Составитель: Неретина Вера Валерьевна

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ЛЯПУНОВА

Содержание практического занятия:

14.1. Основные понятия и определения

На этом практическом занятии мы рассмотрим основные методы исследования устойчивости нелинейных систем, которые существенно отличаются от способов анализа линейных систем. В первую очередь, это связано с тем, что свойство устойчивости нелинейной системы зависит от начальных условий и внешних воздействий: при одних входных сигналах система будет устойчивой, а при других она становится неустойчивой. Следовательно, для их анализа нельзя применять разработанные в линейной теории критерии устойчивости.

Устойчивость нелинейной системы автоматического управления означает, что малые изменения входного сигнала или возмущений, начальных условий или параметров объекта не выведут выходную переменную за пределы достаточно малой окрестности точки равновесия или предельного цикла. Поскольку для нелинейной системы могут существовать несколько положений равновесия, анализировать устойчивость следует в окрестности каждого из них.

Проблема устойчивости нелинейных систем имеет сравнительно давнюю и очень интересную историю развития. Следует отметить, что основная тематика исследований формировалась вокруг идей русского ученого А.М. Ляпунова. Однако способы анализа устойчивости нелинейных систем дают, как правило, достаточные условия, поэтому для них невозможно ввести понятие запаса устойчивости, применяемое в линейном случае.

Поскольку поведение нелинейной системы существенно зависит от величины внешних воздействий, их численное значение всегда оговаривается при анализе ее свойств. Исследуем понятие устойчивости для автономной стационарной системы, уравнение состояния которой имеет вид

$$\dot{z} = \varphi(z), \qquad z \in R^n. \tag{1}$$

Обычно нас интересует устойчивость относительно равновесного режима z^0. Задачу анализа можно свести к проверке устойчивости системы относительно начала координат в пространстве новых переменных.

С этой целью введем вектор переменных x, в качестве которых выберем отклонение от состояния равновесия

$$x = z - z^0. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по времени, получим уравнения состояния для новых переменных

$$\dot{x} = \dot{z} - \dot{z}^0 = \varphi(x + z^0),$$

которые запишем в виде

$$\dot{x} = f(x). \tag{3}$$

В пространстве состояний x согласно (2) и (3) точка равновесия совпадает с началом координат, т. е.

$$f(0) = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь условия устойчивости автономной системы (3) относительно точки $x = 0$.

Положение равновесия системы называется *асимптотически устойчивым*, если при движении из начальных условий выполняется условие

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \quad \forall x(0) \in R^n. \tag{5}$$

Условие (5) означает, что с течением времени фазовые траектории системы «стягиваются» к началу координат (рис. 1). При неустойчивом движении фазовая траектория удаляется от точки равновесия или вырождается в предельный цикл.

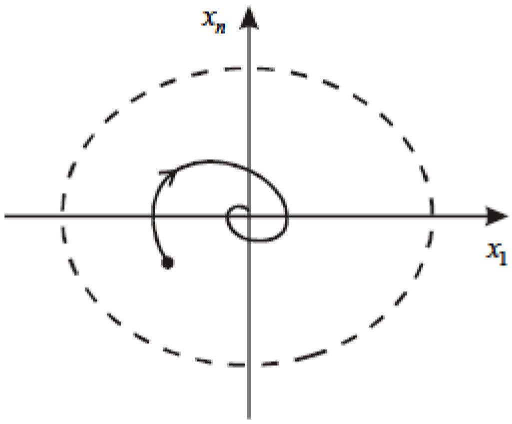

Рис. 1. Иллюстрация асимптотически устойчивого состояния равновесия

В зависимости от значений $x(0)$, для которых выполняется условие (5), различают устойчивость «в малом» и «в большом».

Состояние равновесия системы называется *асимптотически устойчивым «в малом»*, если это свойство выполняется для малой окрестности положения равновесия.

Состояние равновесия системы называется *асимптотически устойчивым «в большом»*, если условие (5) выполняется для любых начальных условий из рабочей области пространства состояний.

Состояние равновесия системы называется экспоненциально устойчивым, если оно устойчиво асимптотически и выполняется условие

$$\|x(t)\| \le c\|x(0)\|e^{-\alpha t}, \tag{6}$$

где $c = const > 0$, $\alpha = const > 0$.

В зависимости от начальных условий также можно выделить экспоненциальную устойчивость «в малом» и «в большом».

Отметим, что для систем автоматики важно наличие именно экспоненциальной устойчивости, которая гарантирует и скорость переходных процессов (с показателем α). Свойства асимптотической устойчивости недостаточно для работы реальных систем.

