Содержание

1 Введение

Обозначения и определения.

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ – множества вещественных, рациональных и целых чисел.

$F_{\geq 0}$ – подмножество неотрицательных элементов множества F.

$F^{m \times n}$ – множество $(m \times n)$-матриц с элементами из множества F.

F^m – альтернативное обозначение для $F^{m \times 1}$.

E_m – *единичная* $(m \times m)$ - матрица.

e_j – j-ый столбец единичной матрицы.

Матрица B называется *базисом* матрицы A, если

- $B \subseteq A$
- столбцы B линейно независимы
- каждый столбец A линейно выражается через столбцы B

$\operatorname{rank} A$ – *ранг* матрицы A – число столбцов в базисе.

Элементарные преобразования строк.

- Перестановка строк с номерами i и k: $(i) \leftrightarrow (k)$.
- Умножение i – й строки на число t: $(i) \leftarrow t(i)$.
- Добавление к i – ой строке произведения строки k и числа t : $(i) \leftarrow (i) + t(k)$.

Для матриц A и B, состоящих из столбцов одинаковой высоты, выражения $B \subseteq A,\ A \backslash B$ и т.п. имеют обычный теоретико-множественный смысл. Например, выражение $E_m \subseteq A$ означает, что E_m является подматрицей матрицы A и $\operatorname{rank} A = m$.

Метод Гаусса

$$Ax = b$$

где $a_1, \cdots, a_n, b \in \mathbb{R}^m, \operatorname{rank}(a_1, \cdots, a_n) = m$.

Если из столбцов матрицы коэффициентов при неизвестных можно собрать единичную подматрицу $E_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, т.е. найдутся $j_1, j_2..j_m$ такие, что

$$(a_{j_1}, \cdots, a_{j_m}) = E_m \in \mathbb{R}^{m \times m}, \tag{1.1}$$

то сразу пишем частное решение

$$\begin{cases} x_{j_1} = b_1, \ldots, x_{j_m} = b_m \\ x_j = 0,\ j \notin \{j_1, \ldots, j_m\} \end{cases} \tag{1.2}$$

Неизвестные $x_{j_1}, ..., x_{j_m}$ и решение (1.2) называются *базисными.*

Если нет единичной подматрицы, то преобразуем систему методом Гаусса-Жордана.

Метод Гаусса-Жордана. Следуя некоторому правилу, выбрать уравнение и базисную неизвестную в этом уравнении. Исключить ее из остальных уравнений. Повторяя эту процедуру получить список из m базисных неизвестных.

В действительности, вычисления выполняются не с уравнениями, а со строками матрицы коэффициентов. Строка, соответствующая выбранному уравнению, называется *ведущей строкой*, столбец коэффициентов при базисной неизвестной называется *ведущим столбцом*, элемент матрицы, расположенный на пересечении ведущей строки и ведущего столбца, называется *ведущим элементом*.

Простейшее правило выбора ведущего элемента. Выбрать уравнение, не содержащее ни одной из базисных неизвестных, и объявить базисной любую неизвестную с ненулевым коэффициентом в этом уравнении.

Преобразуем строки расширенной матрицы коэффициентов

$$(a_1, .., a_n|b)$$

до тех пор, пока не появится подматрица E_m. После этого находим решение по формулам (1.2).

Пример 1.1. Найти частное решение системы

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & -3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Решение. В этом примере можно составить единичную подматрицу E_2 из столбцов a_3 и a_1 матрицы коэффициентов. Следовательно, базисными неизвестными являются x_3, x_1 (именно в таком порядке!), а x_2, x_4 являются небазисными. Полагаем $x_3 = b_1 = -3, x_1 = b_2 = 3$ и $x_2 = x_4 = 0$. ◄

Пример 1.2. Найти частное решение системы

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Решение. Один из столбцов единичной матрицы E_2 здесь есть, это столбец a_3. Поскольку базисная неизвестная x_3 содержится в первом уравнении, то другую базисную неизвестную следует выбирать во втором уравнении. Выберем, например, x_4 и исключим эту неизвестную из первого уравнения, прибавив к нему второе уравнение.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Объявляем неизвестные x_3, x_4 базисными, а x_1, x_2 – небазисными. Полагаем $x_3 = b_1 = 3, x_4 = b_2 = 3$ и $x_1 = x_2 = 0$.◄

Теперь рассмотрим два примера, нетипичные для линейной алгебры.

Пример 1.3. Найти наибольшее значение параметра f, при котором имеет неотрицательное решение система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & - & x_2 & & & & & = & f \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 3 \end{array}\right. . \qquad (1.3)$$

Решение. Система (1.3) имеет два замечательных свойства, позволяющих догадаться, что наибольшее значение f равно 0.

Свойство 1. Система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 3 \end{array}\right. , \qquad (1.4)$$

состоящая из двух последних уравнений системы (1.3), имеет неотрицательное(!) базисное решение $x = (0, 0, 3, 3)$. Подставляя x в первое уравнение системы (1.3), получаем $f = 0$. Следовательно, при $f = 0$ система (1.3) имеет неотрицательное решение.

Свойство 2. При любых неотрицательных значениях неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 справедливо неравенство $f \leq 0$.

Пример 1.4. Найти наименьшее значение параметра, при котором система (1.3) имеет неотрицательное решение

План решения подсказывается очевидным сходством этой и предыдущей задач. Оказывается, можно преобразовать систему (1.3) методом Гаусса-Жордана так, чтобы в результате:

- столбец свободных членов остался неотрицательным,
- параметр f выражался только через небазисные неизвестные и только с неотрицательными коэффициентами.

Преобразования уравнений здесь и далее будем выполнять в таблицах следующего формата

	x_1	x_2	x_3	x_4
f	-1	-1	0	0
3	2	1	1	0
3	1	2	0	1

, (1.5)

Обозначения в таблицах
Нумерация строк и столбцов начинается с 0.
$c_1, c_2 ..., c_n$ – *элементы нулевой строки,*
$b_1, ..., b_m$ – *элементы нулевого столбца,*
$a_{i,j}$ – *коэффициент при* x_j *в* i – *м уравнении* $(i = 1, .., m; j = 1, .., n)$.

Внимание! Нулевая строка не может быть ведущей.

Итак, надо избавиться от отрицательных коэффициентов в нулевой строке. Начнем с коэффициента c_1. Выберем первый столбец ведущим столбцом. В "обычном"методе Гаусса-Жордана в качестве ведущего элемента можно выбрать любой ненулевой элемент, как $a_{1,1} = 2$ так и $a_{2,1} = 1$. Однако, нам надо получить таблицу, в которой b_1 и b_2 неотрицательны, поэтому $a_{2,1}$ не подходит(Проверьте это, сделав преобразование таблицы).

Выполняем преобразования:

(1)/2 – ведущую строку делим на ведущий элемент;

(0)+(1) – к нулевой строке прибавляем первую;

(2)-(1) – из второй строки вычитаем первую.

	x_1	x_2	x_3	x_4
$f + 3/2$	0	$-1/2$	$1/2$	0
$3/2$	1	$1/2$	$1/2$	0
$3/2$	0	$\boxed{3/2}$	$-1/2$	1

,

Продолжаем, поскольку в нулевой строке есть отрицательные элементы. Ведущий элемент помещен в рамочку.

	x_1	x_2	x_3	x_4
$f+2$	0	0	1/3	1/3
1	1	0	2/3	−1/3
1	0	1	−1/3	2/3

Система (1.3) эквивалентна системе

$$\begin{cases} f+2 = & & & \frac{1}{3}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 \\ 1 = & x_1 & & +\frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ 1 = & & x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{2}{3}x_4 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем нижнюю оценку для f:

$$f+2 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \geq 0 \to f \geq -2$$

Оценка достижима при $x = (1,1,0,0)$. Таким образом, наименьшее значение параметра f, при котором система (1.3) имеет неотрицательное решение, равно -2.

