**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ**  Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**Московский технический университет связи и информатики**

Кафедра технической электродинамики и антенн

**Методические указания**

по изучению курса и выполнению контрольной работы

по дисциплине

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ВОЛН**

для студентов-заочников 2 курса

(направление 11.03.02)

Москва 2020

План УМД на 2021/22 уч.г.

**Методические указания**

по изучению курса и выполнению контрольной работы

по дисциплине

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ВОЛН**

Составители: В.М.Седов, к.т.н., доцент

В.И.Корнюхин, к.т.н., доцент

Издание утверждено на заседании кафедры. Протокол №2 -19/20 от 29.10.19г.

Рецензент Т.А. Гайнутдинов, к.т.н., доцент.

**ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ**

Все многообразие и особенности поведения электромагнитных полей на данный момент времени могут быть поняты только, используя используя уравнения Максвелла. В курсе «Основы теории электромагнитных полей и волн» как раз и изучаются эти уравнения и базирующиеся на них технические устройства, в которых возможно создавать, управлять и преобразовывать различные типы электромагнитных полей. Благодаря этому данный курс является теоретической основой таких специальных дисциплин, как линии связи, распространение радиоволн, антены и устройства СВЧ и т.д. В этих дисциплинах идеи и методы теории Максвелла получают свое дальнейшее прикладное развитие.

Изучение данной дисциплины начинается с повторения разделов математики и физики, которые помогут студентам получить достаточно глубокое понимание математического описания физических явлений, лежащих в основе теории электромагнитных полей и волн.

Более глубокое изучение основных положений векторной алгебры и векторного анализа, овладение основами математической физики поможет формированию у студентов правильных физических представлений и пониманию основных идей электродинамики, что будет способствовать устранению трудностей, которые они испытывают при изучении курса «Основы теории электромагнитных полей и волн».

Краткая теория, задачи и примеры с подробными решениями приведены в Приложении к МУ.

Это поможет студентам вспомнить, овладеть и провести самоконтроль знаний решения задач векторного анализа, что особенно актуально для студентов заочной формы обучения. Этот материал был опробован авторами на занятиях со студентами заочного отделения.

**Список литературы**

Основная

1. Седов В.М.,Гайнутдинов Т.А. Электромагнитные поля и волны.-М.: Горячая линия-Телеком,2017-284с.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.

Дополнительная

1. Соколов В.А.,Соколова М.В. Математические основы теории электромагнитных полей и волн.: Учебное пособие/мтуси.-м., 2004.-52с.

**РАЗДЕЛЫ КУРСА**

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ВОЛН.

[3, гл. 1, 2][Приложение к МУ]

Системы координат. Коэффиценты Ламэ. Векторы и действия над ними (сложение, вычитание, скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение трех векторов, двойное векторное произведение).

Скалярное поле. Градиент. Векторное поле. Дивергенция. Теорема Остроградского – Гаусса. Ротор. Теорема Стокса. Оператор Гамильтона. Классификация векторных полей.

1. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

[1, гл. 1,2],[2, гл. 1]

Введение. Векторы электромагнитного поля. Физические параметры сред: проводника, диэлектрика, магнетика. Закон Ома в дифференциальной форме. Ток смещения. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда). Граничные условия для векторов поля. Классификация электромагнитных полей. Уравнения гармонического электромагнитного поля. Комплексные амплитуды. Комплексные проницательности. Тангенс угла потерь.

1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

[1, разд. 3.1, 3.2],[2, разд. 1.8.1-1.8.5]

Сторонние токи и заряды. Уравнение баланса мгновенных значений мощности. Физическая сущность слагаемых в уравнении: мощность сторонних источников, мощность потерь в среде, мощность излучения поля. Вектор Умова-Пойнтинга. Физическая сущность вектора. Уравнение баланса уравнение баланса комплексной мощности для случая гармонического поля. Комплексный вектор Умова-Пойнтинга. Средние значения величин: энергии, мощности, потока мощности. Уравнение баланса средних за период мощностей. Уравнение баланса реактивных мощностей. Скорость распространения электромагнитной энергии.

1. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ.

[1, гл. 4],[2, гл.6]

Волновые уравнения для векторов гармонического электромагнитного поля. Решение уравнений для случая отсутствия в рассматриваемой области пространства сторонних источников и потерь. Свойства получения однородной плоской волны: ориентация векторов поля, фазовые соотношения между векторами, скорость волны, плотность потока мощности. Изменение свойств волны в случае наличия потерь в среде. Дисперсия плоских волн. Поляризация плоских волн.

1. ИЗЛУЧАТЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.

[1, гл. 5],[2, гл. 5]

Постановка задачи излучения электромагнитных волн. Электродинамичные потенциалы. Волновое уравнение для векторного потенциала и его решение.

Элементарный электрический излучатель. Структура полей в ближней и дальней зонах. Мощность и сопротивление излучения. Диаграмма направленности.

Элементарный магнитный излучатель. Использование принципа двойственности при определении структуры полей для этого излучателя. Диаграмма направленности излучателя.

Структура полей в дальней зоне для излучателя в форме элемента волнового фронта (элемента Гюйгенса). Диаграмма направленности.

1. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ВОЗЛЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД.

[1, гл. 6],[2, гл. 7]

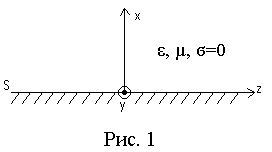
Наклонное падение однородной плоской электромагнитной волны на границу раздела двух разнородных сред. Алгоритм определения структуры отраженной и проломленной волны. Законы Снеллиуса и формулы Френеля для волн с перпендикулярной и параллельной поляризациями.

