

**Лабораторная работа № 2**  
**Ознакомление с методикой проектирования пропорционального**  
**устойчивого регулятора методом корневого годографа для**  
**линейных (линеаризованных) систем автоматического**  
**управления**

## **Оглавление**

[Цель работы](#)

[Постановка задачи](#)

[Краткие сведения из теории](#)

[Последовательность выполнения работы](#)

[Методический пример](#)

[Отчет о работе](#)

[Контрольные вопросы](#)

[Варианты заданий](#)

### **Цель работы**

Ознакомление с методикой построения корневых годографов для анализа и синтеза линейных (линеаризованных) систем автоматического управления (САУ) и получение навыков исследования линейных динамических моделей с использованием пакета прикладных программ Control System Toolbox системы инженерных расчетов MatLab 6.

### **Постановка задачи**

Дана модель разомкнутой системы, записанная в виде отношения произведений типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{K \cdot s^{\alpha_1} \prod_{j=1}^{\beta_1} (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\gamma_1} (T_j^2 s^2 + 2T_j \zeta_j s + 1)}{s^{\alpha_2} \prod_{i=1}^{\beta_2} (T_i s + 1) \prod_{i=1}^{\gamma_2} (T_i^2 s^2 + 2T_i \zeta_i s + 1)}.$$

Необходимо:

1. Построить корневой годограф.
2. Получить коэффициент усиления  $K^{кр}$ , при котором система находится на границе устойчивости.
3. Вычислить частоту  $\omega^{кр}$ , при которой в системе возникают незатухающие колебания.
4. Нанести на ветви корневого годографа значения полюсов замкнутой системы, соответствующие  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .

5. Привести выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.

### Краткие сведения из теории

В ряде случаев, имеющих практическое значение, модель линейной системы автоматического управления (САУ) задается в виде структурной схемы, состоящей из типовых звеньев, математическое описание которых задано в операторной форме. Связь между входом и выходом системы задается в виде передаточной функции  $W(s)$  [4]. В общем виде передаточную функцию  $W(s)$  можно представить в виде:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (1)$$

где  $s$  – комплексная переменная,  $B(s)$  – полином степени  $m$ ;  $A(s)$  – полином степени  $n$ .

Для физически реализуемых САУ  $m \leq n$ . Коэффициенты указанных полиномов действительные числа.

Применение метода корневого годографа (КГ) обусловлено фундаментальной зависимостью поведения линейной САУ от полюсов и нулей ее передаточной функции. Под полюсами подразумеваются корни полинома – знаменателя  $A(s)$ , а под нулями – корни полинома числителя  $B(s)$ . Полином  $A(s)$  называется также характеристическим многочленом передаточной функции  $W(s)$ .

Положение полюсов  $W(s)$  на комплексной плоскости определяет устойчивость САУ, а в совокупности с нулями вид импульсной переходной функции  $w(t)$  и переходной функции  $h(t)$ .

Метод корневого годографа позволяет находить полюса и нули передаточной функции замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы  $k$ . Метод корневого годографа является также методом проектирования пропорционального устойчивого регулятора.

Передаточную функцию разомкнутой системы  $W_p(s)$  представим в виде:

$$W_p(s) = \frac{KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)}, \quad (2)$$

где  $s_j^0$  – нули передаточной функции  $W_p(s)$ ,  $(j = \overline{1, m})$ ;  $s_i^*$  – полюса передаточной функции  $W_p(s)$ ,  $(i = \overline{1, n})$ ,  $n$  и  $m$  – порядки знаменателя и числителя;  $K$  – коэффициент усиления разомкнутой системы;  $C$  – коэффициент представления.

Передаточная функция разомкнутой системы, как правило, задается в виде отношения произведений передаточных функций стандартных (типовых) звеньев, при описании которых используются выражения трех видов:

$$Ts \quad (3)$$

$$Ts + 1 \quad (4)$$

$$T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1 \quad (5)$$

Здесь  $T$  - постоянная времени [с].

Если выражения (3), (4), (5) стоят в знаменателе передаточных функций звеньев (в числителе 1), то звенья называются соответственно интегрирующим, апериодическим, колебательным. Для колебательного звена  $\zeta$  - безразмерный коэффициент затухания ( $0 < \zeta < 1$ ). Если выражения (3), (4), (5) стоят в числителе передаточных функций звеньев (1), то звенья называются соответственно дифференцирующим, форсирующим первого порядка, форсирующим второго порядка.

Для перехода от стандартной формы записи к формуле (2) необходимо вычислить полюса и нули соответствующих типовых звеньев.

Для передаточных функций, использующих выражение (3) –

$$s_i^* = 0, \quad (6)$$

использующих выражение (4) –

$$s^{*(0)} = -\frac{1}{T}, \quad (7)$$

использующих выражение (5) –

$$s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{\zeta}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}}, \quad (8)$$

или

$$s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{1}{T}(\zeta \pm i \cos \varphi) \quad (9)$$

где  $j = \arcsin \zeta$ .

Коэффициент представления  $C$  вычисляется по формуле

$$C = \frac{\prod_{j=1}^m T_j^0}{\prod_{i=1}^n T_i^*} \quad (10)$$

Для звеньев, использующих выражение (5), соответствующая постоянная времени входит в выражение (10) в квадрате.

При замыкании системы с передаточной функцией  $W_p(s)$  единичной обратной связью передаточная функция замкнутой системы  $W_3(s)$  принимает вид:

$$W_z(s) = \frac{W_p(s)}{1 \pm W_p(s)}, \quad (11)$$

где знак "+" соответствует отрицательной обратной связи; знак "-" соответствует положительной обратной связи.