2 Каноническая задача линейного программирования

Формулировка канонической задачи линейного программирования.

$$\text{Найти} \qquad min\, f = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \cdots + c_nx_n, \tag{2.1}$$

$$\text{при условиях} \quad \begin{cases} b_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \cdots + a_{1,n}x_n \\ b_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \cdots + a_{2,n}x_n \\ \cdots \\ b_m = a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 \cdots + a_{m,n}x_n \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

В матричной нотации:

$$\text{найти} \qquad min\, f = c_0 + cx, \tag{2.3}$$

$$\text{при условиях} \qquad b = Ax,\ x \geq 0. \tag{2.4}$$

Два примера, рассмотренные во введении, являются задачами линейного программирования. Метод, которым был решен второй пример, называется *симплекс-методом.* Точное описание симплекс-метода приводится далее.

Условия задачи записываются в таблице

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f-c_0$	c_1	c_2	$\cdots$	c_n
b_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
b_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
b_m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\cdots$	$a_{m,n}$

, (2.5)

содержащей коэффициенты системы $b = Ax$ и коэффициенты целевой функции f. Нумерация строк и столбцов начинается с 0.

Таблица называется *прямо допустимой*, если

- матрица A содержит столбцы $a_{j_1}, a_{j_2}, ...a_{j_m}$, составляющие единичную подматрицу E ранга m;

- $c_{j_1} = c_{j_2} = ... = c_{j_m} = 0$;
- $b_i \geq 0\,(i = 1, .., m)$.

Таблица называется *двойственно допустимой*, если последнее из перечисленных свойств заменить на $c_j \geq 0\,(j = 1, ..., n)$.

Таблица, одновременно и прямо и двойственно допустимая, называется оптимальной, так как содержит оптимальное решение ЗЛП. Базисные неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}$ равны соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$. Небазисные неизвестные равны 0. Значение целевой функции f равно c_0.

Прямой симплекс-метод. Дана прямо допустимая таблица и упорядоченный список базисных неизвестных $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}$

1. Если таблица двойственно допустима, то задача решена. Стоп.
2. Найти наименьшее $k \geq 1$ такое, что $c_k < 0$.
3. Сформировать множество $M = \{i :\ a_{i,k} > 0\}$
4. Если $M = \emptyset$, то целевая функция неограничена снизу. Стоп.
5. Найти $\alpha = \min\{\dfrac{b_i}{a_{i,k}} :\ i \in M\}$
6. Сформировать множество $I = \{i \in M :\ \dfrac{b_i}{a_{i,k}} = \alpha\}$
7. Найти $s = \min\{j_i :\ i \in I\}$
8. Выполнить итерацию метода Гаусса-Жордана с ведущим элементом $a_{s,k}$
9. Перейти к 1

3 О корректности симплекс-метода

Обоснование корректности симплекс-метод ищет оптимальное решение среди базисных решений. Докажите самостоятельно, опираясь на следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Если уравнение $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ имеет небазисное решение $x' = (x'_1, .., x'_k, 0, ..0)$ с положительными $x'_1, .., x'_k$, то оно имеет неотрицательное решение $x'' = (x''_1, .., x''_k, 0, ..0)$, в котором $x''_s = 0$ хотя бы при одном $s \in \{1, .., k\}$.

Доказательство. Небазисность x' означает, что столбцы $a_1, ...a_k$ линейно зависимы, т.е.

$$a_1\lambda_1 + ... + a_k\lambda_k = 0.$$

Докажите, что можно выбрать x'' среди векторов следующего вида:

$$(x'_1 + t\lambda_1, ..., x'_k + t\lambda_k, 0, .., 0)$$

□

Конечность правила Блэнда в прямом алгоритме

Выбор ведущего элемента в пунктах (b)-(g) прямого алгоритма называется правилом Блэнда.

Вербальная формулировка правила: выбрать ведущий столбец с наименьшим номером, ведущую строку выбрать так, чтобы вывести из базиса столбец с наименьшим номером из возможных.

Докажем конечность симплекс-метода с правилом Блэнда. Предположим, что последовательность таблиц $T_1, T_2 \ldots,$ бесконечна, то есть каждая таблица содержит отрицательный элемент в нулевой строке.

Количество базисных подматриц конечно, следовательно, существует число N такое, что в подпоследовательности $T_N, T_{N+1}, \ldots$ каждая таблица встречается бесконечное число раз – алгоритм "зацикливается". Содержимое левой верхней клетки одинаково во всех таблицах, так как в цикле значение целевой функции остается постоянным.

Удалим из таблиц этой подпоследовательности строки и столбцы, которые ни разу не становятся ведущими. Отметим, что в каждой таблице

	x_{j_1}	$\cdots$	$\cdots$	x_{j_r}
g	$*$	$\cdots$	$\cdots$	$*$
0	$*$	$\cdots$	$\cdots$	$*$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	$*$	$\cdots$	$\cdots$	$*$

$\{x_*, \ldots, x_*\}$

новой последовательности нулевой столбец, за исключением самого верхнего элемента, заполнен нулями, то есть, значения всех базисных неизвестных равны нулю. В противном случае, при переходе к следующей таблице изменилось бы значение целевой функции

Теперь, для упрощения доказательства, рассматриваем только таблицы с тремя строками – в общем случае изменятся лишь размеры формул и иллюстраций.

В новой бесконечной последовательности должны регулярно появляться следующие две таблицы: в одной последний столбец матрицы коэффициентов выводится из базиса, а в другой – вводится в базис.

	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_s	$\cdots$	$\cdots$	x_n
g	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_s < 0$	$\cdots$	$\cdots$	0
0	$\cdots$	0	$\cdots$	$\boxed{a_{1,s}>0}$	$\cdots$	$\cdots$	1
0	$\cdots$	1	$\cdots$	$a_{2,s} \le 0$	$\cdots$	$\cdots$	0

$\{x_n, x_k\}$

	$\cdots$	$\cdots$	x_u	$\cdots$	x_v	$\cdots$	x_n
g	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$c'_n < 0$
0	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\boxed{a'_{1,n}}>0$
0	$\cdots$	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$a'_{2,n} \le 0$

$\{x_v, x_u\}$

Покажем, что это невозможно. Рассмотрим системы уравнений, записанные в этих таблицах:

$$\begin{cases} g = c_1 x_1 + \cdots + 0 \cdot x_k + \cdots + \quad c_s x_s + \cdots + 0 \cdot x_n \\ \quad 0 = a_{1,1} x_1 + \cdots + 0 \cdot x_k + \cdots + a_{1,s} x_s + \cdots + 1 \cdot x_n \\ \quad 0 = a_{2,1} x_1 + \cdots + 1 \cdot x_k + \cdots + a_{2,s} x_s + \cdots + 0 \cdot x_n \end{cases}, \tag{3.1}$$

