

### Задача 3

#### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Прежде чем приступить к решению задачи 3, необходимо изучить следующие разделы курса [2, с. 151-162; 5, с. 353-366; 7, с. 6, 8-10; 8, с. 350-370].

Поскольку данная задача выполняется двумя методами, то в примере 3.1 приводится расчет методом трех моментов, а в примере 3.2 - расчет методом конечных элементов.

#### Пример 3.1. Расчет статически неопределимой балки методом трех моментов (рис.8)

Исходные данные:  $l_1 = 2 \text{ м}$ ;  $l_2 = 1 \text{ м}$ ;  $l_3 = 3 \text{ м}$ ;  $P = 30 \text{ кН}$ ;  $M = 20 \text{ кНм}$ ; материал-сталь.

Балка, показанная на рис.8, является неразрезной (многопролетной), так как перекрывает несколько пролетов и проходит не прерываясь над промежуточной опорой.

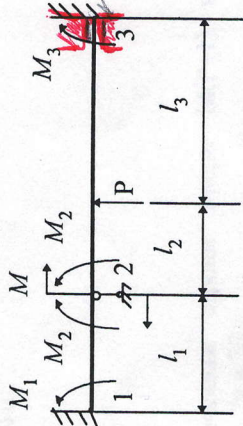


Рис.8

Вначале устанавливается степень статической неопределимости балки. При этом учитывается, что лишь одна из опор балки имеет ограничение по горизонтальному смещению. Все остальные опоры подвижны в горизонтальном направлении и, следовательно, в них возникают только вертикальные реакции и моменты, если это заделки. При условии действия на балку только вертикальной нагрузки и сосредоточенных моментов горизонтальная реакция на неподвижной (например, левой) опоре будет равна нулю.

Таким образом, рассматриваемая балка будет трижды статически неопределимой, поскольку в конечных опорах возникают по две неизвестных реакции: поперечная сила и момент, а на промежуточной опоре возникает только вертикальная сила. Общее число неизвестных реакций равно пяти, а число уравнений статики будет равно 2 (одно уравнение использовано уже для определения горизонтальной реакции).

Мысленно разрежем балку на опорах, убирая тем самым промежуточные связи, препятствующие угловым перемещениям на опорах, заменим действие отброшенных связей неизвестными узловыми моментами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  (рис.8).

Величины этих моментов определим из уравнений совместности деформаций смежных пролетов, которые физически означают равенство углов поворота пролетов на общей опоре. Если опора является концевой заделкой, то тогда угол поворота пролета приравнивается нулю (если заделка жесткая) или углу поворота заделки (если заделка упругая).

При составлении уравнений деформаций надо учитывать правило знаков углов поворота: угол поворота считается положительным по часовой стрелке и отрицательным - против часовой стрелки. Узловые моменты считаются положительными, если изгибают балку выпуклостью вверх.

Тогда для левой опоры 1 (рис.8) уравнение метода трех моментов примет вид [5]

$$0 = -\frac{M_1 l_1}{3EI} - \frac{M_2 l_1}{6EI} \quad (8)$$

При составлении уравнения метода трех моментов легко запоминается, что слагаемое от момента, непосредственно приложенного на рассматриваемой опоре, содержит в знаменателе коэффициент 3, а слагаемое от момента, приложенного на дальней опоре, содержит в знаменателе коэффициент 6. Знаки у всех слагаемых приняты отрицательными, так как углы поворота, вызываемые этими моментами, направлены против часовой стрелки. Что касается сосредоточенного внешнего момента, то здесь надо отметить следующее. Если внешний момент приложен на опоре, то его можно отнести либо к правому, либо к левому пролету, смещая на бесконечно малую величину вправо или влево соответственно. В данном случае сосредоточенный момент  $M$  смещен вправо и относится к правому от опоры 2 пролету. Следовательно, он будет учитываться при рассмотрении пролета 2-3 (рис.8).

