$

**Построение векторной диаграммы для встречного включения катушек (рис. 4.5).**

Порядок построения векторной диаграммы (рис. 4.7) для встречного включения катушек тот же, что и при согласном включении. Отличительной особенностью этой диаграммы является встречное направление векторов напряжения самоиндукции и взаимной индукции: вектор  $\underline{U}_{M1} = \underline{U}_M$  направлен встречно вектору  $\underline{U}_{L1}$ , а также  $\underline{U}_{M2} = \underline{U}_M$  встречно вектору  $\underline{U}_{L2}$ .

Из векторной диаграммы при встречном включении катушек (рис. 4.7) видно,

что, если например,  $L_1 < M$ , то  $\underline{U}_{L1}$  будет меньше  $\underline{U}_{M1}$  и  $\underline{U}_1$  будет отставать от тока  $\underline{I}$ , т. е. в цепи 1-й катушки будет наблюдаться своеобразный «ёмкостный» эффект. Иначе это явление в цепи с индуктивно связанными катушками называют *эффектом ложной ёмкости*. Однако в целом рассматриваемая цепь при встречном включении катушек всегда имеет *индуктивный* характер, так как  $L_\sigma = L_1 + L_2 - 2M > 0$  и напряжение  $\underline{U}$  опережает ток  $\underline{I}$ .

### 4.3. Параллельное соединение двух индуктивно связанных катушек

При параллельном согласном включении катушек (рис. 4.8, а) токи  $i_1$  и  $i_2$  направлены в обеих катушках от начала (•) к концу. При встречном включении катушек (рис. 4.8, б) ток в первой катушке направлен от начала (•) к концу, а во

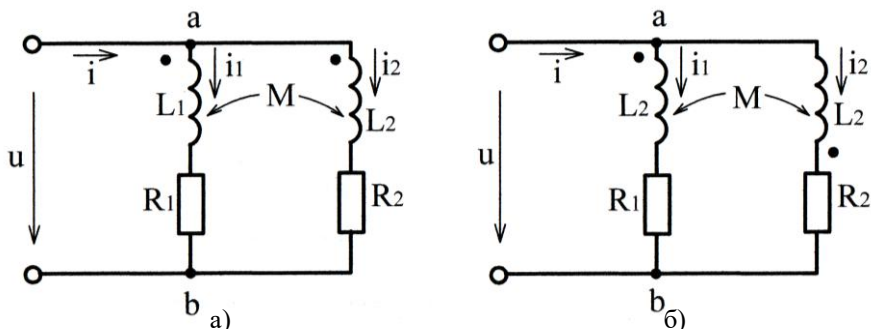


Рис. 4.8

второй катушке – от конца к началу (•). Поэтому в первом случае магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции совпадают по направлению, а во втором случае эти потоки направлены встречно.

Составим для обеих схем по законам Кирхгофа уравнения в дифференциальной форме:

$$i = i_1 + i_2 ; \quad (4.17)$$

$$u = u_{R1} + u_{L1} \pm u_{M1} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} ; \quad (4.18)$$

$$u = u_{R2} + u_{L2} \pm u_{M2} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} . \quad (4.19)$$

В уравнении (4.18) для напряжения  $u$  первой катушки напряжение взаимной индукции  $u_{M1} = M \frac{di_2}{dt}$  определяется производной от тока  $i_2$  второй катушки; в уравнении (4.19) для напряжения  $u$  второй катушки напряжение взаимной индукции  $u_{M2} = M \frac{di_1}{dt}$  определяется производной от тока  $i_1$  первой катушки. Знак «+» у напряжения взаимной индукции соответствует согласному включению катушек, а



знак « $\rightarrow$ » – встречному включению.

Запишем уравнения (4.17) – (4.19) в комплексном виде:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \quad (4.20)$$

$$\underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_M \underline{I}_2; \quad (4.21)$$

$$\underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \pm \underline{Z}_M \underline{I}_1. \quad (4.22)$$

Решая три уравнения (4.20) – (4.22) с тремя неизвестными  $\underline{I}$ ,  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ , получаем следующие выражения для комплексных токов:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad (4.23)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad (4.24)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}; \quad (4.25)$$

Из выражения (4.25) определим входное комплексное сопротивление цепи

(рис. 4.8): 
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}. \quad (4.26)$$

В выражениях (4.23) – (4.26) знак « $\rightarrow$ » соответствует согласному включению катушек, а знак « $\leftarrow$ » – встречному включению.

Если в выражении (4.26) приравнять нулю  $\underline{Z}_M$  (при отсутствии индуктивной связи между катушками), то получим известное выражение для параллельного соединения двух ветвей:

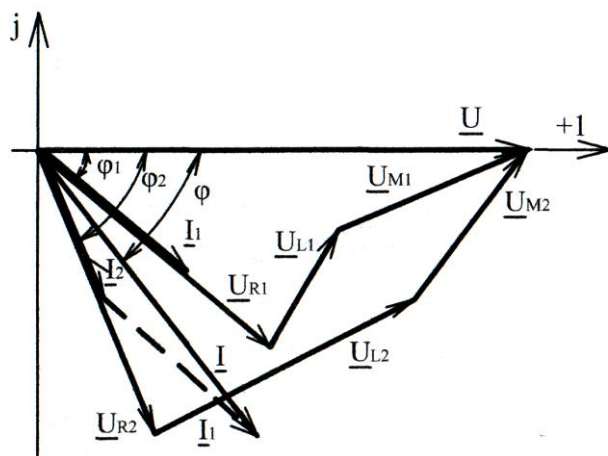
$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

На основании уравнений (4.20) – (4.22) построим векторные диаграммы для цепей с параллельным соединением двух индуктивно связанных катушек.

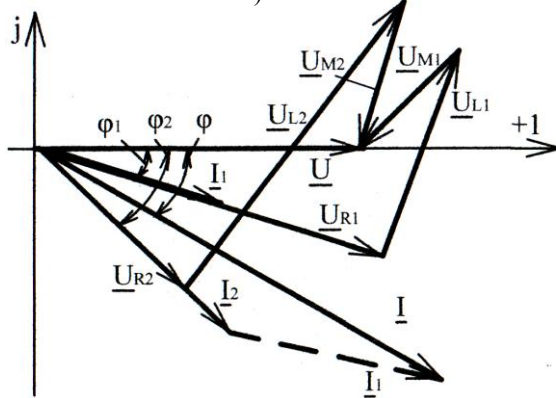
Построение векторной диаграммы для цепи (рис. 4.8, а) **при согласном включении катушек.**

В качестве исходного вектора принимаем вектор напряжения  $\underline{U}$ , так как напряжение на параллельных ветвях одинаковое. Этот вектор направляем по оси вещественных величин (рис. 4.9, а). Токи катушек  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$  отстают от напряжения на углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Ток в неразветвлённой части цепи  $\underline{I}$  в соответствии с уравнением (4.20) равен геометрической сумме токов  $\underline{I}_1$  и  $\underline{I}_2$ .

Составляющие напряжения  $\underline{U}$  для **первой катушки** определяем по уравнению (4.21), а именно: вектор активного напряжения  $\underline{U}_{R1} = R_1 \underline{I}_1$  совпадает по направлению с током  $\underline{I}_1$ ; вектор индуктивного напряжения  $\underline{U}_{L1} = j\omega L_1 \underline{I}_1$  опережает  $\underline{I}_1$



a)



б)

Рис. 4.9

на  $90^\circ$ ; вектор напряжения взаимной индукции  $\underline{U}_{M1} = j\omega M \underline{I}_2$ , обусловленный током второй катушки  $\underline{I}_2$  при согласном включении катушек опережает  $\underline{I}_2$  на  $90^\circ$ . Сумма трёх векторов  $\underline{U}_{R1}$ ,  $\underline{U}_{L1}$  и  $\underline{U}_{M1}$  равна вектору  $\underline{U}$ , поэтому конец вектора  $\underline{U}_{M1}$  совпадает с концом вектора  $\underline{U}$ .

Составляющие напряжения  $\underline{U}$  для **второй катушки** определяем по уравнению (4.22), а именно: вектор активного напряжения  $\underline{U}_{R2} = R_2 \underline{I}_2$  совпадает по направлению с током  $\underline{I}_2$ ; вектор индуктивного напряжения  $\underline{U}_{L2} = j\omega L_2 \underline{I}_2$  опережает  $\underline{I}_2$  на  $90^\circ$ ; вектор напряжения взаимной индукции  $\underline{U}_{M2} = j\omega M \underline{I}_1$ , обусловленный током первой катушки  $\underline{I}_1$  при согласном включении катушек

опережает  $I_1$  на  $90^\circ$ . Сумма векторов  $\underline{U}_{R2}$ ,  $\underline{U}_{L2}$  и  $\underline{U}_{M2}$  равна вектору  $\underline{U}$ .

Векторная диаграмма для цепи (рис. 4.8, б) **при встречном включении катушек** строится аналогично векторной диаграмме при согласном включении катушек. Отличаться она будет только тем, что на диаграмме (рис. 4.9, б) вектор напряжения взаимной индукции первой катушки  $\underline{U}_{M1} = -j\omega M I_2$  отстаёт на  $90^\circ$  от тока второй катушки  $I_2$ ; вектор напряжения взаимной индукции второй катушки  $\underline{U}_{M2} = -j\omega M I_1$  отстаёт на  $90^\circ$  от тока первой катушки  $I_1$ .

#### 4.4. Методы расчёта разветвлённых цепей при наличии взаимной индуктивности

Для расчёта таких цепей основными методами являются метод двух законов Кирхгофа и метод контурных токов в комплексной форме.

##### Метод двух законов Кирхгофа.

Составление уравнений в комплексной форме по законам Кирхгофа рассмотрено в главе 3. При наличии в цепи катушек с взаимной индуктивностью в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа, надо учесть напряжения взаимной индукции. Для определения знака напряжения взаимной индукции необходимо применить следующее правило:

*если направление обхода по данной катушке и направление тока в другой катушке, создающего напряжение взаимной индукции в данной катушке, одинаковое относительно одноименных зажимов этих катушек, то напряжение взаимной индукции данной катушки будет иметь знак «плюс». В противном случае напряжение взаимной индукции берётся со знаком «минус».*

Составим уравнения по законам Кирхгофа для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 4.10. В цепи имеются три индуктивно связанные катушки, индуктивности которых равны  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и взаимные индуктивности  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ . К цепи подключён источник синусоидальной ЭДС  $E$ .

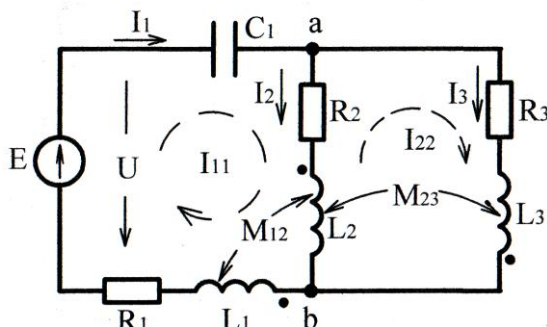


Рис. 4.10

Так как схема имеет два узла, по первому закону Кирхгофа составляем одно уравнение:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0; \quad (4.27)$$

По второму закону Кирхгофа составляем два уравнения (направление обхода по контурам на схеме обозначено пунктирными линиями).

Для левого контура:

$$\begin{aligned} \underline{E} = \left( -j \frac{1}{\omega C_1} \right) I_1 + R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + \underbrace{j\omega M_{12} I_1}_{\underline{U}_{M21}} - \underbrace{j\omega M_{23} I_3}_{\underline{U}_{M23}} + \\ + j\omega L_1 I_1 + R_1 I_1 + \underbrace{j\omega M_{12} I_2}_{\underline{U}_{M12}}; \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для правого контура:

$$R_3 I_3 + j\omega L_3 I_3 - \underbrace{j\omega M_{23} I_2}_{\underline{U}_{M32}} - j\omega L_2 I_2 + \underbrace{j\omega M_{23} I_3}_{\underline{U}_{M23}} - \underbrace{j\omega M_{12} I_1}_{\underline{U}_{M21}} - R_2 I_2 = 0; \quad (4.29)$$

В уравнении (4.28):

- напряжение взаимной индукции второй катушки  $\underline{U}_{M21} = j\omega M_{12} I_1$ , вызванное током первой катушки  $I_1$  взято со знаком «плюс» потому, что *направление обхода по второй катушке* (от начала к концу) *и направление тока в первой катушке* (от конца к началу) *одинаковое по отношению к одноимённым зажимам*;
- напряжение взаимной индукции второй катушки  $\underline{U}_{M23} = -j\omega M_{23} I_3$ , вызванное током третьей катушки  $I_3$  взято со знаком «минус» потому, что *направление обхода по второй катушке* (от начала к концу) *и направление тока в третьей катушке* (от конца к началу) *разное по отношению к одноимённым зажимам*.

Аналогично определён знак напряжений взаимной индукции  $\underline{U}_{M12}$ ,  $\underline{U}_{M32}$ ,

$\underline{U}_{M23}$ ,  $\underline{U}_{M21}$ .

### Метод контурных токов.

При составлении уравнений этим методом собственные сопротивления контуров и взаимные сопротивления смежных контуров должны учитывать сопротивления взаимной индукции.

Для схемы (рис. 4.10) уравнения контурных токов в общем виде запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} I_{11} + \underline{Z}_{12} I_{22} &= \underline{E}_{11}; \\ \underline{Z}_{21} I_{11} + \underline{Z}_{22} I_{22} &= \underline{E}_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

где собственные сопротивления контуров:

$$\underline{Z}_{11} = R_2 + j\omega L_2 + j2\omega M_{12} + R_1 + j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1};$$

$$\underline{Z}_{22} = R_3 + j\omega L_3 + j2\omega M_{23} + R_2 + j\omega L_2;$$

взаимные сопротивления смежных контуров:  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -R_2 - j\omega L_2 - j\omega M_{23};$

контурные ЭДС:

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}; \underline{E}_{22} = 0.$$

**Метод узловых потенциалов** непосредственно к расчёту цепей с взаимной индуктивностью непригоден. Объясняется это тем, что ток в любой ветви зависит не только от ЭДС, находящегося в ней источника и от потенциалов тех узлов, к которым ветвь присоединена, но и от токов других ветвей, которые наводят ЭДС взаимной индукции. Поэтому нельзя простым путём выразить токи ветвей через потенциалы узлов и ЭДС источников, как в цепях без индуктивно связанных элементов.

**Метод эквивалентного генератора** применим только в том случае, когда отсутствует индуктивная связь между ветвью, в которой рассчитывается ток, и ветвями активного двухполюсника.

Формулы, выведенные в главе 3 для преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и обратно, при наличии в цепи индуктивных связей непригодны.

#### 4.5. Трансформатор без стального сердечника (воздушный трансформатор)

В электротехнике широкое применение имеет трансформатор – аппарат, предназначенный для преобразования переменного напряжения. В простейшем случае он не имеет ферромагнитного сердечника и представляет собой две катушки с индуктивной связью (рис. 4.11). Такие трансформаторы применяются при высоких частотах, а в некоторых специальных измерительных устройствах и при низких частотах синусоидального тока.

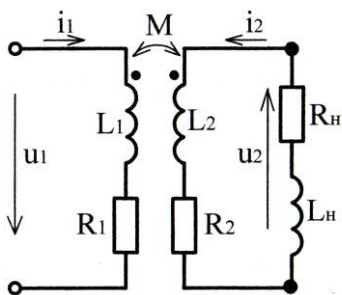


Рис. 4.11

Обмотка трансформатора с параметрами  $R_1$ ,  $L_1$ , к которой подключается источник питания, называется *первичной*; обмотка с параметрами  $R_2$ ,  $L_2$ , к которой присоединяется приёмник энергии (нагрузка) с параметрами  $R_{\text{н}}$ ,  $L_{\text{н}}$ , называется *вторичной*. Напряжения между зажимами обмоток и токи в этих обмотках называются соответственно *первичными*  $u_1$ ,  $i_1$  и *вторичными*  $u_2$ ,  $i_2$  напряжениями и токами трансформатора. Цепи, в состав которых входят *первичные* и *вторичные* обмотки трансформатора называются соответ-

ственно *первичными* и *вторичными цепями* трансформатора. Составим уравнения для мгновенных значений токов и напряжений по второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной цепей трансформатора (при указанных на рис. 4.11 одноименных зажимах и направлениях токов магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции имеют одинаковые направления и суммируются):

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \quad (4.31)$$

$$0=R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + u_2; \quad (4.32)$$

где  $u_2$  – вторичное напряжение трансформатора (напряжение на приёмнике).

Перейдём от уравнений в классической форме трансформатора (4.31), (4.32) к уравнениям в комплексной форме:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2, \quad (4.33)$$

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + jX_2 \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 + \underline{U}_2, \quad (4.34)$$

где  $X_1 = \omega L_1$ ,  $X_2 = \omega L_2$  – индуктивные сопротивления первичной и вторичной обмоток;  $X_M = \omega M$  – сопротивление взаимной индукции обмоток;

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_H \underline{I}_2 = (R_H + jX_H) \underline{I}_2; \quad X_H = \omega L_H.$$

Взаимная индуктивность  $M$ , входящая в уравнения (4.31) – (4.34), определяется из режима холостого хода трансформатора (при  $I_2 = 0$ ). Для холостого хода вторичное напряжение из уравнения (4.34):  $U_{2x} = X_M I_1 = \omega M I_1$ ,

откуда 
$$M = \frac{U_{2x}}{\omega I_1}. \quad (4.35)$$

Обозначим через  $R_{22} = R_2 + R_H$  и  $X_{22} = X_2 + X_H$ .

Решая уравнения (4.33) и (4.34) относительно тока  $\underline{I}_1$ , получаем:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{(R_1 + R_{вн}) + j(X_1 + X_{вн})}, \quad (4.36)$$

где 
$$R_{вн} = \frac{R_{22} X_M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}; \quad (4.37)$$

$$X_{вн} = -\frac{X_{22} X_M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}, \quad (4.38)$$

сопротивления  $R_{вн}$  и  $X_{вн}$  называют *вносимыми активным и реактивным сопротивлениями* (они вносятся магнитным полем из вторичной цепи трансформатора в первичную цепь).

Из структуры выражения (4.36) следует, что со стороны первичной цепи воздушного трансформатора вся схема может рассматриваться как двухполюсник с сопротивлениями  $R_{э1} = R_1 + R_{вн}$  и  $X_{э1} = X_1 + X_{вн}$ . Таким образом, наличие вторичной цепи эквивалентно изменению активного и реактивного сопротивлений двухполюсника на  $R_{вн}$  и  $X_{вн}$ . *Вносимое активное сопротивление всегда больше нуля. В нём поглощается энергия, которая передаётся из первичной цепи во вторичную посредством магнитного поля. Вносимое реактивное сопротивление имеет знак, противоположный знаку  $X_{22}$ .*

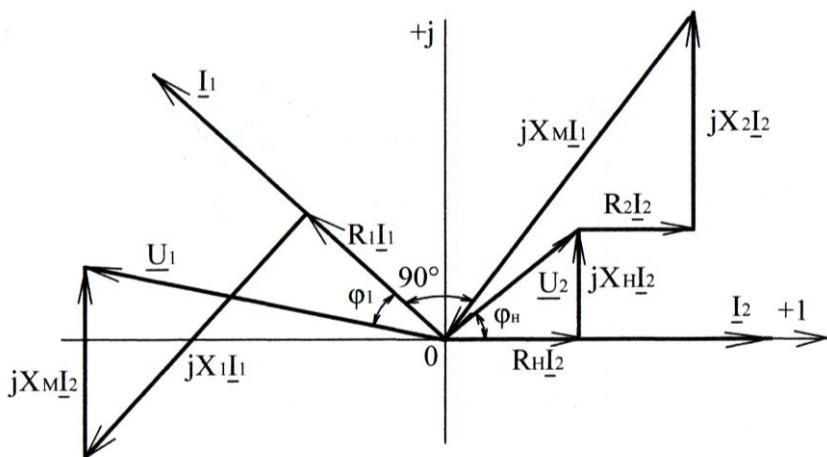


Рис. 4.12

На основании уравнений (4.33) и (4.34) построим векторную диаграмму воздушного трансформатора для индуктивного характера нагрузки (рис. 4.11).

За исходный вектор принимаем  $\underline{I}_2$ , который направляем по оси вещественных величин (рис. 4.12). Затем строим треугольник активного  $R_n \underline{I}_2$ , индуктивного  $jX_n \underline{I}_2$  и полного  $\underline{U}_2$  напряжений нагрузки. Из конца вектора  $\underline{U}_2$  откладываем векторы активного  $R_2$  и индуктивного  $jX_2 \underline{I}_2$  напряжений вторичной обмотки трансформатора. В соответствии с уравнением (4.34) сумма всех комплексных напряжений вторичной цепи равна нулю. Поэтому вектор напряжения взаимной индукции вторичной обмотки  $\underline{U}_{M2} = jX_M \underline{I}_1$  будет направлен в начало координат, т. е. образуется замкнутый многоугольник напряжений вторичной цепи. Далее, из начала координат под углом  $90^\circ$  к вектору  $\underline{U}_{M2}$  (вектор  $\underline{U}_{M2}$  при согласном включении катушек опережает вектор тока  $\underline{I}_1$  на угол  $90^\circ$ ) проводим вектор  $\underline{I}_1$ . Вектор активного напряжения первичной обмотки  $R_1 \underline{I}_1$  совпадает с вектором  $\underline{I}_1$ , а индуктивного напряжения  $jX_1 \underline{I}_1$  — опережает  $\underline{I}_1$  на  $90^\circ$ . Вектор напряжения взаимной индукции первичной обмотки  $\underline{U}_{M1} = jX_M \underline{I}_2$  опережает вектор вторичного тока  $\underline{I}_2$  на угол  $90^\circ$ . В соответствии с уравнением (4.33) вектор входного напряжения первичной цепи  $\underline{U}_1$  равен сумме трёх векторов составляющих напряжений.

Схема воздушного трансформатора (рис. 4.11), т. е. схема с индуктивной связью катушек может быть заменена эквивалентной схемой (рис. 4.13) без индуктивной связи.

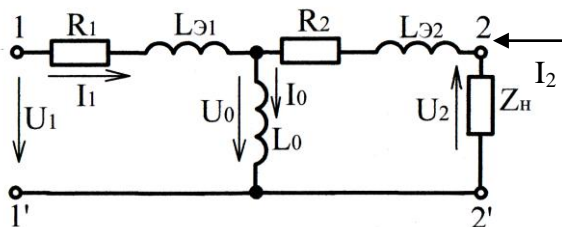


Рис. 4.13

Эквивалентные индуктивности схемы (рис. 4.13):

$$L_{Э1} = L_1 - M; \quad L_{Э2} = L_2 - M; \quad L_0 = M. \quad (4.39)$$

Для этой схемы, учитывая, что  $I_0 = I_1 + I_2$ , имеем следующие уравнения для двух контуров по второму закону Кирхгофа.

Для левого контура:

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega(L_1 - M)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_0 = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2;$$

или после сокращения, получим:  $\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + jX_{L1} \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2$ .

Для правого контура:  $R_2 \underline{I}_2 + j\omega(L_2 - M)\underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_0 + \underline{U}_2 = 0$ ;

раскроем скобку и заменим  $I_0$ :  $R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 + \underline{U}_2 = 0$ ;

после сокращения, получим:  $R_2 \underline{I}_2 + jX_{L2} \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 + \underline{U}_2 = 0$ .

Полученные уравнения для схемы (рис. 4.13) совпадают с уравнениями (4.33) и (4.34), следовательно, эта схема эквивалентна воздушному трансформатору.

Воздушный трансформатор называется *идеальным*, если при любых условиях отношение первичного  $\underline{U}_1$  и вторичного  $\underline{U}_2$  комплексных напряжений и отношение вторичного  $\underline{I}_2$  и первичного  $\underline{I}_1$  комплексных токов равны друг другу и

$$\text{равны постоянному комплексному числу } \underline{n}: \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \underline{n}. \quad (4.40)$$

Это комплексное число  $\underline{n}$  называется *коэффициентом трансформации* идеального трансформатора. Чтобы выполнить соотношения (4.40) необходимо выполнение следующих условий:

- 1) Активные сопротивления первичной и вторичной обмоток трансформатора должны быть равны нулю;
- 2) Коэффициент магнитной связи между обмотками должен быть равен единице ( $K_M = 1$ ).

**Пример 4.1.** Рассчитать воздушный трансформатор (рис.4.14) при частоте  $f = 50$  Гц, если заданы параметры катушек и нагрузки, а также ток вторичной цепи:  $R_1 = 8$  Ом;  $L_1 = 0,135$  Гн;

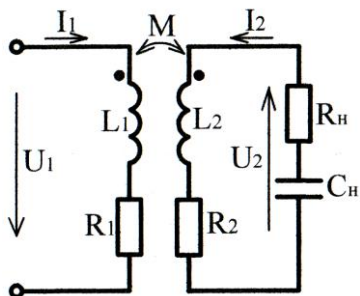


Рис. 4.14



$R_2=14,5 \text{ Ом}; L_2=0,418 \text{ Гн}; M=0,178 \text{ Гн}; R_H=25 \text{ Ом}; C_H=60 \text{ мкФ}; I_2=0,5 \text{ А}.$

Определить:

- 1) Коэффициент магнитной связи катушек;
- 2) Напряжение  $U_1$  и ток  $I_1$  первичной цепи, напряжение  $U_2$  вторичной цепи;
- 3) Вносимые активное и реактивное сопротивления;
- 4) Активные мощности первичной  $P_1$  и вторичной  $P_2$  обмоток и нагрузки  $P_H$ .

Активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности источника энергии.

Построить по результатам расчёта векторную диаграмму воздушного трансформатора.

**Решение:** Угловая частота переменного тока:  $\omega=2\pi f=2\cdot 3,14\cdot 50=314 \text{ с}^{-1}.$

Реактивные сопротивления обмоток и нагрузки:

$$X_1=\omega L_1=314\cdot 0,135=42,39 \text{ Ом}; X_2=\omega L_2=314\cdot 0,418=131,25 \text{ Ом};$$

$$X_M=\omega M=314\cdot 0,178=55,89 \text{ Ом}; X_H=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{314\cdot 60\cdot 10^{-6}}=53,08 \text{ Ом}.$$

Коэффициент магнитной связи катушек:

$$K_M=\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}=\frac{0,178}{\sqrt{0,135\cdot 0,418}}=\frac{0,178}{0,2375}=0,75.$$

Напряжение вторичной цепи:

$$\underline{U}_2=(R_H+jX_H)\underline{I}_2=(25-j53,08)\cdot 0,5=12,5-j26,54=29,34\ell^{-j64,78^\circ}, \text{ В}.$$

Из уравнения (4.34) определяем ток первичной цепи:

$$\begin{aligned} -jX_M \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 (R_2 + jX_2 + R_H + jX_H) = \underline{I}_2 (14,5 + j131,25 + 25 - j53,08) = \\ &= \underline{I}_2 (39,5 + j78,17) = \underline{I}_2 \cdot 87,58\ell^{j63,19^\circ}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_2 \cdot 87,58\ell^{j63,19^\circ}}{-jX_M} = \frac{0,5 \cdot 87,58\ell^{j63,19^\circ}}{55,89\ell^{-j90^\circ}} = 0,7835\ell^{j153,19^\circ}, \text{ А}.$$

Таким образом, ток первичной цепи  $I_1=0,7835 \text{ А}$ , а его начальная фаза  $\psi_{I1}=153,19^\circ$ .

Напряжение первичной цепи определяем из уравнения (4.33):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2 = (8 + j42,39)\underline{I}_1 + j55,89\underline{I}_2 = \\ &= 43,14\ell^{j79,31^\circ} \cdot 0,7835\ell^{j153,19^\circ} + j27,95 = \\ &= 33,8\ell^{j232,5^\circ} + j27,95 = -20,58 - j26,82 + j27,95 = \\ &= -20,58 + j1,13 = 20,61\ell^{j176,86^\circ}, \text{ В}. \end{aligned}$$

Следовательно, напряжение первичной цепи воздушного трансформатора

$U_1=20,61$  В, а его начальная фаза  $\psi_{u1}=176,86^\circ$ .

Вносимое активное сопротивление определяем по формуле (4.37):

$$R_{22}=R_2+R_H=14,5+25=39,5 \text{ Ом}; X_{22}=X_2+X_H=131,25-53,08=78,17 \text{ Ом},$$

здесь  $X_H$  взято со знаком «минус», так как оно является емкостным сопротивлением:

$$R_{вн}=\frac{R_{22}X_M^2}{R_{22}^2+X_{22}^2}=\frac{39,5\cdot55,89^2}{39,5^2+78,17^2}=\frac{123386}{7671}=16,08 \text{ Ом}.$$

Вносимое реактивное сопротивление определяем по формуле (4.38):

$$X_{вн}=-\frac{X_{22}X_M^2}{R_{22}^2+X_{22}^2}=-\frac{78,17\cdot55,89^2}{7671}=-\frac{244179}{7671}=-31,83 \text{ Ом}.$$

Для проверки определим первичный ток по формуле (4.36):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{(R_1+R_{вн})+j(X_1+X_{вн})} = \frac{20,61\ell^{j176,86^\circ}}{(8+16,08)+j(42,39-31,83)} = \\ &= \frac{20,61\ell^{j176,86^\circ}}{24,08+j10,56} = \frac{20,61\ell^{j176,86^\circ}}{26,29\ell^{j23,68^\circ}} = 0,7839\ell^{j153,18^\circ}, \text{ А.} \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение комплекса тока  $I_1$  с ранее вычисленным значением, видим, что модуль и аргумент комплекса практически совпали.

Потери активной мощности в первичной обмотке:  $P_1=I_1^2 R_1=0,7835^2 \cdot 8=4,911$  Вт;

Потери активной мощности во вторичной обмотке:  $P_2=I_2^2 R_2=0,5^2 \cdot 14,5=3,625$  Вт;

Активная мощность нагрузки:  $P_H=I_2^2 R_H=0,5^2 \cdot 25=6,25$  Вт.

Комплексная мощность источника энергии:

$$\underline{S}_1=\underline{U}_1 I_1^*=20,61\ell^{j176,86^\circ} \cdot 0,7835\ell^{-j153,19^\circ}=16,15\ell^{j23,67^\circ}=14,79+j6,48;$$

таким образом, активная мощность источника энергии  $P=14,79$  Вт, а **реактивная**  $Q=6,48$  вар.

Баланс активных мощностей для воздушного трансформатора:

$$P=P_1+P_2+P_H=4,911+3,625+6,25=14,786 \text{ Вт}.$$

Наличие баланса активных мощностей подтверждает правильность решения задачи. Для построения векторной диаграммы воздушного трансформатора вычислим составляющие напряжений вторичной и первичной цепей в комплексной форме:

$$\underline{U}_{R_H}=R_H I_2=25\cdot0,5=12,5 \text{ В}; \underline{U}_{X_H}=-jX_H I_2=-j53,08\cdot0,5=-j26,54=26,54\ell^{-j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{R2} = R_2 \underline{I}_2 = 14,5 \cdot 0,5 = 7,25 \text{ В}; \quad \underline{U}_{L2} = jX_2 \underline{I}_2 = j131,25 \cdot 0,5 = j65,63 = 65,63 \ell^{j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{M2} = jX_M \underline{I}_1 = 55,89 \ell^{j90^\circ} \cdot 0,7835 \ell^{j153,19^\circ} = 43,79 \ell^{j243,19^\circ}, \text{ В};$$

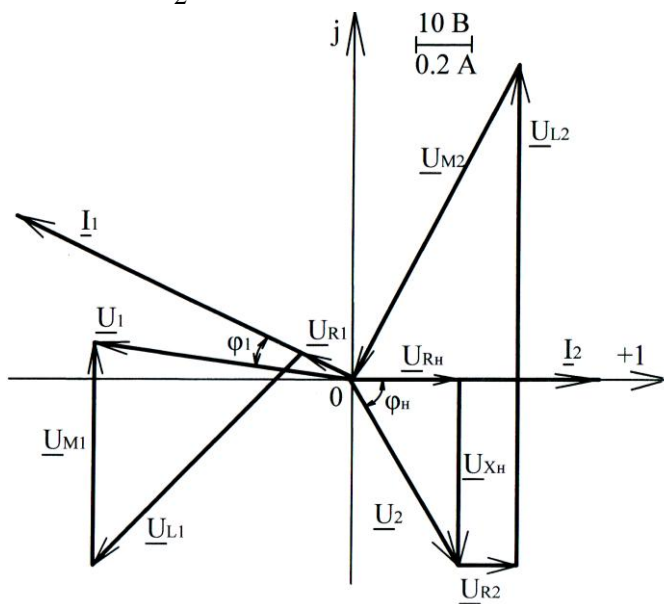
$$\underline{U}_{R1} = R_1 \underline{I}_1 = 8 \cdot 0,7835 \ell^{j153,19^\circ} = 6,268 \ell^{j153,19^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{L1} = jX_1 \underline{I}_1 = 42,39 \ell^{j90^\circ} \cdot 0,7835 \ell^{j153,19^\circ} = 33,21 \ell^{j243,19^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{M1} = jX_M \underline{I}_2 = 55,89 \ell^{j90^\circ} \cdot 0,5 = 27,95 \ell^{j90^\circ}, \text{ В}.$$

Вектор тока  $\underline{I}_2$  направляем по оси вещественных величин (рис. 4.15). Активное напряжение нагрузки  $\underline{U}_{RH}$  совпадает с  $\underline{I}_2$ , а емкостное напряжение нагрузки  $\underline{U}_{XH}$  отстаёт от  $\underline{I}_2$  на угол  $90^\circ$ .

Вектор вторичного напряжения трансформатора соединяет начало вектора  $\underline{U}_{RH}$  и конец вектора  $\underline{U}_{XH}$ . Из конца вектора  $\underline{U}_2$  проводим параллельно  $\underline{I}_2$  вектор активного напряжения вторичной обмотки  $\underline{U}_{R2}$ ; индуктивное напряжение  $\underline{U}_{L2}$  опережает  $\underline{I}_2$  на  $90^\circ$ . Многоугольник напряжений вторичной цепи замыкает вектор



напряжения взаимной индукции этой цепи  $\underline{U}_{M2}$ . Под углом  $90^\circ$  к вектору  $\underline{U}_{M2}$  в сторону отставания от него проводим вектор тока первичной цепи  $\underline{I}_1$ . Активное напряжение первичной обмотки  $\underline{U}_{R1}$  совпадает по фазе с  $\underline{I}_1$ , а индуктивное напряжение  $\underline{U}_{L1}$  опережает  $\underline{I}_1$  на  $90^\circ$ . Напряжение взаимной индукции первичной цепи  $\underline{U}_{M1}$  опережает вектор  $\underline{I}_2$  на  $90^\circ$ . Вектор напряжения первичной цепи  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{M1}$  опережает ток  $\underline{I}_1$  на угол  $\varphi_1$ .

Рис. 4.15

## ГЛАВА 5. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

### 5.1. Основные понятия о четырехполюсниках

Электрическая цепь, имеющая два входных и два выходных зажима, называется *четырёхполюсником*. К четырехполюсникам можно отнести двухпроводную линию электропередачи (рис. 5.1, а), однофазный трансформатор (рис. 5.1, б), схему

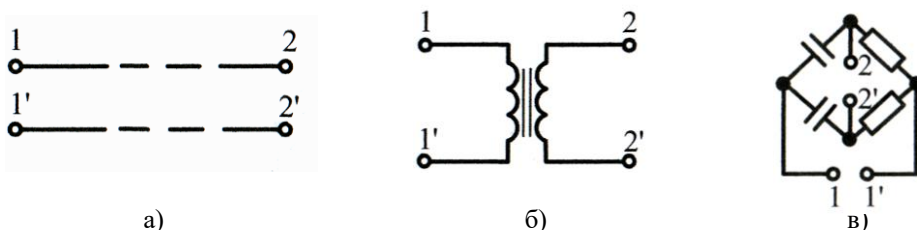


Рис. 5.1

одинарного моста переменного тока (рис. 5.1, в). Условное обозначение пассивного четырехполюсника, т. е. четырехполюсника, не содержащего источников ЭДС, показано на рис. 5.2. Пассивный четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания и нагрузкой.

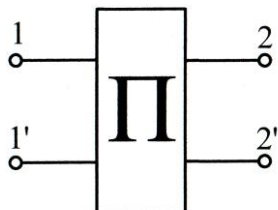


Рис. 5.2

Зажимы 1-1' являются входными; к ним, как правило, присоединяется источник питания. Зажимы 2-2' – выходные; к ним обычно присоединяется нагрузка.

При работе четырехполюсника в качестве связующего звена между источником и нагрузкой предполагается, что могут изменяться нагрузка четырехполюсника и напряжение на входе, но схема внутренних соединений четырехполюсника и значения сопротивлений в нем при постоянной частоте остаются

неизменными.

Входные комплексные ток и напряжение четырехполюсника обозначаются через  $\underline{I}_1$  и  $\underline{U}_1$ , а комплексные ток и напряжение на выходе – через  $\underline{I}_2$  и  $\underline{U}_2$ . Комплексное сопротивление нагрузки обозначается через  $\underline{Z}_2$  (рис. 5.3).