Структура направляемой волны ждя сдучая падения волны на плоскую поверхность идеального проводника. Параметры волны: волновые числа, фазовая скорость, распределение полей по фронту, дисперсия.

Падение волны на плоскую границу раздела двух разнородных диэлектриков. Явление полного прохождения волны из одного диэлектрика в другой. Угол Брюстера. Явление полного внутреннего отражения волны. Условия для реализации этого явления. Структура полей по фронту волны в обеих диэлектриках. Понятие поверхностного импеданса.

Волны у границы раздела с поглощающей средой. Явления поверхностного эффекта. Импедансные граничные условия Леонтовича-Щукина. Потери энергии волны в реальном проводнике.

**ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ**



В полупространстве х > 0, ограниченном снизу идеально проводящей плоскостью S (рис. 1), распространяется гармоническая электромагнитная волна. Известны некоторые проекции векторов либо сами векторы поля у этой волны. Они указаны в таблице 1 в соответствии с последней цифрой номера студенческого билета. Параметры среды в полупространстве х > 0 и ряд других параметров поля волны приведены в таблице 2 по предпоследней цифре номера студенческого билета.

Требуется:

1. определить неизвестные проекции либо сами векторы заданного поля волны и охарактеризовать тип волны;
2. проверить выполнение граничных условий на плоскости (поверхности) S;
3. записать выражения для мгновенных значений всех проекций поля волны;
4. записать выражения для мгновенного, комплексного и среднего за период значения вектора Пойнтинга.

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Последняя цифра номера студенческого билета | Проекции векторов либо сами векторы электромагнитного поля |
| 0 | = , |
| 1 | ,, |
| 2 | , |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 | , |
| 7 | , , |
| 8 |  |
| 9 | , |

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предпоследняя цифра номера студенческого билета | f, МГц | , | , |  |  |  | σпр, |
| 0 | 550 | 22 | 40 | 1 | 1 | 0,9 | 34 |
| 1 | 600 | 35 | 18 | 2,5 | 1 | 0,4 | 45 |
| 2 | 150 | 17 | 60 | 1 | 1 | 0,8 | 66 |
| 3 | 400 | 25 | 30 | 1,8 | 1 | 0,3 | 34 |
| 4 | 550 | 20 | 40 | 2,3 | 1 | 0,7 | 58 |
| 5 | 250 | 30 | 20 | 1,2 | 1 | 0,6 | 34 |
| 6 | 500 | 40 | 15 | 1,4 | 1 | 0,4 | 66 |
| 7 | 300 | 16 | 30 | 1 | 1 | 0,8 | 45 |
| 8 | 350 | 10 | 50 | 1,7 | 1 | 0,5 | 34 |
| 9 | 400 | 35 | 25 | 1,5 | 1 | 0,3 | 58 |

1. определить комплексную амплитуду плотности тока, протекающего по поверхности (плоскости) S;
2. рассчитать фазовый коэффициент волны;
3. построить частотную зависимость фазовой скорости волны от частоты, т.е.
4. построить зависимости ненулевых мгновенных значений проекции полей волны от координаты х в сечении для момента времени , где Т - период высокой частоты;
5. определить потери мощности волны, приходящиеся на единичную площадку поверхности S, если в качестве этой поверхности использовать реальный проводник с удельной проводимостью .

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ**

**КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ**

Решать пункт 1 задания следует одним из двух возможных способов.

Первый способ используется, когда в таблице № 1 заданы все три проекции либо вектора , либо вектора . В этом случае надо воспользоваться только одним уравнением Максвелла (2.9) в [1]. Пусть, например, заданы три проекции вектора :

.

Для определения неизвестных проекций вектора используем верхнее уравнение:

rot=(1)

В этом уравнении, как видим, используется обозначение (2.1) в [1]:

В полупространстве х > 0 удельная проводимость и поэтому

,

где , – электрическая постоянная,

– относительная диэлектрическая проницаемость среды в полупространстве х > 0 (задана в таблице № 2)

Раскрывая определитель в (1), получаем:

Приравняв в левой и правой частях этого соотношения одноимённые проекции, получаем:

Если в таблице № 1 заданы три проекции вектора , то поступаем аналогично, т.е. используем нижнее уравнение Максвелла (2.9) в [1]. В этом уравнении надо положить:

,

где

x > 0 (задана в таблице № 2).

Второй способ используется в том случае, когда в таблице № 1 заданы продольные проекции и вектора , и вектора . В этом случае для определения неизвестных поперечных проекций векторов ,, и необходимо совместно решать оба уравнения Максвелла (2.9) в [1]. Результатом такого решения являются соотношения вида:

,

),

),

).

Эти соотношения и надо использовать для решения пункта 1.

В заключение решения пункта 1 следует выписать все проекции векторов электромагнитного поля. Для рассмотренного выше примера они будут иметь следующий вид:

,

(2)

Вывод: электромагнитное поле представляет плоскую неоднородную волну электрического типа, распространяющуюся в положительном направленииоси OZ.

Решение пункта 2 заключается в доказательстве того, что на поверхности S отсутствуют нормальная проекция у вектора и касательная проекция у вектора . С этой целью надо в соотношениях (2) положить х = 0. Для рассматриваемого здесь частного случая имеем:

, ,

*,* , (3)

*,* .

