ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Метод ветвей и границ

Подготовила студентка гр. 23536/1

Устюгова Анна

ЗАДАНИЕ

- Дана матрица расстояний между каждыми двумя из шести городов $x_1, x_2, \dots, x_6$ (табл. 0).
- Требуется найти кратчайший из замкнутых маршрутов, проходящих ровно по одному разу через каждый из этих городов.

Таблица 0. Матрица Ω

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	–	68	73	24	70	9
x_2	58	–	16	44	11	92
x_3	63	9	–	86	13	18
x_4	17	34	76	–	52	70
x_5	60	18	3	45	–	58
x_6	16	82	11	60	48	–

ШАГ 1 (ПРИМЕНЯЕТСЯ ОДНОКРАТНО)
ОПЕРАЦИЯ ПРИВЕДЕНИЯ

- Производим операцию приведения по строкам: в каждой строке матрицы выбираем наименьшее число и приписываем его к строке справа (табл. 1).

Таблица 1. Матрица Ω

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_1	–	68	73	24	70	9	9
x_2	58	–	16	44	11	92	11
x_3	63	9	–	86	13	18	9
x_4	17	34	76	–	52	70	17
x_5	60	18	3	45	–	58	3
x_6	16	82	11	60	48	–	11

ШАГ 1

- Вычитаем это число из всех элементов этой строки и получаем таблицу 2.
- Аналогично производим операцию приведения по столбцам с полученной матрицей.

Таблица 2. Приведение Ω

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	–	59	64	15	61	0
x_2	47	–	5	33	0	81
x_3	54	0	–	77	4	9
x_4	0	17	59	–	35	53
x_5	57	15	0	42	–	55
x_6	5	71	0	49	37	–
min	0	0	0	15	0	0

ШАГ 1

- Вычитаем наименьшее число из всех элементов этого столбца и получаем таблицу 3 – приведенная матрица на множестве Ω.
- В полученной матрице в каждой строке и в каждом столбце будет хотя бы одна нулевая клетка.
- Числа ($\min$), которые вычитались, - постоянные приведения.
- Нижняя граница φ – сумма всех постоянных приведения.
- Нижняя граница для матрицы Ω считается так:

$$\varphi=9+11+9+17+3+11+15=75.$$

Таблица 3. Матрица Ω^0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	–	59	64	0	61	0
x_2	47	–	5	18	0	81
x_3	54	0	–	62	4	9
x_4	0	17	59	–	35	53
x_5	57	15	0	27	–	55
x_6	5	71	0	34	37	–

ШАГ 2 (ПОВТОРЯЕТСЯ МНОГОКРАТНО)

- Выбираем дуги, в которых на соответствующих позициях строки и столбца стоят нули.
- В нашем случае это дуги $\langle x_1; x_4\rangle$, $\langle x_1; x_6\rangle$, $\langle x_2; x_5\rangle$, $\langle x_3; x_2\rangle$, $\langle x_4; x_1\rangle$, $\langle x_5; x_3\rangle$, $\langle x_6; x_3\rangle$.
- Исключим из таблицы 3 любую из выписанных ранее дуг, то есть заменим соответствующее расстояние a_{ij} в матрице на “-”.
- Для примера исключим дугу $\langle x_4; x_1\rangle$ (табл. 4).
- Операция приведения для матрицы $\Omega_1(\overline{x_4 x_1})$ даст сумму 5+17=22.
- Нижняя граница множества $\Omega_1(\overline{x_4 x_1})$:

$$\varphi_1 = \varphi + 22 = 75 + 22 = 97.$$

Таблица 4. Матрица $\Omega_1(\overline{x_4 x_1})$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_1	–	59	64	0	61	0	0
x_2	47	–	5	18	0	81	0
x_3	54	0	–	62	4	9	0
x_4	–	17	59	–	35	53	17
x_5	57	15	0	27	–	55	0
x_6	5	71	0	34	37	–	0
min	5	0	0	0	0	0	

Шаг 2 (конец)

- Проделаем операцию приведения для таблицы 5 и получим таблицу 6.
- Нижняя граница φ_2 множества Ω_2 будет на 18 больше нижней границы φ множества Ω, то есть

$$\varphi_2 = \varphi + 18 = 75 + 18 = 93.$$

- Схема ветвления показана на рисунке 1.

