

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ 8-9

РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Содержание практического занятия:

- 8.1. Основные положения
- 8.2. Численный метод решения разностных уравнений
- 8.3. Аналитический метод решения разностных уравнений
- 8.4. Решение разностных уравнений с помощью Z-преобразования
- 8.5. Задания

8.1. Основные положения

Дискретное представление непрерывной системы носит название процесса дискретизации непрерывной системы. Ограничимся непрерывной системой второго порядка

$$a_0 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 u(t) .$$

При достаточно малом шаге квантования T дискретизацию можно выполнить путем замены производных конечными разностями. Ниже проводится замена первой производной правой разностью

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

или левой разностью

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} .$$

Обозначим через T интервал дискретизации Δt , тогда текущее время равно $t = kT$, а выражения правой и левой разностей первого порядка можно записать как

$$\Delta y(kT) = y(kT + T) - y(kT) \text{ и } \Delta y(kT) = y(kT) - y(kT - T),$$

соответственно. Опуская, но подразумевая интервал дискретизации T , перепишем выражения правой

$$\Delta y(k) = y(k + 1) - y(k) \text{ и левой } \Delta y(k) = y(k) - y(k - 1)$$

разностей первого порядка. Пусть дана вторая производная

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dy(t + \Delta t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dy(t - \Delta t)}{dt}}{\Delta t} .$$

Запишем разности второго порядка, подставляя разности первого порядка

$$dy(t) \approx \Delta y(k) = y(k + 1) - y(k),$$

$$dy(t) \approx \Delta y(k) = y(k) - y(k - 1),$$

$$dy(t + \Delta t) \approx \Delta y(k + 1) = y(k + 2) - y(k + 1),$$

$$dy(t - \Delta t) \approx \Delta y(k - 1) = y(k - 1) - y(k - 2).$$

Тогда вторые разности запишутся для правой разности как

$$\begin{aligned} d^2 y(t) &\approx dy(t + \Delta t) - dy(t) = y(k + 2) - y(k + 1) - y(k + 1) + y(k) = \\ &= y(k + 2) - 2y(k + 1) + y(k), \end{aligned}$$

а для левой разности —

$$\begin{aligned} d^2 y(t) &\approx dy(t) - dy(t - \Delta t) = y(k) - y(k - 1) - y(k - 1) + y(k - 2) = \\ &= y(k) - 2y(k - 1) + y(k - 2). \end{aligned}$$

Пример 8.1. Дано дифференциальное уравнение апериодического звена

$$2\dot{y}(t) + y(t) = 3u(t).$$

Осуществить его дискретизацию при $T = 0.2$.

Решение. Первая производная с правой разностью запишется как

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \rightarrow \frac{y(k + 1) - y(k)}{T},$$

а остальные непрерывные переменные —

$$y(t) \rightarrow y(k),$$

$$u(t) \rightarrow u(k).$$

После приведенной выше замены дискретное апериодическое звено примет вид

$$2\left(\frac{y(k + 1) - y(k)}{T}\right) + y(k) = 3u(k)$$

или

$$y(k + 1) - y(k) + 0.5Ty(k) = 1.5Tu(k).$$

В левой части уравнения оставим переменную $y(k + 1)$, остальные перенесем в правую часть

$$y(k + 1) = (1 - 0.5T)y(k) + 1.5Tu(k).$$

После подстановки $T = 0.2$ получим

$$y(k + 1) = 0.9y(k) + 0.3u(k). \quad (8.1)$$

Повторим эти действия для левой разности

$$\frac{y(k) - y(k - 1)}{T} + y(k) = 3u(k),$$

$$y(k) - y(k - 1) + Ty(k) = 3Tu(k),$$

$$y(k) = y(k - 1)/(0.5T + 1) + 1.5Tu(k)/(0.5T + 1),$$

$$y(k) \approx 0.9y(k - 1) + 0.27u(k). \quad (8.2)$$

Ниже будут рассмотрены численный и аналитический методы решения разностных уравнений, а также решение с помощью Z — преобразования.

8.2. Численный метод решения разностных уравнений

Составим на языке MATLAB программу вычисления $y(k+1)$ по формуле (8.1) при $T = 0.2$, $k = 0, 1, \dots, 25$ и начальных условиях $y(0) = 0$, $u(0) = 0$ и $u(k) = 1$, при $k > 0$. Обозначим в программе пр. 8.1 переменную $y(k+1)$ как $yk1$, $y(k)$ как yk , $u(k)$ как uk и введем операторы `hold on` и `hold off` для запоминания данных вывода. Результат работы программы — график переходного процесса в системе с разностным уравнением первого порядка показан на рисунке 8.1.