Как видим, на поверхности S имеет место и , а все остальные проекции равны нулю.

Чтобы выполнить задание в пункте 3, надо произвести следующую математическую операцию:

А(t) = Re().

где – комплексная амплитуда любой проекции поля.

Для расчитываемого частного случая имеем:

.

Отметим, что при получении выражения для использовано преобразование вида

Для выполнения задания в пункте 4 следует воспользоваться соотношениями вида:

(5)

Если рассмотреть все тот же частный случай, то в эти соотношения надо подставить:

,

, (6)

,

\*

\*

Значения для следует взять из соотношений (2) и (4).

Для проведения расчета по пункту 5 надо использовать формулу:

(7)

где – комплексная амплитуда плотности тока на поверхности S,

= единичный орт внешней нормали к поверхности S,

– комплексная амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности S (ее надо взять из соотношений (3)).

Для данного частного случая имеем:

.

Для расчета в пункте 6 надо использовать формулу, которая приведена в разделе (6.2) в [1]:

, (8)

где – поперечное волновое число,

k – волновое число для свободного пространства.

Прежде чем изложить алгоритм расчетов по пункту (7), необходимо сделать некоторые пояснения. В частности, из выражений (2) следует, что рассматриваемая здесь волна будет распространяться вдоль оси OZ только при условии что β – действительное положительное число.

При β = 0 волна распространяться не будет. Определим частоту, когда это имеет место. Она называется критической частотой:

.

. (9)

В этом соотношении - скорость среды в среде.

Используя формулы (8) и (9), можно получить соотношение позволяющее расчитать фазовую скорость волны:

Сам расчет по пункту 7 надо начинать с определения критической частоты . Для этого сначала надо вычислить величину волнового числа по формуле , затем определить поперечное волновое число , используя таблицу 2, и, наконец, рассчитать значение по формуле (9). После этого следует увеличивать частоту с некоторым дискретом , начиная с величины и подсчитывать по формуле (10) значения фазовой скорости, необходимые для построения графика .

Чтобы выполнить пункт 8, надо использовать выражения для мгновенных значений проекции полей, полученных в пункте 3. Для нашего частного случая это соотношения (4). В эти выражения следует подставить все константы, а затем выполнить расчёты функций при изменении координаты х в пределах 0 ≤ х ≤ 2, где– длина «стоячей» волны, равная:

При построении графиков требуется, чтобы масштабы величин по осям были целыми числами. С этой целью надо пользоваться дробными единицами измерения: дм, см, , и т.д.

Вычисление потерь волны в пункте 9 следует вести по формуле вида:

где обозначено – комплексная амплитуда напряжённости магнитного поля на поверхности S при условии, ,

активное сопротивление поверхности, вычисляемое по формуле

– единичная площадка. Рассчитанная по формуле (11) величина потерь должна быть выражена в мкВт.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Математические основы теории электромагнитных**

**полей и волн**

**Краткая теория, задачи и примеры**

**с подробными решениями.**

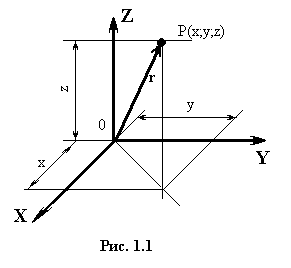
# Часть 1

**Системы координат. Коэффициенты Ламэ. Векторы и действия над ними.**

# Краткая теория

# 1.1 Системы координат

Точки в трехмерном евклидовом пространстве могут быть заданы системой действительных чисел (**координатами**). В инженерной практике наибольшее практическое распространение получили три системы координат: декартова, цилиндрическая и сферическая.

1.1.1Декартова система координат позволяет связать с каждой точкой *P* пространства, в котором выбраны три направленные прямые X, Y, Z (**оси координат**), пересекающиеся в начале 0, три действительных числа (**декартовы координаты**) *x* (*абсцисса*), *y* (*ордината*), *z* (*аппликата*); при этом пишут *P*(*x, y, z*). Три взаимно перпендикулярные оси X, Y, Z, проходящие через некоторую точку 0, образуют **прямоугольную** или **ортогональную систему** координат. Положительные направления на осях принято выбирать так, чтобы поворот на 900, совмещающий луч 0x с лучом 0y (рис. 1.1), казался происходящим против часовой стрелки, если наблюдать его со стороны луча 0z. Такая система координат называется **правой.** В декартовой прямоугольной системе координат положение в пространстве некоторой точки *P*(*x’*, *y’*, *z’*) определяется пересечением трех взаимно перпендикулярных **координатных плоскостей** *x = x’, y = y’, z = z’.* Каждая точка P(x,y,z) имеет свой радиус-вектор **r** (рис.1.1), который в прямоугольной декартовой системе координат может быть представлен в виде:

**r** = **x0**x + **y0**y + **z0**z (1.1.1)

где: **x0**, **y0**, **z0** – единичные векторы или орты прямоугольной системы координат.

Длина радиус-вектора **r** (его численное значение или модуль) обозначается как |**r**| = r = 0P и является функцией



(1.1.2)

Единичный вектор или орт радиуса вектора **r0**, направление которого совпадает с направлением **r** может быть представлен в виде:

(1.1.3)  
где,



-направляющие косинусы углов между **r0** и положительными направлениями осей 0x, 0y, 0z.

