

# **Оглавление**

[Общие указания к выполнению лабораторной работы](#)

[Цель работы](#)

[Постановка задачи](#)

[Краткие сведения из теории](#)

[Последовательность выполнения работы](#)

[Методический пример](#)

[Отчет по лабораторной работе](#)

[Контрольные вопросы](#)

[Варианты заданий](#)

## **Общие указания к выполнению лабораторной работы**

Лабораторные работы выполняются на персональных компьютерах в операционной среде Windows с установленной системой MatLab 6.1 (R12.1) и пакетом прикладных программ Control System Toolbox 5.

Указания по технике безопасности совпадают с требованиями, предъявляемыми к пользователю ЭВМ. Другие опасные и вредные факторы отсутствуют.

## **Цель работы**

Ознакомление с динамическими и частотными характеристиками систем автоматического управления (САУ) и получение навыков исследования линейных динамических моделей с использованием пакета прикладных программ Control System Toolbox системы инженерных расчетов MatLab 6.

## **Постановка задачи**

В качестве объекта исследования в лабораторной работе выступают линейные (линеаризованные) динамические стационарные системы управления с одним входом и одним выходом. При этом модель одномерной САУ задана в виде комплексной передаточной функции, записанной как отношение полиномов

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Необходимо:

1. Определить полюса и нули передаточной функции

$$s_j^*, (j = \overline{1, n}), \quad s_j^0, (j = \overline{1, m}).$$

2. Записать дифференциальное уравнение, определяющее функционирование САУ.

3. Построить графики переходной и импульсно-переходной функции:

$$h(t), w(t).$$

4. Построить логарифмические частотные характеристики

$$L(\omega).$$

5. Построить частотный годограф Найквиста

$$W(i\omega), \omega = [0, \infty].$$

### Краткие сведения из теории

Рассмотрим систему автоматического управления (САУ), описываемую линейным (линеаризованным) дифференциальным уравнением вида:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u(t)$  – входной процесс,  $y(t)$  – выходной процесс,  $a_i, b_j, (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$  – постоянные коэффициенты,  $n, m$  ( $n \geq m$ ) – постоянные числа. В операторной форме выражение (1) может быть записано –

$$A(D)y(t) = B(D)u(t).$$

Здесь  $D$  – оператор дифференцирования  $\left( D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \right)$ . Отсюда преобразование «вход-выход» системы –

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (2)$$

где  $W(D)$  называется операторной передаточной функцией.

Один из способов моделирования систем заключается в представлении преобразования «вход-выход» в виде комплексной

передаточной функции:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (3)$$

которая получается путем применения преобразования Лапласа к (2) при начальных нулевых условиях. Здесь  $s$ -комплексная переменная. Связь между операторной (2) и комплексной (3) передаточными функциями можно записать в виде

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Комплексные числа, являющиеся корнями многочлена  $B(s)$ , называются нулями передаточной функции, а корни многочлена  $A(s)$  – полюсами.

Динамические свойства систем характеризуют реакции на входные воздействия специального вида. В частности анализ выхода системы на единичный скачок и  $\delta$ -функцию (дельта-функцию).

Пусть  $u(t) = 1(t)$ , то есть на вход системы подается функция Хевисайда (единичных скачков), определяемая

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

График функции Хевисайда приведен на рис. 1. Реакция САУ на единичный скачок называется переходной функцией системы и обозначается  $h(t)$ .