(Пр. 8.1)

```
T=0.2; uk=0; yk=0;
for k = 0:25;
    yk1=yk*(1-0.5*T)+1.5*T*uk;
    yk=yk1; uk=1; hold on;
    plot(k,yk1,'.')
hold off
end;
```

Самостоятельно составьте программу и постройте переходный процесс в системе с разностным уравнением первого порядка, использующим левую разность (8.2). Теперь рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = 2u(t).$$

Подставим в него правые разности первого и второго порядка

$$\frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T^2} + \frac{2y(k+1) - 2y(k)}{T} + 3y(k) = 2u(k).$$

Приведя последнее выражение к общему знаменателю, получим

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) + 2Ty(k+1) - 2Ty(k) + 3T^2y(k) = 2T^2u(k)$$

или

$$y(k+2) = (2 - 2T) \cdot y(k+1) + (2T - 1 - 3T^2)y(k) + 2T^2u(k). \quad (8.3)$$

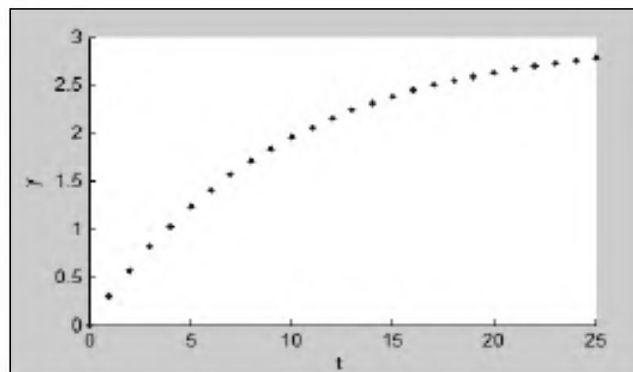


Рис. 8.1

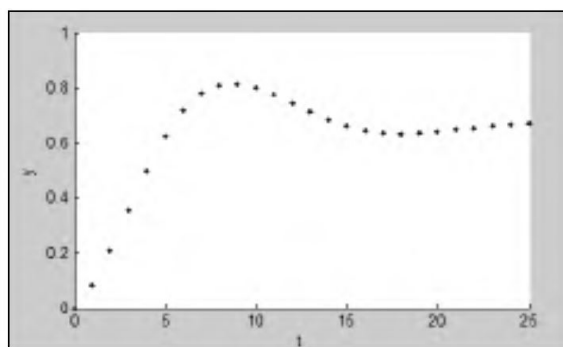


Рис. 8.2

Составим на языке MATLAB программу пр. 8.2 вычисления $y(k+2)$ по формуле (8.3) при $T = 0.2$, $k = 0, 1, \dots, 25$ и начальных условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $u(0) = 0$ и $u(k) = 1$ при $k > 0$. Обозначим в программе пр. 8.2 переменные $y(k+2)$ как $yk2$, $y(k+1)$ как $yk1$, $y(k)$ как yk и $u(k)$ как uk .

(Пр. 8.2)

```
T=0.2; uk=0; yk=0; yk1=0;
for k = 0:25;
    yk2=(2-2*T)*yk1+(2*T-1-3*T^2)*yk+2*T^2*uk;
    uk=1; yk=yk1; yk1=yk2; hold on;
    plot(k,yk2,'.')
hold off
end;
```

На рисунке 8.2 приводятся графические результаты расчета переходного процесса объекта, описываемого разностным уравнением второго порядка с правыми разностями.

Самостоятельно постройте переходный процесс разностной системы второго порядка с левой разностью.