и

$$\begin{cases} g = c'_1 x_1 + \cdots + 0 \cdot x_u + \cdots + 0 \cdot x_v + \cdots + c'_n x_n \\ \quad 0 = a'_{1,1} x_1 + \cdots + 0 \cdot x_u + \cdots + 1 \cdot x_v + \cdots + a'_{1,n} x_n \\ \quad 0 = a'_{2,1} x_1 + \cdots + 1 \cdot x_u + \cdots + 0 \cdot x_v + \cdots + a'_{2,n} x_n \end{cases}. \tag{3.2}$$

Эти системы должны быть эквивалентными, то есть должны иметь одинаковые множества решений. Однако, набор

$$g = c_s, x_k = -a_{2,s},\ x_s = 1,\ x_n = -a_{1,s},\ x_j = 0 \text{ при } j \notin \{s, k, n\} \tag{3.3}$$

удовлетворяет первой системе, но не удовлетворяет второй, поскольку при подстановке (3.3) в первое уравнение получим равенство

$$c_s = -c'_k a_{2,s} + c'_s - c'_n a_{1,s}, \tag{3.4}$$

а оно неверно, так как правая и левая части имеют разные знаки.

4 О проблеме нахождения начального базисного решения

Требования, предъявляемые прямым симплекс-методом к ЗЛП

$$\begin{cases} \text{найти} \qquad min\, f = c^\top x, \\ \text{при условиях} \qquad b = Ax,\ x \geq 0 \\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}; x, c \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{4.1}$$

очень жесткие:

$$E_m \subset A \tag{4.2}$$

$$b \geq 0. \tag{4.3}$$

Если эти требования выполнены, то симплексная таблица содержит базисное допустимое решение, с которого симплекс-метод начинает поиск оптимального решения. В противном случае можно сначала подготовить задачу для решения симплекс-методом так, как это делается в следующем разделе. В разделах 4.2, 4.3 излагаются еще два способа решения проблемы при $b \not\geq 0$. Оба способа используют вспомогательные задачи линейного программирования.

4.1 Метод Блэнда

Преобразуем строки расширенной матрицы коэффициентов системы, используя любое правило выбора ведущего элемента, чтобы получить базисную единичную подматрицу и упорядоченный список L номеров базисных неизвестных. Если $b \not\geq 0$, то продолжаем преобразования с правилом Блэнда выбора ведущего элемента:
Выбрать номер ведущего столбца j' номер i' ведущей строки в множестве $\{i : b_i < 0\}$ так, чтобы после преобразования с ведущим элементом $a_{i',j'} < 0$ из базиса был выведен столбец с наименьшим номером из всех возможных и введен в базис также столбец с наименьшим номером.

Формальное изложение правила :

1. Номер ведущего столбца равен минимальному j, для которого

$$M = \{i : a_{i,j} < 0, b_i < 0\} \neq \emptyset.$$

2. Найти $j_s = \min\{j_i : j_i \in L, i \in M\}$. Номер ведущей строки равен s

Продолжаем вычисления, пока либо не получим систему с неотрицательными свободными членами, либо не обнаружим, что система уравнений не имеет неотрицательных решений[1].

Доказательство конечности метода рассмотрим для случая $m = 2$. В последовательности систем уравнений выберем ту, в которой из базиса выводится последний столбец матрицы A.

$$\begin{cases} \qquad b_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + 0 \cdot x_k + \cdots + a_{1,s}x_s + \cdots + 1 \cdot x_n \\ \qquad b_2 = a_{2,1}x_1 + \cdots + 1 \cdot x_k + \cdots + a_{2,s}x_s + \cdots + 0 \cdot x_n \end{cases} , \tag{4.4}$$

[1]В этом случае все коэффициенты ведущей строки неотрицательны.

Эта система имеет решение $y = (y_1, \dots, y_n)$, в котором $y_n = b_1, y_k = b_2$, а остальные компоненты равны 0. Отметим, что, согласно правилу Блэнда $b_1 < 0, b_2 \geq 0$. Предположим, что в последовательности есть система

$$\begin{cases} b'_1 = a'_{1,1}x_1 + \dots + 0 \cdot x_u + \dots + 1 \cdot x_v + \dots + a'_{1,n}x_n \\ b_2 = a'_{2,1}x_1 + \dots + 1 \cdot x_u + \dots + 0 \cdot x_v + \dots + a'_{2,n}x_n \end{cases} . \quad (4.5)$$

в которой последний столбец возвращается в базис. Согласно правилу Блэнда, $b'_1 < 0, a'_{1,1}, \dots, a'_{1,n-1} \geq 0$ и $a'_{1,n} < 0$ Но в этом случае вектор y не удовлетворяет первому уравнению этой системы.

Следовательно, ни один из базисов не появляется дважды, поэтому метод Блэнда либо найдет допустимый базис, либо обнаружит, что система уравнений не имеет неотрицательного решения.

4.2 Двухфазный симплекс метод.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} \text{найти} \qquad min\, f = \mathbf{1}y = \mathbf{1}(b - Ax), \\ \text{при условиях} \qquad b = Ax + Ey, \\ x, y \geq 0. \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}; x, c \in \mathbb{R}^n; y, b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}. \end{cases}$$

Так как $y \geq 0$, то $f = y_1 + y_2 + ... y_m \geq 0$, т.е. нижняя граница значений целевой функции равна 0, причем она достижима тогда и только тогда, когда условия исходной задачи совместны.

Таким образом, решив вспомогательную задачу, мы либо выясним несовместность условий исходной задачи(если получится f>0), либо получим таблицу, в которой ни одной из неизвестных $y_1, .., y_m$ не будет в списке базисных неизвестных.

Пример.

$$\min(x_1 + x_2)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Первая фаза. Записываем условия вспомогательной задачи и решаем ее симплекс-методом. Справа от каждой таблицы выписаны базисные неизвестные.

$$\min(x_4 + x_5)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	0	0	0	1	1
4	2	1	1	1	0
6	3	2	1	0	1

, $\{x_4, x_5\}$

Зануляем коэффициенты нулевой строки над базисной матрицей

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f-10	-5	-3	-2	0	0
4	$\boxed{2}$	1	1	1	0
6	3	2	1	0	1

, $\{x_4, x_5\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	0	-1/2	1/2	5/2	0
2	1	1/2	1/2	1/2	0
0	0	$\boxed{1/2}$	-1/2	-3/2	1

, $\{x_1, x_5\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	0	0	0	1	1
2	1	0	1	2	-1
0	0	1	-1	3	1

, $\{x_1, x_2\}$

Дополнительные неизвестные x_4, x_5 покинули базис. Удаляем принадлежащие им столбцы и вписываем в нулевую строку коэффициенты c_1, c_2, c_3.

	x_1	x_2	x_3
f	1	1	0
2	1	0	1
0	0	1	-1

, $\{x_1, x_2\}$

Таблица почти правильная. Поправляем нулевую строку, вычитая из нее сумму первой и второй строк.

	x_1	x_2	x_3
f-2	0	0	0
2	1	0	1
0	0	1	-1

, $\{x_1, x_2\}$

Обычно с этого места начинается вторая фаза, но нам повезло – таблица уже оптимальна.