Составим теперь уравнение совместности деформаций для опоры 2, которое можно записать как

$$\frac{M_1 l_1}{6EI} + \frac{M_2 l_2}{3EI} = -\frac{M_2 (l_2 + l_3)}{3EI} - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{6EI} \left( 1 + \frac{l_3}{l_2 + l_3} \right) + \frac{M(l_2 + l_3)}{3EI} \quad (9)$$

Для третьей опоры уравнение 3-х моментов имеет вид

$$\frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3EI} + \frac{M_2 (l_2 + l_3)}{6EI} + \frac{Pl_2 l_3}{6EI} \left( 1 + \frac{l_2}{l_2 + l_3} \right) - \frac{M(l_2 + l_3)}{6EI} = 0. \quad (10)$$



Выражения для углов поворота от сосредоточенной силы  $P$  на опорах, входящие в уравнения (9) и (10), могут быть вычислены по способу Верещагина или взяты из таблиц изгиба свободно опертых балок в справочнике по строительной механике корабля т.1 [8].

Для последующего решения задачи удобнее произвести преобразования в численном виде, для чего подставим в уравнения (8)-(10) данные вместо  $l_1 - l_3$  и М.Р. Тогда получим систему уравнений в форме

$$\begin{aligned} M_1 + 2M_2 &= 0; \\ 2M_1 + 12M_2 + 4M_3 &= 8 \cdot 20 - 30 \cdot 1 \cdot 3 \left(1 + \frac{3}{1+3}\right); \\ 4M_2 + 8M_3 &= 4 \cdot 20 - 30 \cdot 1 \cdot 3 \left(1 + \frac{1}{1+3}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Решение этой системы не составляет особого труда и приведет к значениям

$$M_1 = -104 \text{ кНм}; M_2 = 208 \text{ кНм}; M_3 = -513 \text{ кНм}. \quad (12)$$

Определив опорные моменты, нетрудно вычислить реакции опор, рассматривая каждый пролет как изолированную свободно опертую балку, нагруженную внешней нагрузкой и сосредоточенными моментами на опорах (рис. 9).

Тогда реакции опор можно найти из уравнений статики: сумма моментов, действующих на балку, относительно каждой из опор равна нулю.

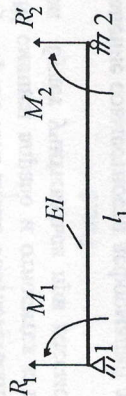


Рис. 9

Для правой опоры (рис. 9) уравнение статики примет вид

$$\begin{aligned} \Sigma M_2 &= 0; \\ R_1 l_1 - M_1 + M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда реакция  $R_1$  запишется как

$$R_1 = \frac{M_1 - M_2}{l_1}. \quad (14)$$

Аналогично из уравнения статики для левой опоры имеем

$$R_2' l_1 + M_1 - M_2 = 0.$$

Выразим составляющую реакции  $R_2'$

$$R_2' = \frac{M_2 - M_1}{l_1}. \quad (15)$$

Как видим, реакции  $R_1$  и  $R_2'$  получились равными, но противоположно направленными, что и следовало ожидать, так как на пролете действуют только сосредоточенные моменты.

Рассматривая второй пролет (рис. 10), получим следующие уравнения равновесия

$$\begin{aligned} R_2''(l_2 + l_3) + Pl_3 + M + M_3 - M_2 &= 0; \\ R_3(l_2 + l_3) + Pl_2 - M + M_2 - M_3 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

из которых определятся реакции

$$\begin{aligned} R_2'' &= \frac{M_2 - M_3 - Pl_3 - M}{l_2 + l_3}; \\ R_3 &= \frac{M_3 - M_2 - Pl_2 + M}{l_2 + l_3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что полная реакция на опоре два будет равна алгебраической сумме реакций  $R_2'$  и  $R_2''$ .

Подставив в (14), (15) и (17) полученные выше значения опорных моментов  $M_1, M_2$  и  $M_3$ , силу  $P$  и момент  $M$ , а также длины пролетов  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , получим численные значения реакций

$$R_1 = -156 \text{ кН}; R_2' = 156 \text{ кН}; R_2'' = -25.74 \text{ кН}; R_3 = -4.26 \text{ кН}. \quad (18)$$

Располагая значениями опорных моментов (12) и реакций (18), можно построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для каждого пролета в



отдельности и совокупность этих эпор будет представлять собой суммарные эпоры для балки в целом.