14.2. Исследование устойчивости по линейному приближению

В некоторых случаях устойчивость состояния равновесия нелинейной системы можно исследовать по уравнениям первого приближения, полученным в результате линеаризации уравнений состояния в малой окрестности точки равновесия. Данный способ был предложен А.М. Ляпуновым.

Рассмотрим этот подход для нелинейной автономной стационарной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0. \tag{7}$$

Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора в малой окрестности состояния равновесия:

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^T}\right|_{x=0} x + R(x), \tag{8}$$

где $R(x)$ – члены ряда разложения выше первой степени; матрица частных производных $\partial f/\partial x^T$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Отбрасывая члены ряда разложения $R(x)$, вместо (8) получим

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^T}\right|_{x=0} x. \tag{10}$$

Матрица частных производных (9) рассматривается в точке равновесия, поэтому представляет собой числовую матрицу коэффициентов, для которой введем обозначение

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x^T}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=0} . \qquad (11)$$

С учетом (11) окончательно уравнение первого приближения системы (10) принимает вид

$$\dot{x} = Ax , \qquad (12)$$

т. е. соответствует описанию линейной автономной системы.

Согласно теореме, доказанной А.М. Ляпуновым, устойчивость исходной системы (8.7) связана с устойчивостью линеаризованной системы (12).

Теорема. Если линеаризованная система устойчива, то исходная нелинейная система будет асимптотически устойчивой «в малом» относительно исследуемого состояния равновесия.

При неустойчивой линеаризованной системе процессы в исходной нелинейной системе будут также неустойчивыми.

Если линеаризованная система находится на границе устойчивости (корни нулевые или мнимые), то об устойчивости нелинейной системы ничего нельзя сказать. Это критический случай, и нужны дополнительные исследования для окончательного суждения об устойчивости нелинейной системы (7), которую определяют члены высшего порядка ряда разложения $R(x)$.

Пример 1. По линейному приближению оценить устойчивость относительно одного из положений равновесия системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2 - 2u, \qquad u = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнения равновесия системы

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 - 2x_2, \\ 0 = x_1 x_2 - x_2, \end{cases}$$

откуда определим одну из точек равновесия: $\{x_1^0 = 0, x_2^0 = 0\}$. В ее малой окрестности линеаризуем исходную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x^0} x_1 + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x^0} x_2 = 2x_1\Big|_{x^0} x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x^0} x_1 + \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x^0} x_2 = (x_2 - 1)\Big|_{x^0} x_1 + x_1\Big|_{x^0} x_2, \end{cases}$$

которая принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Матрица линеаризованной системы следующая:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем для нее характеристическое уравнение

$$\det(pI - A) = \det\begin{bmatrix} p & 2 \\ 1 & p \end{bmatrix} = p^2 - 2 .$$

Как видим, линеаризованная система неустойчива, следовательно, исходная система также неустойчива.

14.3. Второй метод Ляпунова

Одним из наиболее эффективных способов исследования устойчивости является второй метод Ляпунова (часто его называют также прямым методом Ляпунова), который не требует нахождения решения дифференциального уравнения.

Метод основан на идее замены анализа решений нелинейных уравнений произвольного порядка на оценку свойств этих решений с помощью скалярного дифференциального неравенства. При этом теряется информация о виде решений, но приобретается простота анализа устойчивости, поскольку исследуется изменение «расстояния» в пространстве состояний от текущей точки системы до начала координат. В качестве такой оценки расстояния можно использовать скалярную функцию переменных состояния, которую обозначим через $V(x)$.

Понятно, что в случае устойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0 \tag{13}$$

с течением времени «стягиваются» к началу координат (рис. 2,а), при этом уменьшается расстояние от текущей точки до точки равновесия.

Для неустойчивого состояния равновесия фазовые траектории системы (13) расходятся (рис. 2,б), а расстояние увеличивается с течением времени.

Таким образом, суть второго метода Ляпунова сводится к оценке изменения некоторой функции координат состояния системы $V(x)$ вдоль траекторий движения, которую для простоты называют функцией Ляпунова. Обсудим формальные свойства функций $V(x)$, используемые в дальнейшем.