4.3 М-метод

Рассмотрим новую задачу (М - задачу)

$$\begin{cases} \text{найти} \qquad min\, f = c^\top x + M \cdot \mathbf{1}y \\ \text{при условиях} \qquad b = Ax + Ey \\ x, y \geq 0 \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ x, c \in \mathbb{R}^n,\ y, b \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} \end{cases} \tag{4.6}$$

Символ $\mathbf{1}$ обозначает строку из m единичек, M это некоторое положительное число, большее чем модуль любого числа в предстоящих нам вычислениях.

Связь этой задачи с задачей (4.1) описана в следующих утверждениях.

Утверждение 4.1. Если (4.6) имеет оптимальное решение $x = x^0, y = 0$, то (4.1) имеет оптимальное решение x^0.

Доказательство. Оптимальность решения $x = x^0, y = 0$ означает, что неравенство

$$c^\top x^0 \leq c^\top x + M \cdot \mathbf{1}y$$

справедливо при любых x и y, удовлетворяющих уравнению $Ax + Ey = b$. В частности, оно справедливо при любых x и $y = 0$, удовлетворяющих уравнению $Ax + Ey = b$. А можно сказать это проще: неравенство $c^\top x^0 \leq c^\top x$ справедливо при любом x, удовлетворяющем уравнению $Ax = b$. Что и требовалось доказать! □

Утверждение 4.2. Если задача имеет оптимальное решение $x = x^0, y = y^0 \neq 0$, то задача (1) – (3) не имеет допустимого решения.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Пусть $x = x'$ допустимое решение задачи (1)–(3), тогда $x = x', y = 0$ допустимое решение задачи (4)–(6). Следовательно, справедливо неравенство

$$c^\top x^0 + M\mathbf{1}y^0 \leq c^\top x'$$

Однако, при

$$M > \frac{c^\top x' - c^\top x^0}{\mathbf{1}y^0}$$

получаем

$$c^\top x^0 + M\mathbf{1}y^0 > c^\top x^0 + (c^\top x' - c^\top x^0) = c^\top x'$$

Противоречие. □

Матрица коэффициентов в (4.6) содержит единичную подматрицу, поэтому после подстановки $y \leftarrow b - Ax$ в целевую функцию получим задачу, к которой можно применить прямой симплекс–метод.

$$\begin{gathered}
\text{найти} \qquad min\, f = c^\top x + M \cdot \mathbf{1}(b - Ax), \\
\text{при условиях} \qquad b = Ax + y,\ x, y \geq 0. \\
A \in \mathbb{R}^{m \times n}; x, c \in \mathbb{R}^n; y, b \in \mathbb{R}^m.
\end{gathered}$$

Пример 4.1. Решить задачу

$$\begin{cases}
\min(x_1 + x_2) \\
2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}$$

$$\begin{gathered}
\min(x_1 + x_2 + Mx_4 + Mx_5) \\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{gathered}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f	1	1	0	M	M
4	2	1	1	1	0
6	3	2	1	0	1

, $\{x_4, x_5\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f-10M	1-5M	1-3M	-2M	0	0
4	$\boxed{2}$	1	1	1	0
6	3	2	1	0	1

, $\{x_4, x_5\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f-2	0	(1-M)/2	(M-1)/2	(5M-1)/2	0
2	1	1/2	1/2	1/2	0
0	0	$\boxed{1/2}$	-1/2	-3/2	1

, $\{x_1, x_5\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f-2	0	0	0	M+1	M-1
2	1	0	1	2	-1
0	0	1	-1	3	1

, $\{x_1, x_2\}$

5 Описание двойственного симплекс-метода.

Дана двойственно допустимая таблица и упорядоченный список номеров базисных неизвестных $L = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$

1. Если таблица прямо допустима, то задача решена. Стоп.
2. Найти наименьшее $j_s \in L$ такое, что $b_s < 0$.
3. Сформировать множество $M = \{j : \ a_{s,j} < 0\}$
4. Если $M = \emptyset$, то условия задачи несовместны(система уравнений не имеет неотрицательных решений). Стоп.
5. Найти $\alpha = \max\{\frac{c_j}{a_{s,j}} : \ j \in M\}$
6. Сформировать множество $J = \{j \in M : \ \frac{c_j}{a_{s,j}} = \alpha\}$
7. Найти $k = \min\{j : \ j \in J\}$
8. Выполнить итерацию метода Гаусса-Жордана с ведущим элементом $a_{s,k}$
9. Перейти к 1

6 Задача ЛП в стандартной форме

Определение 6.1. Стандартные формы ЛП:

$$\max\{c^\top x : \ Ax \le b\},$$
$$\min\{c^\top x : \ Ax \ge b\}.$$

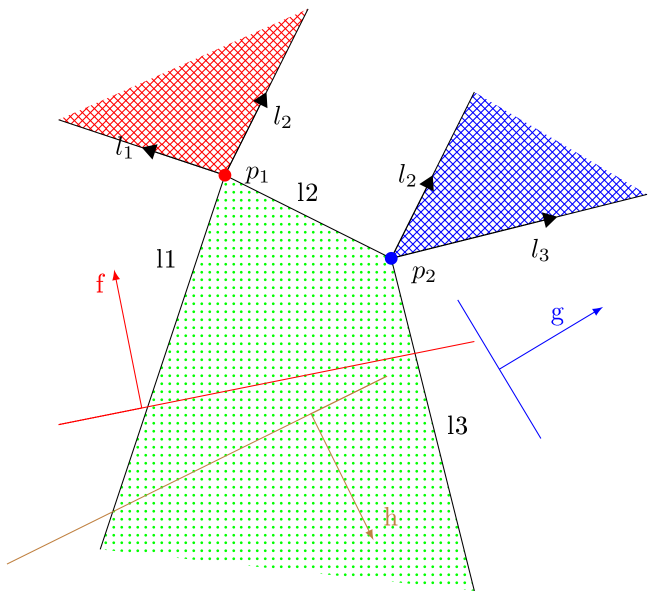
Рассмотрим следующую задачу линейного программирования в стандартной форме

$$\max \ f = -2x_1 + 3x_2$$
$$-3x_1 + x_2 \le 0$$
$$x_1 + 2x_2 \le 7$$
$$4x_1 + x_2 \le 14$$

Область M допустимых значений ограничена прямыми

$$l1: \ -3x_1 + x_2 = 0$$
$$l2: \ x_1 + 2x_2 = 7$$
$$l3: \ 4x_1 + x_2 = 14$$

Прямые $l1, l2$ пересекаются в точке $p_1 = (1,3)$, прямые $l2, l3$ пересекаются в точке $p_2 = (3,2)$. Красным цветом нарисована линия уровня функции $f = -2x_1 + 3x_2$, вектор f указывает направления возрастания функции. Следовательно, максимум f равен 7 и достигается в точке p_1.



Функция $g = 5x_1 + 3x_2$ (синия линия уровня) достигает максимума на M в точке p_2.

Функция $h = x_1 - 5x_2$ на M неограничена сверху.

Рисунок демонстрирует геометрические аспекты задачи линейного программрования с двумя неизвестными:

1. Множество допустимых решений представляет собой выпуклую многогранную область.

2. Оптимальные решения находятся на границе области, более того, оптимальным решением является одна из вершин области.