### 5.2. Уравнения пассивного четырехполюсника

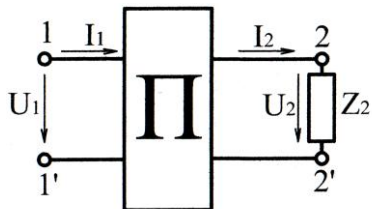


Рис. 5.3

Для любого пассивного линейного четырехполюсника (рис. 5.3) комплексные напряжения и ток на входе  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$  связаны с комплексными напряжением и током на выходе  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$  двумя уравнениями, которые называются *основными уравнениями четырехполюсника*:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

В этих уравнениях комплексные коэффициенты  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ , называемые *постоянными четырехполюсника*, зависят от схемы внутренних соединений четырехполюсника, от значений параметров схемы и от частоты. Для каждого четырехполюсника они могут быть определены расчетным или опытным путями.

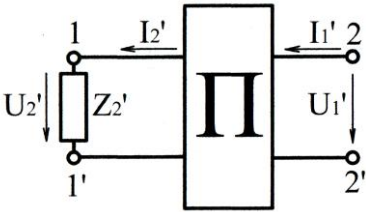


Рис. 5.4

Постоянные четырехполюсника связаны между собой соотношением:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1) справедливы для четырехполюсника, в котором источник питания включен к зажимам 1-1', а нагрузка – к зажимам 2-2' (рис. 5.3).

Если источник присоединить к зажимам 2-2', а нагрузку к зажимам 1-1' (рис. 5.4), уравнения получатся аналогичными уравнениям (5.1):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{A}' \cdot \underline{U}'_2 + \underline{B}' \cdot \underline{I}'_2; \\ \underline{I}'_1 &= \underline{C}' \cdot \underline{U}'_2 + \underline{D}' \cdot \underline{I}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

В результате расчета постоянных четырехполюсника (рис. 5.4)  $\underline{A}'$ ,  $\underline{B}'$ ,  $\underline{C}'$ ,  $\underline{D}'$ , получаем:

$$\underline{A}' = \underline{D}, \quad \underline{B}' = \underline{B}, \quad \underline{C}' = \underline{C}, \quad \underline{D}' = \underline{A}. \quad (5.4)$$

Следовательно, уравнения четырехполюсника, питаемого со стороны выходных зажимов 2-2', имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{D} \cdot \underline{U}'_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}'_2, \\ \underline{I}'_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}'_2 + \underline{A} \cdot \underline{I}'_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

т. е. их постоянные отличаются от уравнений (5.1) тем, что постоянные  $\underline{A}$  и  $\underline{D}$  поменялись местами.

Четырехполюсник называется *симметричным*, если при перемене местами источника питания и нагрузки, токи в источнике и нагрузке не изменяются, т. е. для симметричного четырехполюсника  $\underline{A} = \underline{D}$  и  $\underline{A}^2 - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$ .

Симметричный четырехполюсник со стороны выходных зажимов представляет ту же цепь, что и со стороны входных.

С помощью уравнений четырехполюсника (5.1) и (5.5) можно определить  $\underline{U}_1$  и  $\underline{I}_1$ , если заданы  $\underline{U}_2$  и  $\underline{I}_2$ ; очевидно, уравнения четырехполюсника могут быть использованы также для определения двух любых величин, если заданы две другие.

### 5.3. Определение постоянных четырехполюсника

Постоянные четырехполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  можно определить расчетным путем, если известна схема внутренних соединений четырехполюсника и ее параметры, либо путем использования входных сопротивлений четырехполюсника, полученных опытным или расчетным путями.

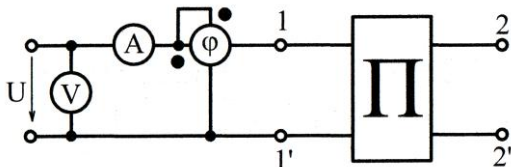


Рис. 5.5

Для определения комплексов входных сопротивлений четырехполюсника опытным путем применяется схема, изображенная на рис. 5.5.

На этой схеме со стороны источника питания четырехполюсника включаются измерительные приборы: вольтметр, амперметр и фазометр (или ваттметр). По показаниям приборов

$U$ ,  $I$ ,  $\varphi$  вычисляется комплекс входного сопротивления  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z \ell^{j\varphi}, \text{ где } z = \frac{U}{I}. \quad (5.6)$$

Для определения постоянных четырехполюсника проводят три опыта.

*Первый опыт.* Питание четырехполюсника осуществляют со стороны входных зажимов 1-1' при разомкнутой ветви 2-2' (режим холостого хода). По показаниям приборов определяют по формуле (5.6) комплекс входного сопротивления при холостом ходе четырехполюсника:  $\underline{Z}_{1x} = z_{1x} \ell^{j\varphi_{1x}}$ .

*Второй опыт.* Питание четырехполюсника осуществляют со стороны входных зажимов 1-1' при коротком замыкании (к. з.) ветви 2-2' (режим короткого замыкания). По показаниям приборов определяют комплекс входного сопротивления при к. з. четырехполюсника:  $\underline{Z}_{1k} = z_{1k} \ell^{j\varphi_{1k}}$ .

*Третий опыт.* Питание четырехполюсника осуществляют со стороны выходных зажимов 2-2' при коротком замыкании зажимов 1-1'. По показаниям приборов определяют комплекс входного сопротивления при к. з. четырехполюсника со стороны входных зажимов:  $\underline{Z}_{2k} = z_{2k} \ell^{j\varphi_{2k}}$ .

Выразим комплексы входных сопротивлений через постоянные четырехполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ .

В первом опыте при определении  $\underline{Z}_{1x}$  (5.7), ветвь 2-2' была разомкнута, поэтому  $I_2 = 0$ . Следовательно, из уравнений (5.1) получаем:

$$\underline{U}_{1x} = \underline{A} \cdot \underline{U}_{2x},$$

$$\underline{I}_{1x} = \underline{C} \cdot \underline{U}_{2x}.$$

$$\text{Отсюда входное сопротивление: } \underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}. \quad (5.10)$$

Во *втором опыте* ветвь 2-2' была замкнута накоротко, поэтому  $U_2=0$ ; из уравнений (5.1) имеем:

$$\underline{U}_{1K} = \underline{B} \cdot \underline{I}_{2K}, \quad \underline{I}_{1K} = \underline{D} \cdot \underline{I}_{2K}.$$

Из этих равенств получаем: 
$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{I}_{1K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}. \quad (5.11)$$

В *третьем опыте* при питании со стороны зажимов 2-2' и к. з. зажимов 1-1'  $U'_2=0$ , из уравнений (5.5) получаем:  $\underline{U}'_{1K} = \underline{B}' \cdot \underline{I}'_{2K}, \quad \underline{I}'_{1K} = \underline{A}' \cdot \underline{I}'_{2K}.$

Отсюда входное сопротивление: 
$$\underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{U}'_{1K}}{\underline{I}'_{1K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}. \quad (5.12)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  располагаем четырьмя уравнениями: (5.2), (5.10), (5.11), (5.12), решая которые,

получаем: 
$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x} \underline{Z}_{1K}}{\underline{Z}_{2K} (\underline{Z}_{1x} - \underline{Z}_{1K})}}; \quad (5.13)$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1x}}; \quad (5.14)$$

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{Z}_{2K}; \quad (5.15)$$

$$\underline{D} = \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_{1K}}. \quad (5.16)$$

#### 5.4. Схемы замещения пассивного четырехполюсника

Функции пассивного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой могут выполнять простейшие электрические схемы, называемые *схемами замещения*. Такими схемами являются трехлучевая звезда (Т-схема) или эквивалентный ей треугольник (Π-схема). Другими словами, любой линейный четырехполюсник при заданной частоте может быть заменен эквивалентной Т- или Π- схемой (рис. 5.6).

Три сопротивления Т- или Π-схем должны быть рассчитаны исходя из того, чтобы схема замещения обладала такими же постоянными  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ , какими обладает заменяемый ее четырехполюсник. Задача эта однозначна, так как схема

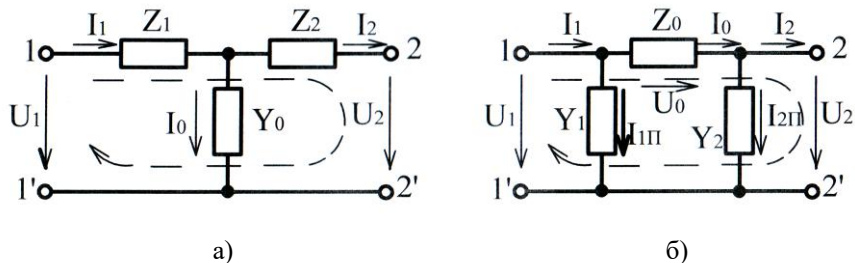


Рис. 5.6

замещения содержит три параметра, и четырехполюсник характеризуется тоже тремя независимыми параметрами (одна связь между постоянными  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  задана уравнением  $\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$ ).

Установим связь между параметрами этих схем и постоянными четырехполюсника.

Для *T-образной* схемы запишем уравнения по законам Кирхгофа и закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \quad \underline{I}_0 = \underline{Y}_0 \underline{U}_0; \quad \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 - \underline{U}_0 = 0;$$

откуда  $\underline{U}_0 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2; \quad \underline{I}_0 = \underline{Y}_0 (\underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2); \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{Y}_0 (\underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2);$

или 
$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \underline{Y}_0 + (1 + \underline{Y}_0 \underline{Z}_2) \underline{I}_2. \quad (5.17)$$

Для контура, обозначенного на схеме (рис. 5.6, а) пунктирной линией:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2,$$

подставив в это уравнение (5.17), получим:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \underline{Y}_0 \underline{Z}_1 + (\underline{Z}_1 + \underline{Y}_0 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2) \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2,$$

или 
$$\underline{U}_1 = (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0) \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \underline{I}_2. \quad (5.18)$$

Сравнивая полученные уравнения (5.17) и (5.18) для Т-схемы с уравнениями четырехполюсника (5.1) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0; \\ \underline{B} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; \\ \underline{C} &= \underline{Y}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Если заданы постоянные четырехполюсника, то из (5.19) нетрудно определить параметры Т-схемы:

$$\underline{Y}_0 = \underline{C}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{Y}_0} = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}. \quad (5.20)$$

Для *Π-образной* схемы определим постоянные  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ .

Составим уравнения для схемы (рис. 5, 6,б) по законам Кирхгофа:

для контура, обозначенного на схеме пунктирной линией:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = \underline{U}_2 + \underline{I}_0 \underline{Z}_0; \quad \underline{I}_0 = \underline{I}_2 + \underline{I}_2 \Pi = \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2; \quad \text{тогда} \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_0 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 \underline{U}_2,$$

или 
$$\underline{U}_1 = (1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2. \quad (5.21)$$

По первому закону Кирхгофа:  $\underline{I}_1 = \underline{I}_1 \Pi + \underline{I}_0 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2,$

подставив в это уравнение (5.21), получим:

$$\underline{I}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0 \underline{I}_2 + \underline{I}_2 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2, \text{ или}$$

$$\underline{I}_1 = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0) \underline{I}_2. \quad (5.22)$$

Сравнивая полученные уравнения (5.21) и (5.22) для Π-схемы с уравнениями четырехполюсника (5.1), имеем следующие выражения для постоянных эквивалентной схемы:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0. \quad (5.23)$$



Обратный переход от постоянных четырехполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  к параметрам П-схемы выполняется по следующим формулам:

$$\underline{Z}_0 = \underline{B}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{B}}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}}. \quad (5.24)$$

### 5.5. Передаточная функция пассивного четырехполюсника

*Передаточной функцией, коэффициентом передачи или амплитудно-фазовой характеристикой* четырехполюсника называется отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений электрических величин на выходе и входе четырехполюсника при заданном режиме передачи. Необходимо помнить, что именно *выходная электрическая величина делится на входную*, а не наоборот.

Коэффициент передачи по напряжению:  $\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad (5.25)$

и коэффициент передачи по току:  $\underline{K}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \quad (5.26)$

представляют собой безразмерные в общем случае комплексные величины, зависящие от частоты. Применительно к усилительным устройствам они носят название *коэффициентов усиления по напряжению и току*.

Отношения разноименных электрических величин – *передаточное сопротивление*:  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} = z \ell^{j\alpha} \quad (5.27)$

и *передаточная проводимость*:  $\underline{Y} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} = y \ell^{j\beta} - \quad (5.28)$

комплексные величины, зависящие от частоты.

*Модули* этих комплексных отношений  $z$  и  $y$  представляют собой *амплитудно-частотные*, а их *аргументы*  $\alpha$  и  $\beta$  – *фазо-частотные* характеристики чектырехполюсника.

Эти характеристики имеют важное значение для работы устройств автоматики и радиотехники.

**Пример 5.1.** Даны постоянные четырехполюсника (рис. 5.3):

$$\underline{A} = -1,6 + j0,4 = 1,649 \ell^{j166^\circ}; \quad \underline{B} = -24 - j3 = 24,19 \ell^{-j173^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{C} = j0,04 = 0,04 \ell^{j90^\circ} \text{ См}; \quad \underline{D} = -0,8 + j0,4 = 0,894 \ell^{j153,4^\circ}.$$

Определить параметры ветвей Т-схемы замещения (рис.5.6, а) четырехполюс-

ника при угловой частоте входного напряжения  $\omega=314 \frac{1}{\text{с}}$ .

**Решение:** По формулам (5.20) определяем параметры Т-схемы:

$$\underline{Y}_0 = \underline{C} = 0,04 \ell^{j90^\circ} \text{ См}; \quad \underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_0} = 25 \ell^{-90^\circ} \text{ Ом}; \quad X_0 = 25 \text{ Ом}, \quad \varphi_0 = -90^\circ,$$

ветвь содержит емкость  $C_0 = \frac{1}{\omega X_0} = \frac{1 \cdot 10^6}{314 \cdot 25} = 127,4 \text{ мкФ}$ .

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}} = \frac{-1,6+j0,4-1}{j0,04} = \frac{2,631 \ell^{j171,3^\circ}}{0,04 \ell^{j90^\circ}} = 65,78 \ell^{j81,25^\circ} = (10+j65) \text{ Ом};$$

$$Z_1 = 65,78 \text{ Ом}, \quad R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad X_1 = 65 \text{ Ом}, \quad \varphi_1 = 81,25^\circ \text{ (инд.)}; \quad L_1 = \frac{X_1}{\omega} = \frac{65}{314} = 0,207 \text{ Гн}.$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}} = \frac{-0,8+j0,4-1}{j0,04} = \frac{1,844 \ell^{167,5^\circ}}{0,04 \ell^{j90^\circ}} = 46,1 \ell^{j77,47^\circ} = (10+j45) \text{ Ом}; \quad Z_2 = 46,1 \text{ Ом},$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}, \quad X_2 = 45 \text{ Ом}, \quad \varphi_2 = 77,47^\circ \text{ (инд.)}; \quad L_2 = \frac{X_2}{\omega} = \frac{45}{314} = 0,1433 \text{ Гн}.$$

Т-схема замещения четырехполюсника (рис. 5.6, а) изображена на рис. 5.7.

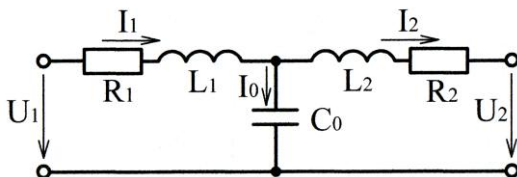


Рис. 5.7

**Пример 5.2.** Даны параметры П-схемы замещения (рис.5.8):  $X_1=10 \text{ Ом}$ ,  $R_2=10 \text{ Ом}$ ,  $R_0=5 \text{ Ом}$ ,  $X_0=5 \text{ Ом}$ . Определить постоянные 4х полюсника (рис.5.3).

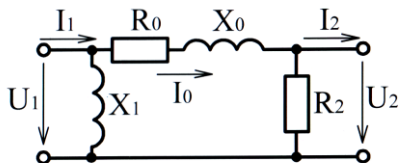


Рис. 5.8

**Решение:** Запишем сопротивления П-схемы замещения в комплексной форме:

$$\underline{Z}_1 = jX_1 = j10 = 10 \ell^{j90^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = R_2 = 10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 + jX_0 = 5 + j5 = 7,071 \ell^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Определим проводимости ветвей схемы:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{10 \ell^{j90^\circ}} = 0,1 \ell^{-j90^\circ} = -j0,1 \text{ См}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}.$$

По формулам (5.23) вычислим постоянные четырехполюсника:

$$\underline{A}=1+\underline{Y}_2\underline{Z}_0=1+0,1\cdot 7,071\ell^{j45^\circ}=1+0,5+j0,5=1,5+j0,5=1,581\ell^{j18,43^\circ};$$

$$\underline{B}=\underline{Z}_0=5+j5=7,071\ell^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{C}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_1\underline{Y}_2\underline{Z}_0=-j0,1+0,1-j0,01(5+j5)=$$

$$=-j0,1+0,1-j0,05+0,05=0,15-j0,15=0,212\ell^{-j45^\circ} \text{ См};$$

$$\underline{D}=1+\underline{Y}_1\underline{Z}_0=1+0,1\ell^{-j90^\circ}\cdot 7,071\ell^{j45^\circ}=1+0,7071\ell^{-j45^\circ}=$$

$$=1+0,5-j0,5=1,5-j0,5=1,581\ell^{-j18,43^\circ}.$$

Проверку выполним, используя соотношение (5.2):

$$\underline{A}\cdot\underline{D}=1,581\ell^{j18,43^\circ}\cdot 1,581\ell^{-j18,43^\circ}=2,5; \quad \underline{B}\cdot\underline{C}=7,071\ell^{j45^\circ}\cdot 0,212\ell^{-j45^\circ}=1,5;$$

$$\underline{A}\cdot\underline{D}-\underline{B}\cdot\underline{C}=2,5-1,5=1.$$

## ГЛАВА 6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 6.1. Понятия о многофазных источниках питания и о многофазных цепях

*Многофазной системой* называется совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные напряжения одной частоты, отличающиеся друг от друга по фазе.

Отдельные электрические цепи, образующие многофазную систему, называют *фазами*. Чаще всего применяют симметричные многофазные системы, напряжения которых равны по величине и сдвинуты по фазе на угол  $\frac{2\pi}{m}$ , где  $m$  – число фаз.

Наибольшее распространение в электротехнике имеет *трехфазная система*, разработанная русским ученым М.О. Доливо-Добровольским (1891 г.); он изобрел и разработал все звенья этой системы – генераторы, трансформаторы, линии передачи и двигатели трехфазного тока.

Простейший симметричный трехфазный генератор (рис. 6.1) состоит из трех одинаковых плоских катушек, называемых *фазами генератора*, вращающихся в однородном магнитном поле с равномерной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной к направлению линий магнитной индукции. В каждой фазе следует различать начало «н» и конец «к». Три фазы трехфазного генератора расположены под углом  $120^\circ$  друг к другу: первой или фазой А можно назвать любую из трех фаз, ее ачало  $H_A$ , конец  $K_A$ ; вторая фаза В, начало которой  $H_B$  сдвинуто в пространстве относительно начала первой фазы  $H_A$  на угол  $120^\circ$  против направления вращения катушек; третья фаза С, начало которой  $H_C$  сдвинуто относительно начала второй фазы  $H_B$  также на  $120^\circ$  в том же направлении. При вращении катушек в магнитном поле, в результате изменения их потокоцепления в них будет индуцироваться ЭДС. Период этих ЭДС  $T$  соответствует полному обороту катушек. Катушки одинаковы, поэтому максимальные (амплитуды) ЭДС отдельных фаз будут также одинаковы. Так как фазы сдвинуты друг относительно друга *в пространстве* на угол  $120^\circ$ , т. е. на  $1/3$  полного оборота, их ЭДС будут сдвинуты *во времени* на  $1/3$  периода, что соответствует фазному сдвигу, равному:

$$\frac{T}{3} \omega = \frac{T}{3} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}, \text{ т. е. } 120^\circ.$$

Если за начальный взять момент времени, когда плоскость первой катушки перпендикулярна линиям магнитной индукции, ЭДС катушек, отсчитываемых в одном направлении (например, от конца к началу) равны:

$$e_A = E_m \sin \omega t, \quad e_B = E_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right), \quad e_C = E_m \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right). \quad (6.1)$$

На основании выражений (6.1) для мгновенных значений ЭДС построим временную (волновую) диаграмму ЭДС (рис. 6.2).

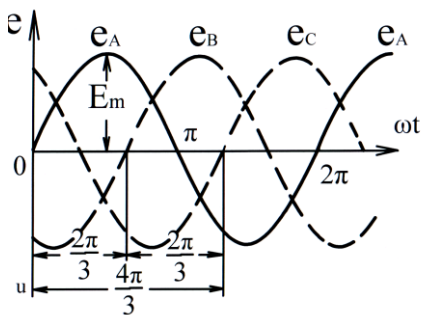


Рис. 6.2

Построим векторную диаграмму действующих значений ЭДС трехфазного генератора в координатах комплексной плоскости. ЭДС всех трех фаз по модулю одинаковы:  $E_A = E_B = E_C = E$ . Если вектор ЭДС фазы А направить по оси вещественных величин (рис. 6.3), то комплексы ЭДС симметричной системы будут иметь следующий вид:

$$\underline{E}_A = E_A = E;$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_B &= E \ell^{-j\frac{2\pi}{3}} = E \left( \cos \frac{2\pi}{3} - j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= E \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\underline{E}_C = E \ell^{-j\frac{4\pi}{3}} = E \ell^{j\frac{2\pi}{3}} = E \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Комплексный множитель:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \ell^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = \\ &= -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,5 + j0,87 \end{aligned} \quad (6.2)$$

является оператором поворота вектора на угол  $\frac{2\pi}{3}$  в положительном направлении (против направления вращения часовой

стрелки). Тогда:  $\underline{a}^2 = \ell^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\underline{a}^3 = \ell^{j\frac{6\pi}{3}} = \ell^{j2\pi} = 1$ ;  $(6.3)$

$$\underline{a}^4 = \underline{a}^3 \cdot \underline{a} = \underline{a}; \quad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 1 - \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

С учетом комплексного множителя  $\underline{a}$  симметричная система ЭДС запишется в виде:

$$\underline{E}_A = E; \quad \underline{E}_B = \underline{a}^2 E; \quad \underline{E}_C = \underline{a} E. \quad (6.4)$$

Просуммируем выражения (6.4), получим:  $\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0$ , т. е. сумма векторов трехфазной симметричной системы равна нулю. Это значит, что равна нулю в любой момент времени и сумма мгновенных значений ЭДС (рис. 6.2).

Если в цепь каждой фазы генератора включить одинаковые по величине и характеру сопротивления, то токи фаз будут равны по величине и сдвинуты по фазе относительно своих напряжений на один и тот же угол  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} i_A &= I_m \sin(\omega t - \varphi); \\ i_B &= I_m \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi); \\ i_C &= I_m \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Токи также образуют трехфазную *симметричную* систему векторов.

При неодинаковой нагрузке фаз максимальные значения токов  $I_{Am}$ ,  $I_{Bm}$ ,  $I_{Cm}$  и фазные сдвиги  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$  будут различны, и система токов будет *несимметричной*.

*Последовательность прохождения ЭДС (рис.6.2) или токов через одинаковые значения (например, нулевое значение) называется последовательностью фаз.*

*Совокупность трехфазной системы ЭДС, трехфазной нагрузки и соединительных проводов называется трехфазной цепью.*

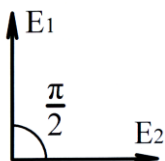


Рис. 6.4

В электротехнике применяется также двухфазная система (рис. 6.4.). Хотя ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  по величине равны, однако такая двухфазная система несимметрична, так как:

$$E_1 + E_2 \neq 0.$$

## 6.2. Основные схемы соединения трехфазных цепей

Обмотки генератора должны быть соединены с нагрузкой. Самым неэкономичным способом является соединение каждой обмотки генератора с нагрузкой двумя проводами (рис. 6.5). В этом случае в системе было бы шесть соединительных проводов. Для экономии числа соединительных проводов обмотки трехфазного генератора соединяют в звезду или в треугольник. При этом число соединительных проводов от генератора к нагрузке уменьшается с шести до трех или до четырех.

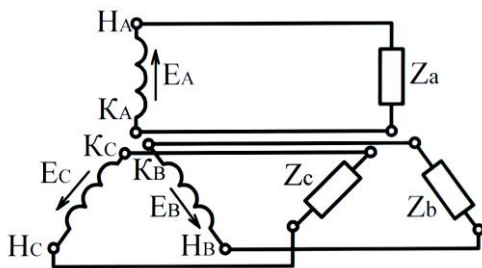


Рис. 6.5

При соединении обмоток генератора в звезду объединяются в одну точку одноименные зажимы (например, концы  $K_A$ ,  $K_B$ ,  $K_C$ ) трех обмоток (рис. 6.6, а). Ее принято называть *нулевой точкой* генератора и обозначают буквой  $N$ . Начало обмоток генератора принято обозначать буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . На векторной диаграмме ЭДС генератора образуют симметричную звезду (рис. 6.6, б).

При соединении обмоток генератора треугольником конец первой обмотки соединяется с началом второй, конец второй с началом третьей, конец третьей с началом первой (рис. 6.7, а). ЭДС обмоток генератора, соединенных треугольником,

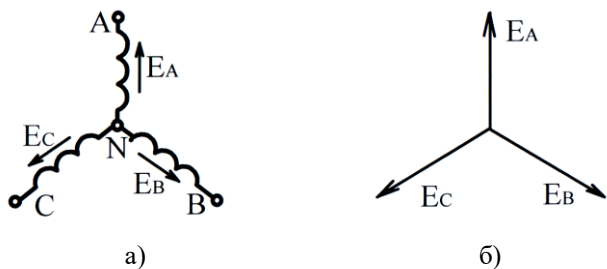


Рис. 6.6

на векторной диаграмме образуют замкнутый равносторонний треугольник (рис. 6.7, б) или симметричную звезду (рис. 6.7, в). В этом случае ЭДС обозначаются с двумя индексами:  $E_{AB}$ ,  $E_{BC}$ ,  $E_{CA}$ .

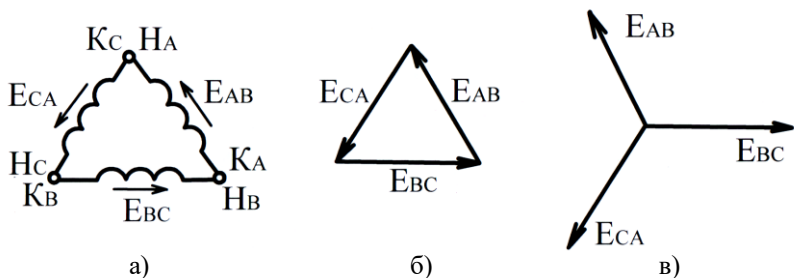


Рис. 6.7

Как видно из векторной диаграммы (рис. 6.7, б), геометрическая сумма ЭДС в замкнутом треугольнике генератора равна нулю. Поэтому, если к зажимам А, В, С генератора не присоединена нагрузка, то по его обмоткам не будет протекать ток.

Возможны различные способы соединения трехфазного генератора с трехфазной нагрузкой.

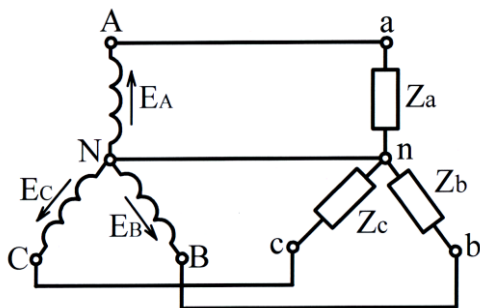


Рис. 6.8

При соединении генератора и приемника звездой возможны два варианта их соединения:

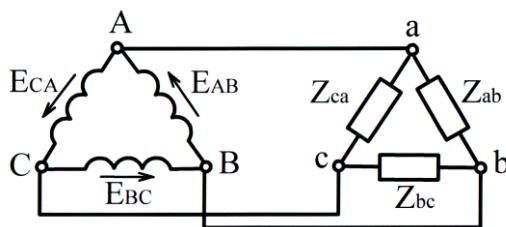


Рис. 6.9

а) с помощью трех проводов, когда соединены только начала фаз генератора и приемника, такая система называется *трехпроводной*; условное обозначение этой системы имеет вид:  $Y/Y$ .

б) с помощью четырех проводов: четвертый провод соединяет нулевую точку генератора  $N$  и нулевую точку приемника  $n$  (рис. 6.8); эта система называется *четырёхпроводной*, ее условное обозначение:  $Y/Y_N$ .

При соединении генератора и приемника треугольником возможна только трехпроводная система (рис. 6.9); ее условное обозначение:  $\Delta/\Delta$ .

Возможны также другие схемы соединения генератора и приемника, например:

- генератор соединен звездой, а приемник треугольником:  $Y/\Delta$ ;
- генератор соединен треугольником, а приемник звездой:  $\Delta/Y$ .

### 6.3. Уравновешенные и неуравновешенные многофазные системы

Многофазная система называется *уравновешенной*, если мгновенное значение ее мощности не зависит от времени.

Если мгновенное значение мощности многофазной системы изменяется с течением времени, то такая система называется *неуравновешенной*.

Для уравновешенной многофазной системы мгновенное значение мощности равно сумме средних за период значений мощностей отдельных фаз, т. е. среднему за период значению мощности всей системы или, иначе, равно активной мощности всей системы.

К *уравновешенным системам* относится трехфазная симметричная система (при симметричной системе напряжений и симметричной нагрузке) и двухфазная система, образуемая двумя равными ЭДС, сдвинутыми на угол  $\pi/2$  (рис. 6.4) при симметричной нагрузке.

К *неуравновешенным системам* относятся:

- 1) Однофазная система, мгновенное значение мощности которой колеблется во времени с угловой частотой  $2\omega$ ;
- 2) Симметричная двухфазная система (рис. 6.10) при симметричной нагрузке.



Рис. 6.10

- 3) Трехфазная система при симметричной системе напряжений и



несимметричной нагрузке. В этом случае мгновенное значение мощности зависит от времени и пульсирует с угловой частотой  $2\omega$ .

Неуравновешенность системы оказывает неблагоприятное влияние на работу генерирующих, передающих и преобразующих устройств, что бывает, в частности, при непосредственном присоединении мощных однофазных приемников к трехфазным сетям.

#### 6.4. Симметричный режим трехфазной цепи при соединении приемника звездой

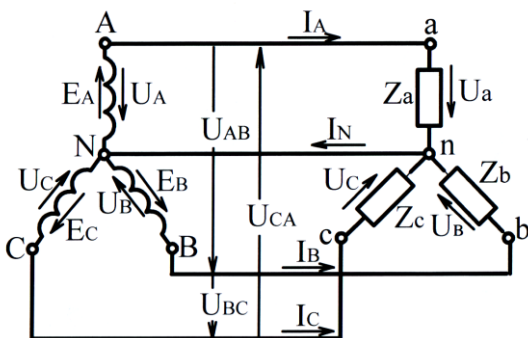


Рис. 6.11

Трехфазный приемник называется *симметричным*, если комплексные сопротивления всех фаз одинаковы. В противном случае он называется несимметричным.

Если к трехфазному симметричному приемнику подключить симметричную систему напряжений, то в цепи возникнет симметричная система токов. Режим трехфазной цепи, при котором трехфазные системы напряжений и токов симметричны, называется *симметричным режимом*.

На схеме трехфазной цепи при соединении приемника звездой (рис. 6.11) приняты следующие обозначения:

$U_A, U_B, U_C$  (с большими индексами) – фазные напряжения генератора (направлены встречно фазным ЭДС генератора);

$U_a, U_b, U_c$  (с малыми индексами) – фазные напряжения приемника (их направления совпадают с направлениями токов);

$U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$  – междуфазные (линейные) напряжения генератора (направлены, соответственно, от фазы А к фазе В; от В к С и от С к А);

$I_A, I_B, I_C$  – линейные (фазные) токи генератора и приемника (направлены от генератора к приемнику);

$I_N$  – ток в нулевом проводе (направлен от приемника к генератору).

Симметричная система фазных напряжений генератора в комплексной форме:

$$\underline{U}_A = U_\phi; \underline{U}_B = U_\phi e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \underline{U}_C = U_\phi e^{-j\frac{4\pi}{3}} = U_\phi e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (6.6)$$

Эта система напряжений на векторной диаграмме (рис. 6.12, а) образует симметричную трехлучевую звезду фазных напряжений.

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, создаваемого напряжениями  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_{AB}$  (рис. 6.11):  $\underline{U}_A - \underline{U}_B - \underline{U}_{AB} = 0$ , откуда

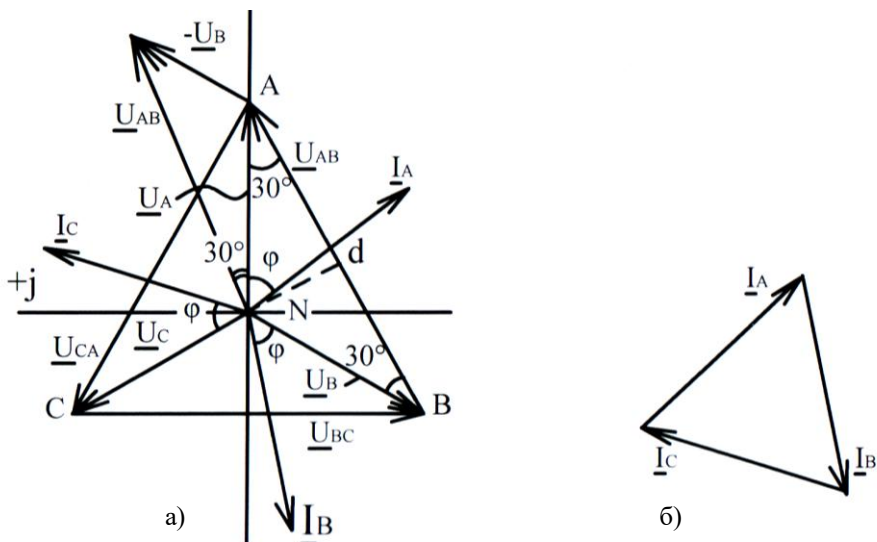


Рис. 6.12

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B, \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C, \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A, \quad (6.7)$$

т. е. *междуфазные (линейные) напряжения на векторной диаграмме (рис. 6.12, а) равны геометрической разности фазных напряжений*. Следовательно, для определения междуфазных напряжений на векторной диаграмме надо соединить концы векторов фазных напряжений, получим равносторонний треугольник линейных напряжений  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$ . Для подтверждения формул (6.7) на векторной диаграмме выполнена геометрическая операция: из конца вектора  $\underline{U}_A$  проведен вектор  $-\underline{U}_B$ ; соединив начало и конец этих двух векторов, получим вектор  $\underline{U}_{AB}$ .

Из соотношений (6.7) следует, что *геометрическая сумма линейных напряжений равна нулю*.

Определим линейное напряжение  $U_L$  через фазное напряжение  $U_\phi$ . Для этого, из точки  $N$  опустим перпендикуляр  $N_d$  на вектор линейного напряжения  $\underline{U}_{AB}$ , который разделит  $U_L$  на 2 равные части. Из прямоугольного треугольника  $dAN$  имеем:

$$\frac{1}{2}U_L = U_\phi \cos 30^\circ = U_\phi \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi. \quad (6.8)$$

Таким образом, *при симметричной системе напряжений линейное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного и опережает его на угол  $30^\circ$* .

Если пренебречь сопротивлениями линейных проводов и нулевого провода, то фазные и линейные напряжения приемника будут равны соответствующим напряжениям генератора.

Так как линейные провода соединены последовательно с фазами генератора и приемника при соединении их звездой, линейные токи  $I_L$  равны фазным токам  $I_\phi$ :

$$I_L = I_\phi. \quad (6.9)$$

Для симметричного приемника, соединенного звездой, справедливо равенство:

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = z_\ell^{j\varphi}. \quad (6.10)$$

Тогда токи в фазах приемника (они же линейные токи):

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \underline{I}_A; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \underline{I}_B; \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \underline{I}_C, \quad (6.11)$$

где

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B; \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C.$$

На векторной диаграмме (рис. 6.12, а) при индуктивном характере нагрузки токи  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$  отстают от соответствующих фазных напряжений на угол  $\varphi$ . Ток в нулевом проводе по первому закону Кирхгофа для схемы (рис. 6.11):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (6.12)$$

На векторной диаграмме геометрическая сумма токов равна нулю (рис. 6.12, б).

Таким образом, *при симметричной системе фазных напряжений генератора и симметричном приемнике система фазных токов будет симметричной и ток в нулевом проводе будет равен нулю независимо от величины сопротивления этого провода*. Поэтому при симметричном режиме нулевой провод может быть изъят из схемы цепи без изменения режима ее работы.