Расстояние d между точками P1(x1,y1,z1) и P2(x2,y2,z2) равно

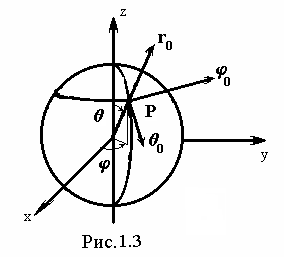
(1.1.4)



Направленный отрезок (вектор **P1P2** может быть записан в виде:

**P1P2** = **x0**(x2 – x1) + **y0**(y2 – y1) + **z0**(z2 – z1) (1.1.5)

1.1.2 Цилиндрическая система координат получила свое название от одной из координатных поверхностей, представляющей собой бесконечный круговой цилиндр с радиусом r. Вторая координатная поверхность – полуплоскость, ограниченная осью цилиндра. Третья координатная поверхность – плоскость перпендикулярная оси цилиндра (рис.1.2). Координатные линии цилиндрической системы координат: *r* – линия пересечения полуплоскости, проходящей через ось Z с плоскостью перпендикулярной оси Z, *ϕ* – линия пересечения кругового цилиндра с плоскостью перпендикулярной оси Z, z – линия пересечения кругового цилиндра с плоскостью, проходящей через ось цилиндра (образующая цилиндра). Цилиндрические координаты: *r* (*радиус*) – расстояние от оси цилиндра до произвольной точки *P*; *ϕ* (*полярный угол*) – угол ориентации плоскости, проходящей через точку *P* и ось Z по отношению к некоторой фиксированной плоскости (x0z); z (*аппликата*) – расстояние от точки до горизонтальной плоскости (x0y). Орты цилиндрической системы координат (рис.1.2) **r**0 – нормаль к поверхности цилиндра (и **не совпадает** с радиусом-вектором); **ϕ**0 – орт касательной к окружности, образованной пересечением цилиндра с плоскостью перпендикулярной к оси, показывающий направление отсчета угла *ϕ* ; **z**0 – совпадает с касательной к образующей цилиндра. Орты **r**0**, ϕ**0**, z**0 образуют правую тройку векторов. Элемент цилиндрической поверхности d*S* =*r*d*ϕ*dz. Элемент объема d*V* = *r* d*r* d** dz.

1.1.3 Сферическая система координат получила свое название от одной из координатных поверхностей, представляющей собой сферу радиусом r. Вторая координатная поверхность конус с вершиной, расположенной в начале системы координат и углом вершины равным 2*θ*. Третья – полуплоскость, ограниченная осью Z (рис.1.3). Координатные линии сферической системы координат: *r*– линия пересечения поверхности конуса с плоскостью, проходящей через ось Z, *θ* – образована пересечением сферы радиуса *r* с плоскостью, проходящей через ось Z, *ϕ*– образована пересечением поверхностей сферы и конуса. Сферические координаты: *r* (*радиус*) – расстояние от точки начала системы координат до точки *P* (совпадает с радиус-вектором), *θ* (*меридиональный угол*)– угол ориентации радиального направления по отношению к оси Z, *ϕ* (*азимутальный угол*)– угол ориентации плоскости, проходящей через ось и точку наблюдения, по отношению к фиксированной плоскости (x0z). Орты сферической системы координат: **r**0 – совпадает с направлением внешней нормали сферы, **θ**0 – совпадает с ортом касательной к большому кругу, образованному пересечением сферы и полуплоскости, проходящей через ось Z, и указывает направление отсчета угла *θ*, **ϕ**0 – совпадает с ортом касательной к окружности, образованной пересечением поверхностей сферы и конуса, и указывает направление отсчета угла *ϕ* (рис.1.3). Орты **r**0**, θ**0 , **ϕ**0 образуют правую тройку векторов. Элемент сферической поверхности d*S* = *r*2 sin*θ* d*θ* d*ϕ*. Элемент объема d*V* = *r*2 sin*θ* d*r* d*θ* d*ϕ*.

Сведения о декартовой, цилиндрической и сферической системах координат сведены в таблицу 1.

*Таблица 1*

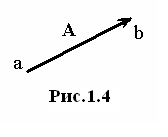
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер координаты, i | Система координат | | | | | | | | | | | |
| декартова | | | | цилиндрическая | | | | сферическая | | | |
| *q*i | **li** | *h*i | d*l*i | *q*i | **li** | *h*i | d*l*i | *q*i | **li** | *h*i | d*l*i |
| 1 | *x* | **x**0 | 1 | d*x* | *r* | **r**0 | 1 | d*r* | *r* | **r**0 | 1 | d*r* |
| 2 | *y* | **y**0 | 1 | d*y* | ϕ | **ϕ**0 | *r* | *r*dϕ | θ | **θ**0 | *r* | *r*dθ |
| 3 | *z* | **z**0 | 1 | d*z* | *z* | **z**0 | 1 | d*z* | ϕ | **ϕ**0 | *r* sinθ | *r* sinθdϕ |

## где h1, h2 и h3 – коэффициенты Ламе, связывающие дифференциалы длины криволинейных координат с дифференциалами самих координат

dli = hidqi

# 1.2 Векторы и действия над ними

## **1.2.1 Векторные и скалярные величины в теории электромагнитного поля**

Как известно из курса физики при анализе электромагнитного поля используются скалярные, векторные и тензорные величины. Рассмотрим скалярные и векторные величины. Величины, значения которых могут быть изображены положительными или отрицательными числами (**скалярами),** называются скалярными. Величины, значения которых характеризуются (в отличие от скаляра) не только количеством, но и направлением в пространстве называются **векторными** и могут быть изображены векторами. Вектор – отрезок (рис.1.4), имеющий определенную длину и направление (обозначается  или **A** иногда. *a* – начало, *b* – конец вектора. Длина вектора **A** (модуль или абсолютная величина) обозначается *A* или |**A**|. Два вектора считаются **равными**, если равны их модули, совпадают их направления.