Структурная схема системы с обратной связью приведена на рис. 2.1.

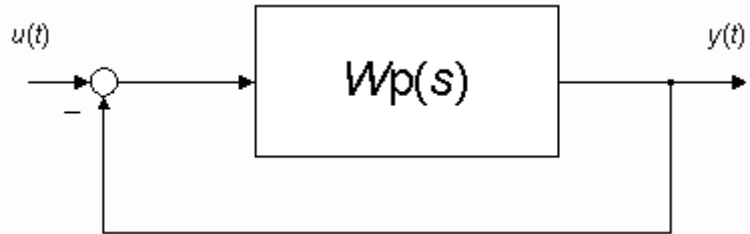


Рис. 2.1. Структурная схема САУ

Из (11) следует, что нули передаточной функции замкнутой системы равны нулям передаточной функции разомкнутой системы.

Задачу можно представить следующим эквивалентным образом. Есть объект управления, определяемый передаточной функцией

$$W_p(s) = \frac{KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)},$$

. Необходимо найти значение параметра пропорционального регулятора (рис. 2.2.)

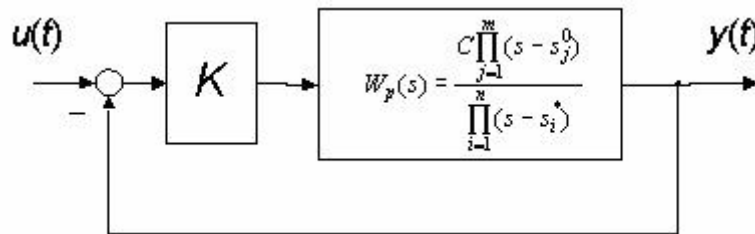


Рис. 2.2. Эквивалентная схема САУ.

Для определения полюсов замкнутой системы необходимо решить уравнение:

$$W_p(s) = -1. \quad (12)$$

Так как  $W_p(s)$  является функцией комплексного переменного  $s$ , то уравнение (12) распадается на два уравнения:

– уравнение модулей:

$$|W(s)| = 1 \quad (13)$$

– уравнение аргументов:

$$\arg W(s) = \pm (2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (14a)$$

для отрицательной обратной связи и

$$\arg W(s) = \pm 2\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \quad (14b)$$

для положительной обратной связи.

Уравнения (14) имеют наглядный геометрический смысл. Если точка  $s$  является полюсом замкнутой системы, то проведя в точку  $s$  вектора из всех нулей  $W_p(s)$  (обозначим аргументы этих векторов  $\theta_j^0$ ) и вектора из всех полюсов  $W_p(s)$  (обозначим аргументы этих векторов  $\theta_i^*$ ), уравнение (14а) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm(2v+1)\pi, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (15a)$$

а уравнение (14б) в виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm 2v\pi, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (15б)$$

Углы  $\theta$  отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла "+" соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла "-" соответствует повороту по часовой стрелке.

Геометрическое место точек на комплексной плоскости "s", удовлетворяющее выражениям (15а) и (15б) называется корневым годографом.

Как следует из (15), конфигурация корневого годографа не зависит от коэффициента усиления  $K$ , но каждому конкретному значению  $K$  однозначно соответствуют точки на корневом годографе.

Для определения этого соответствия достаточно воспользоваться уравнением (13) в следующей интерпретации:

$$\frac{K C \prod_{j=1}^m l_j^0}{\prod_{i=1}^n l_i^*} = 1 \quad (16)$$

где  $l_j^0$  – модуль (длина) вектора, проведенного из  $j$ -нуля в точку  $s$  КГ;  $l_i^*$  – модуль вектора, проведенного из  $i$ -полюса в ту же точку  $s$ .

Для систем небольшого порядка  $m, n < 5 - 7$  построение КГ можно осуществлять "вручную" (с помощью транспортира и линейки).

Приведем *свойства корневых годографов* (случай отрицательной обратной связи):

1. Ветви корневого годографа непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.

2. Число ветвей КГ равно порядку системы  $n$ . Ветви начинаются в  $n$  полюсах разомкнутой системы при  $K = 0$ . При возрастании  $K$  от 0 до бесконечности полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.

3. Отрезки действительной оси, по которым перемещаются действительные полюса замкнутой системы являются действительными ветвями корневого годографа. Эти ветви находятся в тех частях

действительной оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных полюсов и нулей разомкнутой системы.

4.  $m$  ветвей КГ при возрастании  $K$  от 0 до бесконечности заканчиваются в  $m$  нулях  $W_p(s)$ , а  $(n - m)$  ветвей при  $K$ , стремящемся к бесконечности, удаляются от полюсов вдоль асимптот.

5. Асимптоты в виде звезды из  $(n - m)$  полупрямых выходят из точки с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^m s_j^0 - \sum_{i=1}^n s_i^*}{n - m}$$

на действительной оси под углами

$$\theta_a = \frac{2\nu+1}{n-m} \pi, \quad (\nu = \overline{0, n-m-1})$$

к действительной оси.

6. Угол выхода  $\theta_i^*$  ветви КГ из полюса  $s_i^*$  определяется из уравнения (15а), примененного к данному полюсу. Аналогично определяется угол входа ветви КГ в нуль  $s_j^0$ .

7. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости  $s$  САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при  $K = K^{кр}$  пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке  $i\omega^{кр}$ . Назовем это значение коэффициента усиления критическим  $K^{кр}$ , а величину  $\omega^{кр}$  критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

Метод КГ позволяет выбрать коэффициент усиления САУ, подобрать расположение полюсов и нулей передаточной функции корректирующих звеньев, определить параметры доминирующих полюсов САУ (ближайших к началу координат плоскости  $s$ ).

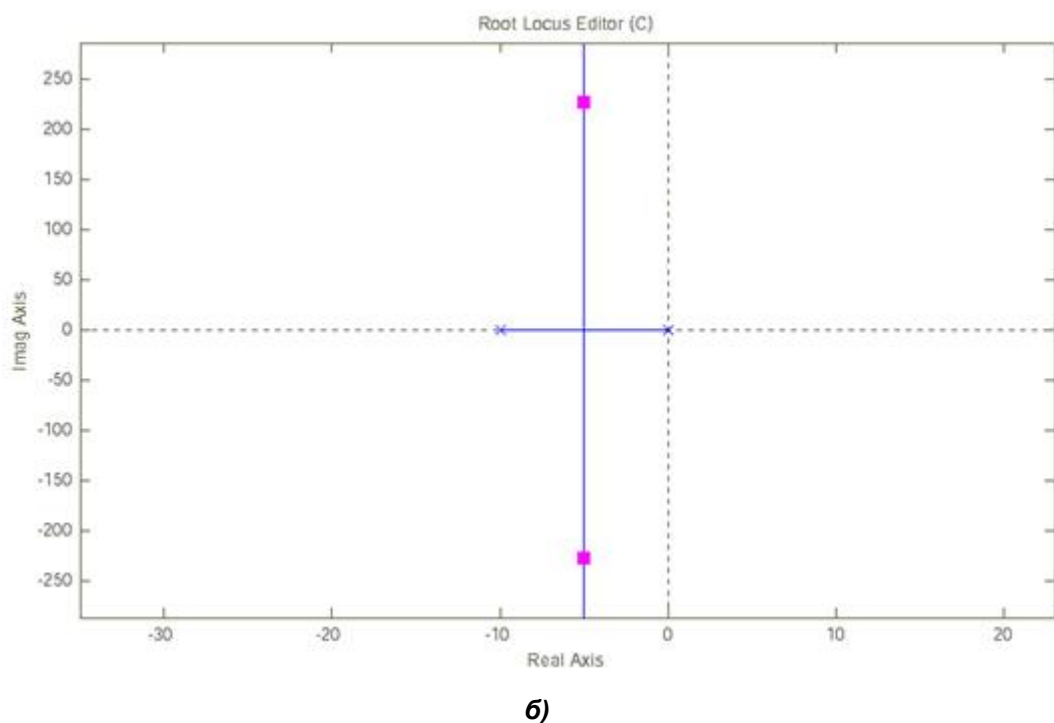
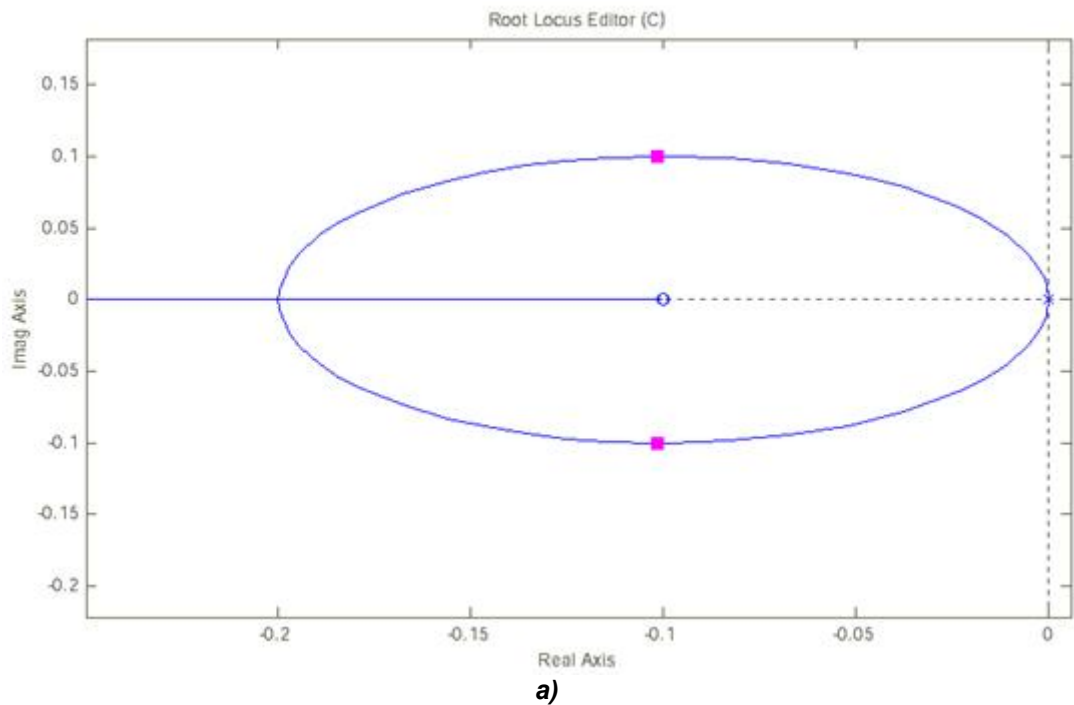
В качестве примеров, приведем КГ для двух систем автоматического управления.