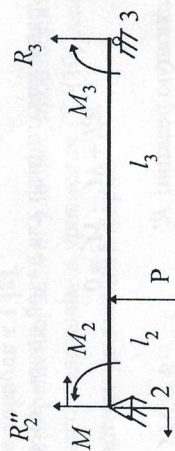


Рис. 10

На первом пролете эпора поперечных сил будет постоянной величиной, поскольку внешняя нагрузка на пролете отсутствует. Для построения эпоры изгибающих моментов на этом пролете достаточно отложить величины опорных моментов на концах пролета и соединить их прямой линией, учитывая, что момент  $M_1$  получился со знаком минус (12) и истинное его направление противоположно первоначально принятому (рис.8). Вид этих эпор представлен на рис.11.

При построении эпоры поперечных сил на втором пролете достаточно отложить величины реакций с учетом их знаков на левом и правом концах и провести горизонтальные прямые до сечения, где приложена сила  $P$ . Это и будет эпора поперечных сил (рис.12).

А вот для построения эпоры изгибающих моментов необходимо выполнить промежуточный расчет. Воспользовавшись методом сечений, проведем произвольное сечение на первом участке (рис.12) и запишем выражение для изгибающего момента в этом сечении

$$M_{изг} = M - M_2 + R_2'x. \quad (19)$$

Как видно из выражения (19), момент на этом участке является линейной функцией, поэтому достаточно определить две ординаты эпоры и соединить их концы прямой линией.

При  $x=0$

$$M_{изг} = M - M_2 = 20 - 2.08 = 17.92 \text{ кНм.}$$

При  $x=l_2$

$$M_{изг} = M - M_2 + R_2'l_2 = 20 - 2.08 + 25.74 \cdot 1 = -7.78 \text{ кНм.}$$

Откладываем момент 17.92 на левом конце пролета вверх, а момент 7.78 на правом конце участка, где приложена сила  $P$ , вниз и соединяем прямой линией.

Для построения эпоры моментов на последнем участке от точки приложения силы  $P$  до заделки надо отложить в заделке величину момента

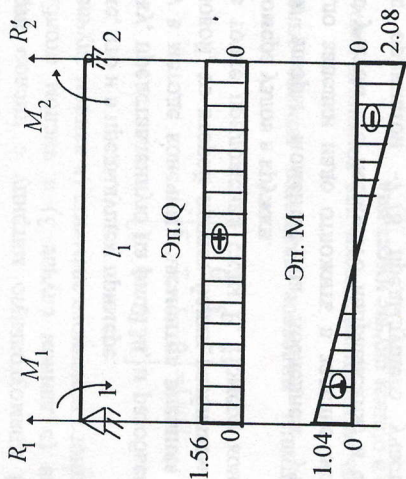


Рис.11

$M_3 = 51.3 \text{ кНм}$  вверх (с учетом его истинного направления) и соединить прямой полученную точку с ординатой -7.78 предыдущего участка. Вид эпоры изгибающих моментов показан на рис. 12.

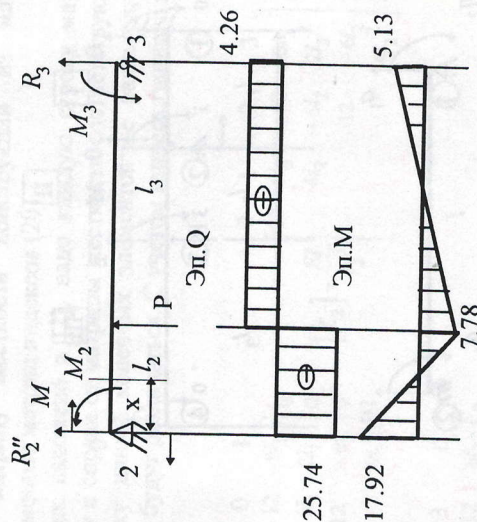


Рис.12



### Пример 3.2. Расчет статически неопределимой балки методом конечных элементов

Исходные данные те же, что и в предыдущем примере.