В произвольной ортогональной системе координат запись вектора имеет следующий вид

**A** = **I1**A1 + **I2**A2 + **I3**A3. (1.2.1)

Проекции A1.A2 и A3 называются компонентами или составляющими вектора **A**; **I1**, **I2** и **I3** – единичные векторы или орты в выбранной системе координат.

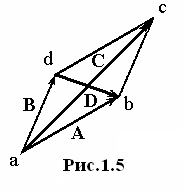
В декартовой системе координат

**A** = **x0**Ax +**y0**Ay + **z0**Az , (1.2.2)

 (1.2.3)



 (1.2.4)

Сумма двух векторов **A** и **B** – диагональ ac (вектор **С)** параллелограмма построенного на этих векторах (рис.1.5). Разностью **A–B** называется сумма векторов **A** и(**–B)** (диагональ db параллелограмма на рис.1.5).

Сложение (вычитание) в векторной алгебре означает алгебраическое сложение (вычитание) компонент векторов:

**A** ± **B** = **l**1(*A*1 ± *B*1) + **l**2(*A*2 ± *B*2) + **l**3(*A*3 ± *B*3) (1.2.5)

Где **l**1, **l**2 и **l**3 орты системы координат

### **1.2.2 Умножение векторов**

Скалярное умножение векторов. Скалярным произведением векторов **A** и **B** называют скаляр, равный произведению длин этих векторов на косинус образованного ими угла *ϕ*. Скалярное произведение обозначают **A.B** или (**A,B**).

В декартовой системе координат:

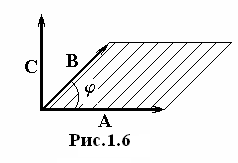
**(A,B) =** *A*x*B*x + *A*y*B*y + *A*z*B*z (1.2.6)

Зная скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между ними

 (1.2.7)

а также величину проекции одного вектора на направление, определяемое другим вектором, например, проекция вектора **А** на **В** равна

 (1.2.8)

Векторное умножение векторов. Векторным произведением векторов **A** и **B** называют вектор **C** модуль, которого равен площади параллелограмма S, построенного на этих векторах, а направление перпендикулярно плоскости этого параллелограмма и определяется правилом буравчика (правилом правого винта) при повороте от первого вектора ко второму по кратчайшему пути (рис. 1.6). Векторное произведение принято обозначать одним из следующих способов:

**A×B**, [**A,B**], [**AB**],

Из определения векторного произведения следует, что

|[**A,B**]| = *AB* sin *ϕ* = S

[**A,B**] = [**l**1*A*1 + **l**2*A*2 + **l**3*A*3, **l**1*B*1 + **l**2*B*2 + **l**3*B*3] =

**=l**1(*A*2*B*3 – *B*2*A*3) + **l**2(*A*3*B*1 – *B*3*A*1) + **l**3(*A*1*B*2 – *B*1*A*2) . (1.2.9)

#### или

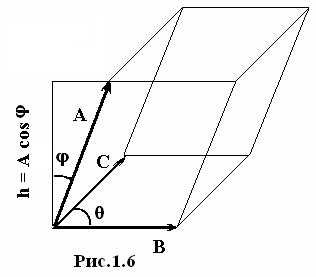
. (1.2.10)

[**A,B**] = - [**B,A**] (1.2.11)

Смешанное произведение трех векторов.

 (1.2.12)

В декартовой системе координат выражение смешанного произведения принимает вид:

 (1.2.13)

Векторное произведение [**B,C**] представляет собой вектор, перпендикулярный **В** и **С**, модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах **В** и **С**, т.е. S = │[**B,C**]│ =BC sin θ (рис.1.6). Этот параллелограмм можно рассматривать как основание параллелепипеда, построенного на векторах **А**, **В** и **С**, следовательно модуль смешанного произведения будет равен произведению площади основания параллелепипеда на его высоту (проекция ребра А на его перпендикуляр к основанию). То есть модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда V, построенному на векторах **А**, **В**, и **С** (рис.1.6).

V=│(**A**,[**B,C**])│=│Acosφ│[**B,C**]││=hS (1.2.14)

Нетрудно показать, что смешанное произведение обладает следующим свойством

(**А**,[**B,C**]) = (**C**,[ **А,B**]) = (**B**,[**C,А**]) , (1.2.15)

т.е. при циклической перестановке входящих в него векторов ( замене **А** на **В**, **В** на **С** и С на **А**) величина смешанного произведения не изменяется.

Двойное векторное произведение. **A×(B×C**) – вектор, компланарный **B** и **C** и может быть вычислен по формуле

**A×(B×C) = B(A,C) – C(A,B) .** (1.2.16)

**Задачи и примеры с подробными решениями**

1.1Даны четыре точки А( 2; 0; 3;), В(4; -1; 3) ,С(0; -1; -2), D( 2; -3; -1). Требуется :

1.1.1. Записать векторы  и найти их сумму, определить длину результирующего вектора.

1.1.2. На векторах  ****ипостроен параллелепипед. Считая параллелограмм, построенный на векторах и  , основанием параллелепипеда, вычислить его высоту.

1.1.3. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах и .