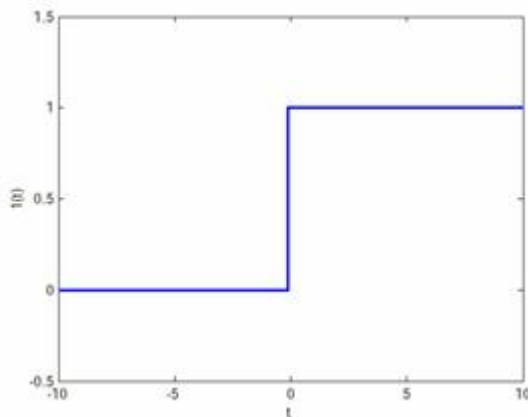


Рис. 1. Функция Хевисайда

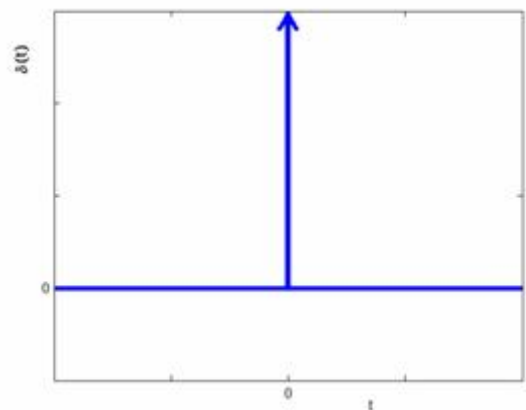


Рис. 2. Функция Дирака

Если  $u(t) = \delta(t)$ , то есть на вход системы поступает функция Дирака ( $\delta$ -функция, импульсная функция, рис. 2) определяемая

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

то реакция САУ называется импульсной переходной функцией системы и обозначается  $w(t)$ .

Импульсная и переходная функции системы связаны соотношением:

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$

Благодаря широкому применению при исследовании устойчивости динамических систем и проектировании регуляторов получили распространение частотные характеристики.

Пусть на вход системы с передаточной функцией  $W(s)$  подается гармонический сигнал

$$u(t) = a_u \cos(\omega t), t > 0.$$

В этих условиях справедлива следующая теорема: Если звено является устойчивым, то установившаяся реакция  $y(t)$  на гармоническое воздействие является функцией той же частоты с амплитудой

$$a_y = a_u |W(i\omega)|,$$

и относительным сдвигом по фазе

$$\psi = \arg W(i\omega).$$

Таким образом:

$$y(t) = a_u |W(i\omega)| \cos(\omega t + \arg W(i\omega)),$$

где  $i$  – комплексная единица,  $W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}$  – частотная характеристика.

Частотной характеристикой  $W(i\omega)$  стационарной динамической системы называется преобразование Фурье переходной функции:

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d\tau,$$

где  $w(t - \tau)$  – импульсная переходная функция.

Связь между комплексной передаточной функцией и частотной характеристикой определяется соотношением:

$$W(s)|_{s=i\omega} = W(i\omega)$$

При фиксированном значении  $\omega$  частотная характеристика является комплексным числом, и, следовательно, может быть представлена в виде

$$W(i\omega) = A(\omega) e^{i\omega + \psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Здесь  $A(\omega) = |W(i\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);  
 $\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$  – фазово-частотная характеристика (ФЧХ);  
 $U(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);  
 $V(\omega) = \operatorname{Im} W(i\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Геометрическое место точек  $W(i\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от  $\omega_0$  до  $\omega_1$  (обычно  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = \infty$ ), называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) или частотным годографом Найквиста.

Критерий Найквиста позволяет говорить об устойчивости замкнутой системы по виду разомкнутой. Он формулируется следующим образом: 1. Если разомкнутая система устойчива, то для того чтобы была устойчивой замкнутая система необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста не огибал точку  $-1, j0$ . 2. Если разомкнутая система не устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы

годограф Найквиста обогнул точку  $-1, j0$   $\pi$  раз при изменении частоты от 0 до  $+\infty$ .

Имеет широкое практическое значение диаграмма Боде (логарифмическая амплитудная характеристика, ЛАХ), которая определяется как  $L = 20 \lg A(\omega)$ , измеряется в децибелах и строится как функция от  $\lg \omega$ .

### Последовательность выполнения работы

Для выполнения лабораторной работы используется пакет прикладных программ (ППП) Control System Toolbox 5 [2, 3] системы инженерных расчетов MatLab. ППП предназначен для работы с LTI-моделями (Linear Time Invariant Models) систем управления.