3. Вершина p_1 оптимальна для функции f потому, что нормальный вектор f принадлежит конусу $cone(l_1, l_2)$(красная область)

Вершина p_2 оптимальна для функции g потому, что нормальный вектор g принадлежит конусу $cone(l_2, l_3)$(синяя область)

Функция h неограничена на M потому, что нормальный вектор h не принадлежит конусу $cone(l_1, l_2, l_3)$(сумма синей и красной областей)

Мы можем, опираясь на свое пространственное воображение, наблюдать эти факты и в ЛП с тремя неизвестными. В пространствах более высокой размерности необходимо строгое алгебраическое описание.

Определение 6.2. Отрезком, соединяющим точки p_1 и p_2, называется множество

$$[p_1, p_2] = \{p_1 t_1 + p_2 t_2 : \; t_1 + t_2 = 1, t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}.$$

Определение 6.3. Множество точек M называется выпуклым, если $[p_1, p_2] \in M$ для всяких $p_1, p_2 \in M$.

Определение 6.4. Множество решений системы линейных неравенств называется полиэдром. Ограниченный полиэдр называется политопом.

В частности, множество допустимых решений канонической и стандартной задач ЛП является полиэдром.

Утверждение 6.1. Всякий полиэдр является выпуклым множеством

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

Определение 6.5. Точка, принадлежащая полиэдру, называется вершиной или крайней точкой, если она не равна полусумме двух других точек этого полиэдра.

Утверждение 6.2. Пусть $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, \; \operatorname{rank} A = n, \; b \in \mathbb{Q}^n$. Точка p является вершиной в полиэдре, заданном неравенством

$$Ax \leq b \tag{6.1}$$

тогда и только тогда, когда в матрице $(A \; b)$ найдется подматрица $(A' \; b')$ ранга n такая, что $A'p = b'$.

Доказательство. Будем считать, что матрица $(A' \; b')$ содержит коэффициенты всех неравенств системы (6.1), которые обращаются в равенство при $x = p$. Таким образом, если обозначить $(A'' \; b'')$ дополнение $(A' \; b')$ до $(A \; b)$, справедливо неравенство

$$A''p < b''. \tag{6.2}$$

Пусть h – вектор такой, что при любом $t \in \mathbb{R}$ точка $x_t = p + ht$ удовлетворяет уравнению $A'x = b'$. Такой вектор заведомо существует, например, можно выбрать $h = 0$. Утверждение будет доказано, если мы сможем убедиться в том, что h не может быть ненулевым.

Рассмотрим неравенства

$$A'' x_t \leq b''$$
$$A'' ht \leq b'' - A''p$$

Так как $b'' - A''p > 0$, то множество решений второй системы неравенств является открытым интервалом с внутренней точкой $t = 0$. Следовательно, найдется достаточно малое число $\epsilon > 0$ такое, что $x_\epsilon, x_{-\epsilon}$ удовлетворяют (6.1).

Поскольку p крайняя точка, то из равенства

$$p = \frac{1}{2}(x_\epsilon + x_{-\epsilon})$$

следует, что

$$p = x_\epsilon = x_{-\epsilon} \sim h = 0.$$

Доказательство закончено. □

Утверждение 6.3. Если в разрешимой стандартной задаче ЛП матрица коэффициентов имеет полный столбцовый ранг, то задача имеет оптимальное решение, являющееся крайней точкой.

Доказательство. Доказать самостоятельно. □

Верно ли, что вершинами полиэдра канонической ЛП являются базисные допустимые решения?

Прямой симплекс-метод решает каноническую ЛП, перемещаясь от одной "правильной таблицы"к другой "правильной таблице". Теперь мы можем сказать, что это движение происходит по ребрам полиэдра от одной вершины к другой вершине.

Столбцовые варианты симплекс-метода начинают работать с таблицей

$$\begin{array}{r||c|llll||}
 & 1 & x_{j_{m+1}} & x_{j_{m+2}} & \cdots & x_{j_{n-m}} \\
\hline
-f & 0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\
\hline
x_{j_1} & b_1 & -a_{1,j_{m+1}} & -a_{1,j_{m+2}} & \cdots & -a_{1,j_{n-m}} \\
x_{j_2} & b_2 & -a_{2,j_{m+1}} & -a_{2,j_{m+2}} & \cdots & -a_{2,j_{n-m}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{j_m} & b_m & -a_{m,j_{m+1}} & -a_{m,j_{m+2}} & \cdots & -a_{m,j_{n-m}} \\
x_{j_{m+1}} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
x_{j_{m+2}} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{j_{n-m}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hline
\end{array} \tag{6.3}$$

Над таблицей перечислены все небазисные неизвестные. Строки содержат коэффициенты разложения всех неизвестных задачи по небазисным неизвестным. Например, разложение

$$x_{j_1} = b_1 - a_{1,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} - a_{1,j_{m+2}} x_{j_{m+2}} \cdots - a_{1,j_{n-m}} x_{j_{n-m}},$$

получается из первого уравнения системы $b = Ax$.

Таблицы называются *прямо допустимыми*, если неотрицательны элементы нулевого столбца(кроме самого верхнего) и *двойственно допустимыми*, если неотрицательны элементы нулевой строки(кроме самого левого).

Таблица, одновременно и прямо и двойственно допустимая, называется оптимальной.

Оптимальное решение задачи: $x_{j1} = b_1, x_{j2} = b_2, ..., x_{jm} = b_m$, значения небазисных неизвестных равны 0.

Оптимальное значение функции f равно числу в левой верхней клетке столбцовой таблице и числу в левой верхней клетке строковой таблице взятому с противоположным знаком.

Столбцовые варианты выполняют эту процедуру со столбцами таблицы (1.4).

	1	x_1	x_2	x_3	x_4
-f	0	-2	-4	-1	-1
x_1	0	1	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0
x_3	0	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0	1
x_5	4	-1	-3*	0	-1
x_6	3	-2	-1	0	0
x_7	3	0	-1	-4	-1

(6.4)

	1	x_1	x_5	x_3	x_4
-f	-16/3	-2/3	4/3	-1	1/3
x_1	0	1	0	0	0
x_2	4/3	-1/3	-1/3	0	-1/3
x_3	0	0	0	1	0
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	1	0	0
x_6	5/3	-5/3	1/3	0	1/3
x_7	5/3	1/3	1/3	-4*	-2/3

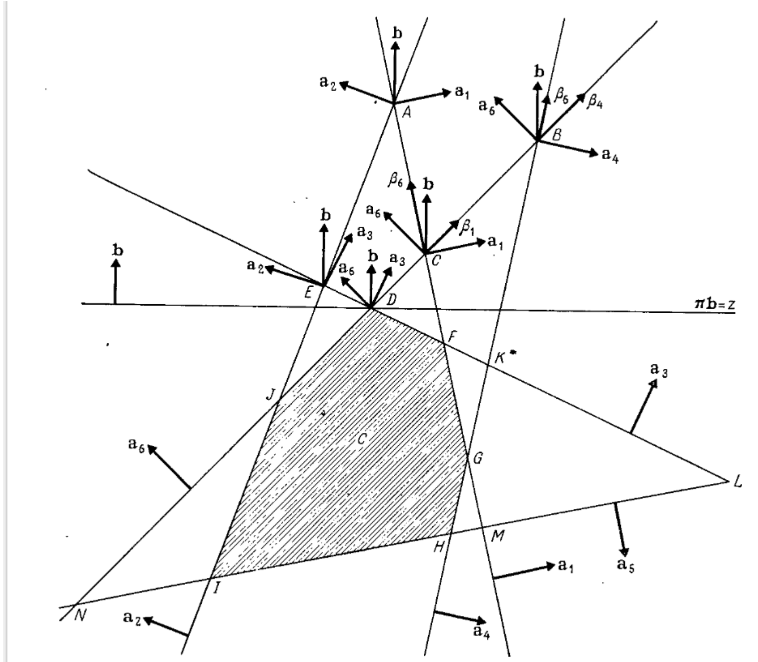
(6.5)