### **Активная, реактивная и полная мощность трехфазной цепи.**

*Активная мощность* трехфазной цепи равна сумме активных мощностей отдельных фаз:

$$P = P_a + P_b + P_c. \quad (6.11)$$

*Реактивная мощность* трехфазной цепи равна алгебраической сумме реактивных мощностей фаз (индуктивные мощности берутся со знаком «плюс», емкостные – со знаком «минус»):  $Q = Q_a + Q_b + Q_c$ .

$$(6.12)$$

*Полная мощность* трехфазной цепи определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника мощностей:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

$$(6.13)$$

*Комплексная мощность* трехфазной цепи равна сумме комплексных мощностей

$$\text{отдельных фаз:} \quad \underline{S} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \overset{*}{\underline{U}_a} \overset{*}{\underline{I}_a} + \overset{*}{\underline{U}_b} \overset{*}{\underline{I}_b} + \overset{*}{\underline{U}_c} \overset{*}{\underline{I}_c} = P + jQ. \quad (6.14)$$

При *симметричном режиме* трехфазной цепи активные, реактивные и полные мощности фаз приемника одинаковы:  $P_a = P_b = P_c = U_\phi I_\phi \cos \varphi$ ,

$$\left. \begin{aligned} Q_a &= Q_b = Q_c = U_\phi I_\phi \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

где  $\varphi$  - угол между фазным напряжением приемника  $U_\phi$  и фазным током  $I_\phi$ .

$$\text{Следовательно, активная мощность цепи: } P=3U_{\phi}I_{\phi}\cos\varphi, \quad (6.16)$$

а так как при соединении приемника звездой:  $U_{\phi}=\frac{U_L}{\sqrt{3}}$ ,  $I_{\phi}=I_L$ , то

$$P=3\frac{U_L}{\sqrt{3}}I_L\cos\varphi=\sqrt{3}U_LI_L\cos\varphi. \quad (6.17)$$

Аналогично определяем реактивную мощность:

$$Q=3U_{\phi}I_{\phi}\sin\varphi=\sqrt{3}U_LI_L\sin\varphi. \quad (6.18)$$

Полная мощность цепи:

$$S=3U_{\phi}I_{\phi}=\sqrt{3}U_LI_L. \quad (6.19)$$

## 6.5. Несимметричный режим трехфазной цепи при соединении приемника звездой

### 6.5.1. Общие сведения о режимах цепи.

В общем случае несимметричный режим трехфазной цепи возникает при несимметричной системе напряжений генератора и несимметричном приемнике. В частном случае несимметричный режим возможен:

а) при симметричной системе напряжений генератора и несимметричном приемнике;

б) при симметричном приемнике и несимметричной системе напряжений генератора.

Режим работы трехфазной цепи при соединении приемника звездой зависит не только от вида несимметрии, но и от наличия или отсутствия в цепи нулевого провода и величины его сопротивления.

Рассмотрим наиболее характерные несимметричные режимы работы такой цепи.

### 6.5.2. Трехфазная цепь с нулевым проводом, сопротивление которого $Z_N=0$ .

Если трехфазная цепь (рис. 6.11) имеет нулевой провод, сопротивление которого равно нулю, то фазные напряжения приемника равны соответствующим фазным напряжениям генератора:  $\underline{U}_a=\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_b=\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_c=\underline{U}_C$ .

Линейные напряжения приемника в этом случае определяются по формулам (6.7), а фазные (линейные) токи – по формулам (6.11). Ток в нулевом проводе не равен нулю:

$$\underline{I}_N=\underline{I}_A+\underline{I}_B+\underline{I}_C.$$

*Наличие в трехфазной цепи нулевого провода с малым сопротивлением обеспечивает независимую работу отдельных фаз приемника, т. е. при различных значениях сопротивления в фазах трехфазного приемника, соединенного звездой, напряжения на всех фазах будут одинаковыми, если генератор создает симметричную систему фазных напряжений. Этот режим широко применяется на практике при электроснабжении однофазных электроприемников (например, электроосветительных приборов).*

Активная и реактивная мощности трехфазного приемника определяются по формулам:

$$P = P_a + P_b + P_c = U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c, \quad (6.20)$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c, \quad (6.21)$$

Полная мощность вычисляется по формуле (6.13), а комплексная мощность – по формуле (6.14).

Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений в частном случае при симметричной системе напряжений генератора и несимметричном приемнике не отличаются от векторной диаграммы, построенной на рис. 6.12, а. Векторы токов на диаграмме будут иметь разную длину и сдвинуты по фазе на разные углы.

### 6.5.3. Трехфазная цепь с нулевым проводом, сопротивление которого $Z_N \neq 0$ .

При несимметричном режиме цепи трехфазная система токов  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  будет несимметричной и по нулевому проводу будет протекать ток  $\underline{I}_N$ . Поэтому между нулевыми точками генератора  $N$  и приемника  $n$  появится напряжение, называемое *узловым напряжением*  $\underline{U}_N$ .

#### Вывод формулы для узлового напряжения.

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для контура (рис. 6.13), обозначенного на схеме пунктирной линией:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_a + \underline{U}_N - \underline{U}_A &= 0, \text{ откуда} \\ \underline{U}_a &= \underline{U}_A - \underline{U}_N; \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_B - \underline{U}_N; \\ \underline{U}_c &= \underline{U}_C - \underline{U}_N. \end{aligned} \right\} \quad \text{аналогично} \quad (6.22)$$

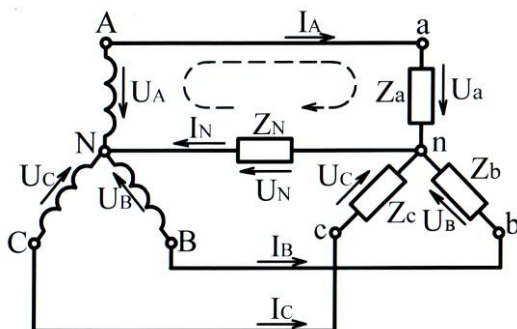


Рис. 6.13

Токи в фазах приемника и нулевом проводе:

$$\underline{I}_a = \underline{U}_a \underline{Y}_a = \underline{I}_A; \underline{I}_b = \underline{U}_b \underline{Y}_b = \underline{I}_B; \underline{I}_c = \underline{U}_c \underline{Y}_c = \underline{I}_C; \underline{I}_N = \underline{U}_N \underline{Y}_N. \quad (6.23)$$

$$\text{Уравнение по первому закону Кирхгофа для узла } n: \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \underline{I}_N. \quad (6.24)$$

Фазные токи (6.23) приемника (линии) выразим через фазные напряжения приемника (6.22) и подставим их в уравнение (6.24):

$$(\underline{U}_A - \underline{U}_N) \underline{Y}_a + (\underline{U}_B - \underline{U}_N) \underline{Y}_b + (\underline{U}_C - \underline{U}_N) \underline{Y}_c = \underline{U}_N \underline{Y}_N; \text{ или}$$

$$\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c = \underline{U}_N (\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N), \text{ откуда}$$

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_N}. \quad (6.25)$$

**Порядок расчета** трехфазной цепи при соединении несимметричного приемника звездой с нулевым проводом, сопротивление которого не равно нулю.

1. По заданным фазным напряжениям генератора  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  и сопротивлениям (проводимостям) отдельных фаз приемника  $\underline{Y}_a, \underline{Y}_b, \underline{Y}_c$  и нулевого провода  $\underline{Y}_N$  вычисляется *узловое напряжение* (напряжение между узловыми точками генератора  $N$  и приемника  $n$ )  $\underline{U}_N$  по формуле (6.25).

2. По формулам (6.22) определяются *фазные напряжения трехфазного приемника*.

3. По формулам (6.23) и (6.24) вычисляются *фазные (линейные) токи приемника и ток в нулевом проводе*.

4. Определяются классическим методом активная и реактивная мощности по формулам (6.20) и (6.21) и полная мощность по формуле (6.13) или символическим методом по формуле (6.14).

По результатам расчета строится векторная диаграмма в координатах комплексной плоскости. Векторную диаграмму построим для частного случая, когда система напряжений генератора симметрична, а приемник несимметричный.

Векторная диаграмма фазных  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  и линейных  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$  напряжений генератора строится так же, как на рис. 6.12,а. Возникновение узлового

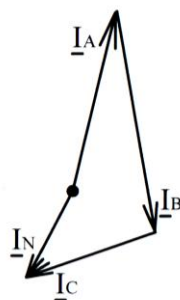
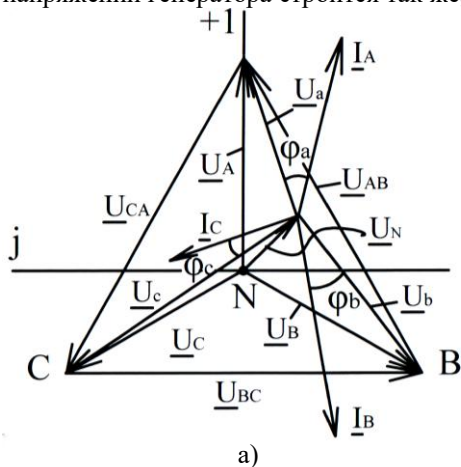


Рис. 6.14

напряжения  $\underline{U}_N$  вызывает на векторной диаграмме (рис. 6.14, а) смещение точки  $n$  относительно точки  $N$ . Направление смещения точки  $n$  зависит от характера нагрузки трехфазной цепи и в общем случае может выйти за пределы треугольника линейных напряжений.

Отложив из точки  $N$  вектор узлового напряжения  $\underline{U}_N$ , найдем положение точки  $n$  (конец вектора  $\underline{U}_N$ ). Соединив точку  $n$  с вершинами треугольника линейных напряжений, найдем положение векторов фазных напряжений приемника  $\underline{U}_a$ ,  $\underline{U}_b$ ,  $\underline{U}_c$ . По отношению к этим напряжениям под углами  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$  проводим векторы токов  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$ . Просуммировав эти три вектора, получим вектор тока в нулевом проводе  $\underline{I}_N$  (рис. 6.14, б).

#### 6.5.4. Трехфазная цепь без нулевого провода.

Это частный случай трехфазной цепи с нулевым проводом, сопротивление которого не равно нулю. При отсутствии в цепи нулевого провода  $Z_N = \infty$ , а  $\underline{Y}_N = 0$ . Узловое напряжение в этом частном случае будет определяться по формуле:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}. \quad (6.26)$$

Расчет цепи выполняется в том же порядке, что и в п. 6.5.3. Проверка правильности расчета производится по уравнению:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

Векторная диаграмма строится так же как диаграмма на рис. 6.14, а.

#### 6.5.5. Трехфазная цепь без нулевого провода при обрыве фазы приемника.

Этот режим возникает при полной разгрузке одной из фаз трехфазного приемника. Рассмотрим частный случай, когда система напряжений генератора симметрична при разгрузке фазы  $a$  и одинаковой нагрузке двух других фаз:  $Z_a = \infty$ ,  $\underline{Y}_a = 0$ ,  $\underline{Y}_b = \underline{Y}_c = \underline{Y}$ . Подставив эти значения проводимостей в формулу (6.26),

$$\text{получим: } \underline{U}_N = \frac{\underline{Y}(\underline{U}_B + \underline{U}_C)}{2\underline{Y}} = \frac{\underline{U}_B + \underline{U}_C}{2}.$$

Просуммировав на векторной диаграмме (рис. 6.15) векторы фазных напряжений генератора  $\underline{U}_B$  и  $\underline{U}_C$  и взяв  $1/2$  суммарного вектора, получим:

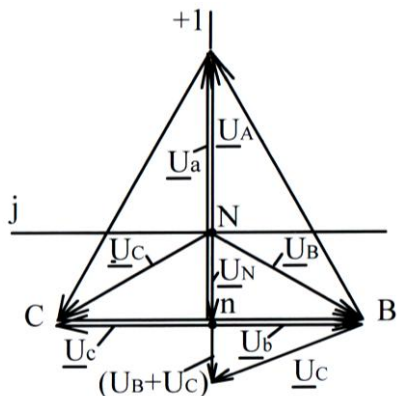


Рис. 6.15

$U_N = 0,5U_\phi$ . При этом, напряжение на разгруженной фазе возрастает до  $1,5U_\phi$ , а на двух других фазах – уменьшается до  $0,5U_\phi$ :  $U_b = U_c = \frac{1}{2}U_{BC}$ .

### 6.5.6. Трехфазная цепь без нулевого провода при коротком замыкании фазы приемника.

Рассмотрим частичный случай, когда система напряжений генератора симметрична при коротком замыкании (к.з.) фазы  $a$  приемника и одинаковых сопротивлениях двух других фаз:  $Z_a = 0$ ,  $Y_a = \infty$ ;  $Y_b = Y_c$ . Определим для этого

случая узловое напряжение: 
$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Для раскрытия неопределенности  $\underline{U}_N$  разделим числитель и знаменатель дроби

на проводимость к.з. фазы, т. е. на  $\underline{Y}_a$ : 
$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A + \underline{U}_B \frac{\underline{Y}_b}{\underline{Y}_a} + \underline{U}_C \frac{\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a}}{1 + \frac{\underline{Y}_b}{\underline{Y}_a} + \frac{\underline{Y}_c}{\underline{Y}_a}} = \underline{U}_A.$$

Следовательно, узловое напряжение равно фазному напряжению генератора к.з. фазы. Тогда фазные напряжения приемника находятся по формулам (6.22):

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N = \underline{U}_A - \underline{U}_A = 0; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N = \underline{U}_B - \underline{U}_A = \underline{U}_{BA} = -\underline{U}_{AB};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = \underline{U}_C - \underline{U}_A = \underline{U}_{CA}.$$

Таким образом, при к.з. одной фазы трехфазного приемника, напряжение на этой фазе равно нулю, а на двух других возрастает до линейного напряжения.

Фазные токи приемника:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = -\frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_b}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_c};$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{0}{0}, \text{ неопределенность!}$$

Чтобы раскрыть неопределенность тока  $\underline{I}_A$  используем уравнение по первому закону Кирхгофа  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ , откуда  $\underline{I}_A = -\underline{I}_B - \underline{I}_C$ . Векторная диаграмма для этого режима построена на рис. 6.16.

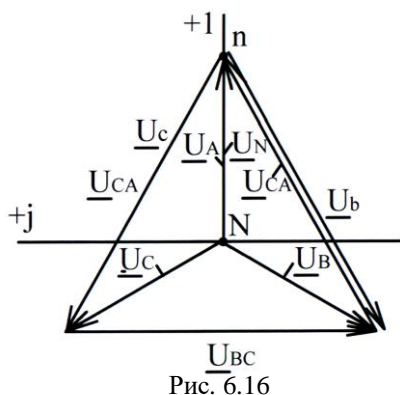


Рис. 6.16



## 6.6. Электрическая цепь при соединении трехфазного приемника треугольником

### 6.6.1. Симметричный режим.

При соединении генератора и приемника треугольником фазные напряжения генератора и приемника одновременно являются и линейными (междуфазными) напряжениями, т.е.  $U_{\phi} = U_L$  (рис.6.17). Линейные же токи  $I_A, I_B, I_C$  отличны от фазных  $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$ .

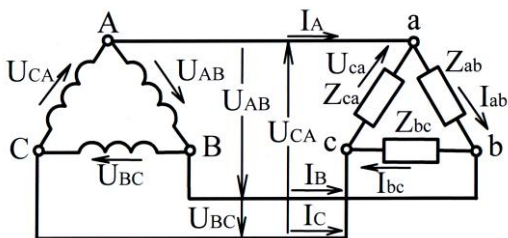


Рис. 6.17

Для получения симметричных соотношений между линейными и фазными токами следует выбрать их направления единообразно. Для всех линейных токов обычно выбирается направление от генератора к приемнику, для фазных – по направлению обхода контура, например, по часовой стрелке.

Токи в фазах приемника определяются фазными (линейными) напряжениями и сопротивлениями фаз приемника:

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}}; I_{bc} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}}; I_{ca} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}}, \quad (6.27)$$

где фазные напряжения приемника  $U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}$  равны соответствующим линейным (фазным) напряжениям генератора  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$ .

Тогда по первому закону Кирхгофа для узлов  $a, b, c$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_A &= I_{ab} - I_{ca}; \\ I_B &= I_{bc} - I_{ab}; \\ I_C &= I_{ca} - I_{bc}. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Из полученных соотношений (6.28) видно, что сумма линейных токов равна нулю:

$$I_A + I_B + I_C = 0. \quad (6.29)$$

Приведенные формулы для фазных (6.27) и линейных (6.28) токов применимы как для симметричного, так и для несимметричного режимов.

При соединении приемника треугольником симметричный режим будет при симметричной системе напряжений генератора:

$$U_{AB} = U_{\phi}; \quad U_{BC} = U_{\phi} e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad U_{CA} = U_{\phi} e^{-j\frac{4\pi}{3}},$$

и симметричном приемнике:  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca}$ .

В этом случае системы фазных (6.27) и линейных (6.28) токов будут также

симметричными.

На векторной диаграмме (рис. 6.18) для схемы (рис. 6.17) симметричную систему напряжений приемника  $\underline{U}_{ab}$ ,  $\underline{U}_{bc}$ ,  $\underline{U}_{ca}$  для удобства построения диаграммы изображают в виде симметричной звезды. При индуктивном характере

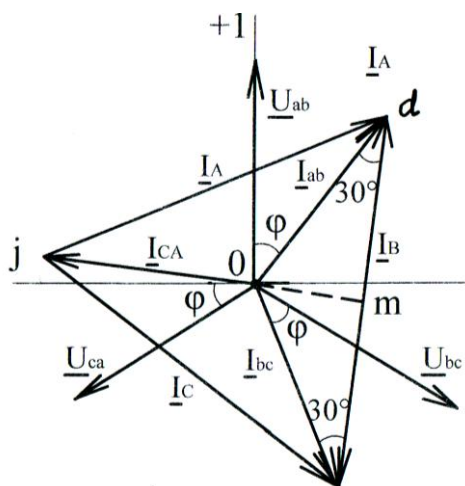


Рис. 6.18

нагрузки фазные токи  $\underline{I}_{ab}$ ,  $\underline{I}_{bc}$ ,  $\underline{I}_{ca}$  отстают от соответствующих напряжений на угол  $\varphi$ .

Линейные токи  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{I}_C$  в соответствии с уравнениями (6.28) образуют равносторонний треугольник. Из прямоугольного треугольника *mod* векторной диаграммы имеем:

$$\frac{I_L}{2} = I_\phi \cos 30^\circ \text{ или}$$

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi. \quad (6.30)$$

Таким образом, при соединении приемника *треугольником* в симметричном режиме линейные токи в  $\sqrt{3}$  раз больше фазных.

### Мощности трехфазной цепи при соединении приемника треугольником.

Активная мощность равна сумме активных мощностей отдельных фаз приемника:

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca}. \quad (6.31)$$

Реактивная мощность равна алгебраической сумме реактивных мощностей отдельных фаз:

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca}. \quad (6.32)$$

Полная мощность определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Комплексная мощность цепи равна сумме комплексных мощностей фаз приемника:

$$\underline{S} = \underline{S}_{ab} + \underline{S}_{bc} + \underline{S}_{ca} = P + jQ. \quad (6.33)$$

Полученные выражения для мощностей (6.31) - (6.33) справедливы как для симметричного, так и несимметричного режимов.

Определим указанные мощности через напряжения и токи приемника для *симметричного режима*.

Активные мощности отдельных фаз приемника:  $P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = P_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi$ , тогда, в соответствии с выражением (6.31), получим:  $P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi$ ,

или с учетом соотношений  $U_L = U_\phi$ ,  $I_L = \sqrt{3} I_\phi$ , имеем:

$$P=3U_{\text{л}} \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos\varphi .$$

Реактивные мощности отдельных фаз приемника  
 $Q_{ab}=Q_{bc}=Q_{ca}=Q_{\phi}=U_{\phi} I_{\phi} \sin\varphi$ , тогда на основании (6.32) имеем:

$$Q=3Q_{\phi}=3U_{\phi} I_{\phi} \sin\varphi = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin\varphi .$$

Полная мощность:  $S=3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\text{л}} = \sqrt{P^2 + Q^2} .$

Сравнивая полученные выражения для активной, реактивной и полной мощностей при соединении приемника треугольником в симметричном режиме с выражениями соответствующих мощностей (6.17) - (6.19) при соединении приемника звездой, видим, что они одинаковы.

### 6.6.2. Несимметричный режим.

В общем случае при несимметричном режиме система линейных напряжений может быть несимметричной и приемник несимметричный, т.е.  $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{bc} \neq \underline{Z}_{ca}$ .

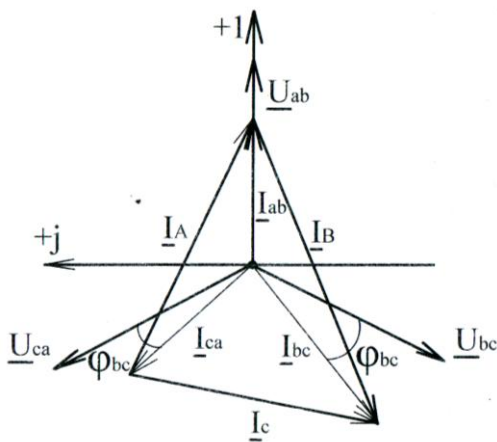


Рис. 6.19

Фазные токи в этом режиме определяются по формулам (6.27), а линейные токи – по (6.28).

Векторную диаграмму построим для частного случая, когда система напряжений генератора симметрична, а приемник несимметричный, например:  $\underline{Z}_{ab} = \underline{R}_{ab}$ ;  $\underline{Z}_{bc} = z_{bc} e^{j\varphi_{bc}}$ ,

$$\varphi_{bc} > 0; \underline{Z}_{ca} = z_{ca} e^{j\varphi_{ca}}, \varphi_{ca} < 0,$$

т.е. фаза «ab» имеет активный характер ( $\varphi_{ab}=0$ ), фаза «bc» – индуктивный, а фаза «ca» – емкостный характер.

На векторной диаграмме (рис. 6.19) фазные токи приемника образуют несимметричную систему

– токи отличаются по величине и по фазе: ток  $\underline{I}_{ab}$  совпадает по фазе с  $\underline{U}_{ab}$  ( $\varphi_{ab}=0$ ), ток  $\underline{I}_{bc}$  отстает от  $\underline{U}_{bc}$  на угол  $\varphi_{bc}$ , а  $\underline{I}_{ca}$  – опережает  $\underline{U}_{ca}$  на угол  $\varphi_{ca}$ . Система линейных токов  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  тоже несимметричная.

Активная и реактивная мощности при несимметричном режиме определяются в соответствии с выражениями (6.31) и (6.32) через токи и напряжения следующим образом:

$$P = U_{ab} I_{ab} \cos\varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \cos\varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \cos\varphi_{ca}; \quad (6.34)$$

$$Q = U_{ab} I_{ab} \sin\varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \sin\varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \sin\varphi_{ca}. \quad (6.35)$$

## 6.7. Измерение активной мощности в трехфазных цепях

### 6.7.1. Измерение активной мощности в трехпроводных цепях.

При соединении трехфазных приемников звездой без нулевого провода или треугольником трехфазная цепь будет *трехпроводной*. Для измерения активной мощности в трехпроводных цепях широко применяется *метод двух приборов* (двух однофазных ваттметров).

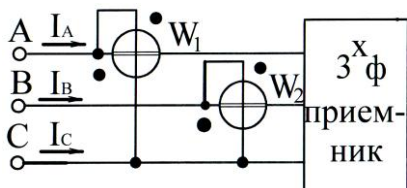


Рис. 6.20

По этому методу токовые обмотки ваттметров  $W_1$  и  $W_2$  включаются последовательно в любые две фазы (рис. 6.20), например, в фазу А и фазу В. Обмотки напряжения ваттметров – генераторные зажимы (начало обмоток), обозначенные на схеме точкой (•), подсоединены к тем же зажимам, что и токовые обмотки, а их концы подключены к той фазе трехфазной цепи, в

которой нет токовых обмоток ваттметров (свободной фазе «С»). При таком включении однофазных ваттметров  $W_1$  и  $W_2$  алгебраическая сумма их показаний  $P_{W1}$  и  $P_{W2}$  равна активной мощности трехфазной цепи.

Приведем доказательство этого утверждения.

Из курса Метрологии известно, что показание ваттметра активной мощности  $P_W$  прямо пропорционально току, протекающему по токовой обмотке, напряжению, подведенному к обмотке напряжения и косинусу угла между ними. Запишем показания ваттметров, включенных по схеме (рис. 6.20):

$$\left. \begin{aligned} P_{W1} &= I_A U_{AC} \cos(I_A \wedge U_{AC}); \\ P_{W2} &= I_B U_{BC} \cos(I_B \wedge U_{BC}), \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

где у линейных напряжений  $U_{AC}$  и  $U_{BC}$  первый индекс соответствует фазе, к которой подключено начало (•) обмотки напряжения (как известно, от чередования

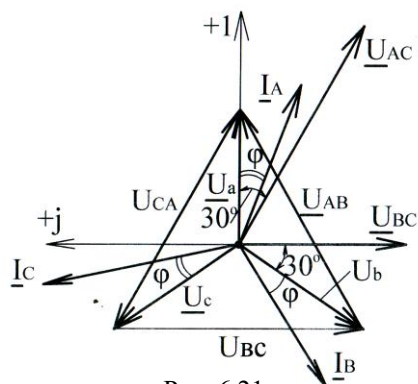


Рис. 6.21

индексов у напряжений зависит направление вектора напряжения: вектор  $\underline{U}_{AC}$  направлен противоположно вектору  $\underline{U}_{CA}$ ).

Из векторной диаграммы (рис. 6.21), построенной для симметричного режима, определим углы между токами и напряжениями выражений (6.36):

$$I_A \wedge U_{AC} = 30^\circ - \varphi, I_B \wedge U_{BC} = 30^\circ + \varphi. \quad (6.37)$$

Запишем выражения (6.36) с учетом (6.37):

$$\left. \begin{aligned} P_{W1} &= I_A U_{AC} \cos(30^\circ - \varphi), \\ P_{W2} &= I_B U_{BC} \cos(30^\circ + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Для симметричного режима  $I_A = I_B = I_\Delta$ ,  $U_{AC} = U_{BC} = U_\Delta$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} P_{W1} &= I_\Delta U_\Delta \cos(30^\circ - \varphi); \\ P_{W2} &= I_\Delta U_\Delta \cos(30^\circ + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

Определим сумму показаний ваттметров:

$$P_{W1} + P_{W2} = I_\Delta U_\Delta [\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)]. \quad (6.40)$$

В квадратных скобках выражения (6.40) после разложения косинусов разности углов и суммы углов и суммирования, получим:

$$[\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)] = \sqrt{3} \cos \varphi,$$

тогда

$$P_{W1} + P_{W2} = \sqrt{3} I_\Delta U_\Delta \cos \varphi = P. \quad (6.41)$$

Таким образом, при симметричном режиме сумма показаний двух ваттметров равна активной мощности трехфазной трехпроводной цепи.

Из выражений (6.39) видно, что показания ваттметров  $W_1$  и  $W_2$  одинаковы при симметричном режиме только при  $\varphi = 0$ . При  $\varphi = 60^\circ$   $P_{W1} > 0$ ,  $P_{W2} = 0$ ; при  $\varphi > 60^\circ$   $P_{W1} > 0$ ,  $P_{W2} < 0$ , т.е. стрелка второго ваттметра  $W_2$  отклонится в лево от нуля (при этом необходимо поменять концы обмотки напряжения  $W_2$  и его показания взять со знаком «минус»). Из сказанного следует, что при определении активной мощности методом двух приборов показания ваттметров надо суммировать *алгебраически*.

Метод двух приборов пригоден для измерения активной мощности в трехпроводных цепях как при *симметричной*, так и *несимметричной нагрузке*.

Показания ваттметров можно рассчитать комплексным методом по следующим формулам (применительно к схеме рис. 6.20):

$$\left. \begin{aligned} P_{W1} &= \operatorname{Re}[\underline{U}_{AC}^* I_A], \\ P_{W2} &= \operatorname{Re}[\underline{U}_{BC}^* I_B]. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

### 6.7.2. Измерение активной мощности в четырехпроводных цепях.

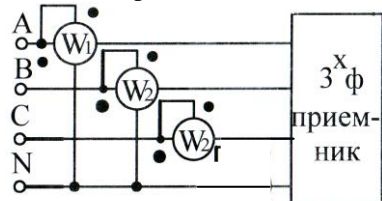


Рис. 6.22

Если электроприемники соединены звездой с нулевым проводом, трехфазная цепь будет четырехпроводной. Активная мощность такой цепи при несимметричной нагрузке измеряется методом трех приборов (ваттметров), которые включаются по схеме (рис. 6.22).

Каждый из однофазных ваттметров измеряет мощность одной фазы, в которую он включен.

Показания всех трех ваттметров независимо от характера нагрузки и симметрии токов и напряжений положительны. Поэтому активная мощность трехфазной цепи в этом случае равна арифметической сумме показаний отдельных однофазных ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (6.43)$$

Для измерения активной мощности в четырехпроводных цепях применяются также трехфазные ваттметры.

## 6.8. Пульсирующие и вращающиеся магнитные поля

### 6.8.1. Пульсирующее магнитное поле.

Выясним характер магнитного поля катушки, по которой проходит синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$  (рис. 6.23). Магнитное поле катушки, созданное

током  $i$  характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Направление вектора  $\vec{B}$  определяется направлением намотки катушки и направлением тока в ней в данный момент времени. На рис. 6.24 показана плоская катушка,

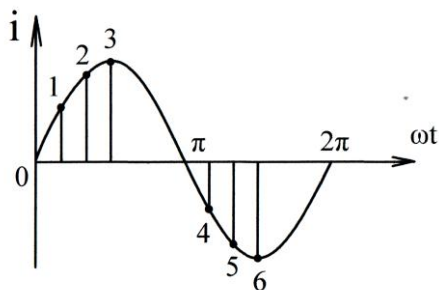


Рис. 6.23

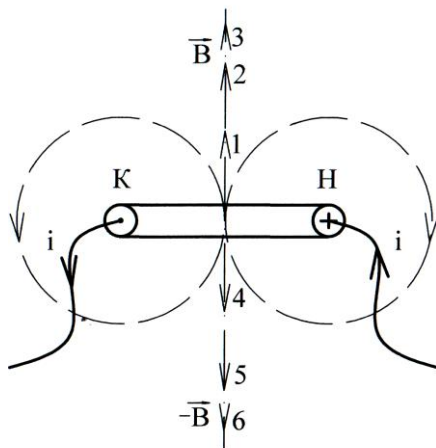


Рис. 6.24

начало которой  $h$ , конец  $k$ . Если ток входит в зажим  $h$  и выходит из зажима  $k$  (это направление тока будем считать положительным; ему соответствует интервал времени – угол  $\omega t$  от 0 до  $\pi$ ), то вектор магнитной индукции направлен вверх. По величине магнитная индукция катушки  $B$  прямо пропорциональна току  $i$  в ней, что видно из следующих соотношений:  $\psi = Li = \Phi_w = BS_w$ , откуда

$$B = \frac{Li}{S_w} = K_B i, \quad (6.44)$$

где  $\psi$  – потокосцепление катушки;

$L, S, w$  – индуктивность, площадь и число витков катушки;

$K_B$  – коэффициент пропорциональности, для данной катушки является величиной постоянной.

В соответствии с формулой (6.44), значению тока 1 ( $i_1$ ) (рис. 6.23) будет соответствовать магнитная индукция, обозначенная цифрой 1 ( $B_1$ ) на рис. 6.24, току  $i_2$  – соответствует индукция  $B_2$  и т.д. В следующий полупериод (от  $\pi$  до  $2\pi$ ), когда

$\rightarrow$   
ток  $i$  отрицателен, вектор  $\vec{B}$  направлен вниз.

Таким образом, *геометрическим местом концов вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  является ось катушки.*

Такое магнитное поле, вектор магнитной индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль оси создающей его катушки с током, называется *пульсирующим магнитным полем.*

### 6.8.2. Вращающееся магнитное поле.

Одним из основных преимуществ трехфазного тока является возможность получения вращающегося магнитного поля, используемого в наиболее распространенных типах электродвигателей переменного тока.

Вращающееся магнитное поле было получено физиком Феррарисом в 1884 г., однако он пришел к ошибочному заключению о невыгодности его применения для создания электродвигателей.

В 1887-1888 гг физик-инженер Никола Тесла сконструировал двухфазный асинхронный двигатель, а в 1889 г. М.О. Доливо-Добровольский изобрел и построил трехфазный асинхронный двигатель.

#### Принцип получения вращающегося магнитного поля.

Расположим три одинаковые плоские катушки так, что оси их смещены на  $120^\circ$  по отношению друг к другу (рис. 6.25). Подключим катушки к симметричному источнику питания так, чтобы токи входили в начала катушек  $H_1, H_2, H_3$ :

$$i_1 = I_m \sin \omega t; \quad i_2 = I_m \sin(\omega t - 120^\circ); \quad i_3 = I_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Каждый из токов будет создавать пульсирующее магнитное поле, вектор магнит

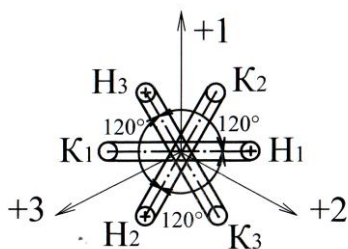


Рис. 6.25

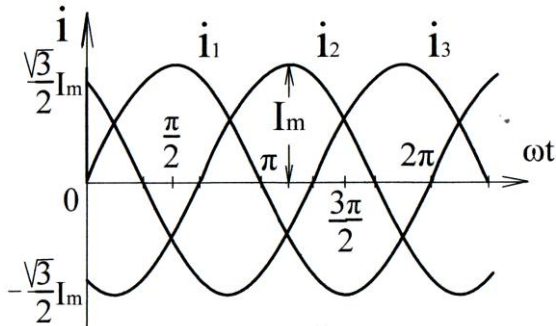


Рис. 6.26

ной индукции которого направлен вдоль оси своей катушки. Положительное направление оси первой катушки обозначим +1, второй +2, третьей +3 (рис. 6.25).

Через  $B_1, B_2, B_3$  обозначим мгновенные значения индукции, соответственно, первой, второй и третьей катушек. Так как магнитная индукция прямо пропорциональна току (6.44), то  $B_1, B_2, B_3$  будут изменяться по такому же закону, что и токи  $i_1, i_2, i_3$  (рис. 6.26).

Изобразим мгновенные значения  $B_1, B_2, B_3$  и результирующую индукцию  $B_p$  для различных моментов времени:  $\omega t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  (рис. 6.27).

Результирующая магнитная индукция  $B_p$  определяется следующим образом:

Для заданного момента времени, например,  $\omega t = 0$  по волновой диаграмме токов (рис. 6.26) определяем токи:  $i_1 = 0, i_2 = -\sqrt{3}/2 I_m, i_3 = \sqrt{3}/2 I_m$ ; под углом  $120^\circ$  строим положительные направления осей (рис. 6.27), по которым откладываем в масштабе  $B_1 = 0, B_2 = -\sqrt{3}/2 B_m, B_3 = \sqrt{3}/2 B_m$  (масштаб магнитной индукции показан на диаграмме).

Суммируя три вектора  $B_1, B_2, B_3$  получаем  $B_p$ . Для других векторных диаграмм значения мгновенных токов и индукций указаны на диаграмме.

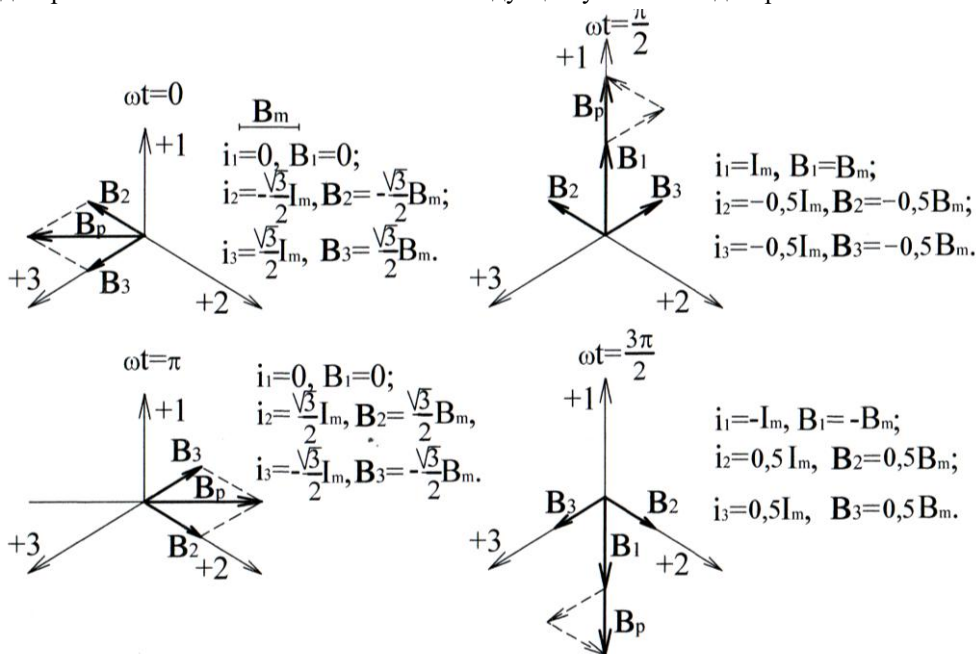


Рис. 6.27



Из построений, выполненных на рис. 6.27, следует, что с увеличением времени вектор результирующей магнитной индукции, оставаясь по величине постоянным и равным  $B_p = 1,5 B_m$ , вращается с угловой скоростью  $\omega_{МП}$  по направлению от начала первой катушки (рис. 6.25) с током  $i_1 = I_m \sin \omega t$  к началу второй катушки с током  $i_2 = I_m \sin(\omega t - 120^\circ)$ . Можно сказать, что вектор  $B_p$  вращается в сторону катушки с отстающим током. Если начала любых двух катушек поменять местами, то направление вращения магнитного поля изменится на обратное.

Магнитное поле, вектор результирующей магнитной индукции которого по величине неизменен и вращается с постоянной угловой скоростью называется *круговым вращающимся магнитным полем*.