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде комплексной передаточной функции. Синтаксис команды, создающий LTI-систему с одним входом и одним выходом, в виде передаточной функции:

$$TF([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0])$$

$b_m, \dots, b_1$  – значения коэффициентов полинома В в (3),

$a_n, \dots, a_1$  – значения коэффициентов полинома А в (3).

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таблице 1.

**Таблица 1.**  
**Некоторые команды Control System Toolbox**

Синтаксис	Описание
pole(<LTI-объект>)	Вычисление полюсов передаточной функции
zero(<LTI-объект>)	Вычисление нулей передаточной функции
step(<LTI-объект>)	Построение графика переходного процесса
impulse(<LTI-объект>)	Построение графика импульсной переходной функции
bode(<LTI-объект>)	Построение логарифмических частотных характеристик (диаграммы Боде)
nyquist(<LTI-объект>)	Построение частотного годографа Найквиста

Для определения корней полиномов степени  $k$ , может, также, применяться команда MatLab

$$\text{roots}(P),$$

которая, в качестве аргумента  $P$ , получает матрицу коэффициентов полинома  $[p_k, \dots, p_0]$ .

Другим вариантом получения графиков динамических характеристик САУ является использование графического интерфейса ППП CST – LTI viewer, вызов которого осуществляется командой

ltiviewer,

которой, в качестве параметра, можно указать имя переменной, содержащей LTI-объект.

Таким образом, выполнение лабораторной работы состоит из следующих шагов:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MatLab 6.1.
3. Создать tf-объекта, в соответствии с заданным вариантом.
4. Составить дифференциальное уравнение, определяющего функционирование САУ.
5. Определить полюса передаточной функции  $s_j^*, (j = \overline{1, n})$  с использованием команды roots или pole.
6. Определить нули передаточной функции  $s_j^0, (j = \overline{1, m})$  с использованием команды roots или zero.
7. Используя LTI-viewer, или соответствующие команды (табл.1) получить динамические характеристики – переходную функцию  $h(t)$ , импульсно-переходную функцию  $w(t)$  и частотные характеристики – диаграмму Боде, частотный годограф Найквиста.
8. Ответить на контрольные вопросы, приведенные на с.13 методических указаний.
9. Оформить отчет.
10. Сдать отчет преподавателю и защитить лабораторную работу.

## Методический пример

Задана передаточная функция САУ

$$W = \frac{s + 2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}.$$

Найдем ее динамические и частотные характеристики с использованием ППП Control System Toolbox системы MatLab. Будем работать в командном режиме.

1. Создадим LTI-объект с именем w, для этого выполним:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

```
Transfer function:
```

```
      s + 2
```

```
-----  
3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3
```

2. Найдем полюса и нули передаточной функции с использованием команд pole, zero.

```
>> pole(w)

ans =

    -0.2639 + 1.0825i
    -0.2639 - 1.0825i
    -0.8055

>> zero(w)

ans =

    -2
```