	1	x_1	x_5	x_7	x_4
-f	-23/4	-3/4	5/4	1/4	1/2
x_1	0	1	0	0	0
x_2	4/3	-1/3	-1/3	0	-1/3
x_3	5/12	1/12	1/12	-1/4	-1/6
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	1	0	0
x_6	5/3	-5/3*	1/3	0	1/3
x_7	0	0	0	1	0

(6.6)

	1	x_6	x_5	x_7	x_4
-f	-13/2	9/20	11/10	1/4	7/20
x_1	1	-3/5	1/5	0	1/5
x_2	1	1/5	-2/5	0	-2/5
x_3	1/2	-1/20	1/10	-1/4	-3/20
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0
x_7	0	0	0	1	0

(6.7)



7 Двойственность

Следующие две задачи ЛП называются двойственными друг другу:

$$\min\{f = c^\top x : \ Ax = b, x \geq 0\} \tag{7.1}$$

$$\max\{g = b^\top y : \ A^\top y \leq c\} \tag{7.2}$$

Утверждение 7.1. Если x^0, y^0 допустимые решения задач (7.1)(7.2) соответственно, то

$$b^\top y^0 \leq c^\top x^0 \tag{7.3}$$

Доказательство. Так как $x^0 \geq 0$, то

$$A^\top y^0 \leq c \mapsto (x^0)^\top A^\top y^0 \leq (x^0)^\top c \sim (Ax^0)^\top y^0 \leq c^\top x^0 \sim b^\top y^0 \leq c^\top x^0.$$

Что и требовалось. □

Утверждение 7.2. Если x^0, y^0 допустимые решения задач (7.1)(7.2) соответственно, и

$$b^\top y^0 = c^\top x^0, \tag{7.4}$$

то x^0, y^0 оптимальные решения соответствующих задач.

Доказательство. Утверждение следует из неравенства (7.3) □

Утверждение 7.3. Если задача (7.1) имеет оптимальное решение, то задача (7.2) также имеет оптимальное решение.

Доказательство. Пусть x^0 базисное оптимальное решение задачи (7.1). Тогда существует разбиения

- матрицы A на подматрицы B и N

- вектора x на векторы x_B и x_N
- вектора c на векторы c_B и c_N

такие, что симплекс-метод, превращая исходную таблицу в оптимальную

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & x_B & x_N \\ \hline f & c_B^\top & c_N^\top \\ \hline b & B & N \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline & x_B & x_N \\ \hline f - c_B^\top B^{-1} b & 0 & c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \\ \hline B^{-1} b & E & B^{-1} N \\ \hline \end{array}, \tag{7.5}$$

получает следующие результаты:

$$x_B^0 = B^{-1} b \tag{7.6}$$

$$x_N^0 = 0 \tag{7.7}$$

$$f = c_B^\top B^{-1} b \tag{7.8}$$

$$c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \geq 0 \tag{7.9}$$

Сформулируем задачу (7.2), используя введенные выше обозначения:

$$\begin{cases} \max g = b^\top y \\ B^\top y \leq c_B \\ N^\top y \leq c_N \end{cases} \tag{7.10}$$

Заметим, что "слепок" с этой задачи можно обнаружить в формуле (7.5), если просматривать первую таблицу не слева направо, а снизу вверх.

Более того, если очень внимательно исследовать вторую таблицу, то можно обнаружить вектор $y^0 = (c_B^\top B^{-1})^\top$, который является допустимым решением задачи (7.10).

Так как

$$b^\top y^0 = b^\top (c_B^\top B^{-1})^\top = (c_B^\top B^{-1} b)^\top = (c_B^\top x_B^0)^\top = (c^\top x^0)^\top = c^\top x^0,$$

то y^0 – оптимальное решение задачи (7.2). $\square$

Существуют примеры пар взимно двойственных задач, не имеющих допустимых решений.

Симметрия нарушается, если целевая функция одной из задач неограничена. В этом случае вторая задача двойственной пары не имеет допустимых решений. Этот факт объясняется неравенством (7.3) .

8 Экономическая интепретация двойственности

Пара двойственных задач может иметь и другой облик:

$$\max\{f = c^\top x : \ Ax \leq b, x \geq 0\} \tag{8.1}$$

$$\min\{g = b^\top y : \ A^\top y \geq c, y \geq 0\} \tag{8.2}$$

Первая модель описывает производство с ресурсами $b_1, \ldots, b_m$, количеством $a_{i,j}$ ресурса i – го вида для производства условной единицы продукта j – го вида и стоимостью c_j условной единицы продукта j – го вида.

На рынке продается продукт, а также излишки ресурсов по рыночной цене y_i. Суммарный доход производства равен

$$L(x, y) = c^\top x + (b - Ax)^\top y = b^\top y + x^\top (c - A^\top y).$$

Цель производства - увеличение дохода, а цель рынка – не дать слишком разбогатеть.

Гарантированный доход производства

$$f = \max_{x \geq 0} \min_{y \geq 0} L(x, y).$$

Гарантированный успех рынка – уменьшение дохода до

$$g = \min_{y \geq 0} \max_{x \geq 0} L(x, y).$$

Так как

$$\min_{y \geq 0} L(x, y) = \begin{cases} -\infty \text{ при } Ax \not\leq b \\ c^\top x \text{ при } Ax \leq b \end{cases}$$

то

$$f = \max\{c^\top x : \; Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Аналогично, из

$$\max_{x \geq 0} L(x, y) = \begin{cases} \infty \text{ при } A^\top y \not\geq c \\ b^\top y \text{ при } A^\top y \geq c \end{cases}$$

следует

$$g = \min\{b^\top y : \; A^\top y \geq c, y \geq 0\}$$

Таким образом пара x^0, y^0 оптимальных решений задач (8.1), (8.2) описывает состояние равновесия в системе "производство–рынок."

9 Модифицированный симплекс-метод.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_B & x_N \\ \hline \hline f & c_B^\top & c_N^\top \\ \hline b & B & N \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_B & x_N \\ \hline \hline f - c_B^\top B^{-1} b & 0 & c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \\ \hline B^{-1} b & E & B^{-1} N \\ \hline \end{array}, \tag{9.1}$$

Таблицы в формуле (9.1) демонстрируют связь начальной таблицы T_0 с любой таблицей в последовательности $T = \{T_0, T_1, \ldots, T_k, \ldots\}$ таблиц, формируемых симплекс-методом. Оказывается, произвольную таблицу можно восстановить, если вместо последовательности T вычислять последовательность $P = \{B_0^{-1}, B_0^{-1}, \ldots, B_k^{-1}, \ldots\}$ обратных базисных матриц.