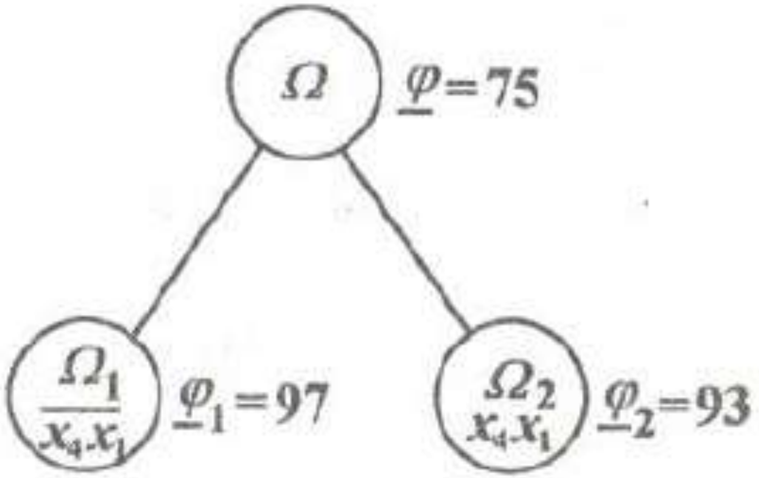

Рис. 1. Ветвление Ω

Таблица 6. Матрица Ω_2^0

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	59	64	–	61	0
x_2	–	5	0	0	81
x_3	0	–	44	4	9
x_5	15	0	9	–	55
x_6	71	0	16	37	–

ШАГ 2 – ВТОРОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

- Так как $\varphi_2 = 93 < 97 = \varphi_1$, подвергнем ветвлению множество Ω_2
- Далее делаем аналогично шагу 2.
- Дугу для ветвления выбираем среди нулевых дуг таблицы 6: $\langle x_1; x_6\rangle$, $\langle x_2; x_4\rangle$, $\langle x_2; x_5\rangle$, $\langle x_3; x_2\rangle$, $\langle x_5; x_3\rangle$, $\langle x_6; x_3\rangle$.
- Исключение каждой дуги из маршрута приведет к увеличению нижней границы соответственно на 68, 9, 4 19, 19, 4.
- Следовательно, исключим дугу $\langle x_1; x_6\rangle$ и произведем по ней ветвление.

ШАГ 2 – ВТОРОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

- Разбиваем множество Ω_2 на два непересекающихся подмножества:

$$\Omega_3 = \Omega_3(\overline{x_1 x_6}) \text{ и } \Omega_4 = \Omega_4(x_1 x_6).$$

- Нижняя граница φ_3 множества $\Omega_3(\overline{x_1 x_6})$ больше нижней границы φ_2 множества Ω_2 на сумму постоянных приведения, равную 68: $\varphi_3 = \varphi_2 + 68 = 93 + 68 = 161$.
- Вычеркиваем первую строку и шестой столбец матрицы Ω_2^0 и ставим «–» вместо элемента a_{64}.
- Введенный маршрут образует путь

$$x_4 \to x_1 \to x_6.$$

- Получим таблицу 7.

Таблица 7. Матрица $\Omega_4 = \Omega_4^0$

	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_2	–	5	0	0	0
x_3	0	–	44	4	0
x_5	15	0	9	–	0
x_6	71	0	–	37	0
min	0	0	0	0	

ШАГ 2 – ВТОРОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

- Матрица Ω_4 уже является приведенной.
- Нижняя граница φ_4 множества Ω_4 совпадает с нижней границы φ_2 множества Ω_2, то есть

$$\varphi_4 = \varphi_2 + 0 = 93 + 0 = 93.$$

- Схема ветвления показана на рисунке 2.