Рассмотрим балку, представленную на рис.13а, и разобьем ее на конечные элементы. Поскольку в методе конечных элементов внешняя нагрузка должна быть приведена к узловой, то второй пролет балки разбиваем на два конечных элемента с узлом 3 в точке приложения силы Р. Номера конечных элементов поместим в рамки, а номера узлов в кружки.

Для построения эпюры моментов на последнем участке от точки приложения силы Р до заделки надо отложить в заделке величину момента  $M_3 = 513 \text{ кНм}$  вверх (с учетом его истинного направления) и соединить прямой полученную точку с ординатой -7.78 предыдущего участка. Вид эпюры изгибающих моментов показан на рис. 12.

Поскольку в качестве конечного рассматривается элемент с четырьмя степенями свободы (рис.13б), то в каждом узле выделенных трех элементов укажем направления двух перемещений (вертикального и углового) и пронумеруем их последовательно, помня, что для перемещений, которые отсутствуют в силу закрепления конструкции, индексы перемещений будут нулевыми (рис.13а).

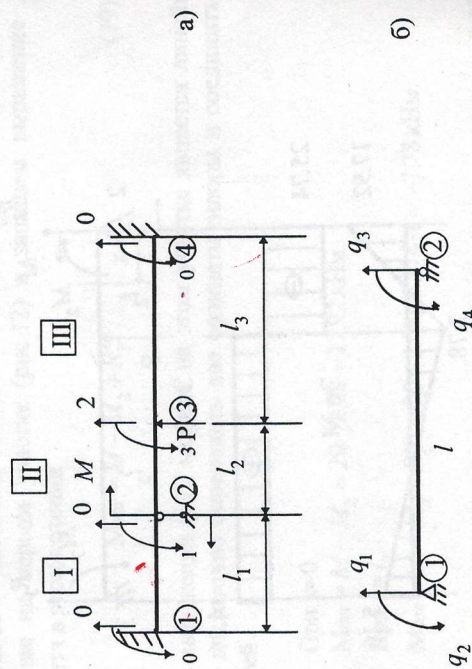


Рис.13

Запишем теперь для заданной системы матрицу индексов  $[N]$ , которая представляет собой прямоугольную матрицу с числом строк, равным числу конечных элементов (в данном случае 3) и числом столбцов, равным числу степеней свободы одного конечного элемента (в данном случае 4)

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

а содержимым матрицы индексов являются номера узловых перемещений конечных элементов.

Запишем теперь матрицу жесткости для конечных элементов, работающих на изгиб [2], которая в общем случае имеет вид

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad \text{CUMMETP.} \quad (21)$$

где E - модуль продольной упругости материала конечного элемента;

I, l - длина и момент инерции площади поперечного сечения конечного элемента соответственно.

Сформируем матрицу жесткости конструкции из матриц конечных элементов (21) с помощью матриц индексов (20).

Для этого, как изложено в [2], надо каждую строку матрицы индексов расположить сверху и справа от матрицы жесткости соответствующего конечного элемента. Поскольку длины конечных элементов не равны друг другу, то и матрицы жесткости будут различаться. С учетом вышесказанного запишем

$$[K_1] = \frac{EI}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 & 0 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 & 0 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 & 0 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 & 1 \end{bmatrix} \quad [K_2] = \frac{EI}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 & 0 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 & 1 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 & 2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 & 3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[K_3] = \frac{EI}{l_3^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_3 & -12 & 6l_3 & 2 \\ 6l_3 & 4l_3^2 & -6l_3 & 2l_3^2 & 3 \\ -12 & -6l_3 & 12 & -6l_3 & 0 \\ 6l_3 & 2l_3^2 & -6l_3 & 4l_3^2 & 0 \end{bmatrix}$$



Номера матрицы индексов, стоящие справа от матриц  $[K_i]$ , указывают номер строки, а номера матрицы  $[I/N]$ , расположенные сверху от матриц  $[K_i]$ , зывают номер столбца матрицы жесткости конструкции  $[SK]$ , куда должны сылаться соответствующие коэффициенты матриц  $[K_i]$ . Формировать будем и верхнюю треугольную часть матрицы  $[SK]$ , поскольку она является метричной относительно главной диагонали.