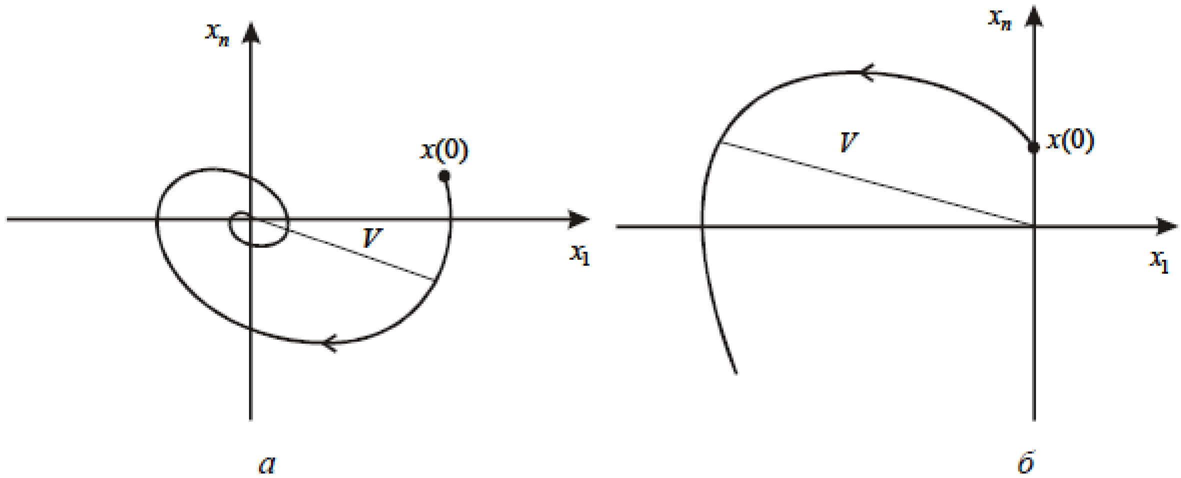

Рис. 2. Изменение функции *V* в случае устойчивой (*а*) и неустойчивой (*б*) систем

Рассмотрим функции $V(x)$, определенные и непрерывные в некоторой области пространства состояний D, содержащей начало координат и обладающие в этой области непрерывными частными производными по переменным x.

Функция $V(x)$ называется *положительно определенной* в области D, если она положительна для любых значений переменных из этой области и обращается в нуль только в начале координат, т. е. выполняются свойства

$$\begin{cases} V(x) > 0 \quad \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

(8.14)

Функция переменных состояния называется *отрицательно определенной* в области D, если она отрицательна для любых значений переменных из этой области и обращается в нуль только в начале координат.

Полной производной функции Ляпунова в силу системы (производной функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы (13)) называется функция $V(x)$, которая определяется следующим образом:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x). \tag{15}$$

Здесь $\dfrac{\partial V}{\partial x^T} = \left[\dfrac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right]$ – вектор-строка частных производных.

Полная производная функции Ляпунова представляет собой скалярное произведение вектор-строки $\partial V / \partial x^T$ и вектор-столбца $f(x)$ и может быть представлена в развернутой форме

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x) .$$

Следует отметить, что полная производная функции Ляпунова $\dot{V}(x)$, так же как и сама функция Ляпунова $V(x)$, тождественно обращается в нуль в начале координат, поскольку $f(0) = 0$.

Рассмотрим теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости состояния равновесия автономной системы.

Теорема об асимптотической устойчивости. Состояние равновесия системы является асимптотически устойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова $V(x)$ ее полная производная в силу системы (13) есть отрицательно определенная функция, т. е. при выполнении условий

$$\begin{cases} V(x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0, \quad V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) < 0 \quad \forall\, x \neq 0, \quad \dot{V}(0) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Теорема об экспоненциальной устойчивости. Состояние равновесия системы (13) будет экспоненциально устойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова $V(x)$ ее полная производная в силу системы есть отрицательно определенная функция и обе эти функции удовлетворяют следующим квадратичным ограничениям:

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2 ,$$

$$\dot{V}(x) \leq -\, c_3 \|x\|^2 , \tag{17}$$

где $c_i = const > 0, \quad i = \overline{1,3}$.

Теорема о неустойчивости. Состояние равновесия системы (13) является неустойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова $V(x)$ ее полная производная в силу системы представляет собой также положительно определенную функцию.

Поскольку от функции $V(x)$ требуется только знакоопределенность, для одной и той же системы (13) можно выбирать различные функции Ляпунова, которые могут привести к более «широким» или «узким» условиям устойчивости.

Приведенные теоремы дают только достаточные, но не необходимые условия устойчивости и неустойчивости и не указывают способы нахождения подходящих функций $V(x)$, в чем и заключается основная сложность применения второго метода Ляпунова.