Преобразуем таблицы (9.1). Снаружи уберем ненужную сейчас строку с неизвестными и переоформим содержимое.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline f & c_B^\top & c_N^\top \\ \hline b & B & N \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline f - c_B^\top B^{-1} b & 0 & c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \\ \hline B^{-1} b & E & B^{-1} N \\ \hline \end{array}$$

В начальной таблице вместо разбиения $A = (B\ N)$ матрицы коэффициентов, инициированного базисной матрицей второй таблицы из (9.1) , используем "родное" разбиение $A = (E\ N)$. Заметим, что согласно принятым обозначениям $c_E = 0$. Этот параметр нигде не используется и явлен здесь лишь для того, чтобы устранить возможное впечатление о несходстве устройства таблиц: вторая таблица в следующей формуле является шаблоном *для всех таблиц* в T, включая начальную.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & c_N^\top \\ \hline b & E & N \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline -c_B^\top B^{-1} b & -c_B B^{-1} & c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N \\ \hline B^{-1} b & B^{-1} & B^{-1} N \\ \hline \end{array} \tag{9.2}$$

Ключевыми параметрами, влияющими на вычисления во второй таблице формулы

(9.2), являются

- матрица $P = B^{-1}$,
- вектор-столбец $p = B^{-1}b$,
- вектор-строка $\pi = -c_B B^{-1}$.

Симплекс-метод предписывает выбрать номер j такой, что $c_j + \pi a_j < 0$ и преобразовать таблицу, используя ведущий столбец

$$\begin{bmatrix} \mu \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_j + \pi a_j \\ P a_j \end{bmatrix}. \tag{9.3}$$

Идея модифицированного симплекс метода состоит в том, что объем вычислений существенно уменьшится, если вместо таблиц (9.2) преобразовывать таблицу

πb	π	μ
p	P	q

(9.4)

После каждого этапа преобразований надо заменить содержимое последнего столбца по формуле (9.3) .

10 Транспортная задача.

По заданной матрице

$C =$

$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$\dots$	$c_{1,n}$
$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$\dots$	$c_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$c_{m,1}$	$c_{m,2}$	$\dots$	$c_{m,n}$

и векторам $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^\top$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ требуется найти неотрицательную матрицу

$X =$

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$x_{1,n}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\dots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\dots$	$x_{m,n}$

,

для которой минимальна сумма $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$. Сумма столбцов матрицы X должна равняться a, а сумма строк – b.

Поскольку сумма всех неизвестных, с одной стороны, равна $\sum_i a_i$, а с другой стороны, равна $\sum_j b_j$, то необходимым условием совместности ограничений задачи является равенство

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j.$$

Оказывается, что условие является и достаточным, поскольку числа

$$x_{i,j} = \frac{a_i b_j}{\sum_i a_i},\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ j \in \{1, 2, ..., n\}$$

удовлетворяют условиям задачи.

Введем обозначения: $B = [a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n]^\top$,

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1}_n \\ E_n & E_n & \dots & E_n \end{bmatrix}.$$

Выражение $\mathbf{1}_n$ обозначает строку из n единиц. Если представить массивы X и C в виде строк

$$X = [x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n}]$$
$$C = [c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,n}, c_{2,1}, c_{2,2}, \dots, c_{2,n}, \dots, c_{m,1}, c_{m,2}, \dots, c_{m,n}],$$

то транспортная задача предстанет задачей линейного программирования в канонической форме

$$\min f = CX^\top$$
$$AX^\top = B, X \geq 0.$$

Упражнение Докажите, что $\operatorname{rank} A = m + n - 1$.

Неудивительно, поэтому, что *метод потенциалов* решения транспортной задачи является модификацией модифицированного симплекс-метода.

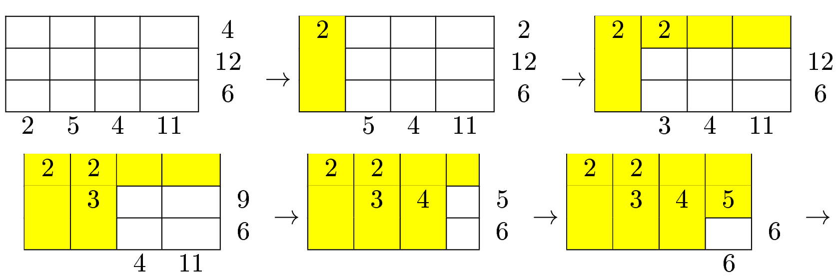
Разберем этот метод на примере.

Пример. Решить транспортную задачу, если

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}, \; a = (4, 12, 6)^\top, \; b = (2, 5, 4, 11)$$

Решение. Припишем к матрице X справа вектор a, снизу - вектор b. Заполняем X методом *северо-западного угла*:

1. $x_{11} := \min\{a_1, b_1\} = 2, a_1 := a_1 - x_{11}, b_1 := b_1 - x_{11}$.
2. Закрашиваем строку или столбец с нулевым ресурсом
3. Повторяем пункты 1 и 2, пока не израсходованы все ресурсы.



$X =$

2	2		
	3	4	5
			6

Упражнение Докажите, что методом северо-западного угла в таблице из m строк и n столбцов будут заполнены $m + n - 1$ клеток и что столбцы матрицы A, соответствующие заполненным клеткам, линейно независимы.

По непустым клеткам матрицы X можно составить список базисных неизвестных $\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,4}\}$ – они соответствуют закрашенным столбцам нижеприведенной симплексной таблицы.

f	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
a_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
b_1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
b_2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
b_3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
b_4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Чтобы проверить, оптимально ли найденное решение, надо из первой строки вычесть такую линейную комбинацию остальных строк, чтобы подкрашенные c_{ij} обратились в 0. Если в результате получится неотрицательная строка, то решение оптимально. В противном случае, найдется отрицательное c_{ij}. Тогда надо изменить значение x_{ij}. Коэффициенты линейной комбинации принято обозначать буквами $u_1, u_2, ...$ для первых уравнений(соответствующих вектору a) и буквами $v_1, v_2, ...$ для остальных уравнений. Для нахождения коэффициентов надо решить систему, которая для каждого желтого c_{ij} содержит уравнение

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

В дальнейшем, однако, мы не будем обращаться к симплексной таблице. Сейчас это понадобилось лишь для того, чтобы подчеркнуть связь метода потенциалов и симплекс-метода. Нужные пары индексов i, j для составления уравнений нам подсказывают непустые клетки матрицы X. Правые части уравнений извлекаем из желтых клеток матрицы C.

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & & \\ \hline & 3 & 4 & 5 \\ \hline & & & 6 \\ \hline\end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Формируем систему уравнений. и, после подстановки $u_1 = 0$, находим значения остальных неизвестных, затем из всевозможных сумм $u_i + v_j$ составляем матрицу W

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_2 = 4 \\ u_2 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = 3 \\ v_2 = 4 \\ u_2 = -1 \\ v_3 = 5 \\ v_4 = 3 \\ u_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 3 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} = W$$

Решение X опимально при условии $C \geq W$ (матрицы сравниваются поэлементно). Это условие не выполняется, так как $c_{1,4} = 1 < w_{1,4} = 3$. Следовательно, надо перейти к другому базисному решению. Сначала добавим $x_{1,4}$ в список базисных неизвестных, пометив символом $'' + t''$ соответствующую клетку матрицы X. В результате число непустых клеток в таблице увеличится на 1 и станет равным 8.

Упражнение. В таблице из m строк и n столбцов отмечены $m+n$ клеток. Докажите, что существует замкнутый маршрут, состоящий из чередующихся горизонтальных и вертикальных отрезков с концами в отмеченных клетках.

