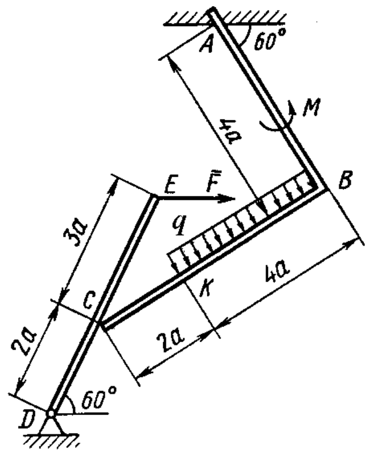
РГР № 2

Равновесие сочлененной системы тел



На угольник ABC ($\angle ABC = 90°$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE. Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена горизонтальная сила $\overline{F}$ в точке E, а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара сил с моментом M.

Д а н о : $F = 10$ кН, $M = 5$ кН$\cdot$м, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м.

О п р е д е л и т ь : силы реакции связей.

Решение:

1. Проведем предварительно анализ силового воздействия, оказываемого на систему активными силами.

В точке E приложена сосредоточенная сила. На угольник действует вращающий момент M. На участке KB приложена равномерно распределенная нагрузка.

При решении задач распределенные силы необходимо заменять сосредоточенными. В общем случае распределенную нагрузку надо проинтегрировать по области распределения и полученную сосредоточенную силу следует приложить к центру масс области распределения. В случае, если нагрузка распределена по отрезку, то из определения криволинейного интеграла следует, что сосредоточенная сила будет равна площади фигуры, ограниченной функцией распределения нагрузки и отрезком.

В предложенном примере нагрузка распределена по отрезку равномерно (с постоянной интенсивностью). Полученная фигура является прямоугольником со сторонами q и KB. Соответственно сосредоточенная сила, как площадь прямоугольника, равна:

$$Q = q \cdot KB = q \cdot 4a = 16 \text{ кН}.$$

Центр масс прямоугольника лежит на пересечении его диагоналей. Проводим через эту точку силу $\overline{Q}$: $BT = KT = 2a$ (рис. С-00).

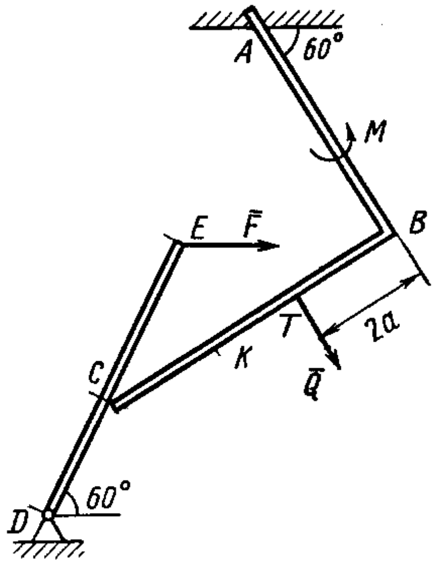


Рис. С-00

2. Выясним, где в системе возникают силы реакции и как они направлены.

Силы реакции возникают в точках, где на тела системы наложены связи.

В точке D система закреплена с помощью неподвижного шарнира. Его реакция направлена произвольно. При решении задач ее раскладывают на проекции по осям координат. Проводим оси координат и изображаем составляющие реакции в т. D (рис. С-01).

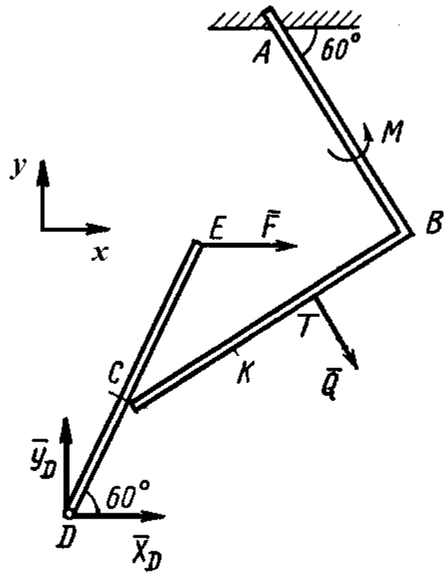


Рис. С-01

В точке A – жесткая заделка. Ее реакция состоит из произвольно направленных силы и момента. Отбрасываем эту связь и изображаем составляющие реакции (рис. С-02).

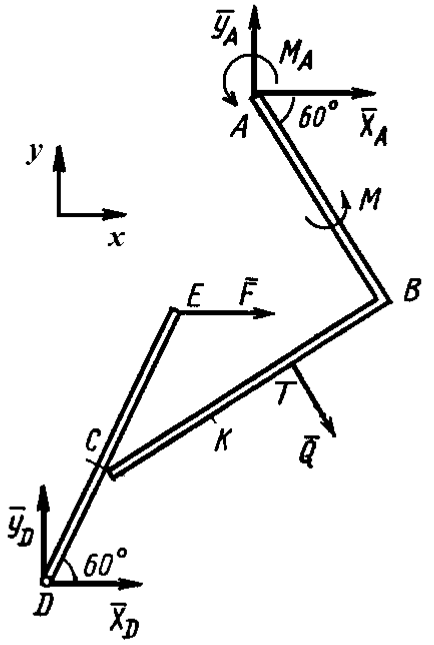


Рис. С-02

Таким образом, получаем 5 неизвестных сил реакции, которые нужно найти.