Таким образом, если не выполняются условия ни одной из приведенных теорем, то об устойчивости системы (13) ничего сказать нельзя. Вероятно, в этом случае функция Ляпунова была выбрана неудачно.

Пример 2. С помощью второго метода Ляпунова оценить устойчивость системы, поведение которой описывают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + u. \end{cases}$$

Полагаем $u = 0$ и рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Выберем для нее в качестве функции Ляпунова следующую функцию:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

$$V(0) = 0.$$

Определим теперь полную производную функции Ляпунова вдоль траектории движения автономной системы

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 10x_2^2 = -10x_2^2.$$

Полная производная функции Ляпунова не является отрицательно определенной функцией, поскольку обращается в нуль не только в начале координат пространства состояний, но и на всей оси x_1 . Это означает, что не выполняются условия ни одной из приведенных теорем. Следовательно, об устойчивости положения равновесия системы сказать ничего нельзя, функция Ляпунова выбрана неудачно.

Попробуем оценить устойчивость системы с помощью новой функции

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0,$$

для которой определим полную производную

$$\dot{V}(x) = 2(x_1 + x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2.$$

В это выражение вместо производных переменных состояния подставим правые части уравнений автономной системы:

$$\dot{V}(x) = -2x_1^2 - 10x_1x_2 - 8x_2^2.$$

Как видим, полная производная новой функции Ляпунова есть отрицательно определенная функция. Следовательно, исходная система является асимптотически устойчивой.

14.4. Применение второго метода Ляпунова для анализа устойчивости линейных систем

Второй метод Ляпунова можно применять для анализа устойчивости линейных систем, причем в этом случае он дает необходимое и достаточное условие устойчивости.

Рассмотрим линейную автономную систему, поведение которой описывают уравнения состояния (12):

$$\dot{x} = Ax.$$

Выберем для нее в качестве функции Ляпунова квадратичную форму вида

$$V(x) = x^T B x\,, \tag{18}$$

где B – матрица квадратичной формы размера $n \times n$. Определим полную производную функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T B x + x^T B \dot{x}$$

или

$$\dot{V}(x) = (Ax)^T B x + x^T B A x\,.$$

После несложных преобразований получим

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T B + BA) x\,. \tag{19}$$

Как видим, полная производная функции Ляпунова (19) также представляет собой квадратичную форму, матрицу которой обозначим буквой C.

Теорема. Для того чтобы линейная система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$C = A^T B + BA \tag{20}$$

имело положительное решение B при любой отрицательно определенной матрице C.

Уравнение (20) называют *матричным уравнением Ляпунова*.

В линейной алгебре для оценки знака квадратичной формы применяется *критерий Сильвестра*: матрица

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

будет положительно определенной, когда все ее главные диагональные миноры положительны ($\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$). Здесь

$$\Delta_1 = b_{11}, \qquad \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \ldots, \qquad \Delta_n = \det B.$$

Если все нечетные миноры отрицательные, а четные положительные ($\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, …), то матрица B будет отрицательно определенной.

На основе теоремы Ляпунова можно предложить следующую процедуру проверки устойчивости линейных систем.

1. Задается отрицательно-определенная матрица C, причем в качестве C удобно выбирать отрицательную единичную диагональную матрицу

$$C=-I=\begin{bmatrix}-1 & 0\dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0\cdots & -1\end{bmatrix}.$$

2. Записывается матрица B в виде

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}.$$

3. Формируется матричное уравнение Ляпунова (20), которое принимает форму

$$A^T B+BA=-I.$$

4. Приравниваются соответствующие элементы матриц из левой и правой частей уравнения Ляпунова. Формируется система линейных алгебраических уравнений, вычисляются неизвестные коэффициенты b_{ij}, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$.

5. Определяется знак матрицы B, что позволяет в соответствии с теоремами Ляпунова сделать вывод об устойчивости системы.