8.3. Аналитический метод решения разностных уравнений

Отличие дифференциальных от разностных уравнений состоит в том, что дифференциальные уравнения связывают значение функции и производных от нее в один и тот же момент времени

$$f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t)) = 0,$$

а разностные уравнения — значения функции в различные моменты времени

$$f(y(k+n), \dots, y(k+1), y(k)) = 0. \quad (8.4)$$

Так же, как и дифференциальные, разностные уравнения делятся на линейные и нелинейные, на однородные и неоднородные, на уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Линейное однородное разностное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = 0. \quad (8.5)$$

Решением этого уравнения называется решетчатая функция $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, обращающая уравнение в тождество. Например, уравнение (8.2) является линейным неоднородным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Иногда, чтобы подчеркнуть дискретный характер изменения времени, уравнение (8.5) записывают в форме

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = 0.$$

Свойства разностных и дифференциальных уравнений и методы их решения во многом совпадают. Так, разностное уравнение n -го порядка (8.5) имеет ровно n линейно независимых частных решений $y_1(k), \dots, y_n(k)$. Любая их линейная комбинация, например $y_1(k) + 3y_2(k)$ также является решением.

Общее решение имеет вид

$$y(k) = C_1y_1(k) + \dots + C_ny_n(k), \quad (8.6)$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные коэффициенты.

Приступим к аналитическому методу решения линейных разностных однородных и неоднородных уравнений.

Будем искать решение в виде $y(k) = z^k$, где z — некоторое число. Подставляя $y(k) = z^k$ в (8.5) и сокращая на z^k , получаем алгебраическое уравнение

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (8.7)$$

которое называется характеристическим.

Вид решения разностных уравнений зависит от типа корней характеристического полинома, которые могут быть вещественными, комплексными, простыми и кратными.

а) Вещественные корни.

Если уравнение (8.5) имеет вещественные и различные корни $z_1, \dots, z_n$, то получаем n линейно независимых частных решений уравнения (8.5)

$$y_1(k) = z_1^k, \dots, y_n(k) = z_n^k.$$

Общее решение в соответствии с (8.6) имеет вид

$$y(k) = C_1z_1^k + \dots + C_nz_n^k. \quad (8.8)$$

Пример 8.2. Найти общее решение разностного уравнения

$$y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $z^2 - 5z + 6 = 0$.

Его корни вещественные и различные: $z_1 = 3, z_2 = 2$.

Общее решение: $y(k) = C_13^k + C_22^k$.

б) Комплексные корни.

Если характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то соответствующее им решение $y(k) = C_1z_1^k + C_2z_2^k$ может быть записано в вещественном виде

$$y(k) = \rho^k(C_1\sin\varphi k + C_2\cos\varphi k),$$

где $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$.

Пример 8.3. Решить разностное уравнение

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 4y(k) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение: $z^2 + 2z + 4 = 0$.

Его корни: $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$. Модуль и аргумент корней: $\rho = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$.

Общее решение имеет вид

$$y(k) = 2^k (C_1 \cos \frac{5\pi}{3}k + C_2 \sin \frac{5\pi}{3}k). \quad (8.9)$$

в) Кратные корни.

Если один из корней характеристического уравнения z_i имеет кратность n , то соответствующее ему слагаемое в общем решении умножается на полином степени $n-1$

$$y_i(k) = (C_1 + C_2k + \dots + C_n k^{n-1})z_i^k. \quad (8.10)$$

Пример 8.4. Кратные вещественные корни. Решить разностное уравнение

$$y(k+3) + 7y(k+2) + 15y(k+1) + 9y(k) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение: $z^3 + 7z^2 + 15z + 9 = 0$.

Его корни: $z_1 = -1$, $z_2 = -3$, $z_3 = -3$.

Общее решение: $y(k) = C_1(-1)^k + (C_2 + C_3k)(-3)^k$.

Пример 8.5. Кратные комплексные корни. Решить разностное уравнение

$$y(k+4) + 2y(k+2) + y(k) = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение: $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

Его корни: $z_1 = z_2 = i$; $z_3 = z_4 = -i$.

Общее решение: $y(k) = (C_1 + C_2k)\cos \frac{\pi}{2}k + (C_3 + C_4k)\sin \frac{\pi}{2}k$.

г) Учет начальных и краевых условий.

Общее решение, в которое входят произвольные постоянные C_i , задает семейство решений разностного уравнения. Для выделения из этого семейства искомого частного решения необходимо найти эти постоянные $C_1, \dots, C_n$, исходя из n условий, связывающих значения $y(t)$ в различных точках.

Чаще всего используются два типа условий, связанных с заданием:

- начальной последовательности $y(1), y(2), \dots, y(n)$;
- части значений $y(k)$ в начале, и части — в конце интервала решения.

Условия первого типа называются начальными, а второго типа — краевыми.