Магнитное поле, конец вектора результирующей магнитной индукции которого скользит по эллипсу и вращается с периодически изменяющейся угловой скоростью, называется эллиптическим вращающимся магнитным полем.

Круговое вращающееся магнитное поле переходит в эллиптическое в результате нарушения нормального режима работы, например, при обрыве провода в одной из катушек, или если трехфазная система токов несимметричная, или если перепутаны начало и конец одной из катушек.

## 6.9. Принцип работы трехфазного асинхронного электродвигателя

Вращающееся магнитное поле используется в электродвигателях. Наиболее распространенным типом двигателя переменного тока является трехфазный асинхронный двигатель.

Известно, что если магнитная цепь полностью или частично выполнена из ферромагнитного материала, то при том же токе магнитный поток в ней резко возрастает по сравнению с магнитным потоком в отсутствие ферромагнитного материала.

Поэтому стороны трех катушек (рис. 6.25) заключают в пазы внешнего ферромагнитного цилиндра – *неподвижная часть асинхронного двигателя – статор*, а внутрь катушек помещают полый или сплошной ферромагнитный

цилиндр – *подвижная часть – ротор* (рис. 6.28). В пазах ротора находятся три замкнутых на себя или на внешнее сопротивление катушки.

Трехфазная симметричная система токов (рис. 6.26) в катушках статора создает *круговое вращающееся магнитное поле*.

На рис. 6.28 катушки даны в разрезе, торцевые части катушек не показаны, а каждая из них занимает лишь небольшую часть окружности статора. В действительности каждая из катушек (прямые и обратные провода ее) занимают 1/3 окружности расточки статора.

Допустим, что вначале ротор неподвижен. При

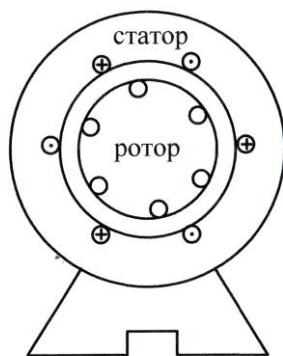


Рис. 6.28

этом вращающееся магнитное поле, созданное токами обмоток статора, пересекает провода катушек неподвижного ротора с угловой скоростью  $\omega_{МП}$  и наводит в них ЭДС. Эта ЭДС создает токи в катушках ротора. По закону Ленца эти токи стремятся своим магнитным полем ослабить вызвавшее их магнитное поле статора. Механическое взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем приведет к тому, что ротор начнет вращаться в ту же сторону, в какую вращается магнитное поле (по правилу левой руки).

В установившемся режиме скорость вращения ротора  $\omega_p$  составляет  $(0,98 - 0,95) \omega_{МП}$ . Двигатель называется асинхронным потому, что ротор его вращается не синхронно (асинхронно) с вращающимся полем, т.е. ротор отстает от скорости поля. Скорость вращения ротора принципиально не может равняться скорости вращения поля, так как при  $\omega_p = \omega_{МП}$  вращающееся поле не пересекало бы провода обмоток ротора, в них отсутствовал бы ток, и ротор не испытывал бы вращающегося момента.

## 6.10. Примеры решения задач по трехфазным цепям

**Пример 6.1.** Трехфазный симметричный приемник, соединенный в звезду  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_\phi = 22\ell^{-j60^\circ} = (11 - j19,05)$ , Ом подключен к трехфазному симметричному генератору, фазное напряжение которого  $U_\phi = 220$  В. Определить токи и мощности приемника.

**Решение:** Из комплекса сопротивлений приемника имеем:  $Z_\phi = 22$  Ом,  $R_\phi = 11$  Ом,  $X_\phi = -19,05$  Ом,  $\varphi = -60^\circ$ .

Так как генератор и приемник симметричны, режим работы трехфазной цепи будет симметричным.

Система фазных напряжений генератора в комплексной форме:

$$\underline{U}_A = U_\phi = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_B = U_\phi \ell^{-j120^\circ} = 220\ell^{-j120^\circ} = (-110 - j190,5), \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = U_\phi \ell^{j120^\circ} = 220\ell^{j120^\circ} = (-110 + j190,5), \text{ В}.$$

В симметричном режиме работы цепи узловое напряжение  $U_N = 0$ , поэтому фазные напряжения приемника равны фазным напряжениям генератора:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A = 220 \text{ В}; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B = 220\ell^{-j120^\circ}, \text{ В}; \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C = 220\ell^{j120^\circ}, \text{ В}.$$

Линейные напряжения приемника также равны линейным напряжениям генератора:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = 220 + 110 + j190,5 = 330 + j190,5 = 381\ell^{j30^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = -110 - j190,5 + 110 - j190,5 = -j381 = 381\ell^{-j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = -110 + j190,5 - 220 = -330 + j190,5 = 381 \ell^{j150^\circ}, \text{ В.}$$

Фазные (линейные) токи приемника:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{220}{22 \ell^{-j60^\circ}} = 10 \ell^{j60^\circ} = (5 + j8,66), \text{ А;}$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{220 \ell^{-j120^\circ}}{22 \ell^{-j60^\circ}} = 10 \ell^{-j60^\circ} = (5 - j8,66), \text{ А;}$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{220 \ell^{j120^\circ}}{22 \ell^{-j60^\circ}} = 10 \ell^{j80^\circ} = -10 \text{ А,}$$

т.е.  $\underline{I}_a = \underline{I}_b = \underline{I}_c = \underline{I}_\phi = 10 \text{ А; } \underline{I}_n = \underline{I}_\phi = 10 \text{ А.}$

Сумма комплексных токов при симметричном режиме:  $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$ .

Активная мощность приемника:  $P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 10 \cdot 0,5 = 3300 \text{ Вт,}$

где  $\cos \varphi = \cos(-60^\circ) = 0,5$ .

Реактивная мощность приемника:

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = 3 \cdot 220 \cdot 10 \cdot (-0,866) = -5716 \text{ вар,}$$

где  $\sin \varphi = \sin(-60^\circ) = -0,866$ .

Знак «минус» у реактивной мощности показывает, что трехфазный приемник имеет емкостный характер.

Полная мощность приемника:  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3300^2 + 5716^2} = 6600 \text{ ВА.}$

Определим мощности приемника комплексным методом:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_a^* \underline{I}_a + \underline{U}_b^* \underline{I}_b + \underline{U}_c^* \underline{I}_c = 220 \cdot 10 \ell^{-j60^\circ} + 220 \ell^{-j120^\circ} \cdot 10 \ell^{j60^\circ} + \\ &+ 220 \ell^{j120^\circ} \cdot 10 \ell^{-j180^\circ} = 2200 \ell^{-j60^\circ} + \\ &+ 2200 \ell^{-j60^\circ} + 2200 \ell^{-j60^\circ} = \\ &= 6600 \ell^{-j60^\circ} = 3300 - j5716. \end{aligned}$$

Из комплекса мощности получаем:

$$S = 6600 \text{ ВА, } P = 3300 \text{ Вт,}$$

$$Q = -5716 \text{ вар.}$$

Векторная диаграмма в координатах комплексной плоскости изображена на рис. 6.29. Из векторной диаграммы видно, что токи в фазах приемника опережают соответствующие фазные напряжения на угол  $\varphi = -60^\circ$ , что соответствует емкостному характеру нагрузки.

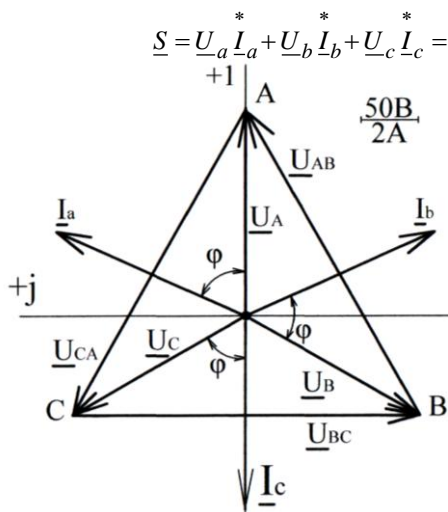


Рис. 6.29

**Пример 6.2.** Трехфазный генератор с симметричной системой напряжений,  $U_{\text{л}} = 380$  В подключен к приемнику, соединенному в звезду, комплексное сопротивление отдельных фаз которого заданы:  $\underline{Z}_a = 40$  Ом;

$$\underline{Z}_b = 40\ell^{j30^\circ} = (34,64 + j20), \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_c = 40\ell^{-j30^\circ} = (34,64 - j20), \text{ Ом}.$$

Определить фазные и линейные напряжения и токи приемника, его активную, реактивную и полную мощности, построить топографические диаграммы напряжений и векторные диаграммы токов для следующих режимов:

- 1) при наличии нулевого провода, сопротивление которого равно нулю;
- 2) без нулевого провода;
- 3) при разгрузке одной фазы без нулевого провода;
- 4) при коротком замыкании одной фазы без нулевого провода.

**Р е ш е н и е:** Судя по исходным данным, трехфазный приемник несимметричный, хотя полные сопротивления отдельных фаз одинаковы и равны 40 Ом, но характер нагрузки фаз различный: в фазе  $a$  – активная нагрузка ( $\varphi_a = 0$ ), в фазе  $b$  – индуктивный характер нагрузки ( $\varphi_b = 30^\circ$ ), в фазе  $c$  – емкостный характер нагрузки ( $\varphi_c = -30^\circ$ ). В связи с этим режимы работы трехфазной цепи будут несимметричными.

*Режим 1. При несимметричной нагрузке, соединенной звездой и наличии нулевого провода,* сопротивление которого  $Z_N$  равно нулю, узловое напряжение  $\underline{U}_N = \underline{I}_N \underline{Z}_N = 0$ , поэтому фазные напряжения приемника:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N = \underline{U}_A, \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N = \underline{U}_B, \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = \underline{U}_C.$$

$$\text{Фазное напряжение генератора: } U_\phi = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{1,73} = 220 \text{ В}.$$

Система фазных напряжений генератора в комплексной форме:

$$\underline{U}_A = U_\phi \ell^{j0^\circ} = 220 \text{ В};$$

$$\underline{U}_B = U_\phi \ell^{-j120^\circ} = 220\ell^{-j120^\circ} = (-110 - j190,5), \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = U_\phi \ell^{j120^\circ} = 220\ell^{j120^\circ} = (-110 + j190,5), \text{ В}.$$

Система линейных напряжений генератора и приемника:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = 220 + 110 + j190,5 = 330 + j190,5 = 381\ell^{j30^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C = -110 - j190,5 + 110 - j190,5 = -j381 = 381\ell^{-j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = -110 - j190,5 - 220 = -330 + j190,5 = 381\ell^{j150^\circ}, \text{ В}.$$

Фазные (линейные) токи приемника:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{220}{40} = 5,5 \text{ A}; \quad I_a = 5,5 \text{ A}, \quad \psi_{ia} = 0;$$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{220 \ell^{-j120^\circ}}{40 \ell^{j30^\circ}} = 5,5 \ell^{-j150^\circ} = (-4,763 - j2,75); \quad I_b = 5,5 \text{ A}, \quad \psi_{ib} = -150^\circ;$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{220 \ell^{j120^\circ}}{40 \ell^{-j30^\circ}} = 5,5 \ell^{j150^\circ} = (-4,763 + j2,75); \quad I_c = 5,5 \text{ A}, \quad \psi_{ic} = 150^\circ.$$

Ток в нулевом проводе:  $\underline{I}_N = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 5,5 - 5,5 \ell^{-j120^\circ} - 4,763 + j2,75 -$   
 $-4,763 + j2,75 = -4,026 = 4,026 \ell^{-j180^\circ}; \quad I_N = 4,026 \text{ A}, \quad \psi_{iN} = -180^\circ.$

Комплексная мощность приемника:  $\underline{S} = \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* =$   
 $= 220 \cdot 5,5 + 220 \ell^{-j120^\circ} \cdot 5,5 \ell^{j150^\circ} + 220 \ell^{j120^\circ} \cdot 5,5 \ell^{-j150^\circ} = 1210 + 1210 \ell^{+j30^\circ} +$   
 $+ 1210 \ell^{-j30^\circ} = 1210(1 + \ell^{j30^\circ} + \ell^{-j30^\circ}) = 1210(1 + 0,866 + j0,5 + 0,866 - j0,5) =$   
 $= 1210(1 + 0,866 + j0,5 + 0,866 - j0,5) = 1210(2,732 + j0) = 3306 \text{ ВА};$

$$P = S = 3306 \text{ Вт}, \quad Q = 0.$$

Реактивная мощность трехфазной цепи в режиме 1 равна нулю, так как индуктивная мощность  $Q_L = 1210 \cdot 0,5 = 605 \text{ вар}$  и емкостная мощность  $Q_C = 1210 \cdot (-0,5) = -605 \text{ вар}$  одинаковы и взаимно компенсируются:  $Q = Q_L - Q_C = 0$ .

Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов в координатах комплексной плоскости для режима 1 построена на рис. 6.30.

Вектор тока в нулевом проводе  $\underline{I}_N$  на диаграмме получен в результате суммирования векторов фазных токов  $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$ .

*Режим 2.* В этом режиме имеем несимметричную трехфазную цепь без нулевого провода.

Для определения узлового напряжения по формуле (6.26), вычислим проводимости отдельных фаз приемника в комплексной форме:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{40} = 0,025 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ СМ};$$

$$\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{40 \ell^{j30^\circ}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \ell^{-j30^\circ} =$$
  

$$= (2,165 - j1,25) \cdot 10^{-2} \text{ СМ},$$

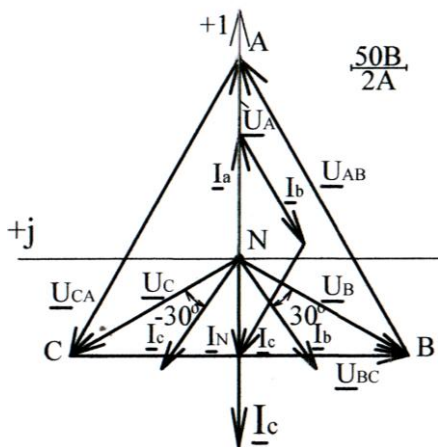


Рис. 6.30

$$\underline{Y_c} = \frac{1}{\underline{Z_c}} = \frac{1}{40\ell^{-j30^\circ}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \ell^{j30^\circ} = (2,165 + j1,25) \cdot 10^{-2}, \text{ См.}$$

Узловое напряжение:  $\underline{U_N} = \frac{\underline{U_A}\underline{Y_a} + \underline{U_B}\underline{Y_b} + \underline{U_C}\underline{Y_c}}{\underline{Y_a} + \underline{Y_b} + \underline{Y_c}}.$

Определим отдельно числитель и знаменатель этого выражения:

$$\begin{aligned} \underline{U_A}\underline{Y_a} + \underline{U_B}\underline{Y_b} + \underline{U_C}\underline{Y_c} &= 220 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} + 220\ell^{-j120^\circ} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \ell^{-j30^\circ} + \\ &+ 220\ell^{j120^\circ} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \ell^{j30^\circ} = 5,5(1 + \ell^{-j150^\circ} + \ell^{j150^\circ}) = \\ &= 5,5(1 - 0,866 - j0,5 - 0,866 + j0,5) = 5,5(-0,732) = -4,026 \text{ А.} \end{aligned}$$

$$\underline{Y_a} + \underline{Y_b} + \underline{Y_c} = (2,5 + 2,165 - j1,25 + 2,165 + j1,25) \cdot 10^{-2} = 6,83 \cdot 10^{-2} \text{ См.}$$

$$\underline{U_N} = \frac{-4,026}{6,83 \cdot 10^{-2}} = -58,95 \text{ В.}$$

Фазные напряжения приемника:  $\underline{U_a} = \underline{U_A} - \underline{U_N} = 220 + 58,95 = 278,95 \text{ В;}$

$$\underline{U_b} = \underline{U_B} - \underline{U_N} = -110 - j190,5 + 58,95 = -51,05 - j190,5 = 197,2\ell^{-j105^\circ}, \text{ В;}$$

$$\begin{aligned} \underline{U_c} &= \underline{U_C} - \underline{U_N} = -110 + j190,5 + 58,95 = -51,05 + j190,5 = \\ &= 197,2\ell^{j105^\circ}, \text{ В.} \end{aligned}$$

Фазные токи приемника:  $\underline{I_a} = \frac{\underline{U_a}}{\underline{Z_a}} = \frac{278,95}{40} = 6,974 \text{ А;}$

$$\underline{I_b} = \frac{\underline{U_b}}{\underline{Z_b}} = \frac{197,2\ell^{-j105^\circ}}{40\ell^{j30^\circ}} = 4,93\ell^{-j135^\circ} = (-3,486 - j3,486), \text{ А;}$$

$$\underline{I_c} = \frac{\underline{U_c}}{\underline{Z_c}} = \frac{197,2\ell^{j105^\circ}}{40\ell^{-j30^\circ}} = 4,93\ell^{j135^\circ} = (-3,486 + j3,486), \text{ А.}$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:  $\underline{I_a} + \underline{I_b} + \underline{I_c} = 0;$

$$6,974 - 3,486 - j3,486 - 3,486 + j3,486 \approx 0.$$

Комплексная мощность приемника:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U_a}^* \underline{I_a} + \underline{U_b}^* \underline{I_b} + \underline{U_c}^* \underline{I_c} = 278,95 \cdot 6,974 + 197,2\ell^{-j105^\circ} \cdot 4,93\ell^{j135^\circ} + \\ &+ 197,2\ell^{j105^\circ} \cdot 4,93\ell^{-j135^\circ} = 1945,4 + 972,2\ell^{j30^\circ} + 972,2\ell^{-j30^\circ} = \\ &= 1945,4 + 842 + j486 + 842 - j486 = 3629,4 \text{ В·А;} \end{aligned}$$

$$P = 3629,4 \text{ Вт, } Q = 0.$$

Векторная диаграмма для режима 2 построена на рис. 6.31.

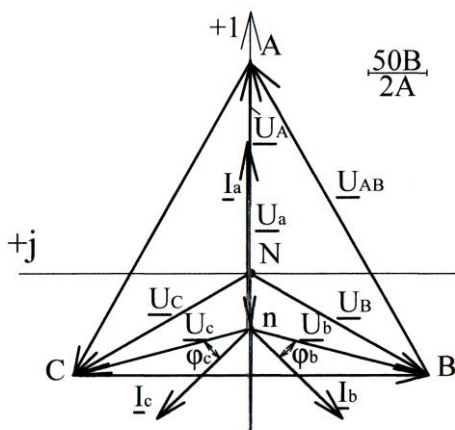


Рис. 6.31

Режим 3. Разгрузка одной фазы (например, фазы  $b$  приемника) без нулевого провода. В этом режиме сопротивления фазы  $b$   $Z_b = \infty$ , а проводимость этой фазы  $Y_b = 0$ .

Узловое напряжение:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_c};$$

Числитель и знаменатель этого выражения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_C \underline{Y}_c &= 220 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} + 220 \ell^{j120^\circ} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} \ell^{j30^\circ} = 5,5(1 + \ell^{j150^\circ}) = 5,5(1 - \\ &- 0,866 + j0,5) = 0,737 + j2,75 = 2,847 \ell^{j75^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\underline{Y}_a + \underline{Y}_c = (2,5 + 2,165 + j1,25) \cdot 10^{-2} =$$

$$= (4,665 + j1,25) \cdot 10^{-2} = 4,83 \cdot 10^{-2} \ell^{j15^\circ}, \text{ См};$$

$$\underline{U}_N = \frac{2,847 \ell^{j75^\circ}}{4,83 \cdot 10^{-2} \ell^{j15^\circ}} = 58,94 \ell^{j60^\circ} = (29,47 + j51,04), \text{ В}.$$

Фазные напряжения приемника:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N = 220 - 29,47 - j51,04 = 190,53 - j51,04 = 197,25 \ell^{-j150^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N = -110 - j190,5 - 29,47 - j51,04 = -139,47 - j241,54 = 278,91 \ell^{-j120^\circ}, \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = -110 + j190,5 - 29,47 - j51,04 = -139,47 + j139,46 = 197,24 \ell^{j135^\circ}, \text{ В}.$$

Фазные токи приемника:

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{197,25 \ell^{-j15^\circ}}{40} = 4,931 \ell^{-j15^\circ} = (4,763 - j1,276), \text{ А}; \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{U}_b}{\infty} = 0;$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{197,24 \ell^{j135^\circ}}{40 \ell^{-j30^\circ}} = 4,931 \ell^{j165^\circ} = (-4,763 + j1,276), \text{ А}.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0; \quad 4,763 - j1,276 - 4,763 + j1,276 = 0.$$

Комплексная мощность приемника:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_a^* \underline{I}_a + \underline{U}_b^* \underline{I}_b + \underline{U}_c^* \underline{I}_c = 197,25 \ell^{-j15^\circ} \cdot 4,931 \ell^{j15^\circ} + 197,24 \ell^{j135^\circ} \cdot 4,931 \ell^{-j165^\circ} = \\ &= 972,6(1 \ell^{j0^\circ} + 1 \ell^{-j30^\circ}) = 972,6(1,866 - j0,5) = (1815 - j486,3) = 1879 \ell^{-j15^\circ}, \text{ ВА}; \end{aligned}$$

$$S=1879 \text{ ВА}, P=1815 \text{ Вт}, Q=-486,3 \text{ вар}$$

Векторная диаграмма для режима 3 построена на рис. 6.32.

Из расчетов и векторной диаграммы (рис.6.32) следует, что напряжение на разгружаемой фазе приемника возрастает ( $U_b = 279$  В) по сравнению с фазным напряжением генератора ( $U_B = 220$  В); система фазных напряжений приемника несимметрична, так как возникло узловое напряжение ( $U_N = 59$  В); ток в разгружаемой фазе  $I_b$  равен нулю, а токи в двух других фазах одинаковы по величине ( $I_a = I_c = 4,9$  А) и находятся в противофазе (сдвинуты на угол, равный  $180^\circ$ ).

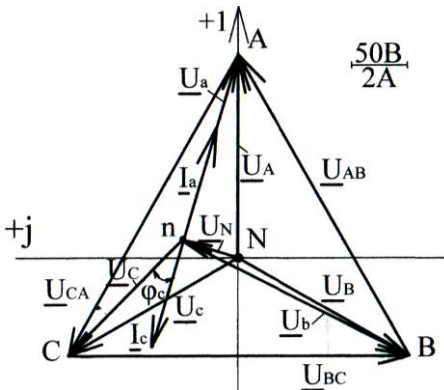


Рис. 6.32

*Режим 4. Короткое замыкание одной фазы без нулевого провода.* Предположим, что фаза  $b$  приемника замкнута накоротко, тогда  $Z_b = 0$ , а  $Y_b = \infty$ .

Узловое напряжение

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Раскроем неопределенность, разделив числитель и знаменатель на  $\underline{Y}_b$ :

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \frac{\underline{Y}_a}{\underline{Y}_b} + \underline{U}_B + \underline{U}_C \frac{\underline{Y}_c}{\underline{Y}_b}}{\frac{\underline{Y}_a}{\underline{Y}_b} + 1 + \frac{\underline{Y}_c}{\underline{Y}_b}} = \underline{U}_B = 220 \ell^{-j120^\circ} = (-110 - j190,5), \text{ В.}$$

Фазные напряжения приемника:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N = 220 + 110 + j190,5 = 330 + j190,5 = 381 \ell^{j30^\circ} = \underline{U}_{AB};$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N = \underline{U}_B - \underline{U}_B = 0;$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = -110 + j190,5 + 110 + j190,5 = j381 = 381 \ell^{j90^\circ} = \underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC}.$$

Таким образом, напряжение на короткозамкнутой фазе равно нулю, а на двух других фазах оно возрастает до линейного напряжения.

Фазные токи приемника:  $\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{381 \ell^{j30^\circ}}{40} = 9,525 \ell^{j30^\circ} = (8,249 + j4,763), \text{ А};$

$$\underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{0}{0}, \text{ неопределенность!}$$

$$\underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{381 \ell^{j90^\circ}}{40 \ell^{-j30^\circ}} = 9,525 \ell^{j120^\circ} = (-4,763 + j8,249), \text{ А}$$

Раскроем неопределенность для тока  $\underline{I}_b$  по первому закону Кирхгофа:



$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0, \text{ откуда } \underline{I}_b = -(\underline{I}_a + \underline{I}_c) = -(8,249 + j4,763 - 4,763 + j8,249) = \\ = -(3,486 + j13,012) = -3,486 - j13,012 = 13,471 \ell^{-j105^\circ}, \text{ A.}$$

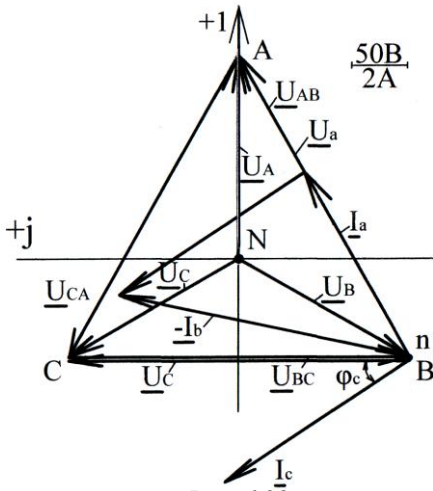


Рис. 6.33

Из расчета видно, что при коротком замыкании одной фазы токи во всех фазах существенно возрастают, особенно в короткозамкнутой фазе.

Комплексная мощность приемника:

$$\underline{S} = \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* = \\ = 381 \ell^{j30^\circ} \cdot 9,525 \ell^{-j30^\circ} + \\ + 381 \ell^{j90^\circ} \cdot 9,525 \ell^{-j120^\circ} = 3629 (\ell^{j0^\circ} + \ell^{-j30^\circ}) = \\ = 3629 (1 + 0,866 - j0,5) =$$

$$6772 - j1815 = 7011 \ell^{-j15^\circ}, \text{ ВА;}$$

$$S=7011 \text{ ВА, } P=6772 \text{ Вт, } Q=-1815 \text{ вар.}$$

Векторная диаграмма для режима 4 построена на рис. 6.33.

**Пример 6.3.** Трехфазный симметричный электроприемник, соединенный в треугольник, комплексные сопротивления отдельных фаз которого заданы:  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = 38 \ell^{j60^\circ}$ , Ом, подключен к симметричному генератору с линейным напряжением  $\underline{U}_l = 380$  В (рис. 6.34). Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощность приемника, показания ваттметров и активную мощность приемника по показаниям этих приборов. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

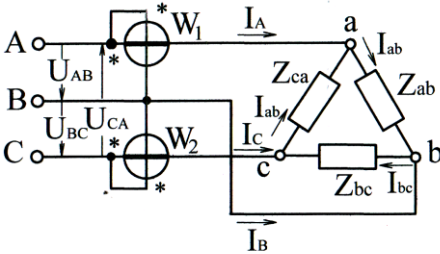


Рис. 6.34

активную, реактивную и полную мощность приемника, показания ваттметров и активную мощность приемника по показаниям этих приборов. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

**Решение:** При соединении отдельных фаз приемника треугольником линейные и фазные напряжения равны:

$$\underline{U}_\phi = \underline{U}_l = 380 \text{ В.}$$

Запишем фазные напряжения в комплексной форме:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_\phi = 380 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_\phi \ell^{-j120^\circ} = 380 \ell^{-j120^\circ} = (-190 - j329), \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_\phi \ell^{j120^\circ} = 380 \ell^{j120^\circ} = (-190 + j329), \text{ В.}$$

$$\text{Фазные токи приемника: } \underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{380}{38 \ell^{j60^\circ}} = 10 \ell^{-j60^\circ} = (5 - j8,66), \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{380\ell^{-j120^\circ}}{38\ell^{j60^\circ}} = 10\ell^{-j180^\circ} = -10 \text{ A};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{380\ell^{j120^\circ}}{38\ell^{j60^\circ}} = 10\ell^{j60^\circ} = (5 + j8,66) \text{ A}.$$

Следовательно,  $\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{bc} = \underline{I}_{ca} = \underline{I}_\phi = 10 \text{ A}$ .

Линейные токи:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 5 - j8,66 - 5 - j8,66 = -j17,32 = 17,32\ell^{-j90^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -10 - 5 + j8,66 = -15 + j8,66 = 17,32\ell^{j150^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 5 + j8,66 + 10 = 15 + j8,66 = 17,32\ell^{j30^\circ}.$$

Проверка: так как линейные токи образуют замкнутый треугольник, то геометрическая сумма их всегда равна нулю:

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0; \quad -j17,32 - 15 + j8,66 + 15 + j8,66 = 0$$

Линейные токи при симметричном режиме одинаковы:

$$I_A + I_B + I_C + I_\Delta = 17,32 \text{ A},$$

а соотношение линейного и фазного токов составляет  $\frac{I_\Delta}{I_\phi} = \frac{17,32}{10} = 1,732 = \sqrt{3}$ .

Комплексная мощность приемника:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{ab}^* \underline{I}_{ab} + \underline{U}_{bc}^* \underline{I}_{bc} + \underline{U}_{ca}^* \underline{I}_{ca} = 380 \cdot 10\ell^{j60^\circ} + 380\ell^{-j120^\circ} \cdot 10\ell^{j180^\circ} + \\ &+ 380\ell^{j120^\circ} \cdot 10\ell^{-j60^\circ} = 3 \cdot 3800\ell^{j60^\circ} = 11400\ell^{j60^\circ} = (5700 + j9873) \text{ VA} \end{aligned}$$

откуда  $S=11400 \text{ ВА}$ ,  $P=5700 \text{ Вт}$ ,  $Q=9873 \text{ вар}$ .

Показания ваттметров:

а) По токовой обмотке первого ваттметра  $W_1$  протекает ток  $I_A$ , а к обмотке напряжения его приложено напряжение  $\underline{U}_{AB}$ . Поэтому для определения показания этого ваттметра комплексным методом надо перемножить комплексы  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab}$  и  $\underline{I}_A$ , т.е.  $\underline{S}_1 = \underline{U}_{ab}^* \underline{I}_A = 380 \cdot 17,32\ell^{j90^\circ} = 6581,6\ell^{j90^\circ} = j6581,6 \text{ ВА}$ .

Так как вещественная часть комплекса  $\underline{S}_1$  равна нулю, то показание первого ваттметра  $P_{w1}=0$ .

б) По токовой обмотке второго ваттметра  $W_2$  протекает ток  $I_C$ , а к обмотке напряжения этого ваттметра приложено напряжение  $\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC}$ .

Поэтому  $\underline{S}_2 = \underline{U}_{CB}^* \underline{I}_C = -\underline{U}_{BC}^* \underline{I}_C$ ;  $-\underline{U}_{BC} = -380\ell^{-j120^\circ} = 380\ell^{j180^\circ} \ell^{-j120^\circ} = 380\ell^{j60^\circ}$ ;

$$\underline{S}_2 = 380\ell^{j60^\circ} \cdot 17,32\ell^{-j30^\circ} = 6581,6\ell^{j30^\circ} = (5700 + j3291) \text{ ВА};$$

Показание второго ваттметра равно вещественной части комплекса  $\underline{S}_2$ , т.е.  $P_{w1}=5700$  Вт. Алгебраическая сумма показаний обоих ваттметров равна активной мощности трехфазной цепи:  $P = P_{w1} + P_{w2} = 0 + 5700 = 5700$  Вт.

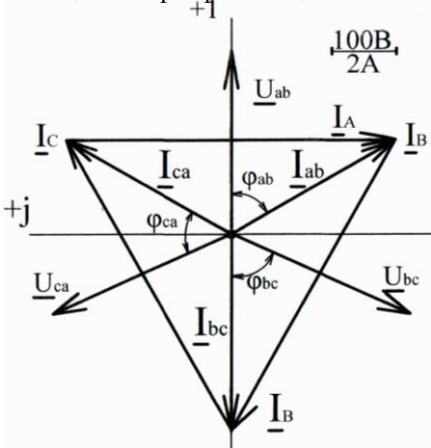


Рис. 6.35

Векторная диаграмма для схемы (рис. 6.34) построена на рис. 6.35.

**Пример 6.4.** Трехфазный несимметричный приемник, соединенный в треугольник (рис. 6.34), имеет следующие фазные сопротивления:

$$\underline{Z}_{ab} = 38\ell^{j60^\circ}, \underline{Z}_{bc} = 38 \text{ Ом}, \underline{Z}_{ca} = 38\ell^{-j60^\circ}.$$

Система напряжений источника питания симметрична,  $U_\ell = 380$  В. Определить

фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности приемника; по показанию ваттметров определить активную мощность приемника. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

**Решение:** Фазные (линейные) напряжения трехфазной цепи:

$$\underline{U}_{ab} = U_\phi = 380 \text{ В}; \quad \underline{U}_{bc} = U_\phi \ell^{-j120^\circ} = 380\ell^{-j120^\circ} = (-190 - j329) \text{ В};$$

$$\underline{U}_{ca} = U_\phi \ell^{j120^\circ} = 380\ell^{j120^\circ} = (-190 + j329) \text{ В}.$$

Фазные токи приемника:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{ab} &= \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{380}{38\ell^{j60^\circ}} = 10\ell^{-j60^\circ} = (5 - j8,66) \text{ А}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{380\ell^{-j120^\circ}}{38} = \\ &= 10\ell^{-j120^\circ} = (-5 - j8,66) \text{ А}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{380\ell^{j120^\circ}}{38\ell^{-j60^\circ}} = 10\ell^{j180^\circ} = -10 \text{ А}. \end{aligned}$$

Линейные токи:  $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 5 - j8,66 + 10 = 15 - j8,66 = 17,32\ell^{-j30^\circ} \text{ А};$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = -5 - j8,66 - 5 + j8,66 = -10 \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = -10 + 5 + j8,66 = -5 + j8,66 = 10\ell^{j120^\circ} \text{ А}.$$

Проверка:  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0; \quad 15 - j8,66 - 10 - 5 + j8,66 = 0.$

Комплексная мощность приемника:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{ab}^* \underline{I}_{ab} + \underline{U}_{bc}^* \underline{I}_{bc} + \underline{U}_{ca}^* \underline{I}_{ca} = 380 \cdot 10\ell^{j60^\circ} + 380\ell^{-j120^\circ} \cdot 10\ell^{j120^\circ} + \\ &+ 380\ell^{j120^\circ} \cdot 10\ell^{-j180^\circ} = 3800\ell^{j60^\circ} + 3800 + 3800\ell^{-j60^\circ} = \end{aligned}$$

$$= 1900 + j3291 + 3800 + 1900 - j3291 = 7600 \text{ ВА},$$

Следовательно,  $P = S = 7600 \text{ Вт}$ ,  $Q = 0$ .

Показания ваттметров:  $\underline{S}_1 = \underline{U}_{ab} \underline{I}_A^* = 380 \cdot 17,32 \angle j30^\circ = 6582 \angle j30^\circ = (5700 + j3291) \text{ В}$ ;

Показание первого ваттметра ( $W_1$ )  
 $P_{w1} = 5700 \text{ Вт}$ .

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{CB} \underline{I}_C^* = 380 \angle j60^\circ \cdot 10 \angle -j120^\circ = 3800 \angle -j60^\circ = (1900 - j3291) \text{ ВА};$$

Показание второго ваттметра ( $W_2$ )  
 $P_{w2} = 1900 \text{ Вт}$ .

Активная мощность трехфазного приемника по показанию ваттметров:

$$P = P_{w1} + P_{w2} = 5700 + 1900 = 7600 \text{ Вт}.$$

Векторная диаграмма для несимметричного режима построена на рис. 6.36. Из векторной диаграммы видно, что при несимметричном режиме работы цепи системы фазных и линейных токов являются несимметричными.

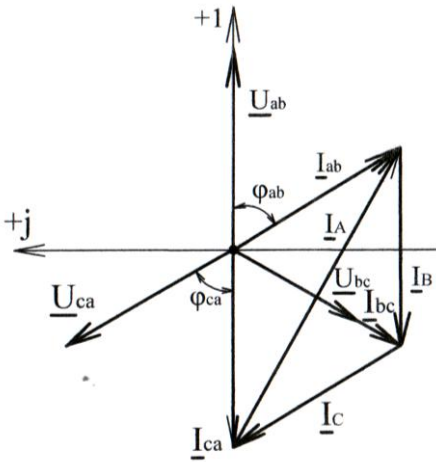


Рис. 6.36

## ГЛАВА 7. МЕТОД СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

### 7.1. Обобщение понятия о симметричных системах

В общем случае под симметричной  $m$ -фазной системой напряжений (токов) понимают систему из  $m$  равных по величине напряжений при условии, что все последующие напряжения отстают по фазе от предыдущих на один и тот же угол, равный  $\frac{2\pi q}{m}$ , где  $q$  – любое целое число от 1 до  $m$ ;  $m$  – число фаз.

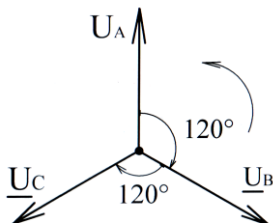


Рис. 7.1

Задавая  $q$  значения от 1 до  $m$ , мы получим все возможные типы  $m$ -фазной симметричной системы.

Рассмотрим трехфазную симметричную систему напряжений:  $m = 3$ .