Для их определения необходимо использовать условия равновесия плоской системы сил. Однако, эти условия содержат лишь 3 неэквивалентных уравнения. Т. Нам надо каким-то образом обеспечить возможность составления еще 2-х уравнений.

Для этого учтем, что наша конструкция состоит из двух тел – стержня и угольника, которые взаимодействуют друг с другом. Это т.н. составная конструкция или сочлененная система тел.

При решении задачи о равновесии составной конструкции систему мысленно разбивают на части в местах взаимодействия тел и по отдельности рассматривают равновесие каждого тела.

Разрываем связь между стержнем и угольником (рис. С-03).

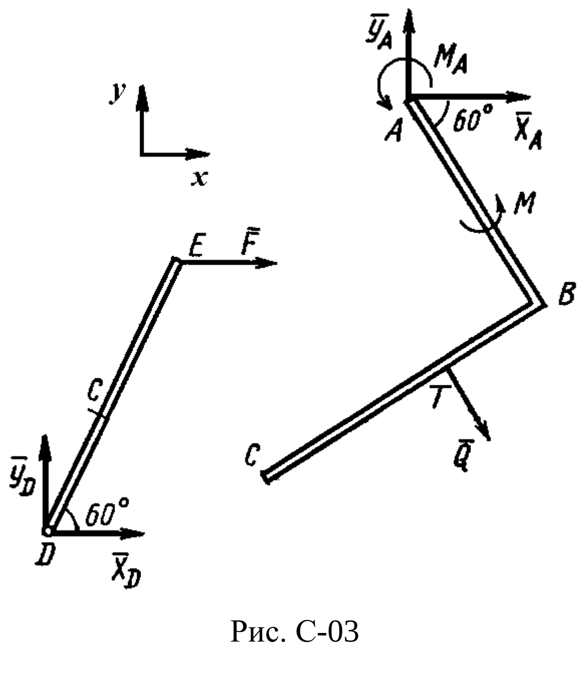


Рис. С-03

Однако, разбив систему на части, мы тем самым нарушили ее равновесие. Поэтому для каждого тела необходимо компенсировать отсутствие отброшенной части. Для этого в точке разрыва системы, а именно в точке C, надо приложить силы к каждому телу. Их направление определяется видом разорванной связи. В нашем случае стержень свободно опирается на угольник, следовательно, реакция должна быть направлена перпендикулярно к общей касательной к телам в точке C. А поскольку для системы в целом точка C находится в равновесии, то для двух тел по отдельности эти силы равны по модулю и противоположны по направлению (рис. С-04).

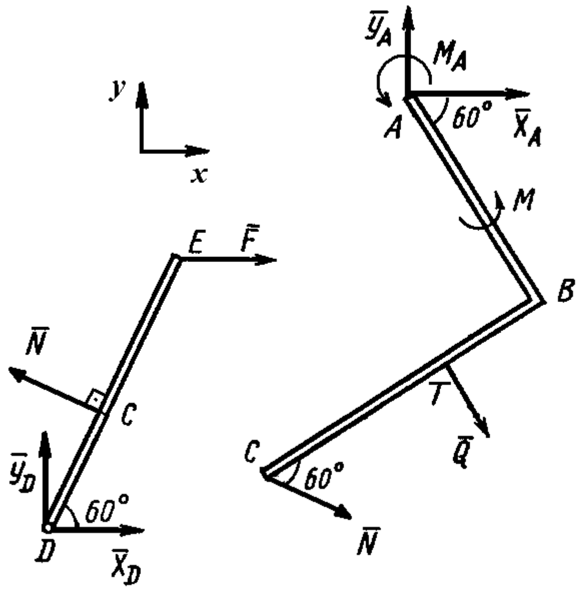


Рис. С-04

Таким образом, у нас теперь стало 6 неизвестных реакций. Но поскольку условия равновесия составляются уже для двух тел, то мы получаем в итоге систему из шести уравнений.

Приступим к ее составлению.

3) Рассмотрим равновесие стержня DE (рис. С-05)

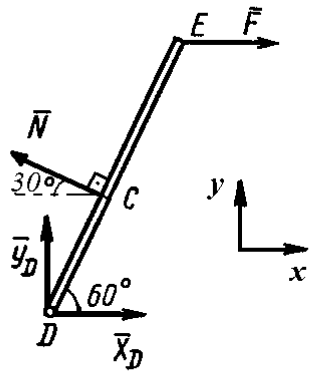


Рис. С-05

Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \quad X_D + F - N\cos 30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad Y_D + N\sin 30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_D(\overline{F}_k) = 0: \quad N \cdot DC - F \cdot DE\sin 60° = N \cdot 2a - F \cdot 5a\sin 60° = 0.$$

4) Рассмотрим равновесие угольника ABC (рис. С-06).

