***Министерство науки и высшего образования Российской Федерации***

***федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение***

***высшего образования***

***«Вологодский государственный университет»***

***Кафедра математики и информатики***

***Кафедра математики и информатики***

***ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА***

***Учебно-методическое пособие***

***по выполнению контрольной работы***

**Институт машиностроения, энергетики и транспорта**

**Вологда**

**2022**

**Введение**

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной и заочной ускоренной формы обучения по направлению подготовки электроэнергетика и электротехника. Текст содержит варианты контрольной работы № 1, которую необходимо самостоятельно выполнить студентам в первом семестре, разбор задач, аналогичных предложенным в контрольной работе. Кроме того, в пособии приведен справочный теоретический материал, необходимый для выполнения контрольных заданий. Номер варианта контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра студента – номера его зачетной книжки. Работа выполняется в отдельной тетради, задачи должны быть представлены в том порядке, в котором они указаны в контрольной работе. Компьютерное оформление работы на проверку не принимается.

**Задачи для контрольных заданий**

**Контрольная работа № 1**

**Тема 1. Комплексные числа.**

**Задача 1.** Найти: а) область определения функции ;

б) значение функции  в точке .

1.1.  ,.

1.2. , .

1.3. , .

1.4. , .

1.5. , .

1.6. , .

1.7. , .

1.8. , .

1.9. , .

1.10. , .

**Тема 2. Основные понятия линейной алгебры.**

**Задача 2.** Решить матричное уравнение 

2.1., , , , .

2.2. , ,  , , 

2.3. , , , , 

2.4. , , , , 

2.5. , , , , 

2.6. , , , , 

2.7. , , , , 

2.8. , , , , 

2.9. , , , , 

2.10. , , , , 

**Задача 3.** Решить систему уравнений, используя

а) правило Крамера;

б) метод Гаусса.

3.1.  3.2. 

3.3.  3.4. 

3.5. . 3.6. 

3.7.  3.8. 

3.9.  3.10.

**Разбор заданий контрольной работы № 1**

**Задача 1.** Найти: а) область определения функции ;

б) значение функции в точке .

**Решение.**

а) Так как  является дробно-рациональной функцией, то областью определения этой функции представляет собой множество всех комплексных чисел, исключая те, которые обращают знаменатель в ноль. Составим и решим уравнение . Уравнение имеет комплексные корни, так как его дискриминант . Найдем корни: . Таким образом, областью определения функции  является множество всех комплексных чисел кроме .

б) Найдем значение функции в заданной точке .

Выполним действия



.

Для того, чтобы поделить два комплексных числа числитель и знаменатель дроби умножим на число сопряженной знаменателю получим .

Таким образом, .

**Задача 2.** Решить матричное уравнение , где

, , , , 

**Решение:**

Убедимся, что  матрица не является вырожденной, то есть обладает обратной матрицей. Для этого вычислим её определитель:

.

Разложим определитель, например, по элементам второго столбца:



210.

Определитель отличен от нуля, поэтому обратная матрица существует, и мы можем вычислить обратную матрицу по формуле:

.

Вычислим алгебраические дополнения:





Таким образом, матрица, составленная из алгебраических дополнений, имеет вид:

 ()

Транспонирование матрицы – такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с теми же номерами. Транспонированная матрица к матрице () будет выглядеть так:

,

тогда

 или .

Таким образом, уравнение имеет единственное решение. Выполним преобразование левой части уравнения

, , , 

.

Обозначим произведение матриц , где матрица размерности  элементами .

Получим . .

Матрица 

и .

Исходное уравнение принимает вид

.

Умножим левую и правую части уравнения слева на , получаем ,

.

**Задача 3.** Решить систему уравнений, используя

а) правило Крамера;

б) метод Гаусса.



**Решение:**

а) Вычислим определитель матрицы, составленной из коэффициентов, стоящих при переменных в предложенной системе линейных уравнений:



Его назовем главным определителем, . Если главный определитель отличен от нуля, то система имеет единственное решение и найти его можно по правилу Крамера. Для этого заменим в матрице коэффициентов первый столбец на столбец свободных членов, и вычислим определитель такой матрицы:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Аналогичным образом, получаем матрицы с замененными вторым и третьим столбцами соответственно, затем, вычислим определители этих матриц.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Решение системы можно найти таким образом:

  

б) Составим расширенную матрицу системы уравнений

.

Приведем матрицу к трапециевидной форме.

Поменяем местами первую и вторую строчки.



Умножим все элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки.



Умножим теперь все элементы первой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки.



Разделим все элементы третьей строки на 11.



Поменяем местами вторую и третью строчки.



Умножим все элементы второй строки на (-7) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки.



По трапециевидной матрице запишем новую систему уравнений, эквивалентную первоначальной.



Из последнего уравнения находим *x3*:



Подставляем найденное значение во второе уравнение и находим *х2*:



Подставляем найденные значения в первое уравнение системы и находим *х1*:



***Комплексные числа.***

На множестве действительных чисел невозможно решить уравнение . Введем условный символ , который называется «мнимая единица», основное свойство которой , или .

Тогда числа вида  назовем мнимыми числами, а числа вида  – комплексными.

Комплексные числа изображают точкой на координатной плоскости.

Два комплексных числа   равны, если равны их действительные и мнимые части: . Нулем называют число , а единицей .

Комплексные числа можно складывать по правилу:

.

Умножают комплексные числа по правилу:



Существует обратный элемент  , имеющий вид .

Обозначим:  – число сопряженное с *z.*

Тогда правило деления таково: .