а) Первая симметричная система при  $q = 1$ , фазный

$$\text{угол } \frac{2\pi q}{m} = \frac{2\pi}{3} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

В этой симметричной системе (рис. 7.1) вектор  $U_B$  отстаёт от вектора  $U_A$  на угол  $120^\circ$  (вращение векторов против вращения часовой стрелки), вектор  $U_C$  отстаёт от вектора  $U_B$  на угол  $120^\circ$ . Следовательно, векторы  $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$  следуют друг за другом в том же порядке, что и буквы латинского алфавита ( $A, B, C$ ). Такая симметричная система называется системой с прямым порядком следования фаз или системой прямой последовательности.

б) Вторая симметричная система при  $q = 2$ , фазный

$$\text{угол } \frac{2\pi q}{m} = \frac{2 \cdot 180^\circ \cdot 2}{3} = 240^\circ.$$

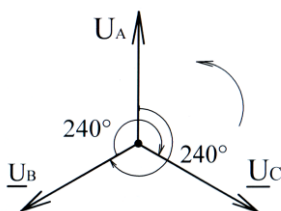


Рис. 7.2

В этой симметричной системе (рис. 7.2) вектор  $U_B$  отстаёт от вектора  $U_A$  на угол  $240^\circ$ , вектор  $U_C$  отстаёт от вектора  $U_B$  на  $240^\circ$ . В результате получаем трехфазную систему векторов, в которой за вектором  $U_A$  следует вектор  $U_C$ , а за ним вектор  $U_B$ .

Симметричная система, в которой векторы следуют друг за другом в порядке, обратном порядку следования букв алфавита ( $A, C, B$ ), называется системой с обратным порядком следования фаз или системой обратной последовательности.

в) третья симметричная система при  $q = 3$ , фазный угол

$$\frac{2\pi q}{m} = \frac{2 \cdot 180^\circ \cdot 3}{3} = 360^\circ, \text{ или равен нулю.}$$

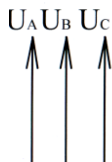


Рис. 7.3

Симметричная система (рис. 7.3), получающаяся при  $q = m$ , в которой все векторы совпадают друг с другом по фазе, называется системой с нулевым порядком следования фаз или системой нулевой последовательности.

Из векторных диаграмм (рис.7.1 и 7.2) видно, что симметричные системы напряжений (токов) прямой и обратной последовательностей образуют симметричную звезду или равносторонний треугольник. Поэтому геометрическая сумма этих векторов равна нулю.

В отличие от этого, для симметричной системы нулевой последовательности геометрическая сумма векторов равна утроенному значению вектора напряжения этой последовательности.

Следует иметь в виду, что для некоторых установок порядок следования фаз системы напряжений не имеет значения (резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы), а для трехфазных трансформаторов и трехфазных электродвигателей имеет существенное значение.

## 7.2. Эквивалентные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей трехфазного трехстержневого трансформатора

Подключим к зажимам  $A, B, C$  трансформатора (рис.7.4) трехфазную симметричную систему напряжений прямой последовательности  $U_{A1}, U_{B1}, U_{C1}$  (рис.7.5). В обмотках трансформатора возникает трехфазная симметричная система токов прямой последовательности  $I_{A1}, I_{B1}, I_{C1}$  (рис. 7.5). Эта система токов создает

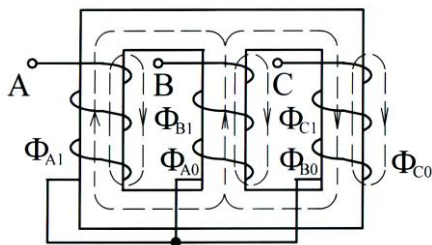


Рис. 7.4

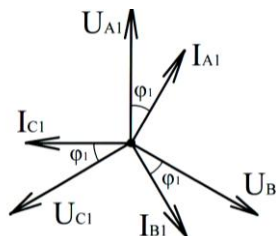


Рис. 7.5

магнитные потоки прямой последовательности  $\Phi_{A1}, \Phi_{B1}, \Phi_{C1}$  (рис.7.4).

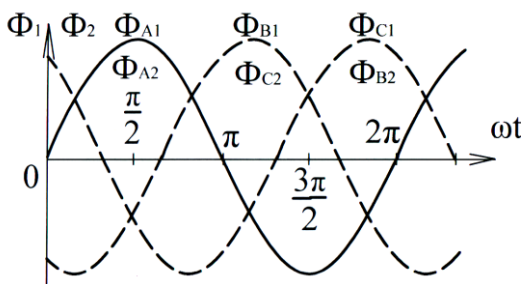


Рис. 7.6

Магнитные потоки будут замыкаться по стержням трансформатора, не препятствуя друг другу (рис.7.6): например,

при  $\omega t = 0$ :  $\Phi_{A1} = 0, -\Phi_{B1} = \Phi_{C1}$ ;

при  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ :  $\Phi_{A1} = \Phi_m$ ,

$-(\Phi_{B1} = \Phi_{C1}) = \frac{1}{2} \Phi_m$  и т.д.

Если к зажимам  $A, B, C$  трансформатора подвести систему напряжений обратной последовательности  $U_{A2}, U_{B2}, U_{C2}$ , то возникнут системы токов и магнит-

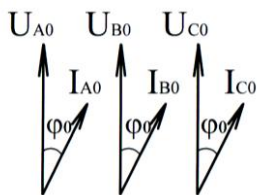


Рис. 7.7

ных потоков обратной последовательности:  $I_{A2}$ ,  $I_{B2}$ ,  $I_{C2}$  и  $\Phi_{A2}$ ,  $\Phi_{B2}$ ,  $\Phi_{C2}$ . Магнитные потоки, как и в первом случае будут замыкаться по стержням трансформатора (рис.7.6).

Подключим к зажимам  $A$ ,  $B$ ,  $C$  трансформатора систему напряжений нулевой последовательности  $U_{A0}$ ,  $U_{B0}$ ,  $U_{C0}$  (рис.7.7). В обмотках трансформатора возникнет система токов нулевой последовательности  $I_{A0}$ ,  $I_{B0}$ ,  $I_{C0}$ .

Эти токи создадут систему магнитных потоков нулевой последовательности  $\Phi_{A0}$ ,  $\Phi_{B0}$ ,  $\Phi_{C0}$ , которые совпадают друг с другом по направлению (рис.7.8), а поэтому они не могут замыкаться по стержням трансформатора. Потоки нулевой последовательности замыкаются по воздуху (рис.7.4).

Так как магнитное сопротивление воздуха во много раз больше магнитного сопротивления стержней трансформатора, магнитные потоки

$$\Phi_0 \ll \Phi_1 = \Phi_2.$$

Поэтому индуктивность трансформатора нулевой последовательности (а индуктивность есть отношение потоко-сцепления к току)  $L_0$  меньше индуктивности прямой (обратной) последовательности  $L_1 = L_2$ , т.е.  $L_0 \ll L_1 = L_2$ .

Следовательно, аналогичное соотношение будет и с индуктивными сопротивлениями:

$$X_{L0} \ll X_{L1} = X_{L2}.$$

Таким образом, для трехфазного трехстержневого трансформатора справедливо соотношение:

$$\underline{Z}_{1\Delta} = \underline{Z}_{2\Delta} \neq \underline{Z}_{0\Delta}, \quad (7.1)$$

где  $\underline{Z}_{1\Delta}$ ,  $\underline{Z}_{2\Delta}$ ,  $\underline{Z}_{0\Delta}$  —

эквивалентные сопротивления трансформатора прямой, обратной и нулевой

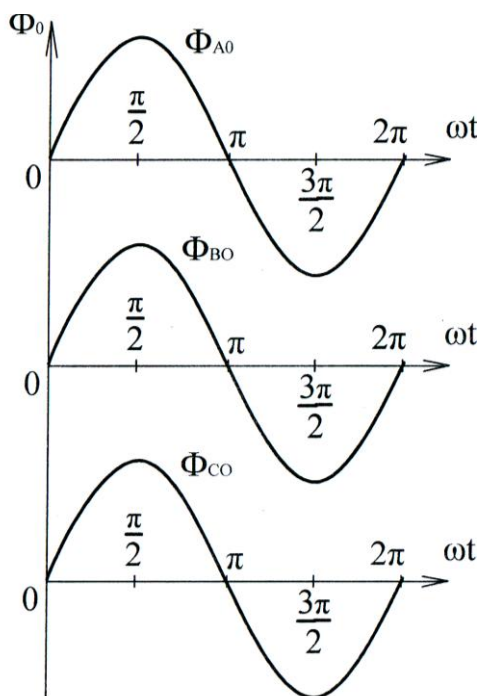


Рис. 7.8

последовательностей.

### 7.3. Эквивалентные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей трехфазного асинхронного электродвигателя

Если к входным зажимам трехфазного асинхронного электродвигателя одновременно подвести системы напряжений прямой, обратной и нулевой последовательностей, то в обмотках статора возникнут токи прямой, обратной и нулевой последовательностей. Токи прямой и обратной последовательностей создадут вращающиеся в противоположные стороны магнитные поля с угловой частотой  $\omega$ . Под действием, например прямого вращающегося поля ротор асинхронного двигателя начнет вращаться по направлению прямого поля с угловой частотой  $\omega_p$ . Обратное вращающееся поле будет оказывать на электродвигатель торможение.

Токи нулевой последовательности создадут пульсирующие магнитные потоки нулевой последовательности, которые будут замыкаться по воздушному зазору двигателя.

Эквивалентные активное  $R_\Sigma$  и индуктивное  $X_\Sigma$  сопротивления электродвигателя зависят от сопротивления статора  $R_c, X_c$  и вносимых сопротивлений ротора  $R_p, X_p$ . Реактивное сопротивление ротора зависит от угловой частоты тока ротора, которая различна для систем прямой и обратной последовательностей.

Угловая частота тока прямой последовательности

$$\omega_1 = \omega - \omega_p \approx (0,02 \dots 0,05) \omega. \quad (7.2)$$

Угловая частота тока обратной последовательности

$$\omega_2 = \omega + \omega_p \approx (1,98 \dots 1,95) \omega. \quad (7.3)$$

Так как

$$X_{1p} = \omega_1 L_p, X_{2p} = \omega_2 L_p,$$

где  $L_p$  – индуктивность ротора, то  $X_{1p} \neq X_{2p}$

и эквивалентные комплексные сопротивления асинхронного электродвигателя прямой и обратной последовательностей

$$\underline{Z}_{1\Sigma} \neq \underline{Z}_{2\Sigma}.$$

В связи с тем, что магнитный поток нулевой последовательности электродвигателя  $\Phi_0$  замыкается по воздушному зазору, а магнитные потоки прямой  $\Phi_1$  и обратной  $\Phi_2$  последовательностей замыкаются по ротору, то эквивалентные индуктивности прямой  $L_{1\Sigma}$  и нулевой  $L_{0\Sigma}$  последовательностей отличаются по величине  $L_{1\Sigma} \neq L_{0\Sigma}$ . Поэтому отличаются по величине реактивные эквивалентные сопротивления  $X_{1\Sigma} \neq X_{0\Sigma}$  и полные  $\underline{Z}_{1\Sigma} \neq \underline{Z}_{0\Sigma}$ , где  $\underline{Z}_{0\Sigma}$  – эквивалентное полное сопротивление нулевой последовательности асинхронного двигателя.

Следовательно, для трехфазного асинхронного электродвигателя имеет место следующее неравенство:

$$\underline{Z}_{1\Sigma} \neq \underline{Z}_{2\Sigma} \neq \underline{Z}_{0\Sigma}. \quad (7.4)$$



#### 7.4. Эквивалентные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей трехфазной симметричной цепи с нулевым проводом

Рассмотрим трехфазную симметричную цепь с нулевым проводом (рис.7.9):

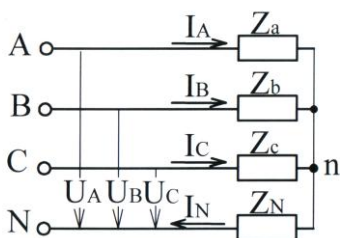


Рис.7.9

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}.$$

Если к входным зажимам цепи приложена симметричная система фазных напряжений прямой последовательности  $\underline{U}_A = \underline{U}_{A1}$ ,  $\underline{U}_B = \underline{U}_{B1}$ ,  $\underline{U}_C = \underline{U}_{C1}$ , то система токов в цепи также симметрична и имеет прямую последовательность фаз:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A1}, \underline{I}_B = \underline{I}_{B1}, \underline{I}_C = \underline{I}_{C1}.$$

Ток прямой последовательности в нулевом проводе:  $\underline{I}_{N1} = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = 0$ .

Определим эквивалентное комплексное сопротивление цепи для токов прямой последовательности:

$$\underline{Z}_{1\varnothing} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{I}_{A1}} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{I}_{B1}} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{I}_{C1}}.$$

Очевидно, что  $\underline{Z}_{1\varnothing} = \underline{Z}$ .

Аналогично можно доказать, что эквивалентное комплексное сопротивление цепи для токов обратной последовательности  $\underline{Z}_{2\varnothing} = \underline{Z}$ .

Если к входным зажимам цепи (рис.7.9) приложена симметричная система фазных напряжений нулевой последовательности  $\underline{U}_{A0} = \underline{U}_{B0} = \underline{U}_{C0} = \underline{U}_0$ , то в цепи возникнет симметричная система токов нулевой последовательности:

$$\underline{I}_{A0} = \underline{I}_{B0} = \underline{I}_{C0} = \underline{I}_0.$$

В нулевом проводе ток нулевой последовательности:

$$\underline{I}_{N0} = \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{B0} + \underline{I}_{C0} = 3\underline{I}_0.$$

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи для токов нулевой последовательности:

$$\underline{Z}_{\varnothing 0} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}.$$

Определим  $\underline{Z}_{\varnothing 0}$  через  $\underline{Z}$  и  $\underline{Z}_N$ .

По второму закону Кирхгофа для контура цепи (рис.7.9), проходящему через фазу A и нулевой провод, имеем:  $\underline{U}_A = \underline{Z}_a \underline{I}_A + \underline{Z}_N \underline{I}_N$ , или через составляющие напряжений и токов нулевой последовательности:  $\underline{U}_0 = \underline{Z} \underline{I}_0 + \underline{Z}_N 3\underline{I}_0$ , откуда

$$\underline{Z}_{\varnothing 0} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N.$$

Таким образом, для трехфазной симметричной цепи с нулевым проводом:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{\varphi 1} &= \underline{Z}_{\varphi 2} = \underline{Z}; \\ \underline{Z}_{\varphi 0} &= Z + 3\underline{Z}_N. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

При отсутствии в цепи нулевого провода:  $\underline{I}_0 = 0, \underline{Z}_{\varphi 0} = \infty$ . (7.6)

Обычно  $\underline{Z}_{\varphi 1}, \underline{Z}_{\varphi 2}, \underline{Z}_{\varphi 0}$  называют сокращенно эквивалентными комплексными сопротивлениями прямой, обратной и нулевой последовательностей.

Из изложенного видно, что в симметричной цепи любая симметричная система токов вызывает падения напряжения, образующие симметричные системы с тем же порядком следования фаз, и мы можем написать:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{\varphi 1}; \underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_{\varphi 2}; \underline{U}_0 = \underline{I}_0 \underline{Z}_{\varphi 0}. \quad (7.7)$$

Эти равенства (7.7) выражают собою *независимость* симметричных составляющих в симметричных цепях.

Все расчеты ведут для одной фазы, которую называют основной (обычно фаза A). Для рассмотренного случая будем иметь следующие три однофазных схемы для токов и напряжений различных последовательностей (рис.7.10). Эти схемы сокращенно называют схемами прямой, обратной и нулевой последовательностей.

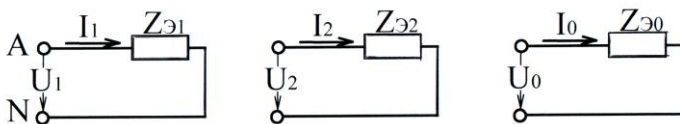


Рис. 7.10

В любых *симметричных трехфазных статических цепях* (цепях, не содержащих вращающихся машин) изменение порядка следования фаз симметричных напряжений с прямого на обратный не меняет величины токов. Поэтому для таких цепей эквивалентные сопротивления и схемы прямой и обратной последовательностей одинаковы.

В *несимметричной цепи* каждая из симметричных составляющих системы напряжений в общем случае зависит от всех симметричных составляющих системы токов и, наоборот, каждая из симметричных составляющих системы токов зависит от всех симметричных составляющих системы напряжений.

### 7.5. Разложение трехфазной несимметричной системы напряжений на симметричные составляющие

Любую трехфазную несимметричную систему напряжений (токов, ЭДС)  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  можно разложить на три трехфазные симметричные системы (рис.7.11): прямой ( $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{B1}, \underline{U}_{C1}$ ), обратной ( $\underline{U}_{A2}, \underline{U}_{B2}, \underline{U}_{C2}$ ) и нулевой ( $\underline{U}_{A0}, \underline{U}_{B0}, \underline{U}_{C0}$ ) последовательностей.

Систему напряжений прямой последовательности (рия. 7.11, а) запишем в

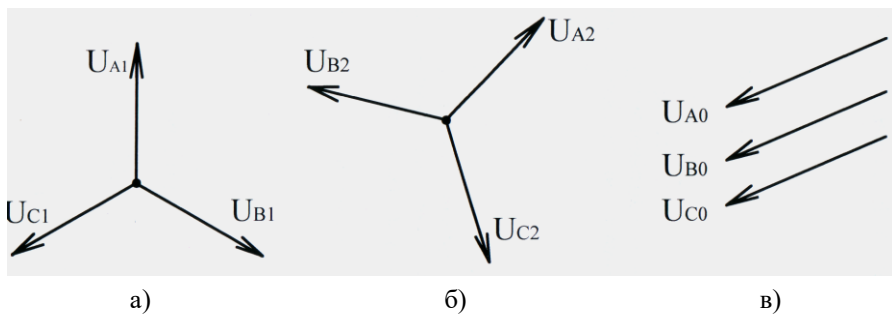


Рис. 7.11

комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{A1}; \\ \underline{U}_{B1} = \underline{U}_{A1} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{a}^2 \underline{U}_{A1}; \\ \underline{U}_{C1} = \underline{U}_{A1} e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{U}_{A1} e^{j\frac{2\pi}{3}} = \underline{a} \underline{U}_{A1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Для системы напряжений обратной последовательности (рис.7.11,б) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{A2}; \\ \underline{U}_{B2} = \underline{U}_{A2} e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{U}_{A2} e^{j\frac{2\pi}{3}} = \underline{a} \underline{U}_{A2}; \\ \underline{U}_{C2} = \underline{U}_{A2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{U}_{A2} e^{j\frac{4\pi}{3}} = \underline{a}^2 \underline{U}_{A2}; \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Для системы напряжений нулевой последовательности (рис.7.11,в):

$$\underline{U}_{A0} = \underline{U}_{B0} = \underline{U}_{C0}. \quad (7.10)$$

Выразим заданные три несимметричные векторы  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  через векторы симметричных систем:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}; \\ \underline{U}_B &= \underline{U}_{B1} + \underline{U}_{B2} + \underline{U}_{B0}; \\ \underline{U}_C &= \underline{U}_{C1} + \underline{U}_{C2} + \underline{U}_{C0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Перепишем систему уравнений (7.11) с учетом уравнений (7.8), (7.9) и (7.10):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}; \\ \underline{U}_B &= \underline{a}^2 \underline{U}_{A1} + \underline{a} \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}; \\ \underline{U}_C &= \underline{a} \underline{U}_{A1} + \underline{a}^2 \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Из уравнений (7.12) следует, что несимметричную систему напряжений  $(\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C)$  можно рассматривать как совокупность трех симметричных систем:

прямой последовательности –  $(\underline{U}_{A1}, \underline{a}^2 \underline{U}_{A1}, \underline{a} \underline{U}_{A1})$ ,

обратной последовательности –  $(\underline{U}_{A2}, \underline{aU}_{A2}, \underline{a}^2 \underline{U}_{A2})$  и нулевой последовательности –  $(\underline{U}_{A0}, \underline{U}_{A0}, \underline{U}_{A0})$ .

Эти симметричные системы напряжений называются симметричными составляющими трехфазной несимметричной системы  $(\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C)$  и основными векторами в них являются составляющие  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  вектора  $\underline{U}_A$ , принятого за основной вектор исходной системы. Часто симметричными составляющими называют основные векторы соответствующих симметричных систем.

Определим основные векторы симметричных составляющих  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  через заданные векторы несимметричной системы  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ . Для определения  $\underline{U}_{A1}$  второе уравнение системы (7.12) умножим на оператор  $\underline{a}$ , а третье уравнение той же системы умножим на  $\underline{a}^2$  и просуммируем все три уравнения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}; \\ + \quad \underline{aU}_B &= \underline{a}^3 \underline{U}_{A1} + \underline{a}^2 \underline{U}_{A2} + \underline{aU}_{A0}; \\ \underline{a}^2 \underline{U}_C &= \underline{a}^3 \underline{U}_{A1} + \underline{a}^4 \underline{U}_{A2} + \underline{a}^2 \underline{U}_{A0}; \\ \underline{U}_A + \underline{aU}_B + \underline{a}^2 \underline{U}_C &= \underline{U}_{A1}(1 + 2\underline{a}^3) + \underline{U}_{A2}(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}^4) + \underline{U}_{A0}(1 + \underline{a} + \underline{a}^2); \end{aligned}$$

учтем, что  $\underline{a}^3 = 1$ ,  $\underline{a}^4 = \underline{a}$ ,  $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$ , получим:  $\underline{U}_A + \underline{aU}_B + \underline{a}^2 \underline{U}_C = 3\underline{U}_{A1}$ ,

откуда 
$$\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{aU}_B + \underline{a}^2 \underline{U}_C). \quad (7.13)$$

Для определения  $\underline{U}_{A2}$  умножим второе уравнение системы (7.12) на  $\underline{a}^2$ , а третье уравнение на  $\underline{a}$  и просуммируем все три уравнения:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}; \\ + \quad \underline{a}^2 \underline{U}_B &= \underline{a}^4 \underline{U}_{A1} + \underline{a}^3 \underline{U}_{A2} + \underline{a}^2 \underline{U}_{A0}; \\ \underline{aU}_C &= \underline{a}^2 \underline{U}_{A1} + \underline{a}^3 \underline{U}_{A2} + \underline{aU}_{A0}; \\ \underline{U}_A + \underline{a}^2 \underline{U}_B + \underline{aU}_C &= \underline{U}_{A1}(1 + \underline{a}^4 + \underline{a}^2) + \underline{U}_{A2}(1 + 2\underline{a}^3) + \underline{U}_{A0}(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}), \end{aligned}$$

откуда 
$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a}^2 \underline{U}_B + \underline{aU}_C). \quad (7.14)$$

Для определения  $\underline{U}_{A0}$  просуммируем уравнения (7.12):

$$\begin{aligned} \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C &= \underline{U}_{A1}(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) + \underline{U}_{A2}(1 + \underline{a} + \underline{a}^2) + 3\underline{U}_{A0}, \end{aligned}$$

откуда 
$$\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C). \quad (7.15)$$

Совместим уравнения (7.13) - (7.15) в единую систему:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{A1} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a} \cdot \underline{U}_B + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_C); \\ \underline{U}_{A2} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_B + \underline{a} \cdot \underline{U}_C); \\ \underline{U}_{A0} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C). \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Из соотношений (7.16) следует, что разложение несимметричной трехфазной системы на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей может быть выполнено всегда и притом является единственным.

Система уравнений (7.16) используется для определения симметричных составляющих  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  по заданной несимметричной системе напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ , т.е. для аналитического разложения несимметричной системы на симметричные составляющие. В том случае, когда заданы симметричные составляющие, несимметричная система напряжений определяется по уравнениям (7.12).

Уравнения (7.12) и (7.16) пригодны также для токов, ЭДС, магнитных потоков и других трехфазных синусоидальных систем.

Из уравнений (7.16) непосредственно вытекает простой графический способ определения симметричных составляющих  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  по заданным векторам трехфазной несимметричной системы  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ .

### **Графический способ разложения несимметричной системы напряжений на симметричные составляющие.**

Пусть задана трехфазная несимметричная система напряжений:

$$\underline{U}_A, \underline{U}_B = \underline{U}_A \ell^{-j\pi/2}; \underline{U}_C = \underline{U}_A \ell^{j\pi/2}.$$

Требуется разложить эту систему напряжений на симметричные составляющие  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  графическим способом.

Изобразим в координатах комплексной плоскости заданную систему напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  (рис.7.12,а). Разложение этой системы напряжений на симметричные составляющие производим в соответствии с уравнениями (7.16). С этой целью на рис.7.12,а показываем векторы  $\underline{a}\underline{U}_B, \underline{a}^2\underline{U}_B, \underline{a}\underline{U}_C, \underline{a}^2\underline{U}_C$ , имеющиеся в уравнениях (7.16). Умножение вектора  $\underline{U}_B$  на вектор  $\underline{a} = \ell^{j2\pi/3}$  равносильно повороту его против часовой стрелки на угол  $120^\circ$ , а умножение вектора  $\underline{U}_B$  на  $\underline{a}^2 = \ell^{j4\pi/3} = \ell^{-j2\pi/3}$  соответствует повороту исходного вектора по часовой стрелке на угол  $120^\circ$ .

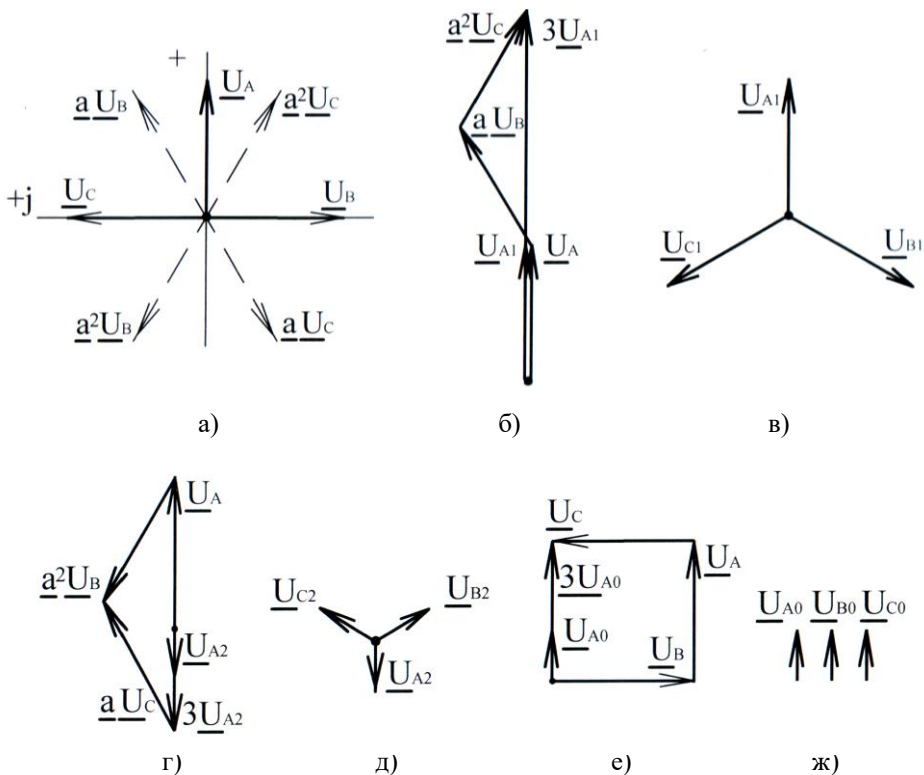


Рис. 7.12

Для определения вектора  $3\underline{U}_{A1}$  суммируем три вектора:  $\underline{U}_A, a\underline{U}_B, a^2\underline{U}_C$ . Эта операция выполнена на векторной диаграмме (рис.7.12,б). Далее берем  $1/3$  от суммарного вектора  $3\underline{U}_{A1}$ , получаем вектор  $\underline{U}_{A1}$  и строим векторную диаграмму симметричной составляющей прямой последовательности (рис.7.12,в). На рис.7.12,г произведены построения в соответствии со вторым уравнением системы (7.16) для определения симметричной составляющей напряжения обратной последовательности  $\underline{U}_{A2}$ , векторная диаграмма которого построена на рис.7.12,д.

Аналогично в соответствии с третьим уравнением системы (7.16) определена симметричная составляющая напряжения нулевой последовательности  $\underline{U}_{A0}$  (рис.7.12,е и рис.7.12,ж)

Из приведенного построения следует, что если векторы  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  образуют замкнутый треугольник, т.е. если геометрическая сумма их равна нулю, то симметричная составляющая нулевой последовательности  $\underline{U}_0$  равна нулю. Поэтому система линейных напряжений, а при отсутствии нулевого провода и система линейных токов, не могут содержать составляющие нулевой последовательности.

## 7.6. Расчет трехфазных цепей методом симметричных составляющих

При расчете симметричных режимов трехфазных цепей электродвигатели заменяют эквивалентными схемами, состоящими из трех одинаковых сопротивлений, соединенных звездой или треугольником. Падения напряжения в фазах генератора учитывается как напряжения на трех одинаковых сопротивлениях.

Такие простые эквивалентные схемы для электродвигателей и генераторов оказываются непригодными для расчета несимметричных режимов. В этом случае для анализа электромагнитных процессов в трехфазных электрических машинах (двигателях и генераторах) применяется метод симметричных составляющих.

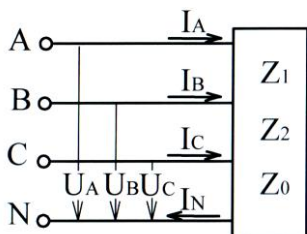


Рис. 7.13

Пусть задан трехфазный симметричный приемник с сопротивлениями прямой  $\underline{Z}_1$ , обратной  $\underline{Z}_2$  и нулевой  $\underline{Z}_0$  последовательностей (рис.7.13). Известна также несимметричная система напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  на зажимах приемника.

Требуется определить симметричные составляющие фазных напряжений и токов приемника, токи и активную мощность приемника.

Так как система напряжений на зажимах приемника несимметричная, режим работы трехфазной цепи будет несимметричный. Применим для расчета цепи метод симметричных составляющих. Расчет выполняем в следующей последовательности.

1) Разложим заданную несимметричную систему напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  на симметричные составляющие  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  по формулам (рис.7.16). Зная основные векторы симметричных составляющих, определим остальные векторы этих составляющих по формулам (7.8) - (7.10).

2) Определяем симметричные составляющие токов прямой последовательности и мощности прямой последовательности:  $\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1}; \underline{I}_{B1} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{Z}_1}; \underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{Z}_1}$ .

Проверка по токам:  $\underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = 0$ .

Активная мощность приемника прямой последовательности:  $P_1 = 3U_1 I_1 \cos \phi_1$ ,

реактивная мощность  $Q_1 = 3U_1 I_1 \sin \phi_1$ ,

полная мощность  $S_1 = 3U_1 I_1$ .

3) Определяем симметричные составляющие токов обратной последовательности и мощности обратной последовательности:

$$\underline{I}_{A2} = \frac{\underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2}; \underline{I}_{B2} = \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{Z}_2}; \underline{I}_{C2} = \frac{\underline{U}_{C2}}{\underline{Z}_2}.$$

Проверка по токам:  $\underline{I}_{A2} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{C2} = 0$ .

Активная мощность приемника обратной последовательности:  $P_2 = 3U_2 I_2 \cos \phi_2$ ,

реактивная мощность  $Q_2 = 3U_2 I_2 \sin \varphi_2$ ,

полная мощность  $S_2 = 3U_2 I_2$ .

5) Определяем симметричные составляющие токов нулевой последовательности и мощности нулевой последовательности:

$$\underline{I}_{A0} = \underline{I}_{B0} = \underline{I}_{C0} = \frac{U_0}{Z_0}.$$

Ток в нулевом проводе  $\underline{I}_N = 3\underline{I}_0$ .

Активная мощность приемника нулевой последовательности:  $P_0 = 3U_0 I_0 \cos \varphi_0$ ,

реактивная мощность  $Q_0 = 3U_0 I_0 \sin \varphi_0$ ,

полная мощность  $S_0 = 3U_0 I_0$ .

5) Определяем токи приемника по выражениям (рис.7.11):

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0}; \underline{I}_B = \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0}; \underline{I}_C = \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0}; \quad \underline{I}_N = 3\underline{I}_0.$$

Активная мощность приемника  $\underline{P} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_0$ ,

реактивная мощность  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_0$ ,

полная мощность  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

**Пример 7.1.** Симметричный приемник питается от генератора (рис.7.14) с несимметричной системой фазных напряжений (рис.7.15):

$$\underline{U}_A = 120B, \underline{U}_B = 120\ell^{-j90^\circ} B, \underline{U}_C = 120\ell^{j90^\circ} B.$$

Сопротивления приемника прямой последовательности:

$$\underline{Z}_1 = 3 + j1 = 3,16\ell^{j18,43^\circ} \text{ Ом},$$

обратной последовательности  $\underline{Z}_2 = 1 + j3 = 3,16\ell^{j71,57^\circ} \text{ Ом},$

нулевой последовательности  $\underline{Z}_0 = j1 = 1\ell^{j90^\circ} \text{ Ом}.$

Определить показания линейных амперметров и построить векторные диаграммы напряжений и токов.

**Р е ш е н и е:** 1. Систему фазных напряжений генератора разложим на симметричные составляющие по формулам (рис.7.16).

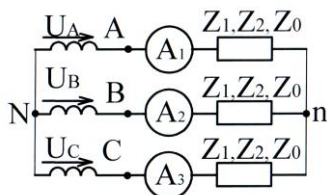


Рис. 7.14

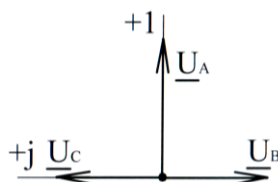


Рис. 7.15



Напряжение прямой последовательности:  $\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a}\underline{U}_B + \underline{a}^2\underline{U}_C)$ ;

$$\underline{U}_A = 120\text{В}, \quad \underline{a}\underline{U}_B = \ell^{j120^\circ} \cdot 120\ell^{-j90^\circ} = 120\ell^{j30^\circ} = (103,9 + j60)\text{В},$$

$$\underline{a}^2\underline{U}_C = \ell^{-j120^\circ} \cdot 120\ell^{j90^\circ} = 120\ell^{-j30^\circ} = (103,9 - j60)\text{В},$$

$$\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3}(120 + 103,9 + j60 + 103,9 - j60) = 109,3\text{В}.$$

Напряжение обратной последовательности:  $\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{a}^2\underline{U}_B + \underline{a}\underline{U}_C)$ ;

$$\underline{U}_A = 120\text{В}, \quad \underline{a}^2\underline{U}_B = \ell^{-j120^\circ} \cdot 120\ell^{-j90^\circ} = 120\ell^{-j210^\circ} = (-103,9 + j60)\text{В};$$

$$\underline{a}\underline{U}_C = \ell^{j120^\circ} \cdot 120\ell^{j90^\circ} = 120\ell^{j210^\circ} = (-103,9 - j60)\text{В};$$

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3}(120 - 103,9 + j60 - 103,9 - j60) = -29,3 = 29,3\ell^{-j180^\circ}\text{В}.$$

Напряжение нулевой последовательности:

$$\underline{U}_{A0} = \underline{U}_{B0} = \underline{U}_{C0} = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \frac{1}{3}(120 - j120 + j120) = 40\text{В}.$$

Проверка правильности разложения несимметричной системы напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  на симметричные составляющие  $\underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$  (по формулам 7.12):

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = 109,3 - 29,3 + 40 = 120\text{В};$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_B &= \underline{a}^2\underline{U}_{A1} + \underline{a}\underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = 109,3\ell^{-j120^\circ} + 29,3\ell^{-j180^\circ}\ell^{j120^\circ} + 40 = \\ &= -54,65 - j94,65 + 14,65 - j25,35 + 40 = -j120\text{В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_C &= \underline{a}\underline{U}_{A1} + \underline{a}^2\underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = 109,3\ell^{j120^\circ} + 29,3\ell^{-j180^\circ}\ell^{-j120^\circ} + 40 = \\ &= -54,65 + j94,65 + 14,65 + j25,35 + 40 = j120\text{В}. \end{aligned}$$

Векторные диаграммы симметричных составляющих напряжений и заданной системы фазных напряжений генератора построены на рис.7.16:

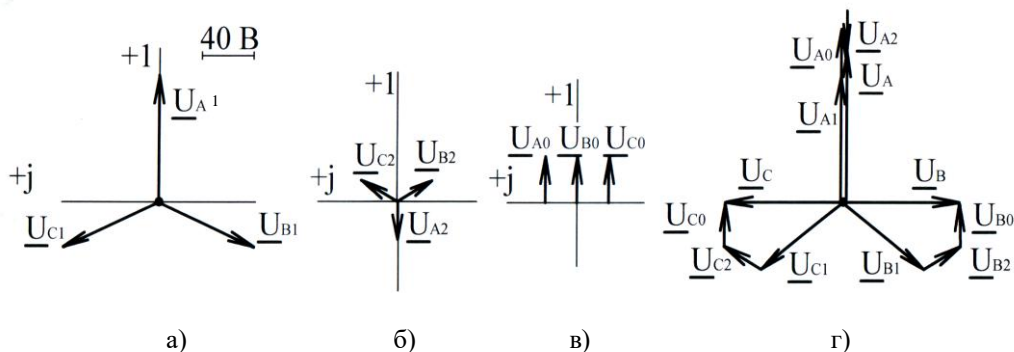


Рис. 7.16

рис.7.16,а – симметричная составляющая прямой последовательности; рис.7.16,б – обратной последовательности; рис.7.16,в – нулевой последовательности; рис.7.16,г – суммарная векторная диаграмма, дающая несимметричную систему фазных напряжений генератора.