Пример 8.6. Решить разностное уравнение

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0$$

для трех вариантов начальной последовательности

а) $y(0) = 1$, $y(1) = 3$, б) $y(1) = 1$, $y(2) = 3$, в) $y(1) = 2$, $y(2) = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$z^2 - 3z + 2 = 0, z_1 = 1, z_2 = 2.$$

Общее решение имеет вид $y(k) = C_1 + C_2 \cdot 2^k$.

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий.

В случае а) имеем $C_1 + C_2 = 1, C_1 + 2C_2 = 3$, откуда $C_1 = -1, C_2 = 2$, т. е.
 $y(k) = 2^{k+1} - 1$.

В случае б) имеем $C_1 + 2C_2 = 1, C_1 + 4C_2 = 3$, откуда $C_1 = -1, C_2 = 1$, т. е.
 $y(k) = 2^k - 1$.

В случае в) имеем $C_1 + 2C_2 = 2, C_1 + 4C_2 = 0$, откуда $C_1 = 4, C_2 = -1$, т. е.
 $y(k) = 4 - 2^k$.

Пример 8.8. Решить уравнения из предыдущего примера, если заданы краевые условия $y_1 = 2, y_{10} = 1024$.

Решение. Полагая в формуле для общего решения $n = 1$ и $n = 10$, получаем систему уравнений для определения C_1 и C_2 :

$$C_1 + 2C_2 = 2, C_1 + 2^{10} C_2 = 1024,$$

откуда $C_1 = 0, C_2 = 1$.

д) Решение неоднородных разностных уравнений.

Рассмотрим пошаговое решение неоднородного уравнения.

Шаг 1. Находим общее решение однородного уравнения.

Шаг 2. Находим частное решение неоднородного уравнения. В общем случае применяется метод вариации произвольных постоянных, а в частном случае — метод подбора, когда система описывается уравнением

$$a_n y(k+n) + \dots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = f(k), \quad (8.11)$$

$$f(k) = r^k [R_q(k) \cos \phi k + R_l(k) \sin \phi k],$$

где $R_q(k), R_l(k)$ — многочлены степени q и l соответственно, r и ϕ — заданные действительные числа. Тогда частное решение неоднородного уравнения ищется в форме

$$y^*(k) = r^k [Q_p(k) \cos \phi k + T_p(k) \sin \phi k] k^s, \quad (8.12)$$

в которой $p = \max \{q, l\}$; $Q_p(k), T_p(k)$ — многочлены переменной k степени p с неопределенными коэффициентами; число s находится следующим образом:

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если число } r(\cos \phi + i \sin \phi) \text{ не совпадает} \\ & \text{ни с одним из корней характеристического уравнения,} \\ m, & \text{если число } r(\cos \phi + i \sin \phi) \text{ совпадает с корнем кратности } m. \end{cases}$$

Коэффициенты многочлена $Q_p(k)$ или $T_p(k)$ находим из тождества, которое получается при подстановке (8.12) в (8.11).

Шаг 3. Находим общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Шаг 4. Определяем произвольные постоянные коэффициенты из краевых или начальных условий.

Пример 8.8. Решить неоднородное разностное уравнение второго порядка с комплексными корнями

$$y(k+2) + y(k+1) + y(k) = 1$$

и начальными условиями $y(0) = 1, y(1) = 2$.

Решение. Находим корни характеристического полинома

$$z^2 + z + 1 = 0; z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2},$$

а затем частное решение.

Общее решение неоднородного уравнения получаем как сумму частного решения $y^*(k)$ и общего решения $y^o(k)$ соответствующего однородного уравнения

$$y(k) = y^*(k) + C_1 \sin \frac{\pi}{3} k + C_2 \cos \frac{\pi}{3} k.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Для этого определим параметры правой части $f(k) = 1$: $r = 1, \varphi = 0, K_q(k) = 1, P(k) = 0, q = 0$.