Так как наибольший индекс матрицы  $[I/N]$  равен 3, то размерность матрицы  $[SK]$  будет  $3 \times 3$

$$[SK] = EI \begin{bmatrix} \left( \frac{4}{l_1} + \frac{4}{l_2} \right) & -\frac{6}{l_2^2} & \frac{2}{l_2} \\ \left( \frac{12}{l_2^3} + \frac{12}{l_3^3} \right) & \left( \frac{6}{l_2^2} + \frac{6}{l_3^2} \right) & \left( \frac{4}{l_2} + \frac{4}{l_3} \right) \\ \text{СИММЕТР.} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Если коэффициенты от разных матриц  $[K_i]$  попадают в одну ячейку матрицы  $[SK]$ , то они в ней суммируются (см., например, ячейку 11 в матрице  $[SK]$  (23)).

Следующим шагом является формирование вектора узловых нагрузок  $\{Q\}$ , который представляет собой вектор внешних нагрузок, действующих в направлении ненулевых узловых перемещений. В данном примере вектор  $\{Q\}$  имеет всего три элемента и имеет вид

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} -M \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Знак «-» взят потому, что силовой фактор  $M$  противоположен направлению направлению перемещения 1, а последний элемент в векторе равен нулю потому, что в направлении перемещения 3 не действует внешний момент (рис. 13а).

Итак, окончательно система уравнений МКЭ для данной балки с учетом (23) и (24) имеет вид

$$EI \begin{bmatrix} \left( \frac{4}{l_1} + \frac{4}{l_2} \right) & -\frac{6}{l_2^2} & \frac{2}{l_2} \\ \left( \frac{12}{l_2^3} + \frac{12}{l_3^3} \right) & \left( \frac{6}{l_2^2} + \frac{6}{l_3^2} \right) & \left( \frac{4}{l_2} + \frac{4}{l_3} \right) \\ \frac{2}{l_2} & \left( \frac{6}{l_2^2} + \frac{6}{l_3^2} \right) & \left( \frac{4}{l_2} + \frac{4}{l_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Подставляя в систему уравнений (25) исходные значения величин  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 1$  м и  $l_3 = 3$  м, а также величины силы  $P = 30$  кН и момента  $M = 20$  кНм, и переписывая эту систему в традиционной форме, получим

$$\begin{aligned} 6q_1 - 6q_2 + 2q_3 &= -20/EI; \\ -6q_1 + 12,44q_2 - 5,34q_3 &= 30/EI; \\ 2q_1 - 5,34q_2 + 5,33q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Решая систему линейных уравнений (26) методом Гаусса, найдем неизвестные узловые перемещения

$$q_1 = -1,04/EI; \quad q_2 = 3,65/EI; \quad q_3 = 4,05/EI \quad (27)$$

Размерность угловых перемещений  $q_1$  и  $q_3$  выражается в радианах, а линейного перемещения  $q_2$  - в сантиметрах.

Для того чтобы убедиться в правильности решения, следует подставить полученные значения перемещений (27) во все уравнения (26). И только при удовлетворении всех уравнений (26) можно считать, что система решена верно.

После нахождения перемещений узлов (27) величины поперечных сил и изгибающих моментов, действующих в узлах поперечных элементов балки, можно получить, умножив матрицу жесткости каждого конечного элемента на соответствующий этому элементу вектор узловых перемещений.

Так, усилия, действующие в узлах первого конечного элемента, могут быть определены следующим образом

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,04/EI \end{bmatrix}, \quad (28)$$



$Q_1$  и  $Q_2$  - реакции по направлениям линейных перемещений узлов 1 и 2 (рис.13а);  
 $M_1$  и  $M_2$  - моменты по направлениям углов поворота тех же узлов.