2. Для прямой и обратной симметричных составляющих фазные напряжения генератора и приемника равны между собой, так как нагрузка фаз одинакова.

Узловое напряжение нулевой последовательности равно фазному напряжению нулевой последовательности, т.е.  $\underline{U}_{N0} = \underline{U}_{A0} = 40B$ . Токи нулевой последовательности при отсутствии нулевого провода (рис.7.14) равны нулю, так как  $Z_0 = \infty$ .

Фазные токи прямой последовательности определяем по закону Ома:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1} = \frac{109,3}{3,16\ell^{j18,43^\circ}} = 34,6\ell^{-j18,43^\circ} = (32,83 - j10,94) \text{ A.}$$

$$\underline{I}_{B1} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{Z}_1} = \frac{a^2 \underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1} = a^2 \underline{I}_{A1} = \ell^{-j120^\circ} \cdot 34,6\ell^{-j18,43^\circ} = 34,6\ell^{-j138,43^\circ} = (-25,9 - j22,96) \text{ A.}$$

$$\underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{Z}_1} = \frac{a \underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1} = a \underline{I}_{A1} = \ell^{j120^\circ} \cdot 34,6\ell^{-j18,43^\circ} = 34,6\ell^{j101,57^\circ} = (-6,94 + j34) \text{ A.}$$

Проверка:

$$\underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = 0; \quad 32,83 - j10,94 - 25,9 - j22,96 - 6,94 + j34 = (-0,01 + j0,1) \approx 0.$$

Фазные токи обратной последовательности:

$$\underline{I}_{A2} = \frac{\underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2} = \frac{29,3\ell^{-j180^\circ}}{3,16\ell^{j71,57^\circ}} = 9,272\ell^{j251,57^\circ} = (-2,931 - j8,796) \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{B2} = \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{Z}_2} = \frac{a \underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2} = a \underline{I}_{A2} = \ell^{j120^\circ} \cdot 9,272\ell^{j251,57^\circ} = 9,272\ell^{j371,57^\circ} = 9,272\ell^{j11,57^\circ} = (9,084 + j1,86) \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{C2} = \frac{\underline{U}_{C2}}{\underline{Z}_2} = \frac{a^2 \underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2} = a^2 \underline{I}_{A2} = \ell^{-j120^\circ} \cdot 9,272\ell^{j251,57^\circ} = 9,272\ell^{j131,57^\circ} = (-6,152 + j6,937) \text{ A.}$$

Проверка:

$$\underline{I}_{A2} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{C2} = 0; \quad -2,931 - j8,796 + 9,084 + j1,86 - 6,152 + j6,937 = 0,001 + j0,001 \approx 0.$$

3. Результирующие фазные (линейные) токи:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 32,83 - j10,94 - 2,931 - j8,796 = 29,9 - j19,74 = 35,83\ell^{-j33,43^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0} = -25,9 - j22,96 + 9,084 + j1,86 = 16,82 - j21,1 = 26,98\ell^{-j51,44^\circ} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0} = -6,94 + j34 - 6,152 + j6,937 = -13,09 + j40,937 = 42,98\ell^{j107,73^\circ} \text{ A.}$$

Показания амперметров:

$$A_1 \rightarrow I_A = 35,83 \text{ A}; \quad A_2 \rightarrow I_B = 26,98 \text{ A}; \quad A_3 \rightarrow I_C = 42,98 \text{ A}.$$

На рис.7.17 построены векторные диаграммы:

рис.7.17,а - диаграмма симметричных составляющих токов прямой последовательности;

рис.7.17,б - диаграмма токов обратной последовательности;

рис.7.17,в- диаграмма фазных токов приемника.

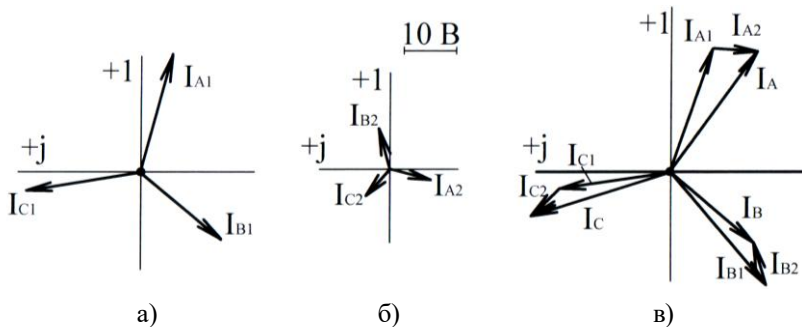


Рис. 7.17

## ГЛАВА 8. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

### 8.1. Разложение несинусоидальных токов в ряд Фурье

*Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называются токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.*

Явления, происходящие в линейных цепях при периодических, но несинусоидальных токах, проще всего поддаются исследованию, если кривую тока разложить в тригонометрический ряд Фурье.

Из курса математики известно, что любая функция  $f(\omega t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть представлена в виде ряда Фурье  $F(\omega t)$ . Следует иметь в виду, что все периодические функции, с которыми приходится иметь дело электрикам, удовлетворяют условиям Дирихле.

Ряд Фурье имеет следующий вид:

$$F(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots, \quad (8.1)$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая,

$A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$  – основная волна или первая гармоника, остальные члены ряда – высшие гармоники.

Основная частота  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  – период несинусоидальной периодической функции.

Применительно к периодическим несинусоидальным токам и напряжениям в выражении ряда Фурье (8.1) постоянные коэффициенты  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  и т.д. будут означать постоянную составляющую тока  $I_0$  и амплитуды токов первой гармоники  $I_{1m}$ , второй гармоники  $I_{2m}$  и т.д. (аналогично для напряжения).

Ряд Фурье можно представить в ином виде, если развернуть синусы сумм. Для общего члена ряда имеем:

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = A_k \cos \psi_k \sin k\omega t + A_k \sin \psi_k \cos k\omega t;$$

обозначив  $A_k \cos \psi_k = B_k$ ,  $A_k \sin \psi_k = C_k$ , получим:

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t. \quad (8.2)$$

С учетом (8.2) первая форма ряда Фурье (8.1) запишется в следующем виде:

$$F(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \dots + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t + \dots \quad (8.3)$$

Так как коэффициенты  $B$  и  $C$  зависят от начальных фаз, то они изменяются при изменении начала отсчета времени. Переход от второй формы ряда Фурье (8.3) к первой форме (8.1) совершается при помощи соотношений:

$$A_k = +\sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \operatorname{tg} \psi_k = \frac{C_k}{B_k}. \quad (8.4)$$

Коэффициенты  $A_0, B_k, C_k$  могут быть вычислены при помощи следующих интегралов (известных из курса математики):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t); \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t); \\ C_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Часто периодическая функция, подлежащая разложению в ряд Фурье, задается не аналитическим выражением, а в виде графика. В этих случаях применяют приближенные методы вычисления коэффициентов ряда. Один из простейших методов этого рода состоит в замене интегралов, определяющих коэффициенты  $A_0, B_k, C_k$  соответствующими суммами.

Существуют специальные измерительные приборы, с помощью которых измеряют амплитуды напряжений  $A_1, A_2, A_3 \dots$  ряда Фурье (8.1), называемые *гармоническими анализаторами*.

## 8.2. Некоторые свойства периодических кривых токов и напряжений, обладающих симметрией

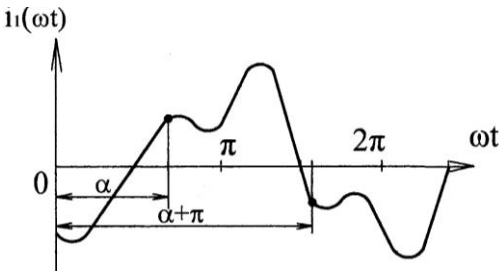


Рис. 8.1

Рассмотрим три вида кривых токов, обладающих симметрией.

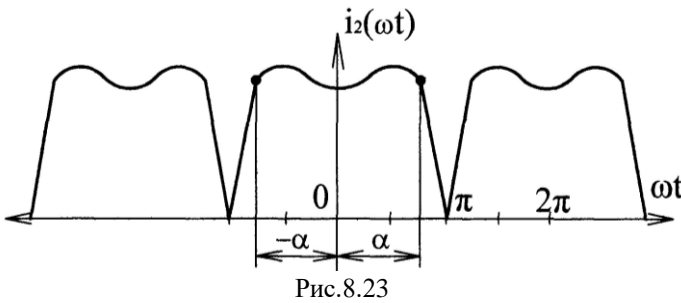
1) Кривые токов, симметричные относительно оси абсцисс. Для этих кривых справедливо следующее равенство:  $-i_1(\alpha + \pi) = i_1(\alpha)$ , где  $\alpha = \omega t$ .

Для кривых, симметричных относительно оси абсцисс (рис.8.1) ряд Фурье не содержит постоянной составляющей

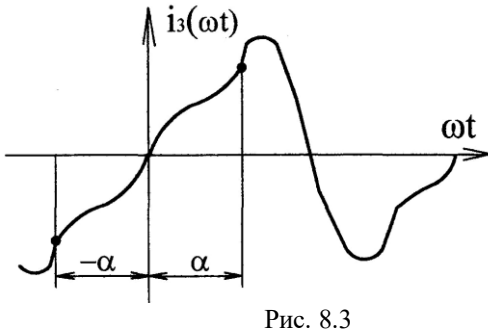
( $I_0 = 0$ ) и всех четных гармоник. При этом вторая форма ряда Фурье запишется следующим образом:  $I_1(\omega t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots$  (8.6)

2) Кривые токов, симметричные относительно оси ординат. Для них справедливо следующее равенство:  $i_2(-\alpha) = i_2(\alpha)$ .

Ряд Фурье для кривых, симметричных относительно оси ординат (рис.8.2) не содержит синусных составляющих и имеет только постоянную и косинусные составляющие:



$$I_2(\omega t) = I_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots (8.7)$$



3) Кривые токов, симметричные относительно начала координат (рис.8.3).

К ним относят кривые, удовлетворяющие следующему равенству:

$$-i_3(-\alpha) = i_3(\alpha).$$

Ряд Фурье для этих кривых содержит только синусные составляющие:

$$I_3(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots (8.8)$$

### 8.3 Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений

Определим зависимость между действующим значением периодического несинусоидального тока и действующими значениями отдельных гармоник, причем постоянную составляющую будем рассматривать как гармонику нулевого порядка.

По определению для квадрата действующего значения тока имеем:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt. (8.9)$$

Представляя ток в виде ряда Фурье:  $i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots$  (8.10)

и возведя этот ряд в квадрат, мы видим, что  $i^2$  можно представить как сумму квадратов отдельных гармоник и сумму удвоенных произведений их. В соответствии с этим  $I^2$  можно представить в виде двух сумм интегралов, а именно:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T 2i_q i_s dt, (8.11)$$

причем  $q \neq s$  и  $i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ .

Так как  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T 2i_q i_s dt = 0$ , то

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots,$$

т.е. квадрат действующего значения несинусоидального тока равен сумме квадратов действующих значений отдельных гармоник или:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots} \quad (8.12)$$

Аналогично определяется действующее значение несинусоидального напряжения:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots} \quad (8.13)$$

Для характеристики несинусоидальных кривых без постоянной составляющей применяют следующие коэффициенты:

1) Коэффициент искажения синусоидальности кривой напряжения: отношение действующего значения напряжения высших гармоник (до 40-й гармоники включительно) к действующему значению напряжения первой гармоники в

(процентах):

$$K_{uv} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{40} U_k^2}}{U_1} \cdot 100\% \quad (8.14)$$

2) Коэффициент  $k$ -ой гармонической составляющей напряжения: отношение действующего значения напряжения  $k$ -ой гармоники к действующему значению напряжения первой гармоники (в процентах):

$$K_{kv} = \frac{U_k}{U_1} \cdot 100\% \quad (8.15)$$

3) Коэффициент амплитуды: отношение максимального значения несинусоидального напряжения  $U_{max}$  к действующему значению  $U$ :

$$K_a = \frac{U_{max}}{U} \quad (8.16)$$

4) Коэффициент формы: отношение действующего значения несинусоидального напряжения к среднему значению:

$$K_\phi = \frac{U}{U_{cp}} \quad (8.17)$$

Несинусоидальные напряжения и токи могут измеряться приборами различных систем. Приборы электромагнитной и электродинамической систем измеряют действующие значения несинусоидальных напряжений и токов; магнитоэлектрические приборы измеряют постоянную составляющую; выпрямительные приборы измеряют среднее по модулю значение измеряемой величины; амплитудные электронные вольтметры измеряют максимальное значение напряжения.

## 8.4. Мощность периодических несинусоидальных токов

*Активная мощность* – среднее за период значение мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt, \quad (8.18)$$

где  $u, i$  – мгновенные значения несинусоидальных напряжения и тока – представлены рядами Фурье:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots \\ i &= i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Произведение  $u \cdot i$  будет представлено суммой произведений одноименных гармоник  $u_k i_k$  и суммой произведений разноименных гармоник напряжения  $u_q$  и тока  $i_s$ , причем  $q \neq s$ .

Подставив выражения (8.19) в формулу активной мощности (8.18), получим:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt. \quad (8.20)$$

Так как  $\int_0^T u_q i_s dt = 0$ , то  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q i_s dt = 0$ .

$$\text{Следовательно: } P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k i_k dt = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots, \quad (8.21)$$

$$\text{или } P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots \quad (8.22)$$

т.е. *активная мощность при несинусоидальных напряжении и токе равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.*

По аналогии с синусоидальным током можно также ввести понятие *реактивной мощности, определяемой суммой реактивных мощностей отдельных гармоник* (постоянные составляющие тока и напряжения реактивную мощность не создают):

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots + U_k I_k \sin \varphi_k + \dots \quad (8.23)$$

*Полная мощность по аналогии с синусоидальным током равна произведению действующих значений несинусоидальных напряжения и тока:*

$$S = UI. \quad (8.24)$$

*Коэффициент мощности при несинусоидальных напряжении и токе:*

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos \varphi_1 \frac{k_U}{k_I}, \quad (8.25)$$

где  $\cos \varphi_1$  - коэффициент мощности первой гармоники;

$k_U, k_I$  - коэффициенты искажения кривой напряжения и кривой тока.

Подставив значения  $\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1}, K_U = \frac{U_1}{U}, K_I = \frac{I_1}{I}$  в выражение (8.25), получим:



$$\chi = R_1 \frac{I}{U}, \quad (8.26)$$

где  $R_1$  – активное сопротивление цепи первой гармоники.

Максимальное значение коэффициентов искажения  $K_U$  и  $K_I$  равно единице при отсутствии высших гармоник; при наличии в кривых напряжения и тока высших гармоник  $K_U$  и  $K_I$  меньше единицы. Поэтому, если  $K_I > K_U$  (кривая тока меньше искажена, чем кривая напряжения), то как следует из выражения (8.25) коэффициент мощности  $\chi < \cos \varphi_1$ .

Для несинусоидальных токов в отличие от синусоидальных полная мощность  $S > \sqrt{P^2 + Q^2}$ . Величина  $T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$  называется *мощностью искажения*.

Отношение  $\frac{T}{S}$  характеризует степень различия по форме кривых напряжения и тока.

### 8.5. Влияние параметров цепи на форму кривой тока при несинусоидальном напряжении

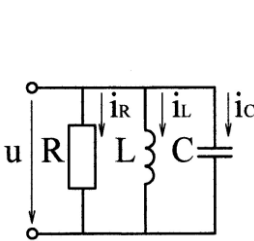


Рис.8.4

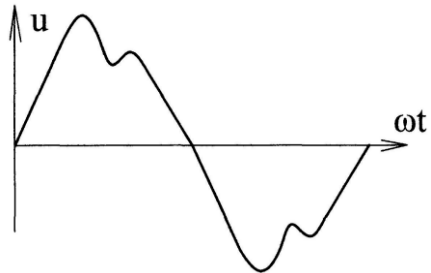


Рис. 8.5

В электрическую цепь (рис. 8.4) поочередно включаются идеальные резистор  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ . К цепи приложено несинусоидальное напряжение  $u$  (рис. 8.5). Определим, как влияет каждый из параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$  на форму кривой тока  $i_R, i_L, i_C$ .

*Электрическая цепь с сопротивлением  $R$ .*

При небольшом сечении проводника для гармоник с порядком  $k \approx 10$  сопротивление  $R$  для всех гармоник с частотой 50-500 Гц можно считать одинаковым, если пренебречь явлением поверхностного эффекта. Тогда сопротивление для 1-ой и  $k$ -ой гармоник:  $R_1 = R; R_k = R$ .

Амплитуды токов 1-ой и  $k$ -ой гармоник:  $I_{1m} = \frac{U_{1m}}{R}; I_{km} = \frac{U_{km}}{R}$ .

Отношение амплитуд токов  $k$ -ой и 1-ой гармоник:  $\frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{U_{km}}{U_{1m}}$ .

Следовательно, кривая тока в сопротивлении  $R$  будет подобна кривой напряжения (рис. 8.5).

*Электрическая цепь с индуктивностью  $L$ .*

Индуктивное сопротивление зависит от номера гармоник:

для первой гармоники  $X_{1L} = \omega L$ ,

для  $k$ -ой гармоники  $X_{kL} = k\omega L$ .

Амплитуды токов 1-ой и  $k$ -ой гармоник:  $I_{1m} = \frac{U_{1m}}{X_{1L}} = \frac{U_{1m}}{\omega L}$ ;  $I_{km} = \frac{U_{km}}{X_{kL}} = \frac{U_{km}}{k\omega L}$ .

Отношение амплитуд токов  $k$ -ой и 1-ой гармоник:  $\frac{I_{km}}{I_{1m}} = \frac{1}{k} \frac{U_{km}}{U_{1m}}$ .

Таким образом, в индуктивности, соотношение токов  $k$ -ой и 1-ой гармоник в  $k$  раз меньше соотношения соответствующих гармоник в кривой напряжения.

Следовательно, чем выше номер гармоники, тем больше будет индуктивное сопротивление и тем меньше будет амплитуда тока, т.е. индуктивное сопротивление сглаживает высшие гармоники в кривой тока. Поэтому кривая тока в индуктивности (рис. 8.6) меньше искажена по сравнению с кривой напряжения (рис. 8.5).

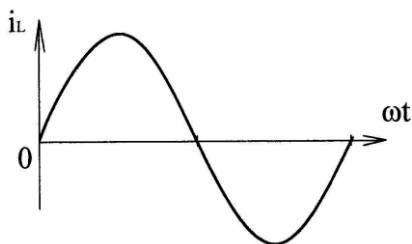


Рис.8.6

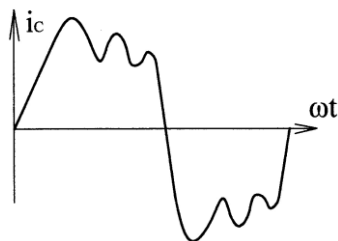


Рис.8.7

*Электрическая цепь с емкостью  $C$ .*

Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте:

для первой гармоники  $X_{1C} = \frac{1}{\omega C}$ ,

для  $k$ -ой гармоники  $X_{kC} = \frac{1}{k\omega C}$ .

Амплитуды токов 1-ой и  $k$ -ой гармоник:

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{X_{1C}} = \omega C U_{1m}; I_{km} = \frac{U_{km}}{X_{kC}} = k\omega C U_{km}.$$

Отношение амплитуд токов  $k$ -ой и 1-ой гармоник:  $\frac{I_{km}}{I_{1m}} = k \frac{U_{km}}{U_{1m}}$ , т.е.

соотношение токов  $k$ -ой и 1-ой гармоник в емкости в  $k$  раз больше соотношения этих гармоник в кривой напряжения.

Следовательно, чем выше номер гармоники, тем меньше будет емкостное сопротивление и тем больше будет амплитуда тока этой гармоники, т.е. емкостное сопротивление усиливает высшие гармоники в кривой тока. Поэтому кривая тока в емкости (рис. 8.7) более искажена, чем кривая напряжения (рис. 8.5).

## 8.6. Расчет линейных цепей при несинусоидальных токах

Если в линейной цепи действует один или несколько источников несинусоидального напряжения, то расчет такой цепи распадается на три этапа:

- 1) Разложение напряжения источника на синусоидальные составляющие.
- 2) Расчет электрической цепи для нулевой составляющей и каждой гармоники в отдельности. При этом применяются все известные методы расчета цепей при постоянных и синусоидальных напряжениях и токах.
- 3) Применение принципа наложения и расчет несинусоидальных токов и напряжений по данным, полученным для нулевой составляющей и отдельных гармоник.

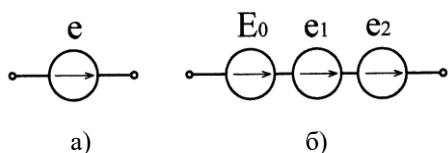


Рис.8.8

Предположим, что источник несинусоидальной ЭДС (рис. 8.8,а) содержит постоянную составляющую  $E_0$ , первую и вторую гармонику:

$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2),$$

то действие источника такой ЭДС аналогично действию трех последовательно

соединенных источников ЭДС (рис. 8.8,б):

$$e_0 = E_0, \quad e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1), \quad e_2 = E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2).$$

Действующее значение несинусоидальной ЭДС:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2}, \quad \text{где } E_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}}, E_2 = \frac{E_{2m}}{\sqrt{2}}.$$

Под действием этих ЭДС в цепи возникнут токи  $I_0, i_1, i_2$ , т.е. ток постоянной составляющей и синусоидальные токи 1-ой и 2-ой гармоник, причем  $i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k)$

Результирующий несинусоидальный ток равен:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2),$$

а его действующее значение:  $I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2}$ , где  $I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}, I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}$ .

При решении каждой из этих задач необходимо учитывать, что индуктивное  $X_L$  и емкостное  $X_C$  сопротивления для разных гармоник различны:  $X_L$  для  $k$ -ой гармоники в  $k$  раз больше, а  $X_C$ , наоборот, в  $k$  раз меньше, чем для первой:

$$X_{L1} = \omega L, X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}; \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega C}, X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C1}}{k}.$$

Для нулевой гармоники угловая частота равна нулю, поэтому:

$$X_{L0} = 0, X_{C0} = \infty.$$

Активное сопротивление с ростом частоты возрастает за счет поверхностного эффекта. Однако для невысоких частот и относительно малых сечений провода явлением поверхностного эффекта можно пренебречь, считая  $R$  не зависящим от частоты.

Зная параметры цепи для  $k$ -ой гармоники, нетрудно определить угол сдвига фаз:

$$\varphi_k = \arctg \frac{X_{Lk} - X_{Ck}}{R},$$

причем  $\varphi_k > 0$  при индуктивном характере нагрузки и  $\varphi_k < 0$  при емкостном характере нагрузки.

## 8.7. Резонанс напряжений при несинусоидальных токах и напряжениях

При несинусоидальных токах и напряжениях явление резонанса усложняется, так как возможны отдельные резонансы гармонических составляющих.

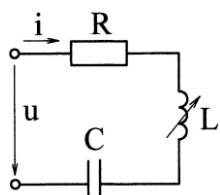


Рис. 8.9

Рассмотрим цепь с последовательным соединением  $R, L, C$  (рис. 8.9), в которой индуктивность  $L$  изменяется в широком диапазоне. К цепи приложено несинусоидальное напряжение.

Действующее значение несинусоидального тока  $k$ -ой гармоники:

$$I_k = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}. \quad (8.28)$$

Если индуктивность цепи постоянно увеличивать от нуля до максимального значения, то действующее значение тока каждой гармоники (8.28) будет изменяться по резонансной кривой:

$$\text{при } L = 0 \text{ ток } k\text{-ой гармоники минимальный: } I_{k0} = \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{k^2\omega^2 C^2}}};$$

$$\text{при резонансе напряжений: } k\omega L_p = \frac{1}{k\omega C},$$

$$\text{резонансная индуктивность } k\text{-ой гармоники: } L_{pk} = \frac{1}{k^2\omega^2 C}, \quad (8.29)$$

$$\text{ток } k\text{-ой гармоники достигает максимального значения: } I_{kp} = \frac{U_k}{R}.$$

Дальнейшее увеличение индуктивности приводит к уменьшению тока этой гармоники.

Из выражения (8.29) видно, что значение индуктивности, соответствующей резонансу  $k$ -ой гармоники обратно пропорционально квадрату номера гармоники: так, отношение резонансных индуктивностей третьей и пятой гармоник:

$$\frac{L_{p3}}{L_{p5}} = \frac{25}{9} = 2,78.$$

Кривая действующего значения несинусоидального тока  $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$  при достаточно малом  $R$  имеет три резко выраженных максимума (рис. 8.10), соответствующих резонансным значениям  $L_p$  различных гармоник.

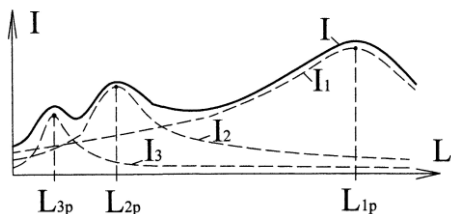


Рис. 8.10

Из изложенного видно, что соответствующим включением индуктивностей и емкостей и подбором их значений можно отдельные гармоники тока или напряжения ослаблять или усиливать. Эту задачу выполняют *резонансные электрические фильтры*.

Если электрические контуры (рис. 8.11) настроены в резонанс для  $k$ -ой гармоники,

то ток этой гармоники в сопротивлении нагрузки  $R_n$  будет значительно ослаблен,

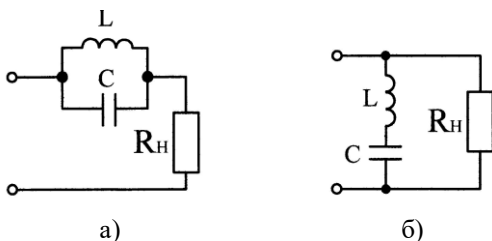


Рис. 8.11

так как в схеме (рис. 8.11,а) входное сопротивление контура для  $k$ -ой гармоники будет весьма велико (резонанс токов), а в схеме (рис. 8.11,б) — мало (резонанс напряжений). Поэтому в первом случае путь току  $k$ -ой гармоники закрыт, а во втором случае резонансная ветвь шунтирует ток  $k$ -ой гармоники. Следовательно, в обеих схемах ток  $k$ -ой гармоники в

нагрузку не проходит.

При необходимости устранить в кривой тока нагрузки несколько гармоник, в цепь включают последовательно ряд контуров, каждый из которых настроен на одну из гармоник (рис. 8.11,а) или параллельно с нагрузкой включают ряд соответствующим образом настроенных резонансных ветвей (рис. 8.11,б). Последний метод широко используется на выпрямительных подстанциях, питающих контактную сеть железных дорог.

## 8.8. Высшие гармоники в трехфазных цепях

### 8.8.1. Гармоники трехфазной системы напряжений, создающие симметричные системы прямой, обратной и нулевой последовательностей.

При наличии высших гармоник в кривых напряжений трехфазного генератора или трансформатора, некоторые соотношения, установленные ранее для симметрич-

ных трехфазных цепей, могут оказаться нарушенными.

В случае симметричной трехфазной системы несинусоидальных напряжений, каждое из напряжений ( $u_A, u_B, u_C$ ) повторяет по форме остальные со сдвигом на  $1/3$  периода и может быть разложено на гармоники. Постоянная составляющая в этих напряжениях обычно отсутствует.

Для  $k$ -ой гармоники различных фаз имеем:

$$\left. \begin{aligned} u_{kA} &= U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k); \\ u_{kB} &= U_{km} \sin\left[k\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \psi_k\right] = U_{km} \sin(k\omega t - 120^\circ k + \psi_k); \\ u_{kC} &= U_{km} \sin\left[k\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \psi_k\right] = U_{km} \sin(k\omega t + 120^\circ k + \psi_k). \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

Из выражений (8.30) следует, то напряжение  $k$ -ой гармоники фазы  $B$  отстает, а фазы  $C$  опережает напряжение фазы  $A$  на фазный угол, равный  $120^\circ k$ . Определим порядок следования фаз системы фазных напряжений для различных гармоник.

Для 1-ой гармоники фазный угол равен  $120^\circ k = 120^\circ$ , поэтому  $U_{B1}$  отстает от  $U_{A1}$  на угол  $120^\circ$ : система прямой последовательности.

Для 4-ой гармоники фазный угол  $120^\circ \cdot 4 = 480^\circ$  или  $480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$ : система прямой последовательности. Аналогично можно показать, что при  $k = 7, 10, 13$  и т.д. получаются системы напряжений прямой последовательности. Таким образом, если  $k$  принимает значения 1, 4, 7, 10, 13 и т.д., то  $k$ -ая гармоника напряжения фазы  $B$  отстает на  $120^\circ$  от  $k$ -ой гармоники напряжения фазы  $A$ .

*Следовательно, 1, 4, 7, 10, 13 и т.д. гармоники образуют системы прямой последовательности.*

Определим порядок следования фаз системы фазных напряжений при  $k=2$  и  $k=5$ : Для 2-й гармоники фазный угол  $120^\circ k = 120^\circ \cdot 2 = 240^\circ$ , т.е.  $U_B$  отстает от  $U_A$  на угол  $240^\circ$  или  $U_B$  опережает  $U_A$  на угол  $120^\circ$ . Следовательно, 2-ая гармоника создает систему напряжений обратной последовательности.

Для 5-й гармоники фазный угол  $120^\circ k = 120^\circ \cdot 5 = 600^\circ$ , или  $600^\circ - 360^\circ = 240^\circ$ . Следовательно, 5-ая гармоника тоже создает систему напряжений обратной последовательности.

Таким образом, если  $k = 2, 5, 8, 11, 14$  и т.д., то  $k$ -ая гармоника напряжения фазы  $B$  опережает на  $120^\circ$   $k$ -ую гармонику напряжения фазы  $A$ .

*Следовательно, 2, 5, 8, 11, 14 и т.д. гармоники образуют системы обратной последовательности.*

*Гармоники, кратные 3 ( $k = 3, 6, 9, 12$  и т.д.) образуют системы нулевой последовательности, т.е. третьи гармоники во всех трех фазах совпадают по фазе (рис. 8.12, а, в); фазный угол:*

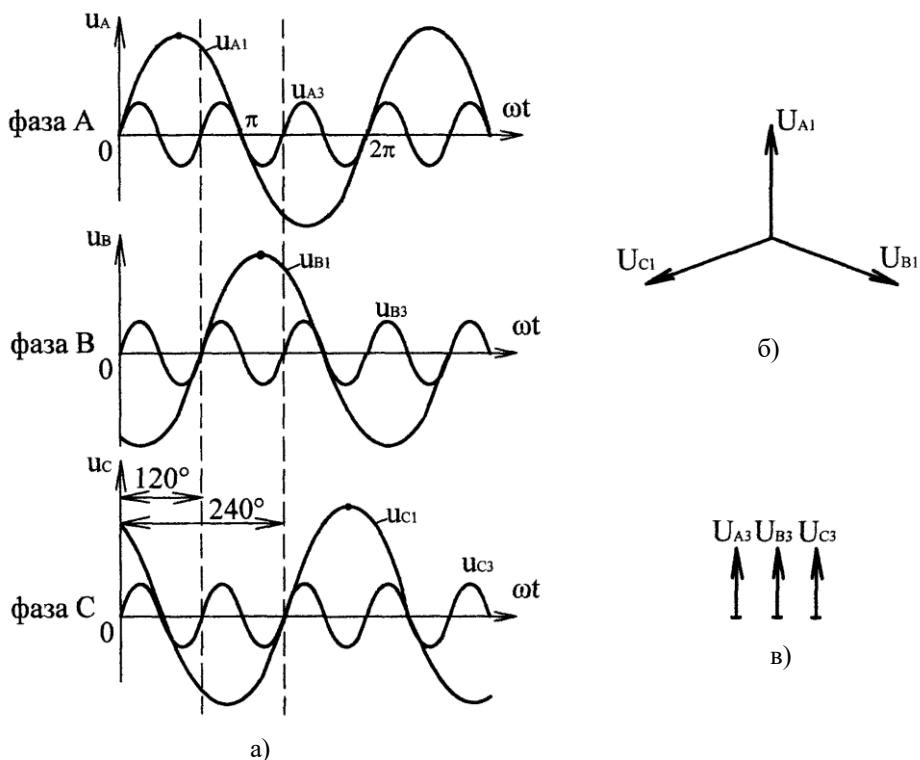


Рис. 8.12

$$120^\circ k = 120^\circ \cdot 3 = 360^\circ; \quad u_{A3} = u_{B3} = u_{C3} = U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3).$$

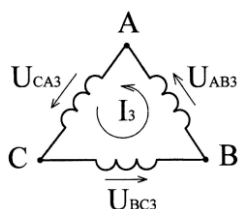


Рис.8.13

### 8.2.2 Особенности работы трехфазных систем, вызванные гармониками, кратными трем.

1. При соединении обмоток трехфазного генератора или трехфазного трансформатора в треугольник, по ним будут протекать токи гармоник, кратных 3, даже при отсутствии внешней нагрузки (рис. 8.13).

Комплексные напряжения третьей гармоники отдельных фаз одинаковы:

$$\underline{U}_{AB_3} = \underline{U}_{BC_3} = \underline{U}_{CA_3} = \underline{U}_3;$$

сумма напряжений трех фаз:  $\sum \underline{U}_3 = 3\underline{U}_3;$

сопротивления обмоток трех фаз одинаковы:  $\underline{Z}_{AB_3} = \underline{Z}_{BC_3} = \underline{Z}_{CA_3} = \underline{Z}_3,$

а их сумма  $\sum \underline{Z}_3 = 3\underline{Z}_3.$

Ток третьей гармоники  $I_3 = \frac{3U_3}{3Z_3} = \frac{U_3}{Z_3}$ . Аналогично определяются токи 6, 9, и т.д. гармоник. Тогда действующее значение тока в обмотках генератора (трансформатора) при отсутствии внешней нагрузки:  $I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$ . Гармоники напряжения не кратные 3 не создают токов в обмотках, так как алгебраическая сумма напряжений трех фаз равна нулю.

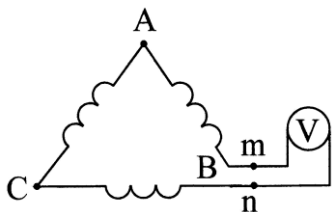


Рис. 8.14

2. Если соединить обмотки трехфазного генератора или трехфазного трансформатора в открытый треугольник (рис. 8.14), то при наличии в фазных напряжениях гармоник, кратным 3, на зажимах  $m-n$  будет напряжение, равное сумме напряжений гармоник, кратных 3:

$$u_{mn} = 3(u_3 + u_6 + u_9 \dots).$$

Действующие значения напряжений на зажимах  $m-n$ :  $U_{mn_3} = 3U_3$ ;  $U_{mn_6} = 3U_6$ ;  $U_{mn_9} = 3U_9$  и т.д.

Показание вольтметра будет равно:  $U_{mn} = 3\sqrt{U_3^2 + U_6^2 + U_9^2 + \dots}$ .

3. В линейном напряжении вне зависимости от того, звездой или треугольником соединены обмотки генератора или трансформатора, отсутствуют кратные 3 гармоники, так как:

а) Ток гармоник, кратных 3, создает в обмотках треугольника падения напряжения, в точности компенсирующие ЭДС, которые вызвали этот ток.

б) При соединении обмоток звездой линейные напряжения определяются геометрической разностью фазных напряжений (гармоники, кратные 3 равны по величине и совпадают по фазе – их разность равна нулю).

В фазном напряжении могут присутствовать все гармоники (постоянная составляющая обычно отсутствует). Поэтому  $U_\phi = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + \dots}$ .

В линейном напряжении отсутствуют гармоники, кратные 3, поэтому:

$$U_L = \sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots}$$

Следовательно, отношение  $\frac{U_L}{U_\phi} < \sqrt{3}$ .

4. В схеме соединения обмоток генератора или трансформатора  $Y/Y_n$  при симметричной нагрузке и отсутствии высших гармоник ток в нулевом проводе отсутствует. Однако, если в кривых тока имеются гармоники, кратные 3, то в нулевом проводе возникнет ток, который в симметричной цепи будет в 3 раза больше тока этих гармоник в каждой из фаз:  $I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$ .

При отсутствии нулевого провода, между нулевыми точками генератора  $N$  и приемника  $n$  возникает напряжение, созданное гармониками, кратными 3:



$$U_N = \sqrt{U_3^2 + U_6^2 + U_9^2 + \dots}$$

Величина этого напряжения может достигать значений, опасных для жизни.

Из всего изложенного в этой главе следует, что появление высших гармоник в электрических сетях представляет собой нежелательное явление. Оно приводит к снижению коэффициента мощности и возникновению дополнительных потерь, к возникновению резонанса для отдельных гармоник и появлению перенапряжений на отдельных участках сети, к появлению значительного тока в нулевом проводе при симметричной нагрузке, к возникновению в трехфазных электродвигателях магнитных полей, вращающихся против направления вращения ротора и, следовательно, вызывающих торможение ротора и добавочные потери в двигателях.