Число $s = 0$, так $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 1$ не совпадает с корнями $-0,5 + 0,5\sqrt{3}i$ и $-0,5 - 0,5\sqrt{3}i$ характеристического уравнения, поэтому согласно (8.12) $y^*(k) = 1^k A$. Подставляя значение $y^*(k)$ в неоднородное уравнение, имеем

$$1 \cdot A + 1 \cdot A + 1 \cdot A = 1 \text{ или } y^*(k) = A = \frac{1}{3}.$$

Составим общее решение неоднородного уравнения

$$y(k) = C_1 \sin \frac{\pi}{3} k + C_2 \cos \frac{\pi}{3} k + \frac{1}{3}$$

и определим постоянные C_1 и C_2 , исходя из заданных начальных условий

$$y(0) = C_2 \cos 0 + \frac{1}{3} = 1, \quad C_2 = \frac{2}{3};$$

$$y(1) = C_1 \sin \frac{\pi}{3} + C_2 \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} = 2, \quad C_1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Тогда ответ можно записать в следующем окончательном виде:

$$y(k) = \frac{8}{3\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} k + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{3} k + \frac{1}{3}.$$

Пример 8.9. Найти решение неоднородного разностного уравнения

$$y(k+1) - 2y(k) = 2f(k)$$

с правой частью $f(k) = k$ при $y(0) = 0$.

Решение. Находим решение неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях

$$y(k+1) - 2y(k) = 2k, y(0) = 0.$$

Используем методику нахождения решения неоднородного уравнения:

а) определим общее решение однородного уравнения $y(k+1) - 2y(k) = 0$. Характеристическое уравнение $z - 2 = 0$ имеет действительный корень $z_1 = 2$, поэтому общее решение $y(k) = C_1$, $z_1^k = C_1 2^k$;

б) найдем частное решение неоднородного уравнения методом подбора, анализируя параметры правой части $2f(k) = 2k$: $\varphi = 0$, $R_q(k) = 2k$, $q = 1$, $r = 1$.

Число $s = 0$, так как $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 1$ не совпадает с корнем $z_1 = 2$, поэтому частное решение ищется в форме

$$y^*(k) = 1^k [ak + b] = ak + b.$$

Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$\underbrace{a(k+1) + b}_{ak+a} - 2ak - 2b = 2k.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , имеем $a - b = 0$, $-a = 2$ или $a = -2$, $b = -2$. В результате $y^*(k) = -2k - 2$;

в) составим общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y(k) = C_1 2^k - 2k - 2;$$

г) найдем произвольную постоянную C_1 из нулевых начальных условий

$$y(0) = C_1 2^0 - 2 \cdot 0 - 2 = C_1 - 2 = 0; C_1 = 2.$$

В результате получаем решение неоднородного уравнения

$$y(k) = 2 \cdot 2^k - 2k - 2 = 2(2^k - k - 1).$$

Пример 8.10. Найти решение неоднородного разностного уравнения

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 2f(k)$$

с правой частью $f(k) = 2^k$ при $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Решение.

1. Находим решение однородного уравнения $y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y(1) = 0$:

а) составим характеристическое уравнение $z^2 - 2z + 1 = (z - 1)^2 = 0$ и найдем его корни;

б) поскольку корень $z_1 = 1$ действительный кратности $m = 2$, то согласно (8.10) общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y^0(k) = (C_1 + C_2 k),$$

$$z_1^k = C_1 + C_2 k;$$

в) определим произвольные постоянные C_1 и C_2 из начальных условий

$$y^0(0) = C_1 = 1,$$

$$y^{\circ}(1) = C_1 + C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ и решение однородного уравнения

$$y^{\circ}(k) = 1 - k.$$

2. Найдем решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) = 2 \cdot 2^k, y(0) = 0, y(1) = 0;$$

а) общее решение однородного уравнения найдено в п.1

$$y^{\circ}(k) = C_1 + C_2 k;$$

б) найдем частное решение неоднородного уравнения методом подбора. Анализируя параметры правой части $2f(k) = 2 \cdot 2^k$, имеем: $\varphi = 0$, $R_q(k) = 2$, $q = 0$, $r = 2$. Число $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2$ не совпадает с корнем $z_1 = 1$, поэтому $s = 0$ и решение ищется в форме $y^*(k) = A \cdot 2^k$. Подставляя его в неоднородное уравнение, получаем

$$A \cdot 2^{k+2} - 2A \cdot 2^{k+1} + A \cdot 2^k = 2 \cdot 2^k.$$

Сокращая на 2^k , имеем $A \cdot 2^2 - 4A + A = 2$ или $A = 2$. В результате $y^*(k) = 2 \cdot 2^k$;

в) составим общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$y(k) = C_1 + C_2 k + 2 \cdot 2^k;$$

г) найдем постоянные C_1 и C_2 из нулевых начальных условий

$$y(0) = C_1 + 2 = 0,$$

$$y(1) = C_1 + C_2 + 4 = 0.$$

Отсюда $C_1 = -2$, $C_2 = -C_1 - 4 = -2$ и $y^*(k) = -2 - 2k + 2 \cdot 2^k$.