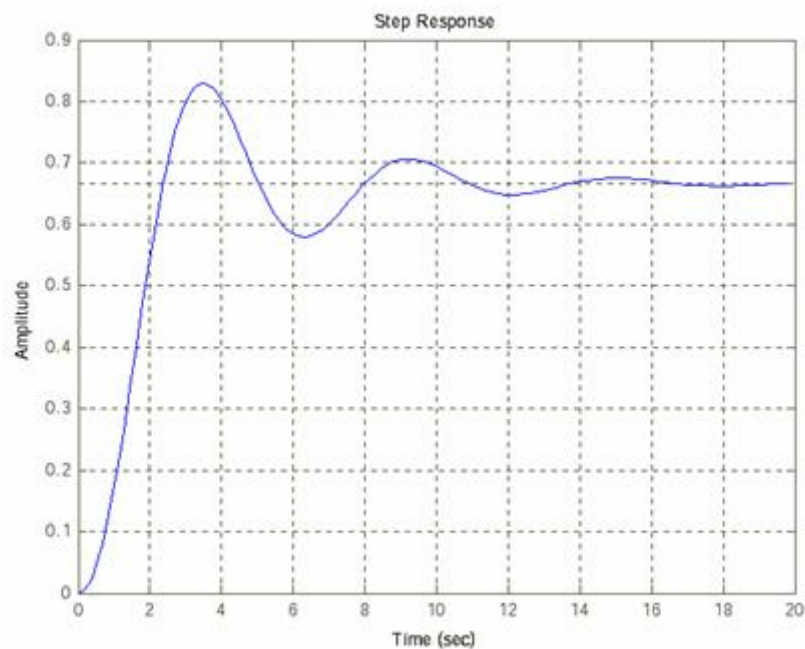
3. Построим переходную функцию командой `step(w)`. Результат ее выполнения приведен на рис. 3.

4. Построим импульсную переходную функцию командой `impulse(w)`. Результат показан на рис. 4.

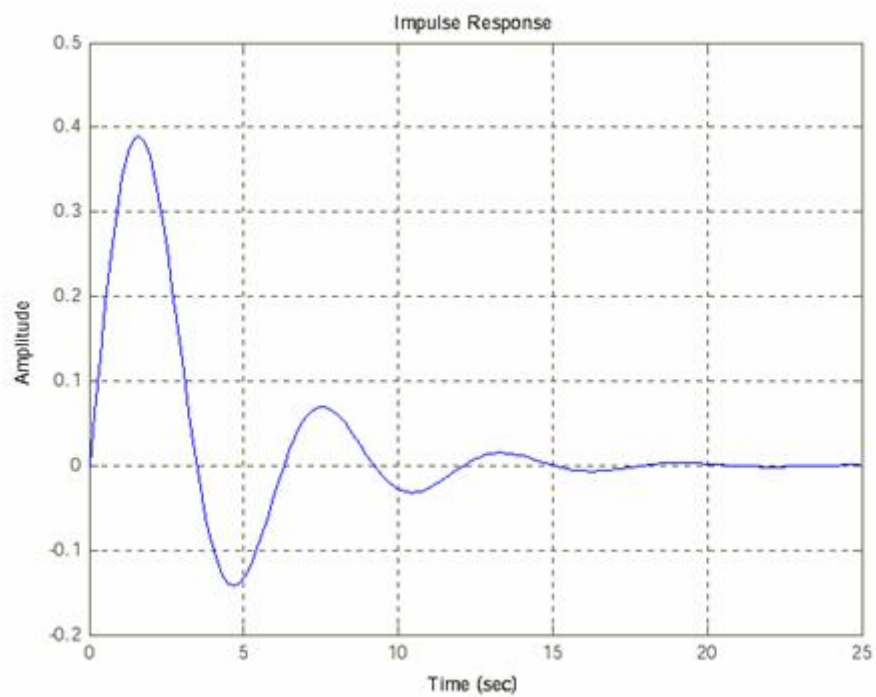
5. Диаграмму Бode получим, используя команду `bode(w)` – рис. 5.

6. Определим частотный годограф Найквиста, выполнив команду `nyquist(w)` – рис. 6.