1.1.4. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

1.1.5. Найти проекцию вектора  ****  на направление вектора ****

РЕШЕНИЕ:

1.1.1Из курса « Векторной алгебры » известно, что если имеются две точки  и , то вектор  согласно (1.1.5) равен:

тогда :

;

;

;



Известно , что если  и , то согласно (1.2.5) :

.

Следовательно :

**.**

Известно также, что длина вектора  согласно (1.2.3) равна:

****, тогда 

1.1.2. Как известно, объём параллелепипеда построенного на векторах **a, b** и **c** равен абсолютной величине смешанного произведения этих векторов (1.2.13) и (1.2.14)









Для вычисления определителя 3-его порядка используем его разложение по элементам 1-ой строки

=

В нашем примере :

 ; 

Если основанием параллелепипеда является параллелограмм, построенный на векторах **а** и **с** , то  где  – площадь указанного параллелограмма,  – высота параллелепипеда. Согласно (1.2.9)







Откуда 

1.1.3.Диагонали параллелограмма, построенного на векторах **b** и **с**  равны :

;

;

; 

1.1.4. Т.к. скалярное произведение двух векторов согласно (1.2.7) равно

 то ,а угол между диагоналями равен 

1.1.5. Т.к. скалярное произведение векторов  **c** и  **d** равно , 

, то в нашем примере :



Отсюда абсолютная величина проекции вектора **с** на направление вектора **d** согласно (1.2.8) равна 

:

# Часть 2

**Элементы векторного анализа. Скалярное поле. Градиент. Векторное поле. Дивергенция. Ротор. Оператор Гамильтона.**

# Краткая теория

## **2.1 Элементы векторного анализа**

### **2.1.1 Скалярное поле. Градиент**

Скалярное поле. Если в каждой точке некоторой области пространства заданы значения скалярной функции *ψ*(**r**), говорят, что в этой области задано скалярное поле *ψ*(**r**) (поле функции *ψ*(**r**)).

Градиент. Вектор направленный в сторону наибольшего изменения *ψ* и равный по абсолютному значению его скорости, называется градиентом и обозначается grad *ψ* .

 (2.1.1)

где **n**0 – единичный вектор нормали **n**.

 (2.1.2)

Градиент обладает следующими свойствами

grad (*ψ* + *ϕ*) = grad *ψ* + grad *ϕ* , (2.1.3)

grad (*ψ* **.***ϕ*) = *ϕ* grad *ψ* + *ψ* grad *ϕ* , (2.1.4)

grad (*ψ* / *ϕ*) = (*ϕ* grad *ψ* –*ψ* grad *ϕ*)/*ϕ*2, (2.1.5)

. (2.1.6)

С учетом метрических коэффициентов и соответствующих ортов (см. таблицу1) выражение для градиента в декартовой системе координат:

 (2.1.7)

В цилиндрической системе координат:

 (2.1.8)

В сферической системе координат:

 (2.1.9)

Рассмотрим проекцию grad ψ на произвольно выбранное направление **I**, обозначаемую gradIψ. По определению проекции



где **I0** – единичный вектор вдоль **I**, а поскольку (**I0,n0**)=cosα

### (2.1.10)

производная скалярной функции по направлению вектора I.

### **2.1.2 Векторное поле и векторные (силовые) линии**

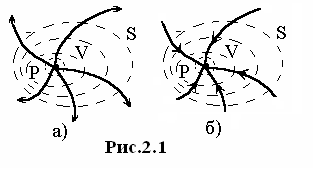
Если во всех точках некоторой области пространства определены значения вектора **А**(**r**), говорят, что в данной области задано поле вектора **А**(**r**) (векторное поле **А**(**r**)). Любой вектор **А**(**r**) можно представить в виде

**A**(**r**) = **l1***A*1(**r**) + **l2***A*2(**r**) + **l3***A*3(**r**),

то задание вектора **А(r)** эквивалентно заданию трех скалярных функций *A*1(**r**), *A*2(**r**) и *A*3(**r**).

Потенциальные векторные поля. Если задана векторная функция **F,** являющаяся градиентом некоторой скалярной функции *ψ*, то такое векторное поле называется **потенциальным**, а *ψ* – **потенциалом**. Поверхности уровня, на которых *ψ* =const, являются, следовательно, поверхностями постоянного потенциала, или **эквипотенциальными поверхностями**. Линии вектора **F** = grad *ψ* всегда ортогональны эквипотенциальным поверхностям, т.е. пересекают их под прямым углом.

**2.1.3Дивергенция.Теорема Остроградского-Гаусса.**

Дивергенция вектора **F** в точке *P*, обозначаемая div**F**, это предел отношения потока вектора **F** через замкнутую поверхность Δ*S*, охватывающую точку *P*, к объему Δ*V*, ограниченному поверхностью Δ*S* при стягивании его к точке *М*.

. (2.1.11)

В тех точках, в которых div **F** ≠ 0, линии вектора **F** претерпевают разрыв. Линии выходят из точек, где div **F** > 0 – источники (рис. 2.1а) и входят в точки, где div **F <** 0 – стоки (рис. 2.1б), в точках, где div **F**= 0, линии вектора **F** непрерывны. Мерой интенсивности истока (стока) служит div **F**.