3. Найдем итоговое решение $y(k)$ как сумму решения однородного $y^{\circ}(k)$ и частного решения неоднородного $y^*(k)$ уравнений

$$y(k) = y^{\circ}(k) + y^*(k) = 1 - k - 2 - 2k + 2 \cdot 2^k = -1 - 3k + 2 \cdot 2^k.$$

8.4. Решение разностных уравнений с помощью Z-преобразования

При исследовании непрерывных динамических систем с дискретным временем (они называются также импульсными системами) и при решении разностных уравнений широко применяется математический аппарат Z-преобразования.

Определение. Пусть $f(t)$ — функция целочисленного аргумента $t = 0, 1, 2 \dots$. Ее Z-преобразованием называется функция комплексного аргумента z , определяемая формулой

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t}. \quad (8.13)$$

Условная запись Z-преобразования: $f(t) \rightarrow F(z)$.

Свойства Z-преобразования

1. Линейность $af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow aF_1(z) + bF_2(z)$.
2. Сдвиг по времени вправо $Z\{f(kT - dT)\} \rightarrow z^{-d}F(z)$, $d > 0$.
3. Сдвиг по времени влево $Z\{f(kT + dT)\} = z^d[F(z) - \sum_{q=0}^{d-1} f(qT)z^{-q}]$, $d > 0$.
4. Начальное значение $f(+0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$.
5. Конечное значение $\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$.

В таблице 8.1 приведены Z-преобразования некоторых функций:

Таблица 8.1

Оригинал $f(kT)$	Изображение $F(z)$
$\delta(kT)$	1
1(kT)	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^{kT}	$\frac{z}{z-a}$
kTa^{kT}	$\frac{az}{(z-a)^2}$
e^{akT}	$\frac{z}{z-e^{aT}}$
kTe^{akT}	$\frac{Tze^{aT}}{(z-e^{aT})^2}$
$1 - e^{akT}$	$\frac{z(1-e^{aT})}{(1-z)(z-e^{aT})}$
$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega kT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$f(kT + T)$	$z(F(z) - f(0))$
$f(kT + 2T)$	$z^2(F(z) - f(0) - z^{-1}f(1))$

Заметим, что в тулбоксе Symbolic пакета MATLAB имеются команды `ztrans` и `iztrans` для выполнения прямого и обратного Z-преобразований.

Пусть дано разностное уравнение n -го порядка

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) = f(k)$$

с начальными условиями $y(0) = y_0, y(1) = y_1, \dots, y(n-1) = y_{n-1}$.

Алгоритм решения этого уравнения с помощью Z-преобразования содержит 4 шага.

Шаг 1. Применим Z-преобразование к исходному разностному уравнению, заменяя $y(k)$ на $Y(z)$, $y(k+1)$ на $zY(z) - y(0)$ и т. д.

Шаг 2. Из полученного алгебраического уравнения выразим $Y(z)$.

Шаг 3. Разложим полученное алгебраическое уравнение на простые дроби.

Шаг 4. Пользуясь таблицей или MATLAB, осуществим обратное Z-преобразование.

Рассмотрим примеры применения этого алгоритма.

Пример 8.11. Требуется решить разностное уравнение первого порядка

$$y(k+1) - 0.9y(k) = 0.1, y(0) = 5. \quad (8.14)$$

Решение.

Шаг 1. Применяем к (8.14) Z-преобразование:

$$z(Y(z) - 5) - 0.9Y(z) = \frac{0.1z}{z-1}.$$

После ряда операций над ним имеем

$$Y(z)(z - 0.9) = \frac{0.1z}{z-1} + 5z = \frac{5z^2 - 4.9z}{z-1}.$$

Шаг 2. Выражаем $Y(z)$, деля левую и правую части уравнения на $(z - 0.9)$

$$Y(z) = \frac{5z^2 - 4.9z}{(z-1)(z-0.9)}.$$

Шаг 3. Раскладываем полученное выражение на простые дроби

$$Y(z) = z \frac{5z - 4.9}{(z-0.9)(z-1)} = z \left(\frac{A}{z-0.9} + \frac{B}{z-1} \right).$$