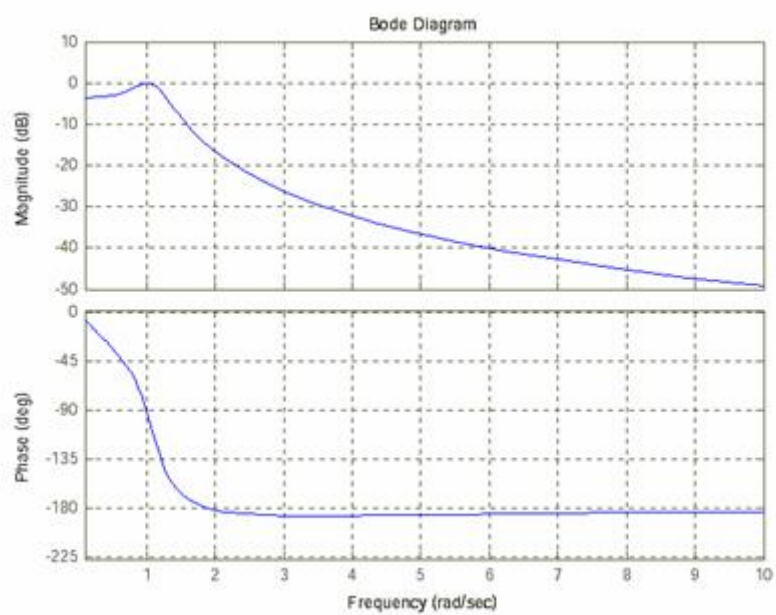
Аналогичные результаты (рис. 7) можно получить, используя команду `ltiview(w)`, с соответствующими настройками в меню «Plot Configuration».