Дивергенция в криволинейных ортогональных координатах

 (2.1.12)

Дивергенция в декартовых координатах:

; (2.1.13)

в цилиндрической системе координат:

; (2.1.14)

в сферической системе координат:

. (2.1.15)

Свойства дивергенции.

div (**A** + **F**) = div **A** + div **F** , (2.1.16)

div(*c***F**) = *c* **.** div **F** , (2.1.17)

если *ϕ* – скалярная, а **F** – векторная функции координат, то

div (*ϕ* **. F**) = *ϕ* **.**div **F** + (grad*ϕ* , **F**). (2.1.18)

Теорема Остроградского-Гаусса.

 (2.1.19)

Пользуясь этой формулой, следует помнить. что *S* –замкнутая поверхность, ограничивающая объем *V*, **dS** = **n**0 d*S*, где d*S* – элемент поверхности, а **n**0 – орт внешней нормали к поверхности *S*.

### **2.1.4 Ротор. Теорема Стокса**

По определению rot **F** есть вектор, проекция которого на произвольное направление *n* выражается следующим образом:

 (2.1.20)

где Δ*S* – площадка, выбранная так, что **n** – это нормаль к этой площадке, образующая правовинтовую систему с направлением обхода контура *L* (если смотреть вдоль вектора **n**, обход контура *L* производится по часовой стрелке).

Общая формула для вычисления rot **F** в криволинейных ортогональных координатах имеет вид:

 (2.1.21)

Ротор в декартовой системе координат:

, (2.1.22)

или

. (2.1.22а)

В цилиндрической системе координат:

 . (2.1.23)

В сферической системе координат:

. (2.1.24)

Свойства ротора:

1. rot(**F**+**A**) = rot **F** + rot **A**, (2.1.25)
2. rot (*m***F**) = *m* rot **F**, (2.1.26)
3. rot(*ψ***F**) = *ψ* rot **F** + [grad*ψ*, **F**], (2.1.27)

где *ψ* – скалярная функция координат.

1. rot grad *ψ* ≡ 0. (2.1.28)

Потенциальные поля (**F** = grad *ψ*) являются обязательно «безвихревыми».

1. div rot **F** ≡ 0 (2.1.29)

Расходимость вихревого поля равна нулю, т.е. вихревое поле соленоидально.

Теорема Стокса.

, (2.1.30)

связывает между собой циркуляцию вектора по одновитковому замкнутому контуру *L* с потоком ротора того же вектора через произвольную поверхность *S*, опирающуюся на этот контур.

### **2.1.5 Оператор Гамильтона**

Оператор Гамильтона (оператор набла) в декартовой системе координат представляет собой оператор вида

 (2.1.31)

который можно рассматривать как своеобразный вектор. Этот оператор можно применять как к скалярным, так и к векторным функциям.

. (2.1.32)

. (2.1.33)

. (2.1.34)

При формальном применении оператора как вектора следует помнить, что нет смысла помещать его справа от рассматриваемой функции (например, произведения или , если они используются как окончательные самостоятельные выражения в векторном анализе не имеют смысла).

Оператор  удобен и при раскрытии более сложных операций. Например:

.

1) ,

так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковы, всегда равно нулю.

2) 

так как векторное произведение одинаково направленных векторов равно 0.

3)  (2.1.35)

Оператор (его еще называют оператором Лапласа) в декартовой системе координат имеет вид

. (2.1.36)

Формула получается в результате вычисления скалярного произведения вектора на себя самого. Часто оператор обозначают символом Δ.



4) . (2.1.37)

Оператор Лапласа в криволинейной ортогональной системе координат определяется как

 (2.1.38)

Лапласиан в цилиндрической системе координат

. (2.1.39)

Лапласиан в сферической системе координат

. (2.1.40)

В криволинейной ортогональной системе координат оператор Гамильтона имеет вид:  (2.1.41)

Оператор Гамильтона в цилиндрической системе координат

 (2.1.42)

Оператор Гамильтона в сферической системе координат

 (2.1.43)

**2.1.6. Классификация векторных полей**

**Потенциальные поля.**

Определенное в области D векторное поле называют потенциальным, если существует скалярная функция  такая, что

Функцию U(M) при этом называют потенциалом поля.

Свойства потенциальных полей

1. Циркуляция потенциального поля  по любому замкнотому контуру равна нулю.

, 

1. , 

- кривая, соединяющая точки 

1. 

Потенциал поля определяется с точностью до произвольной постоянной

1. Необходимым и достаточным условием потенциальности является



**Соленоидальные поля.**

Определенное в области D векторное поле называют соленоидальным или трубчатым, если существует вектор – функция , такая что



Функцию  при этом называют векторным потенциалом поля.

Если поле соленоидальное и его векторный потенциал равен , то



Свойства соленоидальных полей

1. Поток соленоидального векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю



1. Необходимым и достаточным условием соленоидальности является



**Теорема о разложении векторных полей.**

Заданное в области D произвольное векторное поле представимо в виде суммы потенциального и соленоидального полей, т.е.

где:



**Гармонические поля.**

Заданное в области D векторное поле называют гармоническим или лапласовым, если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное



В декартовой системе координат

- это уравнение Лапласа

и его решение – гармонические функции.