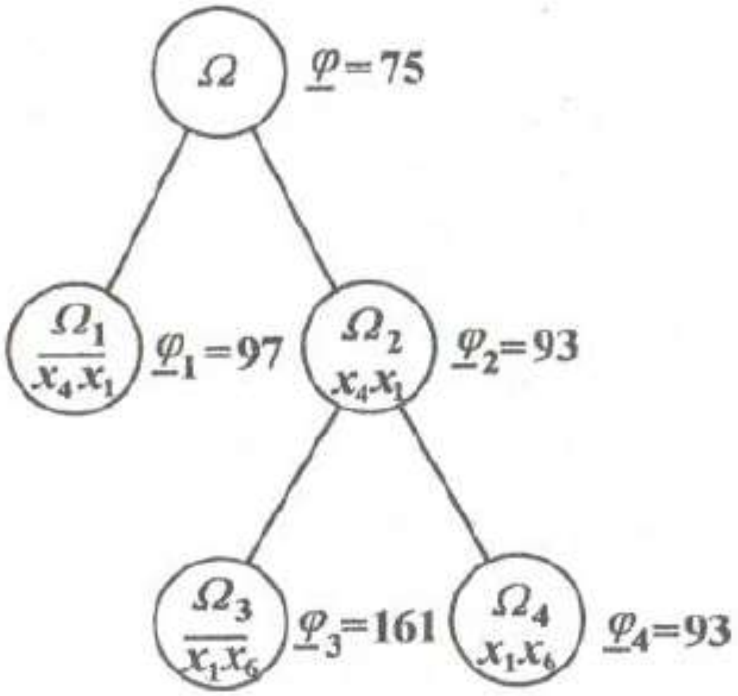

Рис. 2. Ветвление Ω_2

ШАГ 2 – ТРЕТЬЕ ПРИМЕНЕНИЕ

- Дугу для ветвления выбираем среди дуг $\langle x_2; x_4\rangle$, $\langle x_2; x_5\rangle$, $\langle x_3; x_2\rangle$, $\langle x_5; x_3\rangle$, $\langle x_6; x_3\rangle$.
- Исключение каждой дуги приведет к увеличению нижней границы соответственно на 9, 4,19, 9, 37.
- Исключаем дугу $\langle x_6; x_3\rangle$ и производим ветвление по ней.
- Разбиваем множество маршрутов на $\Omega_5 = \Omega_5(\overline{x_6 x_3})$ и $\Omega_6 = \Omega_6(x_6 x_3)$.
- Нижняя граница φ_5 множества $\Omega_5 = \Omega_5(\overline{x_6 x_3})$:

$$\varphi_5 = \varphi_4 + 37 = 93 + 37 = 130.$$

- Вычеркиваем шестую строку и третий столбец и ставим «–» вместо элемента a_{34}.
- Введенный маршрут образует путь $x_4 \to x_1 \to x_6 \to x_3$.
- Получим таблицу 8.

Таблица 8. Матрица Ω_6

	x_2	x_4	x_5	min
x_2	–	0	0	0
x_3	0	–	4	0
x_5	15	9	–	9
min	0	0	0	

ШАГ 2 – ТРЕТЬЕ ПРИМЕНЕНИЕ

- Проделываем операцию приведения для матрицы Ω_6 и получим матрицу Ω_6^0 (табл. 9).
- $\varphi_6 = \varphi_4 + 9 = 93 + 9 = 102$.
- Схема ветвления (рис. 3).

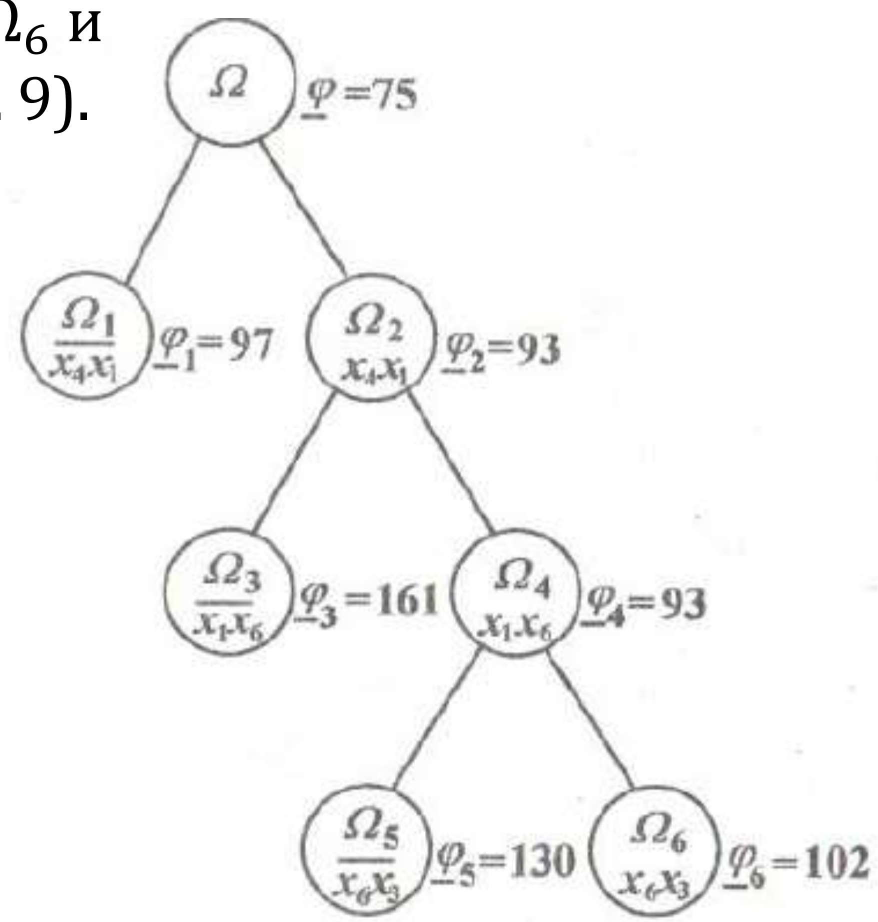

Рис. 3. Ветвление Ω_4

Таблица 9. Матрица Ω_6^0

	x_2	x_4	x_5
x_2	–	0	0
x_3	0	–	4
x_5	6	0	–

ШАГ 2 – ЧЕТВЕРТОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

- Выбираем в матрице Ω_6^0 нулевые дуги: $\langle x_2; x_4\rangle, \langle x_2; x_5\rangle, \langle x_3; x_2\rangle,$ $\langle x_5; x_4\rangle$.
- Исключение каждой дуги из маршрутов увеличит нижнюю границу на 0, 4, 10, 6.
- Разбиваем множество Ω_6 на $\Omega_7 = \Omega_5(\overline{x_3 x_2})$ и $\Omega_8 = \Omega_8(x_3 x_2)$.
- Нижняя граница $\varphi_7 = \varphi_6$+10=102+10=112.
- Вычеркиваем третью строку и второй столбец и ставим «–» вместо элемента a_{24}.
- Получим таблицу 10 и схему ветвления (рис. 4).