На рисунке 2.3а приведен корневой годограф САУ, передаточная функция разомкнутой системы, которой равна:

$$W_{p1} = \frac{K(s + 0.1)}{s^2}.$$

Рисунок 2.3б иллюстрирует КГ САУ с передаточной функцией разомкнутой системы вида:

$$W_{p2} = \frac{K}{s(s + 10)}.$$



**Рис.2.3. Примеры корневых годографов**

## Последовательность выполнения работы

Для решения задачи используется GUI-интерфейс “SISO-Design Tool” из пакета прикладных программ Control System Toolbox [2, 5] системы инженерных расчетов MatLab.

Графический интерфейс предназначен для анализа и синтеза одномерных линейных (линеаризованных) систем автоматического управления (SISO - Single Input/Single Output).

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде набора полюсов, нулей и коэффициента усиления передаточной функции. Синтаксис команды, создающий LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде объекта ZPK (zero-pole-gain) с одним входом и одним выходом

$$\text{ZPK}([s_1^0, \dots, s_m^0], [s_1^*, \dots, s_m^*], K)$$

$s_1^0, \dots, s_m^0$  – значения нулей системы,  $s_1^*, \dots, s_m^*$  – значения полюсов системы,  $K$  – коэффициент усиления.

Более естественным является вариант, при котором с помощью функции ZPK создается символьная переменная 's', которая затем используется для определения передаточной функции в виде отношения (2). Например, после выполнения команд

$$s = \text{zpk}('s'); W1 = (s+0.1)/(s^2)$$

произойдет создание переменной W1 типа ZPK, определяющей

передаточную функцию вида 
$$W_1 = \frac{(s + 0.1)}{s^2}.$$

Запуск графического интерфейса SISO-Design Tool осуществляется командой

**sisotool**

или выбором соответствующего пункта в окне “Launch Pad”.

Необходимо выбрать в меню View пункт Root Locus (корневой годограф), для отображения редактора Root Locus Editor. В правом верхнем углу SISO-Design Tool можно менять тип обратной связи (кнопка '+/–') и структурную схему САУ. Предполагается наличие отрицательной обратной связи, и структурной схемы, показанной на [рис.2.1](#).

Для загрузки данных из рабочего пространства MatLab необходимо использовать меню “File/Import”, в результате чего появляется диалог Import System Data. Необходимо, чтобы в результате импортирования данных получилась рассматриваемая схема САУ ([рис.2.1](#)). Изменение динамических и частотных характеристик замкнутой системы при изменении  $K$  можно проследить используя меню "Tools/Loop Responses".

Таким образом, последовательность выполнения практической работы следующая:

1. Ознакомиться с основными элементами теории метода корневого годографа.
2. В соответствии с заданным вариантом нарисовать структурную схему САУ.
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать zpk-объект, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить значения полюсов и нулей разомкнутой системы  $W_p(s)$ .
6. Запустить SISO-Design Tool и построить КГ.
7. В соответствии с теорией проанализировать расположение ветвей корневого годографа.



8. Определить условия неустойчивости замкнутой САУ. Определить  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .
9. Определить значения полюсов, соответствующие  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .
10. Проанализировать влияние удаленных полюсов и нулей на величины  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .
11. При  $K=1$  привести выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.
12. Оформить отчет.

## Методический пример

Пусть необходимо исследовать САУ с передаточной функцией разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{0.2s + 1}{s(0.1s + 1)(0.04s^2 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.3s + 1)}$$

1. Создадим ZPK-объект, найдем полюса и нули разомкнутой системы:

```
>> s = zpk('s'); W = (0.2*s+1)/(s*(0.1*s+1)*(0.2^2*s^2+2*0.2*0.3*s+1))

Zero/pole/gain:
      50 (s+5)
-----
s (s+10) (s^2 + 3s + 25)

>> pole(W)

ans =

      0
-10.0000
-1.5000 + 4.7697i
-1.5000 - 4.7697i

>> zero(W)

ans =

-5
```

2. Запустим SISO-Design Tool, настроим параметры и импортируем ZPK-объект из рабочего пространства MatLab (рис.2.4). В окне Root Locus Editor интерфейса SISO-Design Tool построится корневой годограф (рис. 2.5).