Пример 3. Определить устойчивость замкнутой системы вторым методом Ляпунова, если известна ее модель в виде передаточной функции

$$W(p)=\frac{y}{u}=\frac{2}{5p^2-4p+1}.$$

Запишем соответствующее ей дифференциальное уравнение

$$5\ddot{y}-4\dot{y}+y=2u,$$

которое представим в переменных состояния:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-0,2x_1+0,8x_2+0,4u,\\ y=x_1.\end{cases}$$

Матрица A для системы имеет вид

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0,2 & 0,8\end{bmatrix}.$$

Выберем в качестве матрицы C отрицательную единичную диагональную матрицу и запишем матричное уравнение Ляпунова

$$\begin{bmatrix}0 & -0,2\\ 1 & 0,8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0,2 & 0,8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

где B – матрица функции Ляпунова, коэффициенты которой связаны соотношениями

$$\begin{cases} -0,2b_{21} - 0,2b_{12} = -1, \\ b_{12} + 0,8b_{22} + b_{21} + 0,8b_{22} = -1, \\ -0,2b_{22} + b_{11} + 0,8b_{12} = 0, \\ b_{12} = b_{21}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$B = \begin{bmatrix} -2,75 & 2,5 \\ 2,5 & -3,75 \end{bmatrix}.$$

Оценим знак матрицы B с помощью критерия Сильвестра, для чего вычислим определители

$$\Delta_1 = |b_{11}| = -2,75 < 0,$$

$$\Delta_2 = |B| = 4,0625 > 0.$$

Таким образом, матрица B является отрицательно-определенной, а исходная система будет неустойчива.

14.5. Проверка устойчивости одного класса нелинейных систем

Для отдельного класса нелинейных систем можно предложить достаточно простой способ проверки устойчивости с помощью второго метода Ляпунова.

Рассмотрим автономные системы (13)

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0 \tag{21}$$

с однозначными нелинейными элементами вектор-функции $f(x)$.

Введем новую переменную $z \in R^n$ в виде

$$z = f(x).$$

Дифференцируя ее по времени $\dot{z} = \left(\partial f / \partial x^T\right)\dot{x}$, с учетом (21) получим уравнение

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x^T} z. \tag{22}$$

Обозначим здесь матрицу частных производных

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

и запишем дифференциальное уравнение состояния (22) в следующей форме:

$$\dot{z} = A(x)z. \tag{23}$$

Как видим, (23) представляет собой квазилинейное уравнение для переменной z. Для анализа устойчивости такой системы используем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы (18)

$$V(z) = z^T Bz$$

с единичной диагональной матрицей, $B = I$, т. е.

$$V(z) = z^T z \ . \tag{24}$$

Определим полную производную функции Ляпунова (24) по времени

$$\dot{V}(z) = z^T \dot{z} + \dot{z}^T z$$

в силу системы (23)

$$\dot{V}(z) = z^T A(x) z + z^T A^T(x) z \ .$$

После несложных преобразований получим окончательно

$$\dot{V}(z) = z^T \left[A(x) + A^T(x) \right] z \ . \tag{25}$$

Согласно теореме Ляпунова исходная система будет асимптотически устойчива, если производная (25) будет отрицательно определенной функцией. Поскольку полная производная функции Ляпунова представляет собой квадратичную форму, ее знак определяется знаком матрицы

$$\left[A(x) + A^T(x) \right], \tag{26}$$

который и следует проверить для анализа устойчивости системы (21).

Пример 4. Проверить устойчивость системы, поведение которой описывает уравнение

$$\dot{x} = -5x - x^3 \ .$$

Функция $f(x) = -5x - x^3$ однозначная, поэтому введем новую переменную

$$z = -5x - x^3 \ ,$$

для которой запишем дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = A(x) z \ ,$$

где $A(x) = -5 - 3x^2$.

Выбирая в качестве функции Ляпунова квадратичную форму (24), получим ее полную производную в виде (25). Оценим знак функции

$$A(x) + A^T(x) = 2A(x) = -10 - 6x^2 \ .$$

Эта функция отрицательная во всем диапазоне изменения x. Следовательно, система асимптотически устойчива.

Заканчивая обсуждение второго метода Ляпунова, отметим, что он дает достаточные условия устойчивости. При этом «запас» устойчивости может быть очень большим, но оценить его количественно удается лишь для частных классов систем. По этой причине второй метод Ляпунова чаще всего используется при выводе вторичных критериев устойчивости.

14.6. Задания

1. Определить устойчивость по линейному приближению относительно всех точек равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1 x_2. \end{cases}$$

2. Определить устойчивость по линейному приближению относительно всех точек равновесия системы

$$\ddot{x} + 3x\dot{x} + x - x^2 = 0.$$

3. Определить устойчивость системы по линейному приближению относительно одного из состояний равновесия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1 x_2. \end{cases}$$

4. Определить устойчивость системы по линейному приближению относительно одного из состояний равновесия при $u = 1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u. \end{cases}$$

5. Определить устойчивость по линейному приближению относительно всех точек равновесия системы при $u = 2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 - x_2 + u. \end{cases}$$

6. Определить устойчивость системы, уравнения состояния которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 8x_2 \end{cases}$$

с помощью следующей функции Ляпунова: $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.