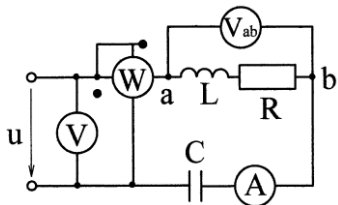


Рис. 8.15

**Пример 8.1.** Определить показания приборов, указанных на схеме (рис. 8.15), если  $R=6$  Ом,  $\omega L=20$  Ом,  $\frac{1}{\omega C}=18$  Ом, подведенное несинусоидальное напряжение задано в виде ограниченного ряда Фурье:

$$u = 107 \sin(\omega t - 13,33^\circ) + 27,1 \sin(3\omega t + 56,67^\circ) + 7,51 \sin(5\omega t - 131^\circ), \text{ В.}$$

**Решение:** 1) Расчет цепи для 1-ой гармоники.

$$u_1 = 107 \sin(\omega t - 13,33^\circ), \text{ В; } \underline{U}_{m1} = 107 \ell^{-j13,13^\circ},$$

$$U_1 = \frac{\underline{U}_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{107 \ell^{-j13,13^\circ}}{\sqrt{2}} = 75,89 \ell^{-j13,13^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{Z}_1 = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 6 + j(20 - 18) = 17,1 \ell^{-j69,44^\circ} \text{ Ом;}$$

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_{m1}}{\underline{Z}_1} = \frac{107 \ell^{-j13,13^\circ}}{17,1 \ell^{-j69,44^\circ}} = 6,26 \ell^{j56,31^\circ} \text{ А; } I_1 = \frac{\underline{I}_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{6,26 \ell^{j56,31^\circ}}{\sqrt{2}} = 4,44 \ell^{j56,31^\circ} \text{ А;}$$

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) = 6,26 \sin(\omega t + 56,31^\circ) \text{ А;}$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \phi_1 = 75,89 \cdot 4,44 \cdot \cos(-69,44^\circ) = 118,3 \text{ Вт.}$$

Для определения показания  $V_{ab}$  вычисляем комплексное сопротивление участка цепи  $\underline{Z}_{ab}$  и напряжение  $\underline{U}_{ab}$ :  $\underline{Z}_{ab1} = R + j\omega L = 6 + j2 = 6,324 \ell^{j18,43^\circ} \text{ Ом;}$

$$\underline{U}_{ab1} = \underline{Z}_{ab1} \underline{I}_1 = 6,324 \ell^{j18,43^\circ} \cdot 4,44 \ell^{j56,31^\circ} = 28,08 \ell^{j74,74^\circ} \text{ В.}$$

2) Расчет цепи для 3-й гармоники.

$$u_3 = 27,1 \sin(3\omega t + 56,67^\circ), \text{ В; } \underline{U}_{m3} = 27,1 \ell^{j56,67^\circ} \text{ В; } \underline{U}_3 = \frac{\underline{U}_{m3}}{\sqrt{2}} = 19,22 \ell^{j56,67^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{Z}_3 = R + j(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}) = 6 + j(6 - 6) = 6 \text{ Ом};$$

Для 3-й гармоники имеет место резонанс напряжений:

$$3\omega L = \frac{1}{3\omega C}; I_{m3} = \frac{U_{m3}}{\underline{Z}_3} = \frac{27,1 \ell^{j56,67^\circ}}{6} = 4,517 \ell^{j56,67^\circ} \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{I_{m3}}{\sqrt{2}} = 3,203 \ell^{j56,67^\circ} \text{ А}; \quad i_3 = I_{m3} \sin(3\omega t + \psi_{i3}) = 4,517 \sin(3\omega t + 56,67^\circ) \text{ А};$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 19,22 \cdot 3,203 \cdot \cos 0^\circ = 61,57 \text{ Вт}; \quad \underline{Z}_{ab3} = R + j3\omega L = 6 + j6 = 8,485 \ell^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{ab3} = \underline{Z}_{ab3} I_3 = 8,485 \ell^{j45^\circ} \cdot 3,203 \ell^{j56,67^\circ} = 27,1 \ell^{j101,67^\circ} \text{ В}.$$

3) Расчет цепи для 5-й гармоники.

$$u_5 = 7,51 \sin(5\omega t - 131^\circ) \text{ В}; \quad \underline{U}_{m5} = 7,51 \ell^{-j131^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_5 = \frac{\underline{U}_{m5}}{\sqrt{2}} = 5,326 \ell^{-j131^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_5 = R + j(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}) = 6 + j(10 - 3,6) = 6 + j6,4 = 8,773 \ell^{j46,85^\circ} \text{ Ом};$$

$$I_{m5} = \frac{\underline{U}_{m5}}{\underline{Z}_5} = \frac{7,51 \ell^{-j131^\circ}}{8,773 \ell^{j46,85^\circ}} = 0,856 \ell^{-j177,85^\circ} \text{ А}; \quad I_5 = \frac{I_{m5}}{\sqrt{2}} = 0,607 \ell^{-j177,85^\circ} \text{ А};$$

$$i_5 = I_{m5} \sin(5\omega t + \psi_{i5}) = 0,856 \sin(5\omega t - 177,85^\circ) \text{ А};$$

$$P_5 = U_5 I_5 \cos \varphi_5 = 5,326 \cdot 0,607 \cdot \cos 46,85^\circ = 2,21 \text{ Вт}.$$

$$\underline{Z}_{ab5} = R + j5\omega L = 6 + j10 = 11,665 \ell^{j59,04^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{U}_{ab5} = \underline{Z}_{ab5} I_5 = 11,66 \ell^{j59,04^\circ} \cdot 0,607 \ell^{-j177,85^\circ} = 7,078 \ell^{-j118,8^\circ} \text{ В}.$$

4) Определение несинусоидального тока и показаний приборов.

Несинусоидальный ток в цепи:

$$i = i_1 + i_3 + i_5 = 6,26 \sin(\omega t + 56,31^\circ) + 4,517 \sin(3\omega t + 56,67^\circ) + 0,856 \sin(5\omega t - 177,85^\circ) \text{ А}.$$

Показание вольтметра V:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{75,89^2 + 19,22^2 + 5,326^2} = 78,47 \text{ В}.$$

Показание вольтметра  $\underline{U}_{ab}$ :

$$U_{ab} = \sqrt{U_{ab1}^2 + U_{ab3}^2 + U_{ab5}^2} = \sqrt{28,08^2 + 27,1^2 + 7,078^2} = 39,66 \text{ В}.$$

Показание амперметра A:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = \sqrt{4,44^2 + 3,203^2 + 0,607^2} = 5,508 \text{ А}.$$

Показание ваттметра W:  $P = P_1 + P_3 + P_5 = 118,3 + 61,57 + 2,21 = 182,08 \text{ Вт}.$

$$u = 107 \sin(\omega t - 13,33^\circ) + 27,1 \sin(3\omega t + 56,67^\circ) + 7,51 \sin(5\omega t - 131^\circ).$$

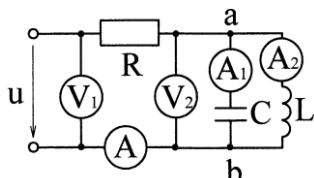


Рис. 8.16

**Пример 8.2.** К схеме (рис. 8.16) подведено напряжение  $u = 200 + 100 \sin 3\omega t$ , В. Определить показания приборов, если:  $R = 50$  Ом,  $\omega L = 5$  Ом,  $\frac{1}{\omega C} = 45$  Ом.

**Решение:** 1) Расчет цепи для постоянной составляющей напряжения:  $U_0 = 200$  В.

При постоянном токе угловая частота  $\omega_0 = 0$ , поэтому

$$X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \infty, X_{L0} = \omega_0 L = 0; I_{C0} = 0; I_{L0} = I_{R0} = \frac{U_0}{R} = \frac{200}{50} = 4 \text{ А}; U_{ab0} = I_{L0} X_{L0} = 0.$$

2) Расчет цепи для 3-ей гармоники.

$$U_3 = 100 \sin 3\omega t; \underline{U}_{m3} = 100 \ell^{j0^\circ} \text{ В}; \underline{U}_3 = \frac{\underline{U}_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,92 \text{ В};$$

$$X_{L3} = 3\omega L = 3 \cdot 5 = 15 \text{ Ом}; \underline{Z}_{L3} = 15 \ell^{j90^\circ} = j15 \text{ Ом}; X_{C3} = \frac{1}{3\omega C} = \frac{45}{3} = 15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{C3} = 15 \ell^{-j90^\circ} = -j15 \text{ Ом}; \underline{Z}_{ab3} = \frac{\underline{Z}_{L3} \underline{Z}_{C3}}{\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{C3}} = \frac{15 \ell^{j90^\circ} \cdot 15 \ell^{-j90^\circ}}{j15 - j15} = \frac{225}{0} = \infty.$$

В цепи для третьей гармоники имеет место резонанс токов. Так как контур  $L, C$  идеальный, входное сопротивление его равно  $\infty$ . Поэтому входное сопротивление

$$\text{цепи } \underline{Z}_3 = R + \underline{Z}_{ab3} = \infty, \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = 0.$$

$$\text{Напряжение на параллельных ветвях } \underline{U}_{ab3} = \underline{U}_3 - \underline{I}_3 R = 70,92 - 0 = 70,92 \text{ В}.$$

$$\text{Токи параллельных ветвей: } \underline{I}_{L3} = \frac{\underline{U}_{ab3}}{\underline{Z}_{L3}} = \frac{70,92}{15 \ell^{j90^\circ}} = 4,728 \ell^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C3} = \frac{\underline{U}_{ab3}}{\underline{Z}_{C3}} = \frac{70,92}{15 \ell^{-j90^\circ}} = 4,728 \ell^{j90^\circ} \text{ А}.$$

3) Показания приборов.

$$\text{Вольтметр } V_1 \rightarrow U = \sqrt{U_0^2 + U_3^2} = \sqrt{200^2 + 70,92^2} = 212,2 \text{ В};$$

$$\text{Вольтметр } V_2 \rightarrow U_{ab} = \sqrt{U_{ab0}^2 + U_{ab3}^2} = \sqrt{0 + 70,92^2} = 70,92 \text{ В};$$

$$\text{Амперметр } A \rightarrow I = \sqrt{I_{R0}^2 + I_3^2} = \sqrt{4^2 + 0} = 4 \text{ А};$$

$$\text{Амперметр } A_1 \rightarrow I_C = \sqrt{I_{C0}^2 + I_{C3}^2} = \sqrt{0 + 4,728^2} = 4,728 \text{ А};$$

$$\text{Амперметр } A_2 \rightarrow I_L = \sqrt{I_{L0}^2 + I_{L3}^2} = \sqrt{4^2 + 4,728^2} = 6,193 \text{ А};$$

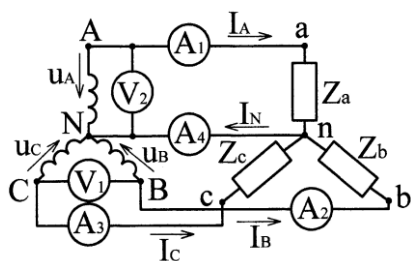


Рис. 8.17

**Пример 8.3.** Фазное напряжение симметричного генератора (рис.8.17), к которому подключена нагрузка:

$$\underline{Z}_{a1} = \underline{Z}_{b1} = \underline{Z}_{c1} = (6 + j8) \text{ Ом}$$

задается уравнением:

$$u_{\phi} = [120 + 100 \sin \omega t + 70 \sin 3\omega t] \text{ В.}$$

Определить показание приборов, указанных на схеме. Что покажут приборы при обрыве нулевого провода?

**Решение:** 1) Расчет трехфазной цепи для постоянной составляющей напряжения.  $U_{\phi 0} = 120 \text{ В}$ ;  $U_{L0} = 0$ ;  $\underline{Z}_0 = 6 \text{ Ом}$ , индук-е сопро-т-е нагрузки  $X_{L0} = 0$ .

При симметричных генераторе и приемнике фазные напряжения генератора и приемника одинаковы  $U_{\phi 0} = 120 \text{ В}$ . При наличии нулевого провода, сопротивление

которого равно нулю  $\underline{I}_{A0} = \underline{I}_{B0} = \underline{I}_{C0} = \underline{I}_0 = \frac{U_{\phi 0}}{\underline{Z}_0} = \frac{120}{6} = 20 \text{ А}$ ;

Ток в нулевом проводе  $\underline{I}_{N0} = \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{B0} + \underline{I}_{C0} = 3I_0 = 60 \text{ А}$ .

2) Расчет трехфазной цепи для 1-ой гармоники.

$$u_{\phi 1} = 100 \sin \omega t; U_{m\phi 1} = 100 \text{ В}; U_{\phi 1} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,92 \text{ В.}$$

Линейное напряжение:  $U_{L1} = \sqrt{3}U_{\phi 1} = 122,8 \text{ В}$ .

Линейные токи:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_{a1}} = \frac{U_{\phi 1}}{\underline{Z}_1} = \frac{70,92}{6 + j8} = \frac{70,92}{10 \angle j53,13^\circ} = 7,092 \angle -j53,13^\circ = (4,255 - j5,674) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B1} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{Z}_{b1}} = \frac{U_{\phi 1} \angle -j120^\circ}{\underline{Z}_1} = \frac{70,92 \angle -j120^\circ}{10 \angle j53,13^\circ} = 7,092 \angle -j173,13^\circ = (-7,041 - j0,848) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C1} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{Z}_{c1}} = \frac{U_{\phi 1} \angle j120^\circ}{\underline{Z}_1} = \frac{70,92 \angle j120^\circ}{10 \angle j53,13^\circ} = 7,092 \angle 66,87^\circ = (2,768 + j6,522) \text{ А}.$$

$$\underline{I}_{A1} = \underline{I}_{B1} = \underline{I}_{C1} = I_1 = 7,092 \text{ А}.$$

Ток в нулевом проводе:

$$\underline{I}_{N1} = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{C1} = 4,255 - j5,674 - 7,041 - j0,848 + 2,786 + j6,522 = 0.$$

3) Расчет трехфазной цепи для третьей гармоники.

$$u_{\phi 3} = 70 \sin 3\omega t; U_{m\phi 3} = 70 \text{ В}; U_{\phi 3} = \frac{U_{m\phi 3}}{\sqrt{2}} = \frac{70}{\sqrt{2}} = 49,65 \text{ В.}$$

Линейное напряжение третьей гармоники  $U_{L3} = 0$ .

Линейные токи:

$$\underline{I}_{A3} = \underline{I}_{B3} = \underline{I}_{C3} = \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{\phi 3}}{\underline{Z}_3} = \frac{49,65}{6 + j24} = \frac{49,65}{24,74 \angle j75,96^\circ} = 2,007 \angle -j75,96^\circ = (0,4868 - j1,9467) \text{ A};$$

Ток в нулевом проводе  $\underline{I}_{N3} = 3\underline{I}_3 = 3 \cdot 2,007 \angle -j75,96^\circ = 6,021 \angle -j75,96^\circ = (1,461 - j5,841) \text{ A}$ .

4) Показания приборов.

Вольтметр  $V_1$  измеряет линейное напряжение:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{U_{\text{л}0}^2 + U_{\text{л}1}^2 + U_{\text{л}3}^2} = \sqrt{0 + 122,8^2 + 0} = 122,8 \text{ В}.$$

Вольтметр  $V_2$  измеряет фазное напряжение:

$$U_{\phi} = \sqrt{U_{\phi 0}^2 + U_{\phi 1}^2 + U_{\phi 3}^2} = \sqrt{120^2 + 70,92^2 + 49,65^2} = 148 \text{ В}.$$

Амперметры  $A_1, A_2, A_3$  измеряют линейные (фазные) токи:

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{20^2 + 7,092^2 + 2,007^2} = 21,31 \text{ А}.$$

Амперметр  $A_4$  измеряет ток в нулевом проводе

$$I_N = \sqrt{I_{N0}^2 + I_{N1}^2 + I_{N3}^2} = \sqrt{60^2 + 0 + 6,021^2} = 60,3 \text{ А}.$$

При обрыве нулевого провода показания вольтметров не изменятся, а показания амперметров  $A_1, A_2, A_3$  будут равны:

$$I_A = I_B = I_C = I_1 = 7,092 \text{ А, амперметр } A_4 \text{ покажет ноль.}$$

## ГЛАВА 9. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

### 9.1. Основные понятия и величины, характеризующие магнитное поле. Закон полного тока

К особому виду материи относится *электромагнитное поле*, составляющими которого являются *электрическое и магнитное поля*.

Наличие магнитного поля в пространстве обнаруживается по возникновению ЭДС в движущихся в магнитном поле проводниках или по возникновению механических сил, действующих на незаряженный проводник с электрическим током.

Магнитное поле характеризуется индукцией  $\vec{B}$ , намагниченностью  $\vec{J}$  и напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$ .

*Магнитная индукция*  $\vec{B}$  – векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на электрический ток, а также способность магнитного поля при его изменении возбуждать индуцированное электрическое поле.

Единица измерения магнитной индукции – тесла (Тл). Размерность Тл:

$$[Tл] = \left[ \frac{Вб}{м^2} \right] = \left[ \frac{В \cdot с}{м^2} \right].$$

*Намагниченность (интенсивность намагничивания)*  $\vec{J}$  – векторная величина, характеризующая состояние вещества, приобретаемое им в результате его намагничивания.

*Напряженность магнитного поля*  $\vec{H}$  – векторная величина, характеризующая магнитный эффект электрического тока в независимости от среды (вещества), находящейся в магнитном поле.

Единицей измерения намагниченности и напряженности магнитного поля является  $\left[ \frac{А}{м} \right]$  или  $\left[ \frac{А}{см} \right]$ .

Три величины  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  связаны друг с другом для изотропной среды следующим соотношением: 
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{H}), \quad (9.1)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная (абсолютная магнитная проницаемость вакуума):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ Гн/см}. \quad (9.2)$$

Изотропной средой называется такая среда, для которой магнитные свойства по всем направлениям одинаковы.

Намагниченность прямо пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$\vec{J} = k_M \vec{H}, \quad (9.3)$$

где  $k_M$  – магнитная восприимчивость – способность вещества намагничиваться под действием внешнего магнитного поля. Для ферромагнитных веществ  $k_M$  является функцией от  $H$ .

Подставив (9.3) в (9.1) получим:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} (1 + k_M) = \mu_0 \vec{H}, \quad (9.4)$$

$$\mu_a = \mu_0 (1 + k_M) = \frac{B}{H} \quad (9.5)$$

– абсолютная магнитная проницаемость, характеризующая магнитные свойства вещества, скалярная величина, измеряемая в  $\left[ \frac{Гн}{м} \right]$ .

Магнитная проницаемость зависит от строения и магнитного состояния вещества и в общем случае изменяется с изменением напряженности магнитного поля.

Отношение абсолютной магнитной проницаемости  $\mu_a$  к магнитной постоянной  $\mu_0$  называется *относительной магнитной проницаемостью*  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}, \quad (9.6)$$

т.е.  $\mu$  показывает во сколько раз магнитное поле в веществе сильнее, чем в пустоте.

Магнитный поток  $\Phi$  есть поток вектора магнитной индукции через площадь  $S$ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (9.7)$$

где  $d\vec{S}$  – элемент поверхности  $S$ .

Магнитный поток измеряется в веберах:  $[B\sigma] = [B \cdot c]$ .

Если в пределах поверхности  $S$  магнитное поле можно считать однородным, а направление вектора  $\vec{B}$  нормально к  $S$ , то  $\Phi = BS$  (9.8)

Линии магнитной индукции (называемые часто неправильно как силовые магнитные линии) *всегда замкнуты*, т.е. не имеют ни начала, ни конца. Поэтому магнитный поток, входящий внутрь произвольной замкнутой поверхности, равен

потoku, выходящему из поверхности, и, следовательно:  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ . (9.9)

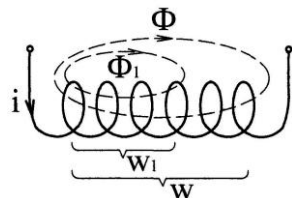


Рис. 9.1

Последнее выражение является аналитическим выражением *принципа непрерывности магнитного потока*.

В расчетах широко используется понятие *потокосцепления*, равное сумме произведений потока на число витков контура, сцепляющихся с этим потоком:

$$\psi = \sum \Phi w. \quad (9.10)$$

Единица измерения потокосцепления та же, что и магнитного потока.  
В качестве примера на рис. 9.1 приведено определение потокосцепления:

$$\psi = \Phi w + \Phi_1 w_1.$$

*Закон полного тока.*

Магнитное поле создается электрическими токами.

Количественная связь между линейным интегралом от вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  вдоль любого произвольного контура и алгебраической суммой токов  $\sum i$ , охваченных этим контуром, определяется законом полного тока:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum i. \quad (9.11)$$

*Закон полного тока* формулируется следующим образом:

Линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура равен полному току, пронизывающему замкнутый контур.

Под полным током понимают весь ток (ток проводимости, ток смещения и переноса), пронизывающий контур интегрирования.

На рис. 9.2 показаны три варианта составления уравнений по закону полного тока:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum i = -i_1 + i_2 - i_3; \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = i_1 + i_2 + i_3;$$

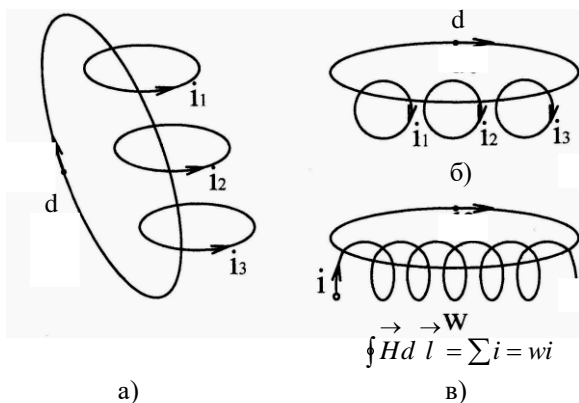


Рис. 9.2

а) замкнутый контур интегрирования пронизывается токами, имеющими разное направление;

б) то же, что в п. а, но токи имеют одинаковое направление;

в) замкнутый контур пронизывается током катушки с  $w$  числом витков.

Следует иметь в виду, что направление тока, пронизывающего контур и направление контура  $d\vec{l}$  связаны между собой правилом правого винта.

Закон полного тока может быть экспериментально проверен путем измерения

$\oint \vec{H} d\vec{l}$  с помощью магнитного пояса.



## 9.2 Основные характеристики ферромагнитных материалов

Из курса физики известно, что все вещества в отношении их магнитных свойств делятся на три группы: диамагнитные, парамагнитные и ферромагнитные. У *диамагнитных веществ* относительная магнитная проницаемость  $\mu$  немного меньше единицы (для висмута  $\mu = 0,99983$ ). У *парамагнитных веществ*  $\mu$  немного больше единицы (для платины  $\mu = 1,00036$ ).

У *ферромагнитных веществ* (железо, никель, кобальт и их сплавы)  $\mu$  много больше единицы (до  $10^4$ , а у некоторых материалов даже до  $10^6$ ).

В электротехнике все вещества делят на ферромагнитные и неферромагнитные. У ферромагнитных веществ  $\mu \gg 1$ , у всех неферромагнитных веществ  $\mu$  практически равно единице. Ферромагнитные материалы имеют большое значение в электротехнике.

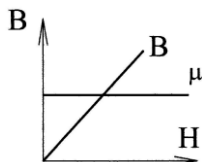


Рис. 9.3

Для неферромагнитных материалов относительная магнитная проницаемость  $\mu$  является величиной постоянной (рис. 9.3), т.е.  $\mu$  не зависит от  $H$ , а зависимость  $B(H)$  прямолинейна.

Для ферромагнитных материалов магнитная проницаемость изменяется с изменением  $H$ , т.е. ферромагнетики являются нелинейными материалами.

Свойства ферромагнитных материалов характеризует зависимость  $B(H)$ . Если предварительно размагниченный ферромагнитный материал ( $B = 0$ ,  $H = 0$ ) намагничивать, монотонно увеличивая  $H$ , то зависимость между  $B$  и  $H$ , имеющая место при этом процессе, называется *начальной кривой намагничивания* (рис. 9.4).

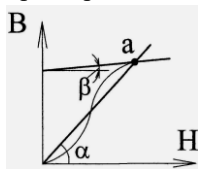


Рис. 9.4

Как известно из курса физики, ферромагнитные тела состоят из областей самопроизвольного (спонтанного) намагничивания. Каждая область определенным образом намагничена, и магнитное состояние ее характеризуется

вектором намагниченности  $\vec{J}_i$ . Направление  $\vec{J}_i$  зависит от внутренних упругих напряжений и от кристаллической структуры ферромагнитного тела.

$\vec{J}_i$  определенных областей направлены в разные стороны, поэтому во внешнем по отношению к ферромагнитной среде пространстве намагниченность ферромагнитного тела ни в чем не проявляется. Если же ферромагнитное тело поместить во внешнее магнитное поле, то под действием этого поля векторы

намагниченности определенных областей  $\vec{J}_i$  будут поворачиваться по внешнему полю. В результате этого магнитная индукция результирующего магнитного поля оказывается во много раз (сотни и даже сотни тысяч раз) больше чем магнитная индукция воздействующего на ферромагнетик внешнего поля.

С ростом внешнего поля все большее число спонтанных областей становится ориентированным по полю. Когда все области будут ориентированы по внешнему полю, наступит насыщение ферромагнетика. Напряженность внешнего поля, соответствующая насыщению ферромагнитного материала, обозначается  $H_S$ . При

$H \geq H_S$  намагниченность  $\vec{J}_i$  становится постоянной. Магнитная индукция  $B_S$ , соответствующая напряженности  $H_S$ :  $B_S = \mu_0 (H_S + J_S)$  (9.12)

называется индукцией насыщения. В ферромагнетике векторы  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{J}$  совпадают, поэтому от векторов можно перейти к модулям.

По кривой первоначального намагничивания (рис. 9.4) могут быть определены, например, в точке «а» статическая магнитная проницаемость:

$$\mu_{ст} = \frac{B}{H} = m_{\mu} \operatorname{tg} \alpha \quad (9.13)$$

и дифференциальная магнитная проницаемость (рис. 9.5)

$$\mu_0 = \frac{dB}{dH} = m_{\mu} \operatorname{tg} \beta, \quad (9.14)$$

где  $m = \frac{m_B}{m_H}$  – масштаб магнитной проницаемости, равный отношению масштаба индукции  $m_B$  к масштабу напряженности магнитного поля  $m_H$ .

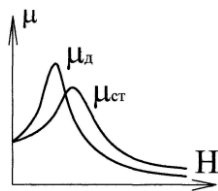


Рис. 9.5

При размагничивании, т.е. при уменьшении напряженности поля от  $H_{\max}$  до нуля, кривая идет выше кривой первоначального намагничивания (рис.9.4), и при отсутствии внешнего магнитного поля ( $H = 0$ ) магнитная индукция в ферромагнетике равна остаточной индукции  $B_r$  (рис. 9.6). Величина напряженности поля обратного знака, необходимая для полного размагничивания ферромагнетика, называется коэрцитивной силой  $H_C$  (задерживающей силой).

Дальнейшее намагничивание в обратном направлении  $H < 0$  вплоть до  $-H_{\max}$

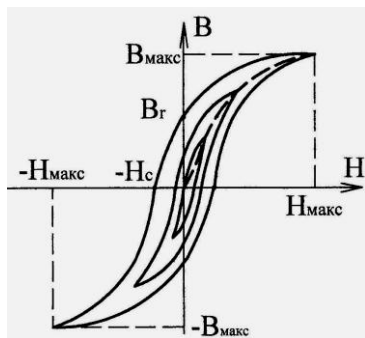


Рис. 9.6

приводит к значению индукции  $-B_{\max}$ . Переход от  $-B_{\max}$  к  $B_{\max}$ , соответствующей изменению напряженности поля от  $-H_{\max}$  до  $H_{\max}$  совершается по нижней ветви кривой (рис. 9.6), симметричной верхней ветви.

Отставание изменения магнитной индукции от изменения напряженности магнитного поля называется магнитным гистерезисом.

Кривая (рис. 9.6) носит название петли гистерезиса. Для получения устойчивой петли гистерезиса необходимо многократное перемагничивание

ферромагнетика в пределах от  $H_{\text{макс}}$  до  $-H_{\text{макс}}$ . Кривая соединяющая вершины петель гистерезиса, снятых для разных  $H_{\text{макс}}$ , называется *основной кривой намагничивания*. Она практически совпадает с кривой первоначального намагничивания. В справочниках приводится основная кривая намагничивания. Энергия, затрачиваемая источником на циклическое перемагничивание единицы объема вещества  $\Delta W_{\Gamma}$ , определяется площадью  $S_{\Pi}$  гистерезисной петли, т.е.

$$\Delta W_{\Gamma} = m_B \cdot m_H \cdot S_{\Pi} . \quad (9.15)$$

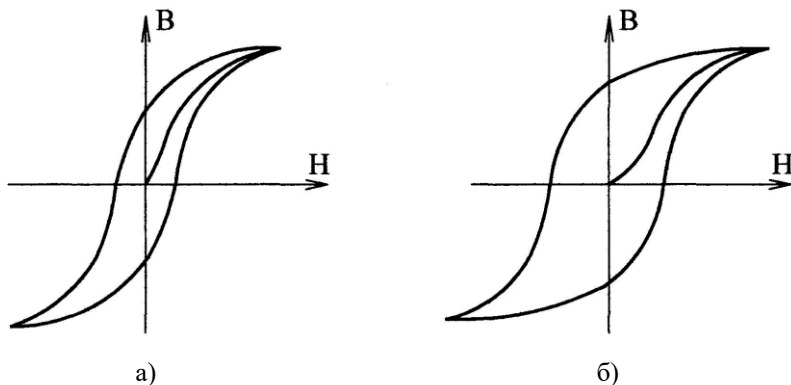


Рис. 9.7

Все ферромагнитные материалы могут быть подразделены на две группы: магнитомягкие и магнитотвердые.

*Магнитомягкие материалы* обладают крутоподнимающейся основной кривой намагничивания (рис. 9.7,а) и относительно малыми площадями гистерезисных петлей (коэрцитивная сила мала). Они применяются во всех устройствах, которые работают при периодически изменяющемся магнитном потоке (в трансформаторах, электродвигателях, генераторах, индуктивных катушках и т.п.). К магнитомягким материалам относятся электротехнические стали, железоникелевые сплавы типа пермаллоя и др.

*Магнитотвердые материалы* обладают пологоподнимающейся основной кривой намагничивания и большой площадью гистерезисной петли. Для них  $B_r = 0,5 - 1,25$  Тл и  $H_c = 5000 - 6500$  А/м. В группу магнитотвердых материалов входят углеродистые стали, вольфрамовые сплавы, сплавы магнито, платино-кобальтовые сплавы и др. Из магнитотвердых материалов выполняют постоянные магниты.

### 9.3. Магнитная цепь

Магнитной цепью называется совокупность магнитодвижущих сил (МДС), ферромагнитных или каких-либо иных тел или сред, по которым замыкается магнитный поток.

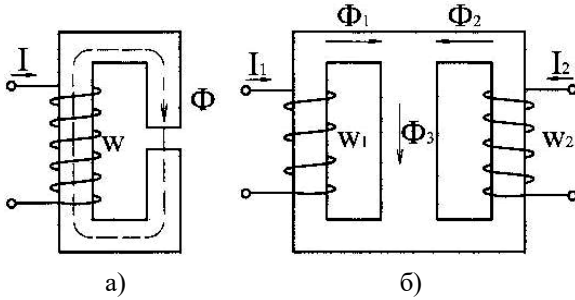


Рис. 9.8

Магнитные цепи могут быть подразделены на разветвленные и неразветвленные (рис. 9.8).

МДС вдоль замкнутого контура катушки с током  $F = \oint \vec{H} d\vec{l}$  равна произведению  $Iw = F$ .

Единица измерения МДС – ампер. МДС вызывает магнитный поток в магнитной цепи

подобно тому, как ЭДС вызывает электрический ток в электрической цепи. Как и ЭДС, МДС есть величина направленная. Положительное направление ее обозначается на схеме стрелкой. Положительное направление МДС совпадает с движением острия правого винта, если его вращать по направлению тока в обмотке.

Падением магнитного напряжения (разность скалярных магнитных потенциалов) между точками  $a$  и  $b$  магнитной цепи называется линейный интеграл от напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля между этими точками:

$$U_{Mab} = \int_a^{b \rightarrow} \vec{H} d\vec{l} . \quad (9.16)$$

Если на этом участке  $\vec{H}$  постоянна и совпадает по направлению с элементом пути  $d\vec{l}$ , то  $\vec{H} d\vec{l} = H dl \cos 0^\circ$  и  $H$  можно вынести из под знака интеграла, тогда:

$$U_{Mab} = H \int_a^b dl = H l_{ab} , \quad (9.17)$$

где  $l_{ab}$  – длина пути между точками  $a$  и  $b$ .

Магнитное напряжение измеряется в амперах.

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками  $a$  и  $b$  может быть подразделен на  $n$  отдельных частей так, что для каждой части  $H = H_k$  постоянна, то

$$U_{Mab} = \sum_{k=1}^n H_k l_k . \quad (9.18)$$

## 9.4. Законы магнитной цепи

Рассмотрим неразветвленную магнитную цепь (рис. 9.9). Магнитный поток  $\Phi$ , замыкающийся по магнитопроводу, называется *основным потоком*. Магнитный поток  $\Phi_S$ , замыкающийся частично по участку магнитной цепи, а частично – по воздуху, называется *поток рассеяния*.

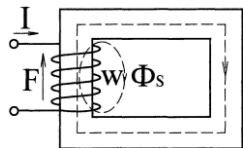


Рис. 9.9

Применяя закон полного тока к контуру, совпадающему со средней магнитной линией длиной  $l$ , получим:

$$F = Iw = \oint H dl = Hl. \quad (9.19)$$

Напряженность магнитного поля определим из выражения (9.5):  $H = \frac{B}{\mu_a}$ , а магнитную индукцию – из (9.8):  $B = \frac{\Phi}{S}$ , где  $S$  – поперечное сечение магнитной цепи, одинаковое для всех участков.

Подставив выражения  $B$  и  $H$  в (9.19), получим:

$$F = \frac{B}{\mu_a} l = \frac{\Phi l}{\mu_a S} = \Phi R_M, \quad (9.20)$$

откуда

$$\Phi = \frac{F}{R_M}, \quad (9.21)$$

где

$$R_M = \frac{l}{\mu_a S} \quad (9.22)$$

магнитное сопротивление цепи. Поскольку абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$  ферромагнитных материалов зависит от магнитной индукции и, следовательно, от магнитного потока  $\Phi$ , магнитное сопротивление  $R_M$  является функцией от потока  $\Phi$ , т.е. нелинейно. Магнитное сопротивление измеряется:  $[R_M] = \left[ \frac{1}{\Gamma_H} \right] = \left[ \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{с}} \right]$ . Выражение (9.21) является *законом Ома для магнитной цепи* (аналогично закону Ома для электрической цепи постоянного тока).

Исходя из принципа непрерывности магнитного потока (9.9) для узла магнитной цепи можно записать:  $\sum \Phi = 0$  –

– *первый закон Кирхгофа для магнитной цепи*: алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю.

Для замкнутого контура магнитной цепи имеем выражение (9.19), а с учетом (9.20) можем записать:

$$F = Hl = \Phi R_M$$

Для контура с несколькими МДС  $F_K$  и несколькими участками магнитной цепи  $l_K$  получим:

$$\sum F_K = \sum H_K l_K = \sum \Phi_K R_{MK} \quad (9.24)$$

– *второй закон Кирхгофа для магнитной цепи*: алгебраическая сумма МДС в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраической сумме магнитных напря-

жений в том же контуре.

*Правила составления уравнений по законам Кирхгофа для магнитной цепи.*  
(Они аналогичны правилам для электрической цепи).

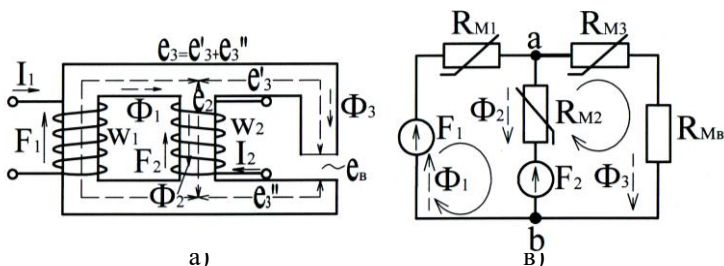


Рис. 9.10

1) Для магнитной цепи рис. 9.10,а составляется эквивалентная схема рис. 9.10,б, на которой МДС обозначается так же как ЭДС, а магнитное сопротивление для участков цепи, выполненных из ферромагнитных материалов – так же как нелинейное электрическое сопротивление, а для участков цепи из неферромагнитных – как линейные электрические сопротивления.