Коэффициенты A, B определим в MATLAB, применяя в пр. 8.1 функцию `residue` к многочлену $Y(z) = \frac{5z^2 - 4.9z}{(z-1)(z-0.9)}$ и разлагая его на элементарные члены

$$Y(z) / z = K + \frac{r_1}{z-p_1} + \frac{r_2}{z-p_2}.$$

(Пр. 8.1)

```
num=[5 -4.9];
den=conv([1 -1],[1 -0.9]);
[r,p,k]=residue(num,den)
```

```
r = 1.0000    p = 1.0000
    4.0000    0.9000
K = []
```

Подставляя в это выражение найденные в пр. 8.1 значения r, p и K , получим уравнение

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{4z}{z-0.9}.$$

Шаг 4. Выполняем обратное Z -преобразование и находим ответ

$$y(k) = 1 + 4(0.9)^k. \quad (8.15)$$

Проверка для $k = 0, 1, 2$ по уравнениям (8.14) и (8.15) дает одинаковые результаты

$$y(0) = 5, y(1) = 4.6, y(2) = 4.24.$$

Пример 8.12. Пусть дано разностное уравнение второго порядка

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k)$$

с заданными начальными значениями $y(0) = y_0$ и $y(1) = y_1$.

Решение.

Шаг 1. Применяем к нему Z -преобразование

$$z^2[Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1}] + a_1 z[Y(z) - y_0] + a_0 Y(z) = U(z).$$

Шаг 2. Выражаем $Y(z)$, т. е. выделяем его в правой части уравнения

$$Y(z) = \frac{y_1 z + y_0 z(z + a_1) + U}{z^2 + a_1 z + a_0}.$$

Шаг 3. Чтобы найти $y(k)$, разлагаем правую часть на простые дроби.

Положим $a_1 = -1$, $a_0 = 0.5$, $u_k = 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Тогда получаем

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5}.$$

Корни знаменателя — комплексные, следовательно, эта дробь — простая.

Шаг 4. С помощью таблицы преобразований или MATLAB находим оригинал $y(k) = iCa^k \sin k$. Постоянные C , a , ω определяем из соотношений

$$a^2 = 0.5, \quad 2a \cos \omega = 1, \quad C = \frac{1}{a \sin \omega}, \quad \text{откуда } a = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707, \quad \omega = \frac{\pi}{4}, \quad C = 2.$$

Окончательный вид решения: $y(k) = 2 \cdot 2^{-k/2} \sin(\pi k/4)$.

8.5. Задания

Задания к практическому занятию 8

1. Выполните дискретизацию дифференциального уравнения при $T = 0.2$ с, используя правые разности первого и второго порядка.

1. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 3u(t)$.

2. $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 2u(t)$.

3. $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 4u(t)$.

4. $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2u(t)$.

5. $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 1,5u(t)$.

6. $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 3u(t)$.

7. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2,5u(t)$.

8. $\ddot{y} + 7\dot{y} + 12y = 3,5u(t)$.

9. $\ddot{y} + \dot{y} - 12y = 4,5u(t)$.

10. $\ddot{y} - \dot{y} - 12y = u(t)$.

11. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 1,5u(t)$.

12. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 8y = 2,5u(t)$.

13. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 8y = 3u(t)$.

14. $\ddot{y} + 2\dot{y} - 8y = 2,5u(t)$.

15. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 6y = 3,5u(t)$.

2. Составьте в программу в среде MATLAB для вычисления $y(k + 2)$ по разностным уравнениям, полученным в пункте 1 при $T = 0.2$, $k = 0, 1, \dots, 25$ и начальных условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $u(0) = 0$ и $u(k) = 1$ при $k > 0$.

Задания к практическому занятию 9

3. Для разностных уравнений, полученных в пункте 1, аналитически найти общее решение ($u(k) = 0$, $k \geq 0$) при:

а) начальных условиях $y(0) = 2$, $y(1) = 4$;

б) краевых условиях $y(1) = 2$, $y(8) = 300$.

4. Найти решение разностных уравнений, полученных в пункте 1, с помощью Z-преобразования при $u(k) = 0$, $k \geq 0$ и начальных условиях $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудинов Ю. И. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB – SIMULINK). Практикум: учебное пособие / Ю. И. Кудинов, Ф. Ф. Пащенко, А. Ю. Келина. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 280 с.

2. Кудинов Ю. И., Пащенко Ф. Ф. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB – SIMULINK): Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2016. – 256 с.