**Задачи и примеры с подробными решениями**

2.1. Вычислить градиент функции ψ= ex ·tgy·arcsin (ln z)

РЕШЕНИЕ :

В декартовой системе координат согласно (2.1.7)

2.2 Вычислить градиент функции U = ρ cosφ + z sin2 φ - 3ρ

РЕШЕНИЕ :

В цилиндрической системе координат согласно (2.1.8)



Следовательно :





2.3. Найти grad sin r , где - длина радиуса-вектора



РЕШЕНИЕ:

Используя свойство градиента для сложной функции (см. (2.1.6)) ,

получим 

Найдём grad r. Согласно (2.1.7)





Тогда grad sin r = cos r · **r0** = 

2.4.Вычислить дивергенцию вектора



РЕШЕНИЕ :

Т.к. в прямоугольной системе координат согласно (2.1.13)



а производные в рассматриваемом примере равны :

;

;

,то



2.5. Найти div ( ψ( r )·**r**) где : 

-скалярная функция

РЕШЕНИЕ :

Используя свойство дивергенции от произведения скалярной функции и вектора (см.(2.1.18)) , получим

.

Т.к. ; , a

, где ( как было показано ранее) , то





**2.**6.Вычислить ротор вектора

, где 

РЕШЕНИЕ :

В сферической системе координат согласно (2.1.24)

 , где



Следовательно rot **a** равен:

=

=

.

2.7. Доказать, что поле вектора **a** = f(r) **r**, где ,

**r** = **x0** x+ **y0**y + **z0**z является потенциальным.

РЕШЕНИЕ :

Используя свойство ротора (см.(2.1.27)) получим

rot **a =** rot (f(r) **r**) = f(r) rot **r** + [grad f(r), **r** ]

Т.к.

a grad f(r) =  (r) grad r =  (r) · **r**/r, то

rot **a** = f(r) 0 +  (r) ·  [**r, r** ]·= 0

║

0

т.е. поле вектора **a** - потенциально.

2.8. При какой функции ψ(r) дивергенция поля **a** = xz·**x0** + **y0**y + ψ(r)**z0** будет равна Z ? r = r(x, y, z)

РЕШЕНИЕ:

Согласно (2.1.13)

div **a**  = ∂ax/∂x + ∂ay/∂y + ∂az/∂z = z + 1 + ∂ψ(r)/∂z = z

Откуда ∂ψ(r)/∂z = -1 →ψ(r) = ψ(z) = -z + C, где C= const .

2.9. Найти точки, в которых модуль градиента скалярного поля

U = равен 1

РЕШЕНИЕ :

Введём обозначения r =  Тогда скалярное поле может быть записано в виде U = ln r. Согласно (2.1.6)







Откуда x2 + y2 + z2 = 1

( сфера, радиус - 1, центр - в начале координат) .

2.10. Определить, какое из указанных векторных полей является соленоидальным :

**a** = **x0**x( z2- y2) + **y0**y(x2 – z2) + **z0**z(y2 – x2)

**b = x0**y2 **+ y0**(x2 – y3) + **z0**z(3y2 + 1)

РЕШЕНИЕ :

Известно, что если во всех точках некоторой области div **a** = 0 , то говорят, что поле **а** соленоидально в этой области, т.е. не имеет источников и стоков.

Найдём дивергенции указанных векторов:

div **a** = z2 – y2 + x2 –z2 + y2 – x2 = 0

div **b** = 0 – 3y2 + 3y2 + 1 ≠ 0

Следовательно, поле вектора **а** является соленоидальным.

2.11. Пусть. Найти величину и направление  в точке

М(-9,12,10).

Чему равна производная в направлении биссектрисы координатного угла XOY?

Решение:

Согласно (2.1.7)







; ; 



Т.к. 

2.12 Дана комплексная амплитуда напряженности электрического поля

 E0e- (α + iβ) ( x cosφ + z sinφ) , где α, β, φ,  -const

Найти комплексное и мгновенное значение вектора напряжённости электрического поля.

РЕШЕНИЕ :

Как известно , комплексное значение вектора согласно равно

=**·**ei ω t = - **y0**e - α ( x cosφ + z sinφ ) · e i ( ω t - β ( x cosφ + z sinφ ) ) ,

а мгновенное значение

**E** = R e = - **y0** e – α ( x cosφ + z sinφ )  · cos ( ωt – β( x cosφ + z sinφ))

2 13 Дана комплексная амплитуда напряженности магнитного поля

= - **z0** e ( α + i β)( x cosφ + y sinφ) , где α, β, φ,  -const

Используя уравнения Максвэлла получить выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля.

РЕШЕНИЕ :

Воспользуемся первым уравнением Максвэлла для монохроматического поля

rot **=** i ω

Вычислим левую часть уравнения

В нашем примере H m x = Hm y  = 0 и ∂/∂z = 0 ( нет вариации поля по z)

Тогда , где Hm z = - H**0** e ( α + iβ) ( x cosφ + y sinφ),



.





Тогда rot  = ( **-x0** sinφ + **y0** cosφ) H0 ( α + iβ) e( α + iβ) ( x cosφ + y sinφ).

Откуда, из уравнения Максвэлла



т.к.

2.14 Показать, что при

 векторы **E** и rot**E** взаимно перпендикулярны.

Решение:



Скалярное произведение

, следовательно, **E**rot**E.**

2.15 Записать выражение для комплексного значения вектора Пойнтинга

, если





Где  , , 

Решение:

 , где







Тогда 

**Методические указания**

по изучению курса и выполнению контрольной работы

по дисциплине

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И ВОЛН**

для студентов-заочников 2 курса

(направление 11.03.02)

Подписано в печать 00.00.2019г. Формат 60х90 1/16.

Объём 2,7 усл.п.л. Тираж 150 экз. Изд. №00. Заказ .

ООО «ТР-принт». Москва, ул. Правды, д. 24, стр. 5.

[www.tirazhy.ru](http://www.tirazhy.ru). +7 (499) 519-01-24