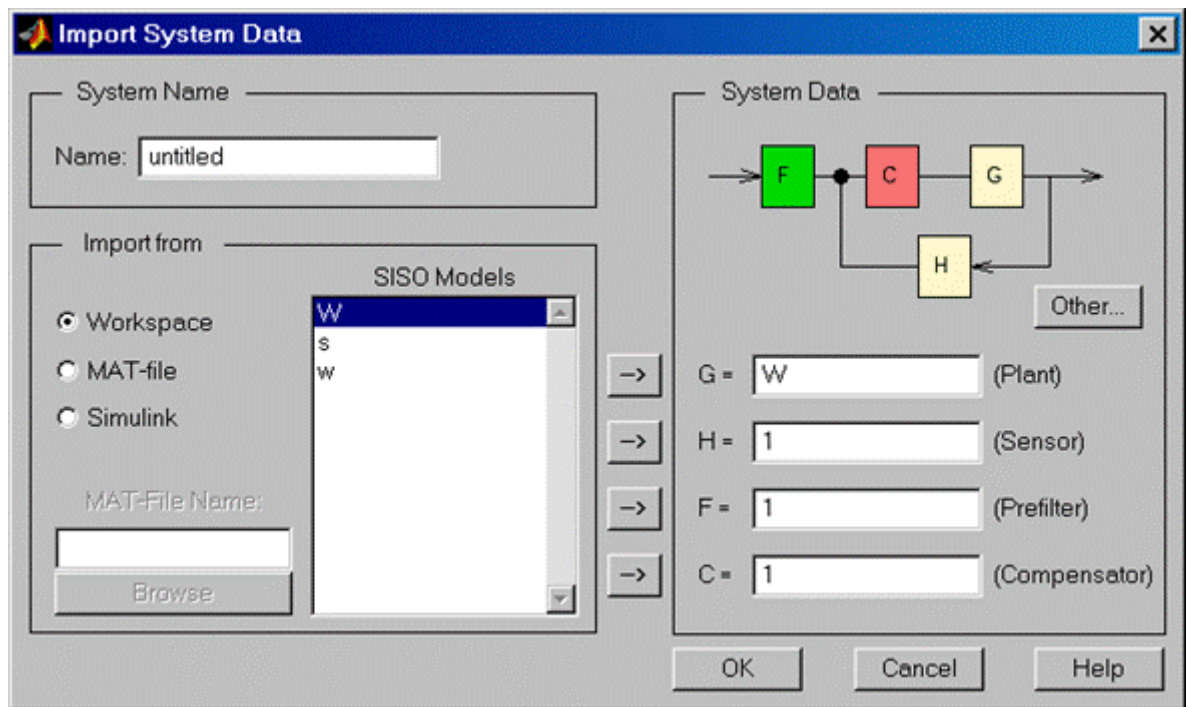


Рис. 2.4. Диалог импортирования данных в SISO-Design Tool

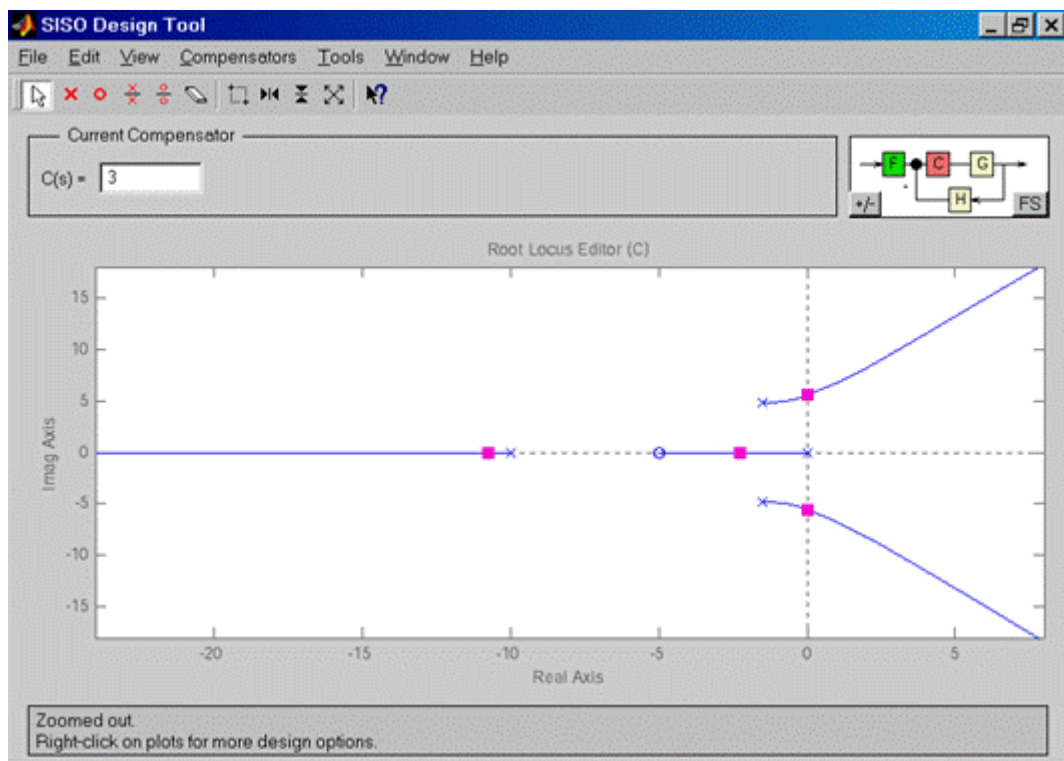
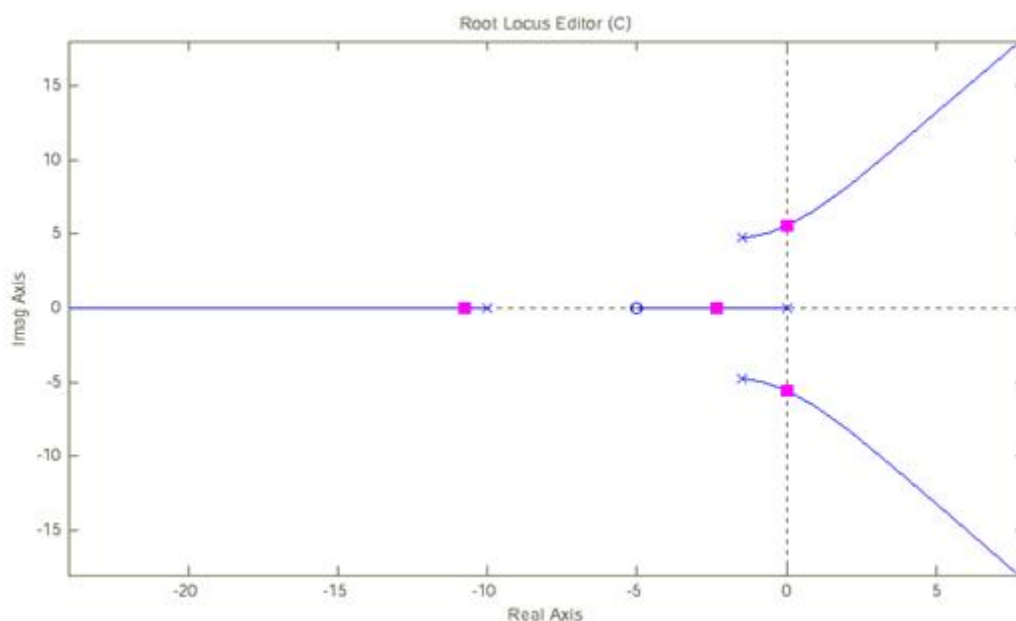