2) Составляем уравнение по первому закону Кирхгофа для схемы 9.10,б: так как схема содержит два узла – необходимо составить одно уравнение:

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (9.25)$$

3) По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи необходимо составить два уравнения, так как всего неизвестно три магнитных потока. Определив положительные направления МДС  $F_1$  и  $F_2$ , исходя из направлений токов  $I_1$  и  $I_2$  и направлений катушек  $w_1$  и  $w_2$ , и величины МДС:  $F_1 = I_1 w_1$ ,  $F_2 = I_2 w_2$ , задавшись направлениями обхода по независимым контурам, составляем уравнения (правила определения знаков МДС и магнитных напряжений те же, что и для электрической цепи):

для левого контура: 
$$F_1 - F_2 = \Phi_1 R_{M1} + \Phi_2 R_{M2}; \quad (9.26)$$

для правого контура: 
$$F_2 = -\Phi_2 R_{M2} + \Phi_3 R_{M3} + \Phi_3 R_{MB}. \quad (9.27)$$

В практических расчетах уравнения в таком виде не применяются, так как магнитные сопротивления нелинейны и неизвестны. В справочниках приводятся *основные кривые намагничивания* для различных ферромагнитных материалов, по которым легко определить напряженность магнитного поля  $H_K$  по заданной магнитной индукции  $B_K$ . Поэтому магнитные напряжения для отдельных участков магнитной цепи определяются как произведения  $H_K l_K$ . Тогда уравнения (9.24) и (9.25) запишутся следующим образом:

$$F_1 - F_2 = H_1 l_1 + H_2 l_2, \quad (9.28)$$

$$F_2 = -H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_B l_B. \quad (9.29)$$

Чтобы определить магнитное напряжение для линейных участков магнитной цепи (например, воздушный зазор), вычисляют напряженность магнитного поля по заданной магнитной индукции по формуле:

$$H_B = \frac{B_B}{\mu_0}, \text{ где } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} -$$

магнитная постоянная, равная абсолютной магнитной проницаемости воздуха.

## 9.5. Расчет неразветвленных магнитных цепей

### 9.5.1. Расчетная аналогия между магнитными и электрическими цепями.

Все методы расчета электрических цепей с нелинейными сопротивлениями полностью применимы и к расчету магнитных цепей, так как и магнитные и электрические цепи подчиняются одним и тем же законам – законам Кирхгофа. Аналогом тока  $I$  в электрической цепи является поток  $\Phi$  в магнитной цепи. Аналогом ЭДС  $E$  является МДС  $F$ . Аналогом ВАХ нелинейного сопротивления  $I(U)$  – вебер-амперная характеристика участка магнитной цепи  $\Phi(U_M)$ .

Однако расчетная аналогия между электрическими и магнитными цепями не распространяется на физические процессы. В отличие от ЭДС, которая движет в проводниках элементарные заряды, МДС никакого движения не вызывает. В соответствии с законом Джоуля-Ленца в электрической цепи происходит непрерывная затрата электрической энергии; постоянное магнитное поле, раз созданное, не требует энергии для своего поддержания. В электрической цепи возможно существование ЭДС без тока, когда цепь разомкнута и  $R = \infty$ , в магнитной цепи при наличии МДС всегда существует магнитный поток, т.е. магнитное сопротивление  $R_M$  в бесконечность не обращается.

При расчете неразветвленных магнитных цепей существует два вида задач: *прямая задача* – определение потока в магнитной цепи по заданной МДС; *обратная задача* – определение МДС по заданному магнитному потоку.

### 9.5.2. Определение МДС по заданному магнитному потоку.

Заданы: конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи (рис. 9.11, а); кривые намагничивания ферромагнитных материалов; магнитный поток или магнитная индукция в каком-нибудь сечении.

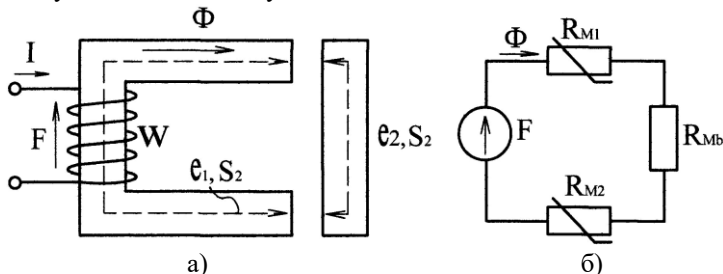


Рис. 9.11

Требуется определить МДС, ток или  $w$  намагничивающей обмотки (обратная задача).

Расчет проводим в следующей последовательности:

1) Разбиваем магнитную цепь на участки постоянного сечения ( $S_1, S_2, S_3$ ) и определяем длины ( $l_1, l_2, l_3$ ) и площади поперечного сечения участков. Длины участков берем по средней длине магнитной линии.

При малой длине воздушного зазора  $l_B$  магнитное поле в зазоре можно считать однородным, а его сечение  $S_B$  – равным сечению сердечника  $S_1$ .

2) Магнитную цепь представляем эквивалентной схемой (рис. 9.11, б).

3) Составляем уравнение для магнитной цепи по второму закону Кирхгофа:

$$F = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_B 2l_B.$$

4) Исходя из постоянства магнитного потока вдоль всей цепи (потоками рассеяния пренебрегаем), по заданному потоку и сечениям  $S_K$  находим магнитные индукции на каждом участке:  $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$ ;  $B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$ ;  $B_B = \frac{\Phi}{S_B}$ .

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; B_B = \frac{\Phi}{S_B}.$$

5) По кривым намагничивания определяем напряженности магнитного поля для ферромагнитных участков  $H_1$  и  $H_2$  магнитной цепи. Напряженность в

воздушном зазоре определяем по формуле:  $H_B = \frac{B_B}{\mu_0}$ .

6) Подсчитываем сумму падений магнитных напряжений вдоль всей магнитной цепи  $\sum H_K l_K$ , равную МДС  $F$ . Определив МДС  $F = Iw$ , можно найти ток  $I$  при известном  $w$  или  $w$  при известном токе  $I$ .

Основным допущением расчета является то, что магнитный поток вдоль всей магнитной цепи полагается неизменным. В действительности небольшая часть потока всегда замыкается, минуя основной путь (поток рассеяния).

### 9.5.3. Определение магнитного потока по заданной МДС.

Рассмотрим ту же магнитную цепь (рис. 9.11, а), что и при решении “обратной” задачи.

Исходные данные те же, кроме того, что задана МДС, а требуется определить магнитный поток (прямая задача). “Прямая” задача в отличие от “обратной” задачи связи между магнитным потоком и намагничивающим током (МДС).

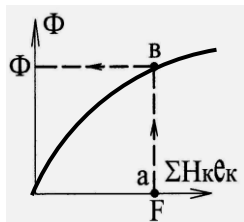


Рис. 9.12

Для решения задачи необходимо построить зависимость потока  $\Phi$  в функции от магнитного напряжения  $\sum H_K l_K$ . С этой целью следует задаться рядом значений  $\Phi$  и для них, аналогично “обратной” задаче определить  $\sum H_K l_K$ . По полученным точкам строим кривую  $\Phi(\sum H_K l_K)$ , рис. 9.12.

Затем откладываем на оси абсцисс величину заданной МДС



$F = Iw$  (точка  $a$ ) и определяем по отрезку  $av$  искомое значение магнитного потока  $\Phi$ .

В практических расчетах не имеет смысла строить всю кривую  $\Phi(\sum H_k l_k)$ , начиная с нулевого значения магнитного потока. Надо задаться максимальным потоком  $\Phi_{\text{макс}}$  и определить при этом потоке максимальную МДС  $B_{\text{макс}}$ . При наличии в магнитной цепи участка из воздушного зазора, на нем будет наибольшее падение магнитного напряжения  $H_B l_B \approx F_{\text{макс}}$ . Откуда  $H_B = \frac{F}{l_B}$ . По найденному значению напряженности определяем максимальное значение магнитной индукции воздушного зазора  $B_{\text{макс}} = \mu_0 H_B$  и максимальный магнитный поток  $\Phi_{\text{макс}} = B_{\text{макс}} S_B$ . Другие значения магнитного потока, необходимые для построения кривой  $\Phi(\sum H_k l_k)$  следует взять меньше  $\Phi_{\text{макс}}$ .

### 9.6. Расчет разветвленных магнитных цепей

Расчет разветвленных магнитных цепей основан на применении законов Кирхгофа для магнитных цепей. Вследствие нелинейной связи между магнитной индукцией  $B$  и напряженностью магнитного поля  $H$  для ферромагнитных материалов расчеты таких цепей обычно ведутся графоаналитическими методами аналогично методам расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.

При расчете магнитной цепи (рис. 9.13, а) прежде всего нужно указать на схеме направления МДС по заданным направлениям тока в обмотках и направлениям намотки обмоток. Затем задаются положительными направлениями магнитных

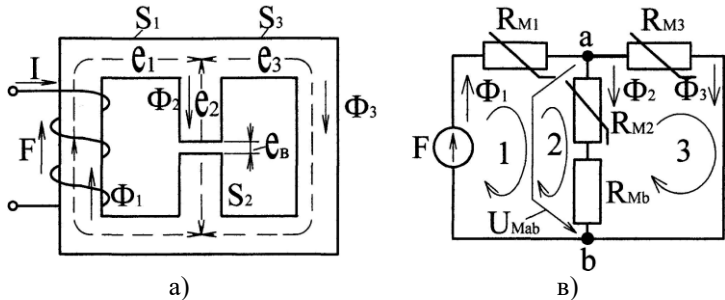


Рис. 9.13

потоков и переходят к составлению эквивалентной схемы (рис. 9.13, б) и ее расчету. Для эквивалентной схемы составляем по законам Кирхгофа систему уравнений.

Расчет магнитной цепи выполняем по методам двух узлов, который использовался для расчета разветвленной нелинейной электрической цепи в главе 2 (см. часть 1 конспекта лекций). Суть этого метода состоит в том, что все уравнения, составляемые по второму закону Кирхгофа для контуров, содержат узловое напряжение, в данном случае узловое магнитное напряжение  $U_{Mab}$ , которое принимается в качестве общего независимого переменного, относительно которого

строятся кривые всех магнитных потоков  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

Первый контур включает МДС  $F$ , магнитное сопротивление  $R_{M1}$  и узловое напряжение  $U_{Mab}$ ; уравнение для него:

$$F = \Phi_1 R_{M1} + U_{Mab} = H_1 l_1 + U_{Mab} . \quad (9.30)$$

Второй контур проходит через вторую ветвь, содержащую  $R_{M2}$  и  $R_{Mb}$ , и замыкается через  $U_{Mab}$ :

$$0 = \Phi_2 R_{M2} + \Phi_2 R_{Mb} - U_{Mab} \quad \text{или} \quad 0 = H_2 l_2 + H_b l_b - U_{Mab} . \quad (9.31)$$

Третий контур проходит через третью ветвь с магнитным сопротивлением  $R_{M3}$  и замыкается через узловое магнитное напряжение  $U_{Mab}$ :

$$0 = \Phi_3 R_{M3} - U_{Mab} \quad \text{или} \quad 0 = H_3 l_3 - U_{Mab} . \quad (9.32)$$

Уравнение по первому закону Кирхгофа для узла  $a$ :

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 . \quad (9.33)$$

Таким образом, имеем 4 уравнения с четырьмя неизвестными:  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ ,  $U_{Mab}$ .

Из уравнений (9.30) - (9.32) определяем узловое магнитное напряжение:

$$\left. \begin{array}{l} \text{из уравнения (9.30):} \quad U_{Mab} = F - H_1 l_1 ; \\ \text{из уравнения (9.31):} \quad U_{Mab} = H_2 l_2 + H_b l_b ; \\ \text{из уравнения (9.32):} \quad U_{Mab} = H_3 l_3 . \end{array} \right\} \quad (9.34)$$

Для определения магнитных потоков, строим зависимости потоков от узлового магнитного напряжения, определяемого уравнениями (9.34):

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1(U_{Mab}) = \Phi_1(F - H_1 l_1) ; \\ \Phi_2(U_{Mab}) = \Phi_2(H_2 l_2 + H_b l_b) ; \\ \Phi_3(U_{Mab}) = \Phi_3(H_3 l_3) . \end{array} \right\} \quad (9.35)$$

Чтобы построить кривую  $\Phi_1(U_{Mab})$ , задаемся рядом значений  $\Phi_1$ , для которых при известной площади поперечного сечения первого участка  $S_1$ , находим

соответствующие значения магнитной индукции  $B_l = \frac{\Phi_1}{S_l}$ . По кривой намагничивания

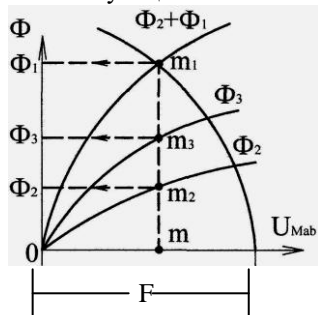


Рис. 9.14

определяем напряженность магнитного поля  $H_l$ , а затем вычисляем  $U_{Mab} = F - H_l l_1$  (рис 9.14).

Поскольку магнитный поток зависит от индукции  $B_l$  и сечения  $S_1$ , то задаваться значением потока  $\Phi_1$  сложно. Проще задаваться индукцией  $B$ , которая для ферромагнитных материалов не превышает 2 Тл, а по  $\Phi_1$  индукции определить поток  $\Phi_{\max} = B_{\max} S$ .

аналогично кривой  $\Phi_1(U_{Mag})$ . Далее из уравнения (9.33) определяем поток

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3,$$

в соответствии с этим уравнением суммируем потоки  $\Phi_2(U_{Mab})$  и  $\Phi_3(U_{Mab})$ , получаем дополнительную кривую  $(\Phi_2 + \Phi_3)U_{Mab}$ . Пересечение кривых  $\Phi_1(U_{Mab})$  и  $(\Phi_2 + \Phi_3)U_{Mab}$  в точке  $m_1$  определяет магнитное напряжение  $U_{Mab}$  между узлами  $a$  и  $b$  магнитной цепи (отрезок  $om$ ) и магнитный поток  $\Phi_1$  (рис. 9.14).

Ординаты точек пересечения  $m_2$  и  $m_3$  вертикальной прямой  $mm_1$  с кривыми  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  дают соответственно магнитные потоки  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ .

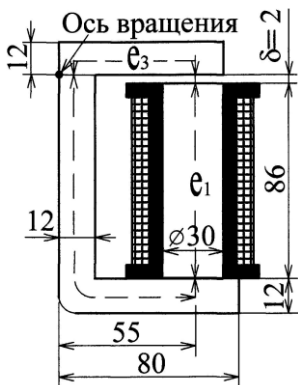


Рис. 9.15

**Пример 9.1.** Дано: магнитная цепь электромагнитного реле клапанного типа (рис. 9.15), изготовленная из стали, имеет поток  $\Phi = 1,2 \cdot 10^{-3}$  Вб. Определить число витков катушки реле, необходимое для возбуждения заданного магнитного потока при токе в катушке 0,2 А. Ядро и якорь реле прямоугольного сечения  $7,5 \times 1,2$  см<sup>2</sup>, сердечник круглого сечения диаметром 3 см<sup>2</sup>. остальные размеры показаны на рис. 9.15.

**Решение:** Магнитная цепь реле разбивается на однородные участки:

а) сердечник круглого сечения  $S_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 7,1 \text{ см}^2$ , длиной  $l_1 = 8,6 \text{ см}$ ;

б) ярмо прямоугольного сечения  $S_7 = 7,5 \cdot 1,2 = 9 \text{ см}^2$ , длиной  $l_7 = 14,9 \text{ см}$ ;

в) якорь прямоугольного сечения  $S_3 = 7,5 \cdot 1,2 = 9 \text{ см}^2$ , длиной  $l_3 = 6,1 \text{ см}$ ;

г) воздушный зазор: сечение воздушного зазора принимаем равным сечению сердечника, пренебрегая некоторым увеличением его за счет выпучивания линий магнитной индукции:  $S_0 = 7,1 \text{ см}^2$ , длина  $\delta = 0,2 \text{ см}$ .

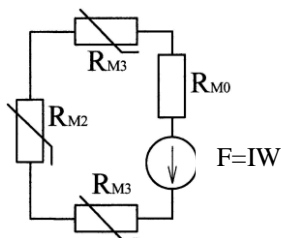
Магнитная индукция в участках цепи:

$$B_l = B_0 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{7,1 \cdot 10^{-4}} = 1,69 \text{ Тл}; \quad B_2 = B_3 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{-4}} = 1,33 \text{ Тл};$$

Напряженность магнитного поля в стальных участках магнитной цепи определяется по кривой намагничивания литой стали (см. Приложение “Характеристики намагничивания стали”):

$$H_1 = 57 \text{ A/cm}; H_2 = 18 \text{ A/cm}; H_3 = 18 \text{ A/cm};$$

В воздушном зазоре:  $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1,69}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 135 \cdot 10^4 \text{ А/м} = 13500 \text{ А/см.}$



Изображаем эквивалентную схему (рис. 9.16) магнитной цепи, для которой составляем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$F = Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_0 l_\delta;$$

$$F = 57 \cdot 8,6 + 18 \cdot 14,9 + 18 \cdot 6,1 + 13500 \cdot 0,2 = 3568 \text{ A.}$$

Число витков обмотки:  $w = \frac{F}{I} = \frac{3568}{0.2} = 17840$ .

**Пример 9.2.** Дано: две катушки  $w_1 = 2000$  и  $w_2 = 600$

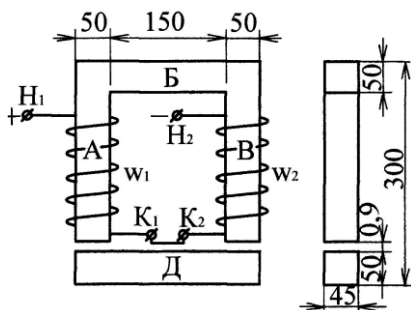


Рис. 9.17

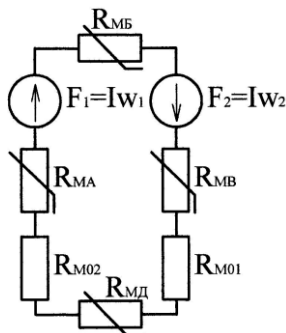


Рис. 9.18

определив направление МДС катушек.

Для этой схемы составляем по второму закону Кирхгофа уравнение:

$$F = Iw_1 + Iw_2 = \sum H_K l_K,$$

Где

$$\sum H_K l_K = H_A l_1 + H_B l_2 + H_B l_3 + H_D l_4 + H_0 (\delta_{01} + \delta_{02}).$$

Так как сечения всех участков одинаковы:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_{01} = S_{02} = S,$$

а ярмо, стержни и якорь выполнены из одного и того же материала – электротехнической стали ЭП, то магнитные индукции и напряженности магнитного поля этих

витков насажены на стержни сердечника из электротехнической стали ЭП. Размеры магнитной цепи показаны на рис. 9.17. Определить магнитный поток при токе в катушках  $I = 0,8$  А и при соединении концов катушек по указанной на рис. 9.17 схеме.

**Р е ш е н и е:** Магнитная цепь (рис. 9.17) имеет шесть участков, размеры которых найдены из чертежа:

а) воздушный зазор:

$$\delta_{01} = 0,09 \text{ cm}, S_{01} = 5 \cdot 4,5 = 22,5 \text{ cm}^2,$$

б) стержень А:

$$l_1 = 20 \text{ cM}, S_1 = 22,5 \text{ cM}^2,$$

в) ярмо Б:

$$l_7 = 25 \text{ cm}, S_7 = 22,5 \text{ cm}^2,$$

г) стержень В:

$$l_3 = 20 \text{ cm}, S_3 = 22,5 \text{ cm}^2,$$

д) воздушный зазор:

$$\delta_{02} = 0,09 \text{ см}, \quad S_{02} = 22,5 \text{ см}^2.$$

е) якорь Д:

$$l_2 = 25 \text{ cm}, S_2 = 22,5 \text{ cm}^2$$

Составляем для магнитной цепи эквивалентную схему (рис.9.18), предварительно

участков одинаковы:  $B_A = B_B = B_B = B_D = B_O = B$ ,  $H_A = H_B = H_B = H_D = H_C$ .

С учетом этих равенств имеем:

$\sum H_K l_K = H_C(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + H_0(\delta_{01} + \delta_{02}) = H_C l_C + H_0 \delta_0 = U_{MC} + U_{MO} = F$ ,  
где  $l_C = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 90 \text{ см} = 0,9 \text{ м}$  – общая длина участков, выполненных из стали;

$\delta_0 = \delta_{01} + \delta_{02} = 2 \cdot 0,09 = 0,18 \text{ см} = 0,18 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  – общая длина воздушных зазоров.

Задаемся несколькими значениями магнитного потока, причем наибольший возможный поток найдем в предположении, что магнитное сопротивление создают

только воздушные зазоры:  $R_{M0} = R_{M01} + R_{M02} = \frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\mu_0 S} = \frac{\delta_0}{\mu_0 S}$ ,

(магнитными сопротивлениями ферромагнитных участков пренебрегаем):

$$\Phi_{\text{макс}} = \frac{F}{R_{M0}} = \frac{I(w_1 + w_2) \cdot \mu_0 S_0}{\delta_0} = \frac{0,8 \cdot (2000 + 600) \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,09 \cdot 10^{-2}} = 32,7 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

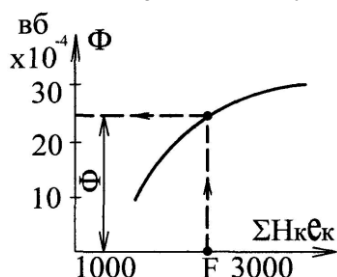


Рис. 9.19

Для полученного значения потока  $\Phi_{\text{макс}}$  определим падение магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи (рис. 9.18). Последовательность решения та же, что и в примере 9.1. Результаты расчета для потока  $\Phi_{\text{макс}}$  и других значений  $\Phi < \Phi_{\text{макс}}$  сведены в табл. 9.1.

Зависимость  $\Phi(\sum H_K l_K)$  построена на рис.9.19. По этой кривой определяем искомый поток, соответствующий МДС:

$$F = F_1 + F_2 = I \cdot (w_1 + w_2) = \sum H_K l_K = 2080 \text{ А};$$

$$\Phi = 24,4 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Таблица 9.1

$\Phi$ , Вб	$10 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-4}$	$20 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-4}$
$B$ , Тл	0,445	0,67	0,89	1,11	1,33	1,45
$H_0$ , А/м	$35,4 \cdot 10^4$	$53,4 \cdot 10^4$	$71 \cdot 10^4$	$88,5 \cdot 10^4$	$106 \cdot 10^4$	$115 \cdot 10^4$
$H_C$ , А/м	150	240	390	650	1250	1950
$U_{MO} = H_0 \delta_0$ , А	637	960	1280	1590	1910	2070
$U_{MC} = H_C \delta_C$ , А	135	216	351	585	1124	1756
$\sum H_K l_K =$ $= U_{MO} + U_{MC}$	772	1176	1631	2175	3034	3826

**Пример 9.3.** Дано: на рис. 9.20 изображен сердечник, выполненный из электротехнической стали Э42 (магнитная цепь несимметрична). Определить магнитную индукцию во всех участках цепи, если сечения участков  $S_1 = S_1 = 5 \text{ см}^2$ ,

$S_3 = 10 \text{ см}^2$ , длины участков  $l_1 = 30 \text{ см}$ ,  $l_2 = 40 \text{ см}$ ,  $l_3 = 10 \text{ см}$ , и МДС  $F_1 = I_1 w_1 = 440 \text{ А}$ ,  $F_2 = I_2 w_2 = 280 \text{ А}$ .

**Решение:** Расчет разветвленной магнитной цепи производим по законам Кирхгофа для магнитных цепей. Вследствие нелинейной связи между индукцией и напряженностью магнитного поля для ферромагнитных материалов расчет магнитной цепи проводим графоаналитическим методом (методом двух узлов).

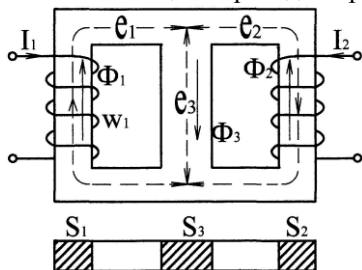


Рис. 9.20

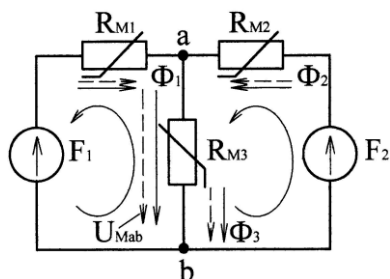


Рис. 9.21

Определяем направления МДС  $F_1$  и  $F_2$ , задаемся положительным направлением магнитных потоков  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и составляем эквивалентную схему магнитной цепи (рис. 9.21). Составляем для этой схемы уравнения: по первому закону Кирхгофа:

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2,$$

по второму закону Кирхгофа (направление обхода по контурам на схеме рис. 9.21 указано стрелками)

$$F_1 = H_1 l_1 + U_{Mab},$$

$$F_2 = H_2 l_2 + U_{Mab},$$

$$0 = H_3 l_3 + U_{Mab},$$

где  $U_{Mab}$  — магнитное напряжение между узлами  $ab$  магнитной цепи (предполагаемое положительное направление указано на схеме пунктирной стрелкой).

Для графического решения полученной системы уравнений построим кривые магнитных потоков для каждого участка цепи в зависимости от магнитного напряжения между узлами  $U_{Mab}$ , определяемого из приведенных выше уравнений:

$$\Phi_1(U_{Mab}) = \Phi_1(F_1 - H_1 l_1); \quad \Phi_2(U_{Mab}) = \Phi_2(F_2 - H_2 l_2); \quad \Phi_3(U_{Mab}) = \Phi_3(H_3 l_3)$$

Чтобы построить эти кривые, задаемся рядом значений магнитных индукций  $B_1, B_2, B_3$  (максимальные значения индукции определяются из кривых намагничивания) и находим магнитные потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ . По известным значениям  $B_1, B_2, B_3$  находим напряженности магнитного поля для различных участков магнитной цепи  $H_1, H_2, H_3$  (по кривой намагничивания для стали Э42), вычисляем магнитные напряжения для этих же участков ( $H_1 l_1, H_2 l_2, H_3 l_3$ ) и магнитное напряжение между узлами  $U_{Mab}$ . Результаты вычислений сводим в табл.9.2. По данным табл.9.2 на рис.9.22 построены кривые:  $\Phi_1(U_{Mab})$ ,  $\Phi_2(U_{Mab})$ ,  $\Phi_3(U_{Mab})$ .

Так как значения магнитных потоков должны удовлетворять уравнению:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3,$$

то построим на том же графике (рис 9.22) еще одну вспомогательную кривую

$(\Phi_1 + \Phi_2)U_{Mab}$ , сложив ординаты кривых  $\Phi_1(U_{Mab})$  и  $\Phi_2(U_{Mab})$  при одних и тех же значениях магнитного напряжения  $U_{Mab}$ . Точка пересечения  $m_3$  кривых  $\Phi_3(U_{Mab})$  и  $(\Phi_1 + \Phi_2)U_{Mab}$  характеризует рабочий режим среднего стержня магнитной цепи. Ордината точки  $m_3$  определяет величину потока  $\Phi_3 = 13 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Проведем через точку  $m_3$  вертикаль и в точках пересечения  $m_1$  и  $m_2$  с соответствующими кривыми найдем потоки

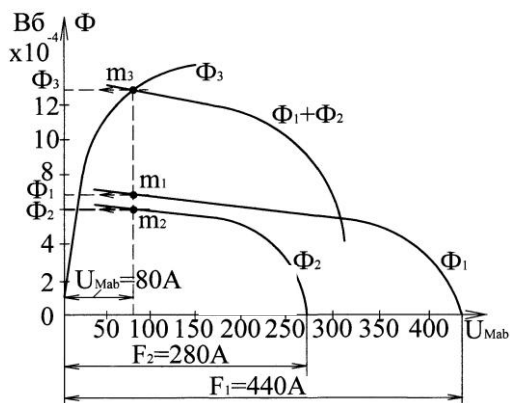


Рис. 9.22

ющими кривыми найдем потоки  $\Phi_1 = 7 \cdot 10^{-4}$  Вб,  $\Phi_2 = 6 \cdot 10^{-4}$  Вб и величину магнитного напряжения между узлами  $a$  в  $U_{Mab} = 80$  А.

Определив магнитные потоки, находим магнитную индукцию во всех участках магнитной цепи:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \text{ Тл};$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Тл};$$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{13 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1,3 \text{ Тл}.$$

Таблица 9.2

$B_1$	$\Phi_1 = B_1 S_1$	$H_1$	$H_1 I_1$	$U_{\text{Мас}} = F_1 - H_1 I_1$	$B_2$	$\Phi_2 = B_2 S_2$	$H_2$	$H_2 I_2$	$U_{\text{Мас}} = F_2 - H_2 I_2$	$B_3$	$\Phi_3 = B_3 S_3$	$H_3$	$U_{\text{Мас}} = H_3 I_3$
$Tn$	$B6$	$A/M$	$A$	$A$	$Tn$	$B6$	$A/M$	$A$	$A$	$Tn$	$B6$	$A/M$	$A$
0	0	0	0	440	0	0	0	0	280	0	0	0	0
0,6	$3 \cdot 10^{-4}$	70	21	419	0,6	$3 \cdot 10^{-4}$	70	28	252	0,7	$7 \cdot 10^{-4}$	90	9
0,8	$4 \cdot 10^{-4}$	120	36	404	0,8	$4 \cdot 10^{-4}$	120	48	232	1,0	$10 \cdot 10^{-4}$	200	20
1,0	$5 \cdot 10^{-4}$	200	60	380	1,0	$5 \cdot 10^{-4}$	200	80	200	1,1	$11 \cdot 10^{-4}$	350	35
1,1	$5,5 \cdot 10^{-4}$	350	105	335	1,1	$5,5 \cdot 10^{-4}$	350	140	140	1,2	$12 \cdot 10^{-4}$	500	50
1,2	$6 \cdot 10^{-4}$	500	150	290	1,2	$6 \cdot 10^{-4}$	500	200	80	1,3	$13 \cdot 10^{-4}$	800	80
1,4	$7 \cdot 10^{-4}$	1200	360	80						1,4	$14 \cdot 10^{-4}$	1200	120



## Характеристики намагничивания стали

В, Тл	Марки стали			
	Э11, Э12, Э21	Э41, Э42	Литая сталь	Пермендюр
	<i>H</i> , А/см	<i>H</i> , А/см	<i>H</i> , А/см	<i>H</i> , А/см
0,1	-	0,40	0,80	0,57
0,2	-	0,50	1,60	0,70
0,3	-	0,60	2,40	0,73
0,4	1,40	0,70	3,20	0,76
0,45	1,52	0,75	3,60	0,79
0,5	1,71	0,85	4,00	0,82
0,55	1,91	0,94	4,43	-
0,6	2,11	1,10	4,88	0,85
0,65	2,36	1,27	5,35	-
0,7	2,61	1,45	5,84	0,88
0,75	2,87	1,65	6,32	-
0,8	3,18	1,85	6,82	0,91
0,85	3,52	2,10	7,45	-
0,9	3,97	2,35	7,98	0,94
0,95	4,47	2,70	8,50	-
1,00	5,02	3,00	9,20	0,97
1,05	5,70	3,40	10,04	1,00
1,10	6,47	3,95	10,90	1,05
1,15	7,39	4,60	11,87	1,10
1,20	8,40	5,40	12,90	1,15
1,25	9,76	6,40	14,30	1,20
1,30	11,40	7,70	15,90	1,25
1,35	13,40	9,70	18,10	1,32
1,40	15,80	13,00	20,90	1,40
1,45	19,50	18,30	24,40	1,50
1,50	25,00	27,50	28,90	1,62
1,55	32,80	38,50	34,30	1,80
1,60	43,70	51,50	41,00	2,00
1,65	58,80	69,50	48,70	2,25
1,70	77,80	89,00	57,50	2,60
2,00	-	-	-	6,20

## Л и т е р а т у р а

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники, в трех частях. М.: Высшая школа, 1973. 750 с.
2. Горбунов А. Н., Кабанов И. Д., Кравцов А. В., Редько И. Я. Теоретические основы электротехники. – М.: УМЦ «ТРИАДА», 2003. – 304 с.
3. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1975. – 750 с.
4. Иванов И. И., Соловьев Г. И., Равдоник В. С. Электротехника. – СПб: Издательство «Лань», 2006. – 496 с.
5. Епифанов А. П. Электрические машины. – СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 272 с.
6. Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. Теоретические основы электротехники /Под ред. проф. А.Е. Каплянского. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 526 с.
7. Каплянский А. Е. Методика преподавания теоретических основ электротехники. – М.: Высшая школа, 1975. – 143 с.
8. Круг К. А. Основы электротехники, в двух томах. – Л.: Госэнергоиздат, 1946, т. 1. – 472 с.
9. Миткевич В. Ф. Физические основы электротехники. – Л.: Профинтерн, 1932. – 495 с.
10. Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники, в трех частях. – Л.: Госэнергоиздат, 1959. – ч. 1. – 296 с.; ч. 2. – 444 с.
11. Нейман Л. Р. и Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники, в двух томах. – Л.: Энергия, 1967. – т. 2. – 407 с.
12. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники/ Под ред. П.А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава четвертая. <i>Индуктивно связанные электрические цепи</i>	
4.1. Индуктивно связанные элементы цепи	3
4.2. Последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек	5
4.3. Параллельное соединение двух индуктивно связанных катушек	8
4.4. Методы расчёта разветвлённых цепей при наличии взаимной индуктивности	11
4.5. Трансформатор без стального сердечника (воздушный трансформатор)	13
Глава пятая. <i>Четырехполюсники</i>	
5.1. Основные понятия о четырехполюсниках	20
5.2. Уравнения пассивного четырехполюсника	20
5.3. Определение постоянных четырехполюсника	22
5.4. Схемы замещения пассивного четырехполюсника	23
5.5. Передаточная функция пассивного четырехполюсника	25
Глава шестая. <i>Трехфазные цепи</i>	
6.1. Понятия о многофазных источниках питания и о многофазных цепях	28
6.2. Основные схемы соединения трехфазных цепей	30
6.3. Уравновешенные и неуравновешенные многофазные системы	32
6.4. Симметричный режим трехфазной цепи при соединении приемника звездой	33
6.5. Несимметричный режим трехфазной цепи при соединении приемника звездой	36
6.5.1. Общие сведения о режимах цепи	36
6.5.2. Трехфазная цепь с нулевым проводом, сопротивление которого $Z_N = 0$	36
6.5.3. Трехфазная цепь с нулевым проводом, сопротивление которого $Z_N \neq 0$	37
6.5.4. Трехфазная цепь без нулевого провода	39
6.5.5. Трехфазная цепь без нулевого провода при обрыве фазы приемника	39
6.5.6. Трехфазная цепь без нулевого провода при коротком замыкании фазы приемника	40
6.6. Электрическая цепь при соединении трехфазного приемника треугольником	41
6.6.1. Симметричный режим	41
6.6.2. Несимметричный режим	43
6.7. Измерение активной мощности в трехфазных цепях	44

6.7.1. Измерение активной мощности в трехпроводных цепях	44
6.7.2. Измерение активной мощности в четырехпроводных цепях	45
6.8. Пульсирующие и вращающиеся магнитные поля	46
6.8.1. Пульсирующее магнитное поле	46
6.8.2. Вращающееся магнитное поле	47
6.9. Принцип работы трехфазного асинхронного электродвигателя	49
6.10. Примеры решения задач по трехфазным цепям	50

#### Глава седьмая. *Метод симметричных составляющих*

7.1. Обобщение понятия о симметричных системах	61
7.2. Эквивалентные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей трехфазного трехстержневого трансформатора	62
7.3. Эквивалентные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей трехфазного асинхронного электродвигателя	64
7.4. Эквивалентные сопротивления прямой, обратной и нулевой последовательностей трехфазной симметричной цепи с нулевым проводом	65
7.5. Разложение трехфазной несимметричной системы напряжений на симметричные составляющие	66
7.6. Расчет трехфазных цепей методом симметричных составляющих	71

#### Глава восьмая. *Несинусоидальные токи в линейных цепях*

8.1. Разложение несинусоидальных токов в ряд Фурье	76
8.2. Некоторые свойства периодических кривых токов и напряжений, обладающих симметрией	77
8.3. Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений	78
8.4. Мощность периодических несинусоидальных токов	80
8.5. Влияние параметров цепи на форму кривой тока при несинусоидальном напряжении	81
8.6. Расчет линейных цепей при несинусоидальных токах	83
8.7. Резонанс напряжений при несинусоидальных токах и напряжениях	84
8.8. Высшие гармоники в трехфазных цепях	85
8.8.1. Гармоники трехфазной системы напряжений, создающие симметричные системы прямой, обратной и нулевой последовательностей	85
8.8.2. Особенности работы трехфазных систем, вызванные гармониками, кратными трем	87

#### Глава девятая. *Магнитные цепи*

9.1. Основные понятия и величины, характеризующие магнитное поле. Закон полного тока	94
9.2. Основные характеристики ферромагнитных материалов	97

9.3.	Магнитная цепь _____	100
9.4.	Законы магнитной цепи _____	101
9.5.	Расчет неразветвленных магнитных цепей _____	103
	9.5.1. Расчетная аналогия между магнитными и электрическими цепями _____	103
	9.5.2. Определение МДС по заданному магнитному потоку _____	103
	9.5.3. Определение магнитного потока по заданной МДС _____	104
9.6.	Расчет разветвленных магнитных цепей _____	105
	Литература _____	113
	Приложение к главе 9 _____	114

Конспект лекций по теоретическим основам электротехники

Часть 2. Индуктивно связанные электрические цепи. Четырехполюсники.  
Трехфазные цепи. Несинусоидальные токи в линейных цепях. Магнитные цепи

Автор	Ф. Д. Косоухов
Ответственный редактор	С. А. Кулагин
Редактор	Е. А. Тур

Подписано в печать 24.04.08. П. л. Уч. из. Тираж 500 экз. Заказ

Типография Санкт-Петербургского государственного  
аграрного университета,  
г. Пушкин, ул. Садовая, 14.