Тригонометрическая форма комплексного числа ,

Где  – модуль комплексного числа, угол  – его аргумент. В тригонометрической форме комплексные числа можно умножать, возводить в натуральную степень и извлекать корень из комплексного числа по формулам:

Если , тогда

;

- формула Муавра;

, где  к = 0,1,2,…,n-1 – формула Муавра.

На множестве комплексных чисел квадратное уравнение имеет всегда два корня . А любое уравнение -ой степени  имеет  корней действительных или комплексных.

***Матрицы, определители и их свойства***.

Прямоугольной матрицей размерности  называется таблица, состоящая из *m* строк и *n* столбцов.

= ( – номер строки,  – номер столбца)

Если , то матрица называется квадратной порядка *n*.

При – матрица строка; при – матрица столбец.

Две матрицы называются равными, если имеют одинаковую размерность и равны элементы, стоящие на одинаковых местах. 

Суммой двух матриц одинаковой размерности называется матрица, составленная из сумм соответствующих элементов матриц . Существует нулевая матрица .

Произведением матрицы  на число  называется матрица .

Произведением матриц размерности  и  размерности  называется матрица , коэффициенты которой вычисляются по правилу: . Элемент, стоящий на пересечении -ой строки и -того столбца равен сумме произведений элементов -ой строки матрицы  на соответствующие элементы -того столбца матрицы В.

Произведение матриц не коммутативно, т.е. .

Существует – единичная матрица - го порядка

Для матрицы  размерности  выполняются свойства

. Если и  квадратные матрицы одного порядка, то 

Если для данной матрицы  существует матрица : , то *X* называется обратной A и обозначается .

Каждой квадратной матрице -го порядка можно сопоставить число, которое называется определителем матрицы и вычисляется по определенному правилу.

Определителем второго порядка называется число , значение которого находится по правилу .

Определитель третьего порядка вычисляется следующим образом: 

Здесь  – минор элемента  т.е. определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием - ой строки и - того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Определитель - го порядка вычисляется так:

,

где  - минор элемента  т.е. определитель - го порядка, полученный вычеркиванием - ой строки и - того столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Алгебраическим дополнением элемента  назовем минор со знаком, выбранным по правилу: .

Тогда . Говорят, что определитель вычислен разложением по элементам первой строки.

Перечислим некоторые свойства определителей.

1. При транспонировании матриц определители не меняются.

Под транспонированием матриц понимают преобразование матрицы (и определителя) при котором строки и столбцы меняются местами.

Следствия: а) одинаковые свойства для строк и столбцов.

б)  – разложение по элементам первого столбца.

1. Если в квадратной матрице какие-нибудь две строки (или столбца) поменять местами, то определитель поменяет знак.
2. Определитель может быть разложен по элементам любой строки или столбца.



разложение по элементам  – ой строки.

Следствия: а) если одна из строк (столбцов) состоит из нулей, то

определитель равен нулю.

б) если элементы строки (столбца) умножить на одно и тоже

число, то определитель умножится на это число.

1. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю.
2. Если матрица имеет две пропорциональные строки (столбца), то он равен нулю.
3. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и тоже постоянное число.

Вернемся к задаче вычисления матрицы обратной данной. Сформулируем правило: всякая невырожденная матрица  (определитель ) имеет обратную матрицу, которая вычисляется по формуле , где

матрица  составленная из алгебраических дополнений элементов данной матрицы.

***Решение систем линейных уравнений.***

1. Матричный метод.

Пусть имеется система  – го порядка



Матрица  – матрица системы;

 – столбец неизвестных;  – столбец свободных членов.

Данная система эквивалентна матричному уравнению: , тогда решение системы эквивалентно решению указанного матричного уравнения т.е. .

1. Правило Крамера.

Если определитель системы  линейных уравнений с  неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

, где  – определитель, полученный из главного заменой – го столбца столбцом свободных членов.

Замечание: а) Если , а какой-либо из , то, очевидно, что система решений не имеет.

б) Если все определители одновременно равны нулю, то система либо имеет бесчисленное множество решений, либо несовместна.

1. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных).

Пусть дана произвольная система линейных уравнений 

Расширенной матрицей системы назовем матрицу полученную из А добавлением столбца свободных членов .

Под элементарными преобразованиями системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

1. Умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;
2. Прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;
3. Перемена местами двух уравнений в системе.

Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствует аналогичное преобразование строк расширенной матрицы этой системы и наоборот.

Элементарные преобразования системы обратимы, т.е. если мы, сделав элементарное преобразование, перешли от одной системы к другой, то можем вернуться к первоначальной, выполнив некоторое другое преобразование.

Определение: две системы линейных уравнений от одних и тех же переменных называются равносильными, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот (или лбе системы несовместны).

При элементарных преобразованиях система переходит в равносильную систему.

Метод Гаусса заключается в том, что при помощи элементарных преобразований систему (расширенную матрицу) приводят к трапециевидной форме. После этого уже не представляет труда разобраться в вопросе о совместности системы, определить число решений и найти сами решения.

Литература

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие для втузов: [в 2 т.]. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд. стер. - М.: Интеграл-Пресс, 2009. - 544 с.: ил.
2. . Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии : учебник для вузов / Н. В. Ефимов . - Изд. 13-е, стер. - М. : ФИЗМАТЛИТ , 2005 . - 238 с.
3. Шипачев, В. С. Высшая математика : Базовый курс: учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачев . - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт , 2011 . - 447 с.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. - 416 с.

Титульный лист

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Вологодский государственный университет»

Кафедра математики и информатики

Контрольная работа по дисциплине

Высшая математика

Выполнил студент группы \_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

шифр \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Принял Иванова С.В. .

Вологда

2022