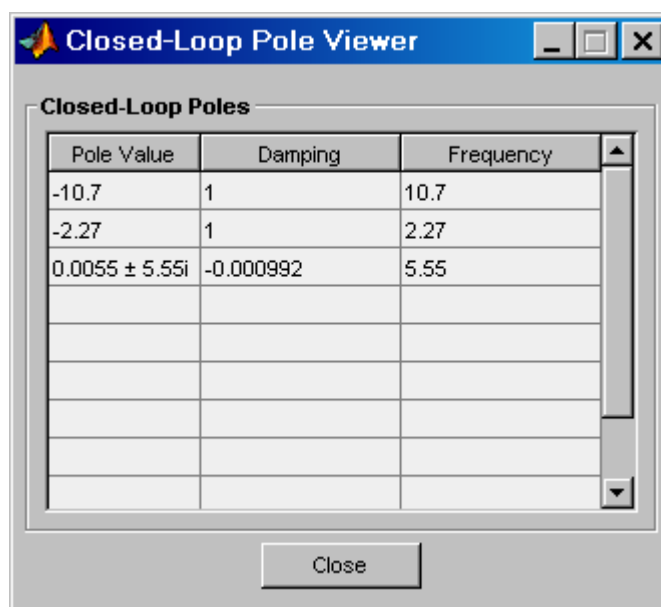
Рис 2.5. SISO-Design Tool

3. Двигая красным курсором по корневому годографу до пересечения ветвей с мнимой осью, определить значение  $K^{кр}$  (рис. 2.6). Передвижение курсора происходит также при вводе значения коэффициента усиления  $C$  в соответствующее поле ввода в верхней части GUI-интерфейса. В данном случае  $K^{кр} \gg 3$ . Значение  $\omega^{кр}$  соответствует мнимой координате

пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в нижней части интерфейса или выбрав меню "View/Closed-Loop Poles" (рис. 2.7).