Вычисления реакций и моментов по соотношениям (28) приводят к значениям

$$\begin{aligned} Q_1 &= -1,56 \text{ кН}; & M_1 &= -1,04 \text{ кНм}; \\ Q_2 &= 1,56 \text{ кН}; & M_2 &= -2,08 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (29)$$

Найдем теперь усилия в узлах второго конечного элемента

$$\begin{bmatrix} Q'_2 \\ M'_2 \\ Q_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1,04 / EI \\ 3,65 / EI \\ 4,05 / EI \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где  $Q'_2$  и  $M'_2$  - реакция и момент в узле 2, относящиеся ко второму конечному элементу.

Проведя вычисления по соотношениям (30), получим

$$\begin{aligned} Q'_2 &= -25,74 \text{ кН}; & M'_2 &= -17,92 \text{ кНм}; \\ Q_3 &= 25,74 \text{ кН}; & M_3 &= -7,78 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (31)$$

Повторив вышеприведенные операции для третьего конечного элемента, получим величины его узловых усилий

$$\begin{aligned} Q'_3 &= 4,26 \text{ кН}; & M'_3 &= 7,78 \text{ кНм}; \\ Q_4 &= -4,26 \text{ кН}; & M_4 &= 5,13 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (32)$$

Минусы в выражениях (29), (31), и (32) говорят о том, что направления поперечных сил и изгибающих моментов противоположны направлениям линейных перемещений и углов поворота в соответствующих узлах.

По полученным значениям для поперечных сил и изгибающих моментов построим соответствующие эпюры, вид которых приведен на рис.14. При построении эпюр следует иметь в виду, что правило знаков силовых факторов в методе конечных элементов и в сопротивлении материалов различное. Поэтому следует руководствоваться следующим принципом. В левом узле конечного элемента для поперечной силы правило знаков МКЭ и сопротивления материалов совпадает, а в правом узле оно противоположное. В правом узле для изгибающего момента совпадают, а в левом - противоположны.

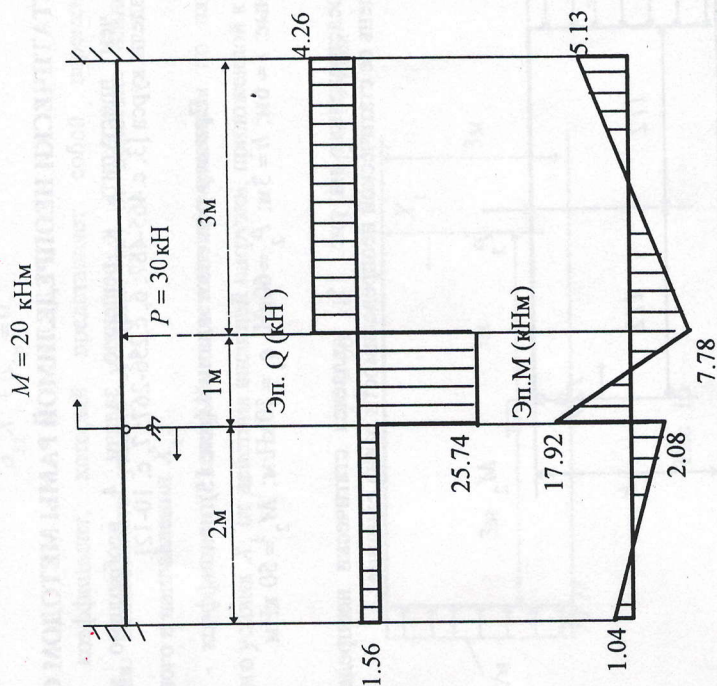


Рис. 14

Из сопоставления расчетов одной и той же балки по методу конечных элементов и методу трех моментов видно, что результаты получились идентичные, поскольку при отсутствии распределенной нагрузки решение МКЭ совпадает с решением по технической теории изгиба балок.