7. Определить устойчивость системы, уравнения состояния которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 7x_2, \end{cases}$$

с помощью следующей функции Ляпунова: $V(x) = x^T Bx$, где $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Определить устойчивость замкнутой системы вторым методом Ляпунова, если известна передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p)=\frac{12}{(p-1)(5p+1)}.$$

9. С помощью функции Ляпунова $V(x)=5x_1^2+x_1x_2+2x_2^2$ исследовать устойчивость системы, структурная схема которой приведена на рис. 3.

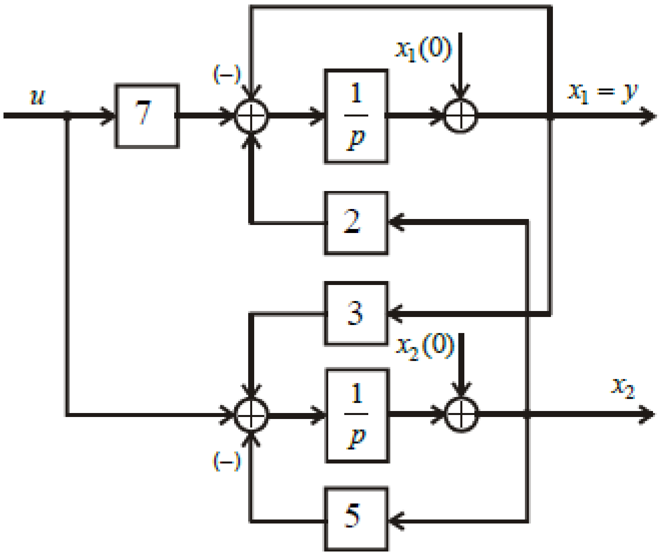

Рис. 3. Структурная схема системы к задаче 9

10. Решая матричное уравнение Ляпунова, проверить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1-2x_2,\\ \dot{x}_2=x_1-x_2.\end{cases}$$

11. Решая матричное уравнение Ляпунова, проверить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+7x_2,\\ \dot{x}_2=2x_1-10x_2.\end{cases}$$

12. Вторым методом Ляпунова проверить устойчивость системы (рис. 4), если $W_1(p)=\dfrac{1}{p+2}$ и $W_2(p)=\dfrac{5}{3p+1}$.

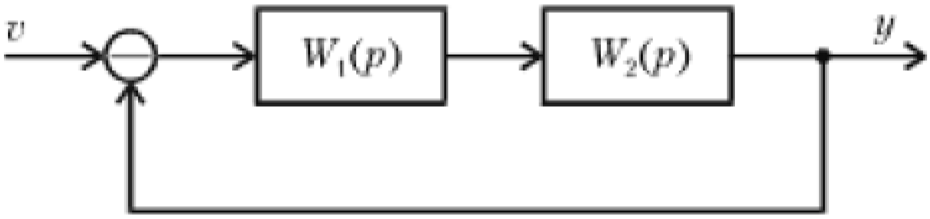

Рис. 4. Структурная схема замкнутой системы к задаче 12

13. Вторым методом Ляпунова проверить устойчивость системы (рис. 4), если $W_1(p) = \frac{1}{p}$ и $W_2(p) = \frac{15}{0,5p+1}$.

14. Вторым методом Ляпунова определить устойчивость системы, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 5\ell^{-x_1} - 3x_2. \end{cases}$$

15. Вторым методом Ляпунова определить устойчивость системы, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\ell^{-x_1} + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2^3. \end{cases}$$

16. С помощью функции Ляпунова

$$V(x) = 0,5\left(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right)$$

проверить устойчивость системы, математическая модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1x_2 - x_1^3 - 0,5x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + x_1x_2 + x_1^2x_2 - 0,5x_1x_2^2. \end{cases}$$

Таблица 1

Варианты заданий

Вариант	**Номера заданий**	**Вариант**	**Номера заданий**
1	1, 6	5	5, 11
2	2, 7	6	1, 12
3	3, 8	7	4, 13
4	4, 10	8	5, 14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Востриков А. С. Теория автоматического регулирования: Учеб. пособие / А. С. Востриков, Г. А. Французова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. – 368 с.

2. Кудинов Ю. И. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB – SIMULINK). Практикум: учебное пособие / Ю. И. Кудинов, Ф. Ф. Пащенко, А. Ю. Келина. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 280 с.