**Рис.3. Переходная функция  $h(t)$**

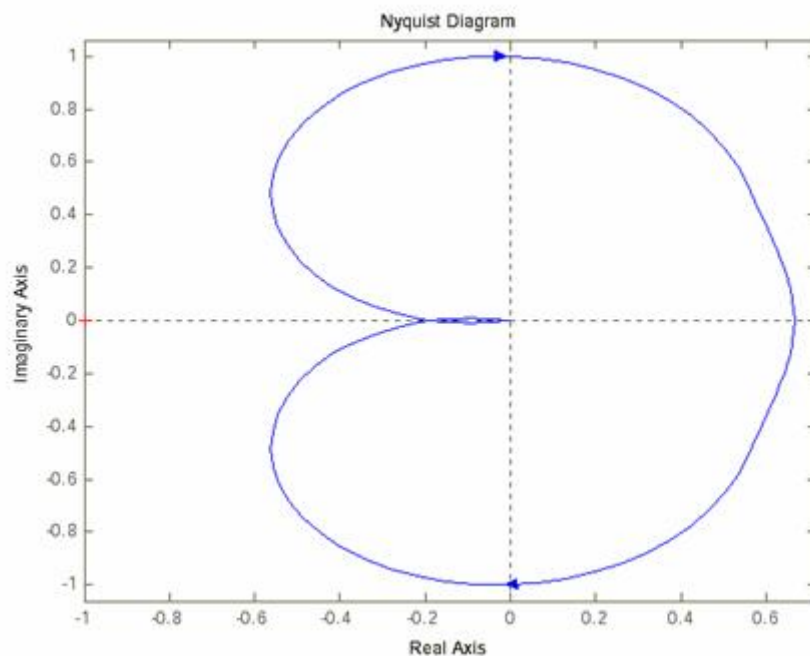


**Рис 4. Импульсная переходная функция**

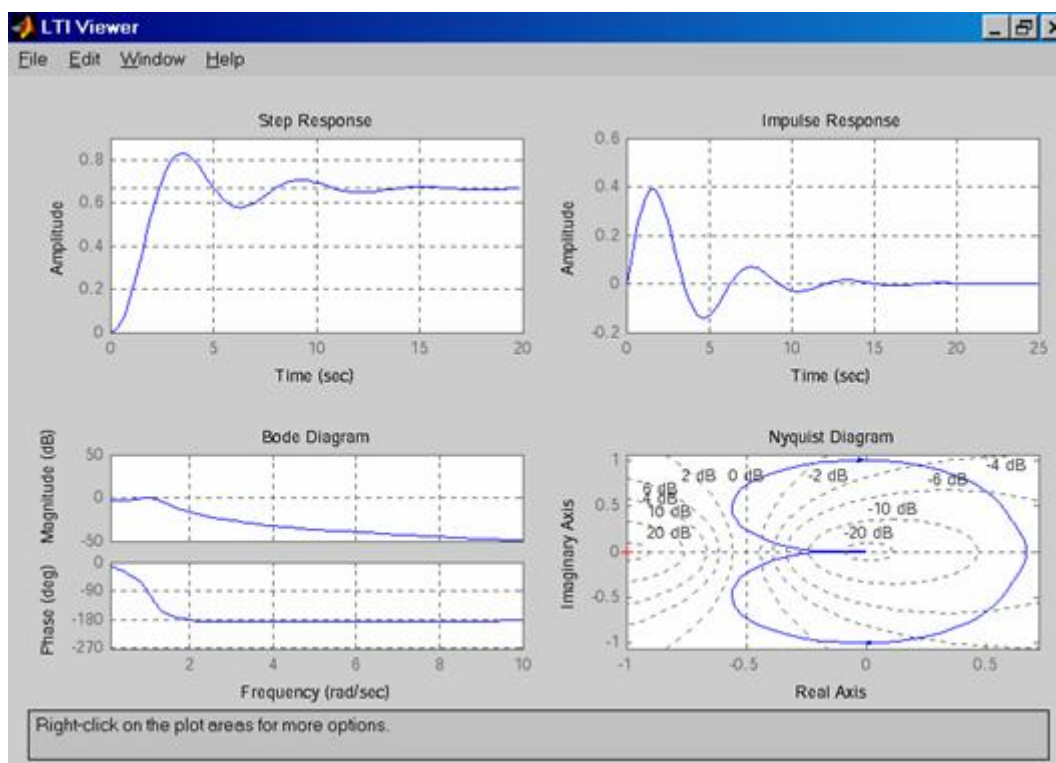


**Рис. 5. Логарифмические частотные характеристики**





*Рис. 6. Частотный годограф*



*Рис. 7. LTI-viewer*

## **Отчет по лабораторной работе**

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению лабораторных работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Формулировку цели работы.
3. Постановка задачи в соответствии с вариантом задания.

4. Краткая теория.
5. Результаты работы.
6. Выводы.

### Контрольные вопросы

1. Представьте систему в виде последовательного соединения типовых звеньев.
2. Дайте определение и поясните физический смысл переходной функции.
3. Представьте исходную систему в пространстве состояний.
4. Найдите передаточную функцию замкнутой системы.
5. Постройте динамические характеристики типовых звеньев.
6. Определите вид ЛЧХ для пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора.

### Варианты заданий

Вид передаточной функции	№ варианта	Коэффициенты полиномов						
		$b_0$	$b_1$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	3	1	2	3	0	1
	2.	2	6	4	0	1	5	1
	3.	0	-3	5	2	0	2	1
	4.	4	2	3	4	5	3	1
	5.	0	1	-2	-2	-3	-2	0
		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	6.	0	-3	2	4	2	3	9
	7.	8	0	-3	-4	-6	-4	-1
	8.	-4	6	-2	5	5	0	1
	9.	6	-8	-7	0	-6	-3	-1
	10.	2	-1	-3	-1	0	-7	-2
		$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_4$
$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_1 p + a_0}$	11.	0	2	8	-3	7	-7	1
	12.	-5	0	3	-8	-2	-1	-6
	13.	-7	1	2	0	5	2	9
	14.	-6	4	-4	1	0	6	3
	15.	2	-2	-1	5	3	0	9
		$b_0$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	16.	0	-5	4	3	7	9	1
	17.	7	-6	0	5	8	2	2
	18.	-2	-8	2	0	4	3	3
	19.	-7	-1	6	9	0	4	2
	20.	-3	7	-4	4	5	0	1

		$b_2$	$b_3$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$W(p) = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	21.	0	-5	4	3	7	9	1
	22.	7	-6	0	5	8	2	2
	23.	-2	-8	2	0	4	3	3
	24.	-7	-1	6	9	0	4	2
	25.	-3	7	-4	4	5	0	1