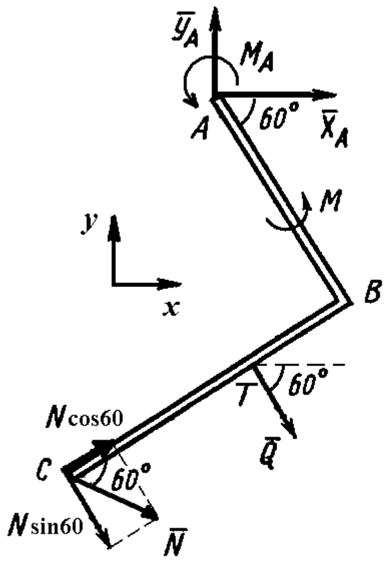


Рис. С-06

Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0: \quad X_A + Q\cos 60° + N\cos 30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0: \quad Y_A - Q\sin 60° - N\sin 30° = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(\overline{F}_k) = 0: \quad M_A + M + Q \cdot BT + N\cos 60° \cdot AB + N\sin 60° \cdot BC =$$

$$= M_A + M + Q \cdot 2a + N\cos 60° \cdot 4a + N\sin 60° \cdot 6a = 0.$$

При вычислении момента силы $\overline{N}$ разлагаем ее на составляющие $N\cos 60$ и $N\sin 60$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений, найдем искомые реакции.

$N = 21{,}7$ кН, $X_D = 8{,}8$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кНм.

5) Для проверки правильности решения составим уравнение на моменты для всей конструкции (рис. С-02):

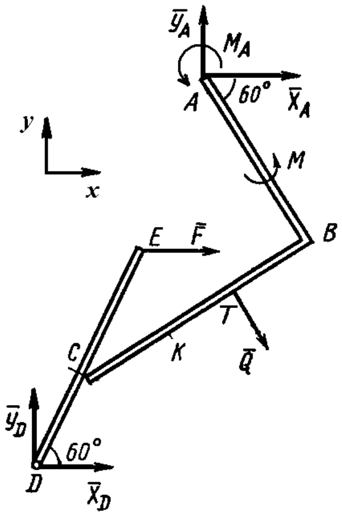


Рис. С-02

$$\sum_{k=1}^{n} M_C(\overline{F}_k) = 0: \quad M_A + M - Q \cdot CT + X_D \cdot CD\sin 60^\circ - Y_D \cdot CD\cos 60^\circ - F \cdot CEa\sin 60^\circ +$$

$$+ Y_A \cdot BC\sin 60^\circ - Y_A \cdot AB\cos 60^\circ - X_A \cdot BC\cos 60^\circ - X_A \cdot AB\sin 60^\circ =$$

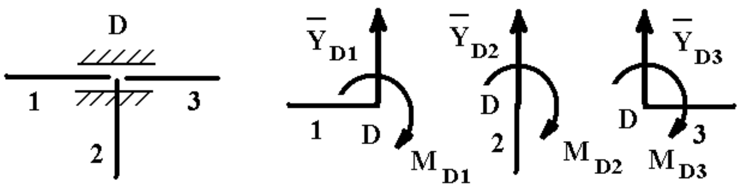
$$= -42{,}6 + 5 - 16 \cdot 4 \cdot 0{,}2 + 8{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866 + 10{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 - 10 \cdot 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866 +$$

$$+ 24{,}7 \cdot 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866 - 24{,}7 \cdot 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 26{,}8 \cdot 6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 26{,}8 \cdot 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}866 \equiv 0.$$

О т в е т : $N = 21{,}7$ кН, $X_D = 8{,}8$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кНм. Знаки минус указывают, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_D$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рис. 83.

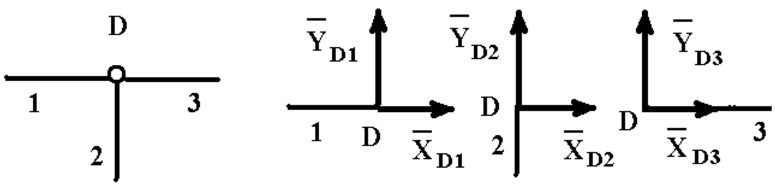
Примечание. В вариантах, где в одной точке взаимодействуют не два, а три тела при разбиении системы на части следует поступить следующим образом.

I) Скользящая заделка.



$Y_{D1} + Y_{D2} + Y_{D3} = 0$, $\quad M_{D1} + M_{D2} + M_{D3} = 0$.

II) Шарнир.



$X_{D1} + X_{D2} + X_{D3} = 0$, $\quad Y_{D1} + Y_{D2} + Y_{D3} = 0$.