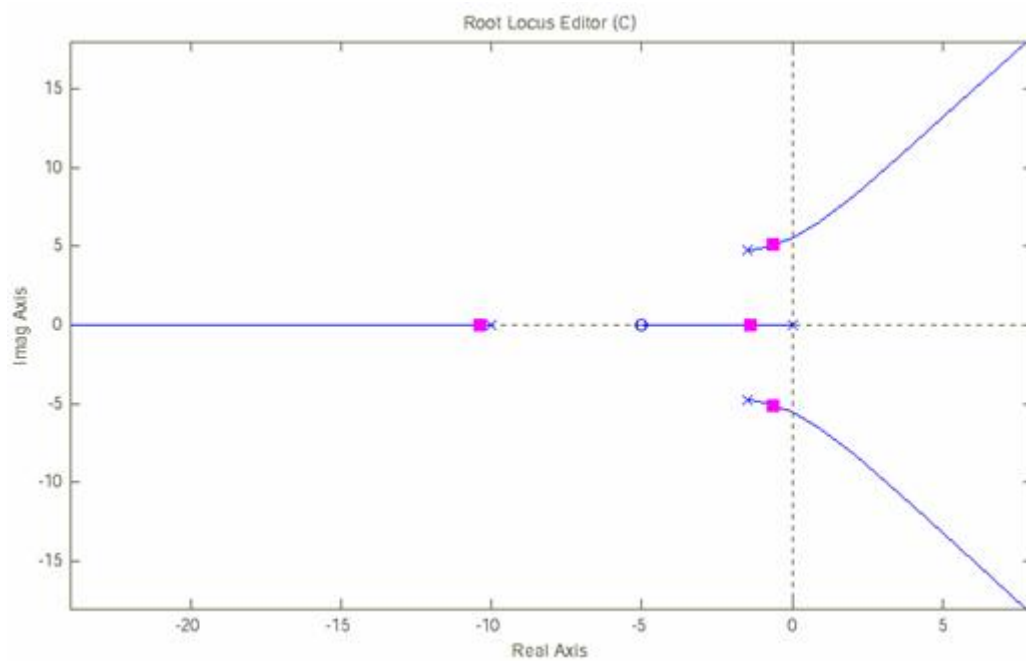


**Рис. 2.6. Корневой годограф с нанесенным значением  $K^{кр}$**

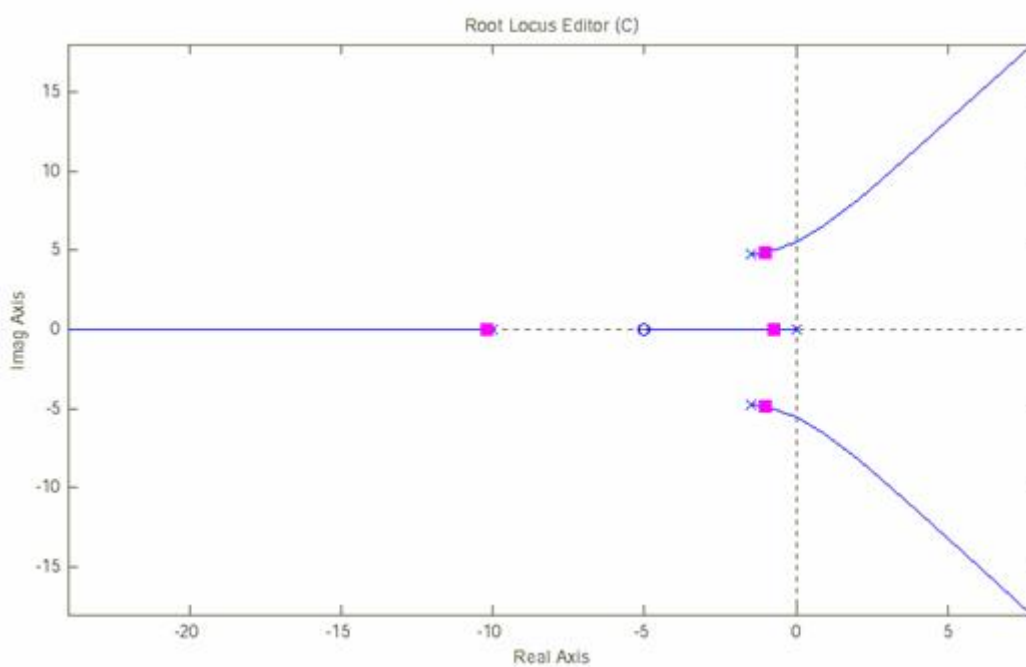


**Рис. 2.7. Closed-Loop Poles Viewer**

4. Зададим значения  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$  (рис. 2.8а , 2.8б) и определим значения полюсов (рис. 2.9а , 2.9б).