Начиная с помеченной клетки, построим замкнутый маршрут, расставляя в клетки чередующиеся символы $-t$ и $+t$(таким образом каждый отрезок маршрута должен соединять клетки с разными знаками.) Клетки маршрута выделены желтым цветом.

$$X \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2-t & & +t \\ \hline & 3+t & 4 & 5-t \\ \hline & & & 6 \\ \hline \end{array}$$

Теперь надо выбрать максимальное значение t, при котором элементы таблицы останутся неотрицательными, т.е. $t = 2$. Клетка (1,2) становится пустой. Начинаем новый этап вычислений с новым допустимым базисным решением X

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & & & 2 \\ \hline & 5 & 4 & 3 \\ \hline & & & 6 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Формируем систему уравнений, находим решение при $u_1 = 0$, составляем W

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_4 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} v_1 = 3 \\ v_2 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \\ v_2 = 2 \\ v_3 = 3 \end{cases} \to \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} = W$$

Находим цикл и, начиная с клетки $x_{3,1}$, добавляем в клетки символы $+t$ и $-t$

$$X \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2-t & & & 2+t \\ \hline & 5 & 4 & 3 \\ \hline +t & & & 6-t \\ \hline \end{array}$$

Полагаем $t = 2$ и начинаем новый этап

$$X = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 3 \\ \hline 2 & & & 4 \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_1 = 2 \\ u_3 + v_4 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} v_4 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \\ v_2 = 2 \\ v_3 = 3 \\ v_1 = 2 \end{cases} \to \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} = W$$

Неравенство $W \le C$ справедливо. Оптимальное решение найдено.

11 Задача о рюкзаке

Найти

$$\varphi_n(b) = \max\{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n |\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \le b\} \tag{11.1}$$

при условии, что все параметры являются неотрицательными целыми числами.

Подчеркнем, что выражение $\varphi_n(b)$ не определено при $b < 0$ и
$\varphi_n(0) = 0$.

Метод решения основан на формуле

$$\varphi_n(b) = \max\{\varphi_{n-1}(b), \varphi_n(b - a_n) + c_n\} \tag{11.2}$$

Пример 11.1. Решить задачу о рюкзаке

$$\max(x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4)$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 10$$

Решение.
1. Вычисляем значения $\varphi_1(b) = \max\{x_1 | 2x_1 \leq b\}$, при $b \in \{1, ..10\}$. Очевидно, что $\varphi_1(b) = \left\lfloor \frac{\mathrm{b}}{2} \right\rfloor$. Заполняем первую строку таблицы 1.
2. Вычисляем $\varphi_2(b) = \max\{\varphi_1(b), \varphi_2(b-3)+3\}$, учитывая, что выражение $\varphi_2(b-3)$ не определено при $b \leq 2$. Заполняем вторую строку таблицы.

$$\varphi_2(0) = \varphi_1(0) = 0, \varphi_2(1) = \varphi_1(1) = 1, \varphi_2(3) = \max\{\varphi_1(3), \varphi_2(3-3)+3\} = 3\ldots$$

Третью и четвертую строк таблицы заполняем значениями $\varphi_3(b) = \max\{\varphi_2(b), \varphi_3(b-4)+5\}$, и $\varphi_4(b) = \max\{\varphi_3(b), \varphi_4(b-7)+9\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
φ_2	0	1	3	3	4	6	6	7	9	10
φ_3	0	1	3	5	5	6	8	10	10	11
φ_4	0	1	3	5	5	6	9	10	10	12

Таблица 1:

12 Метод ветвей и границ

Требуется решить задачу целочисленного программирования

$$\max\{f(x) : S(x), x \in \mathbb{Z}^n\} \tag{12.1}$$

где $f(x)$ - линейная функция, $S(x)$ – множество линейных неравенств и уравнений. Метод состоит в следующем:

0. Создается список $\mathbb{P}$ задач линейного программирования. Вначале список содержит задачу

$$P : \quad \max\{f(x) : S_P(x), x \in \mathbb{R}^n\},$$

где $S_P(x) = S(x)$. Текущее целочисленное допустимое решение будет храниться в переменной y. Если целочисленного допустимого решения пока нет, то $f(y)$ по определению равно $-\infty$.
1. Если $\mathbb{P} \neq \emptyset$, то переходим к 2. Иначе, стоп. Если $f(y) = -\infty$, то задача не имеет решения. В противном случае y – оптимальное решение.
2. Пусть P – первая задача списка. Находим ее оптимальное решение $x^0 = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)$. Полагаем $\mathbb{P} := \mathbb{P} \setminus P$
3. Если $f(x^0) < f(y)$, то возращаемся к 1.
4. Если $x^0 \in \mathbb{Z}^n$ и $f(y) < f(x^0)$, то полагаем $y := x^0$ и переходим к 1.
5. Выберем индекс k такой, что x_k^0 дробное число. Полагаем
$S_{P'} := S_P \cup \{x_k \leq \lfloor \mathrm{x}_\mathrm{k}^0 \rfloor\}$, $S_{P''} := S_P \cup \{x_k \geq \lceil \mathrm{x}_\mathrm{k}^0 \rceil\}$ и добавляем к $\mathbb{P}$ задачи

$$P' : \quad \max\{f(x) : S'(x), x \in \mathbb{R}^n\}$$
$$P'' : \quad \max\{f(x) : S''(x), x \in \mathbb{R}^n\}$$

6. Перейти к 1.

Пример. Решить ЗЦП

$$P_0 = \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Решаем задачу

$$P_1 : \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Оптимальное решение $x_0 = (10/3, 11/3)$ – нецелое. Ветвимся по первой координате, формируем задачи

$$P_2 : \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad P_4 : \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Условия P_3 несовместны, а P_2 имеет решение $(3, 7/2)$. Ветвимся по второй координате.

$$P_2 : \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad P_5 : \begin{cases} \max(x_1 + x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Условия P_5 несовместны, а P_4 имеет решение $(3, 3)$. Обновляем значение текущего допустимого решения $y = (3, 3)$. Нерешенных задач не осталось, следовательно, (3.3) – оптимальное решение задачи P_0.

13 Метод Гомори.

	1	x_N
f	c_0	c
x_N	0	E
x_B	b	B

$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m \equiv 0 \mod 1$$
$$\{\beta_0\} - 1 + \{\beta_1\} x_1 + \cdots + \{\beta_m\} x_m \equiv 0 \mod 1$$
$$s = \{\beta_0\} - 1 + \{\beta_1\} x_1 + \cdots + \{\beta_m\} x_m \ge 0$$

f	0	-1	-1
x_1	0	1	0
x_2	0	0	1
x_3	7	-2	-3
x_4	7	-3	-2

$\longrightarrow$

f	-7/3	1/3	-1/3
x_1	7/3	-1/3	-2/3
x_2	0	0	1
x_3	7/3	2/3	-5/3
x_4	0	1	0

f	-14/5	1/5	1/5
x_1	7/5	-3/5	2/5
x_2	7/5	2/5	-3/5
x_3	0	0	1
x_4	0	1	0
s	-4/5	1/5	1/5

$\longrightarrow$

f	-2	1	0
x_1	-1	-3	1
x_2	3	2	-1
x_3	0	0	1
x_4	0	1	0
s	4	5	-1