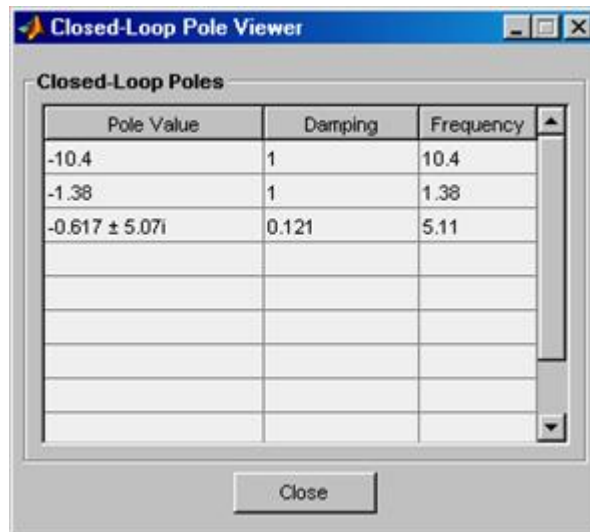


**a)  $C=0.5K^{kp}$**

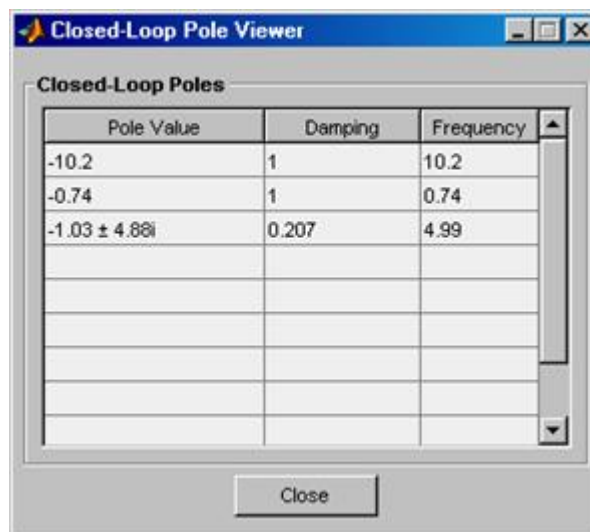


**б)  $C=0.25K^{kp}$**

**Рис. 2.8. Корневой годограф САУ**



a)  $C = 0.5K^{kp}$

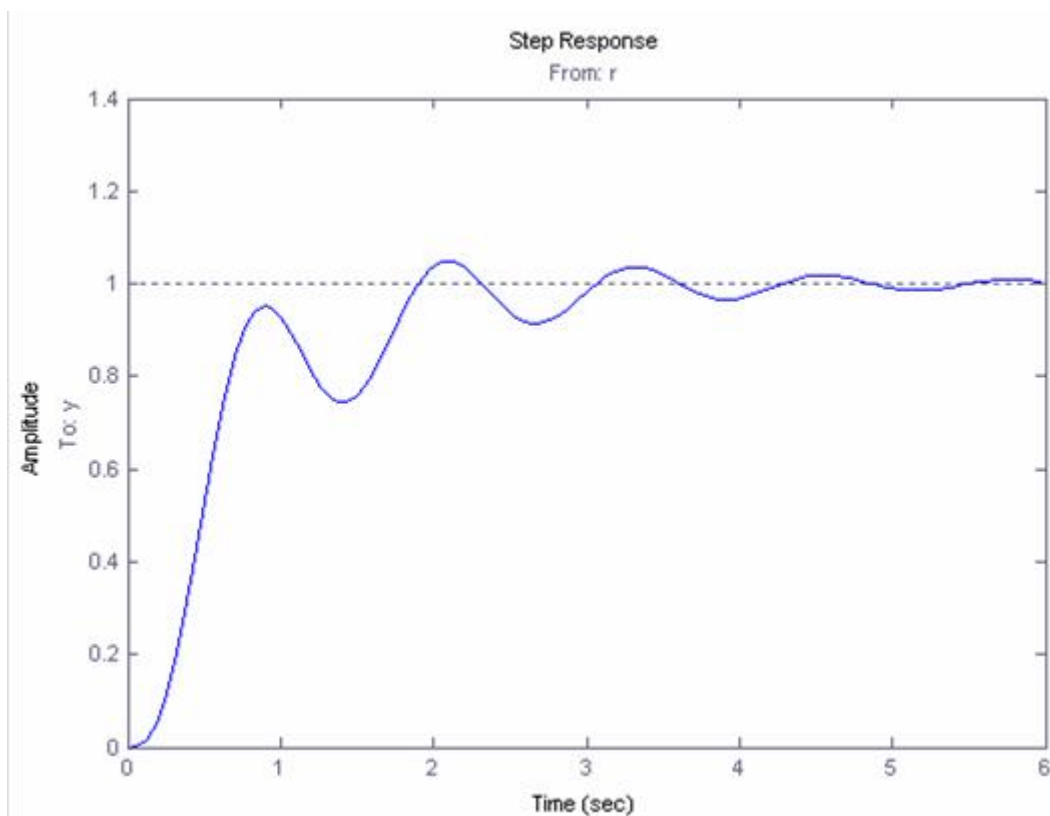


б)  $C = 0.25K^{kp}$

Рис. 2.9. Closed-Loop Poles Viewer

5. Например, для значения  $0.5K^{kp}$  построим вид переходной функции замкнутой системы. Для этого необходимо выбрать в меню пункт “Tools/Loop Responses/Closed-Loop Step”. Результат построения переходной функции – рис. 2.10. Видно, что система устойчива.

Меня значения  $C$  можно увидеть в соответствующее изменение переходной функции или других характеристик системы в динамике. При изменении  $C$  происходит автоматическое обновление выбранных характеристик замкнутой системы.



**Рис. 2.10. Переходная функция при  $C = 0.5K^{кр}$ .**

В работе на основе использования метода корневого годографа получены области значений коэффициента усиления, в которых система автоматического управления является устойчивой.

## Отчет о работе

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Исходные данные варианта задания и структурную схему САУ.
4. Чертежи комплексной плоскости и КГ. Нанести на все ветви значения  $K^{кр}$ ,  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .
5. Выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев с указанными значениями параметров типовых звеньев.
6. Анализ результатов построения КГ.
7. Выводы.

Замечание: Если САУ устойчива (при любом  $K > 0$ ), то ограничиться построением КГ, удаленного от начала координат на удвоенный модуль наиболее удалённого от начала координат полюса разомкнутой системы.

## Контрольные вопросы

1. Дать определение передаточной функции, полюсов, нулей, корневого годографа. Назвать типовые звенья САУ. Что такое отрицательная обратная связь?

2. Доказать правила построения КГ №№ 1, 2, 3, 5.

3. Показать влияние расположения нуля на поведение ветвей КГ (для примера указанного преподавателем).

4. Показать на конкретном примере, что по мере удаления ветви КГ от начала координат движение ветви в зависимости от  $K$  замедляется.

5. Вывести зависимость для малого перемещения ветвей КГ от исходного полюса в зависимости от изменения  $K$ .

6. Провести анализ влияния изменения расположения полюса или нуля (по указанию преподавателя) на величины  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .

## Варианты заданий

№	Вид передаточной функции $W_p(s)$	№	Варианты параметров. Значения $T_i [с]$
1.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.1$
		2.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.01$
		3.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.9$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1$
		5.	$T_1 = 0.15, T_2 = 0.2$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$	6.	$T = 0.1, \zeta = 1$
		7.	$T = 0.05, \zeta = 0.707$
		8.	$T = 0.03, \zeta = 0.1$
		9.	$T = 0.08, \zeta = 0.5$
		10.	$T = 0.01, \zeta = 0.15$
3.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$	11.	$T_1 = 0.03, T_2 = 0.5, T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		12.	$T_1 = 0.05, T_2 = 0.4, T_3 = 0.08, T_4 = 0.033$
		13.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.45, T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		14.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.25, T_3 = 0.1, T_4 = 0.02$

		15.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
4.	$\frac{K(T_1 s + 1)}{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4^2 s^2 + 2T_4 \zeta s + 1)}$	16.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		17.	$T_1 = 0.07, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, z = 0.5$
		18.	$T_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, z = 0.5$
		19.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, z = 0.5$
		20.	$T_1 = 0, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, z = 0.5$
5.	$\frac{K(T_1^2 s^2 + 2T_1 \zeta_1 s + 1)}{s(T_2^2 s^2 + 2T_2 \zeta_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)^2}$	21.	$T_1 = 0.05, z_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $z_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.01$
		22.	$T_1 = 0.05, z_1 = 0.3,$ $T_2 = 0.1, z_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.05$
		23.	$T_1 = 0.05, z_1 = 0.707,$ $T_2 = 0.07, z_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.1$
		24.	$T_1 = 0.05, z_1 = 0.707, T_2 = 0.07,$ $z_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.05$
		25.	$T_1 = 0.05, z_1 = 0.3, T_2 = 0.05,$ $z_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.1$