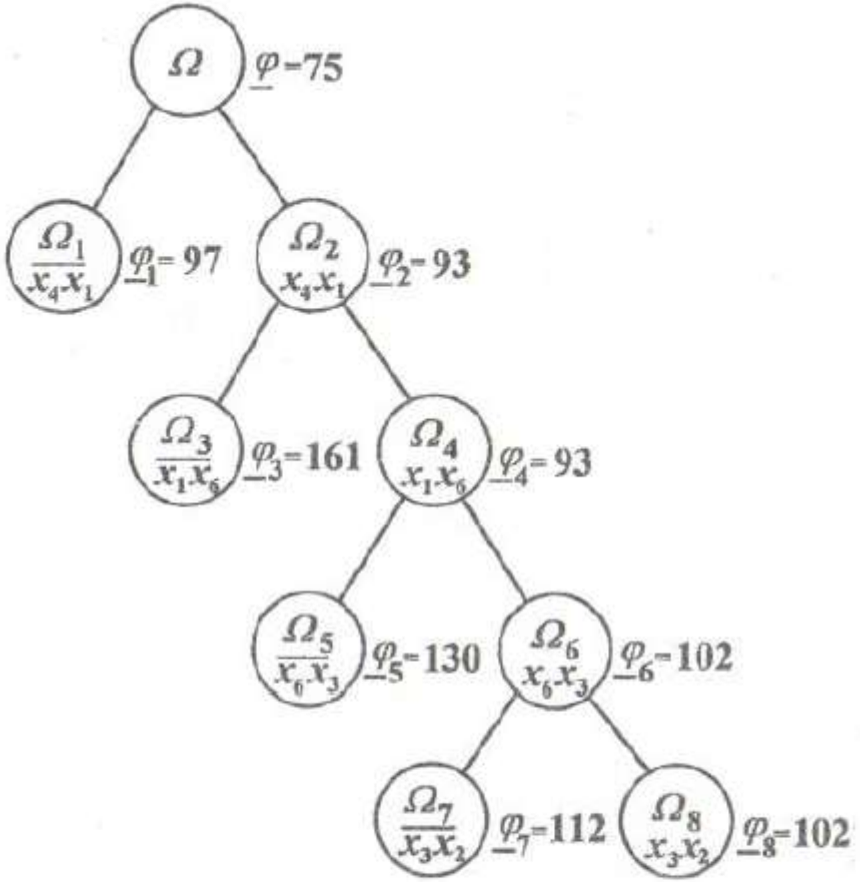

Рис. 4. Ветвление Ω_6

Таблица 10. Матрица $\Omega_8 = \Omega_8^0$

	x_4	x_5
x_2	–	0
x_5	0	–

СОСТАВЛЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО МАРШРУТА

- Если включить в маршрут единственно возможные в матрице Ω_8 дуги $\langle x_2; x_5\rangle, \langle x_5; x_4\rangle$ то вместе с дугами $\langle x_4; x_1\rangle$ $(\Omega_2), \langle x_1; x_6\rangle$, $(\Omega_4), \langle x_6 x_3\rangle$ $(\Omega_6), \langle x_3; x_2\rangle$ (Ω_8), они будут образовывать замкнутый контур:

$$x_2 \rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow x_6 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2.$$

- Так как дуги, включенные в маршрут последними, имеют нулевые длины в матрице Ω_8, то длина полученного замкнутого маршрута l совпадает с нижней границей множества Ω_8, равной 102.

ПРОВЕРКА ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

- Сравниваем длину полученного маршрута, равную 102, с нижними границами концевых множеств (рис. 4).
- При этом будем отсекать все концевые множества, имеющие нижнюю границу $\varphi_i \geq \varphi_8$. В нашем случае отсекаются множества Ω_3 $(\varphi_3 = 161)$, Ω_5 $(\varphi_5 = 130)$, Ω_7 $(\varphi_7 = 112)$.
- Схема ветвления с отсечениями показана на рисунке 5.
- Осталось неотсеченным одно множество – множество Ω_1 с нижней границей

$$\varphi_1 = 97 < 102 = \varphi_8.$$

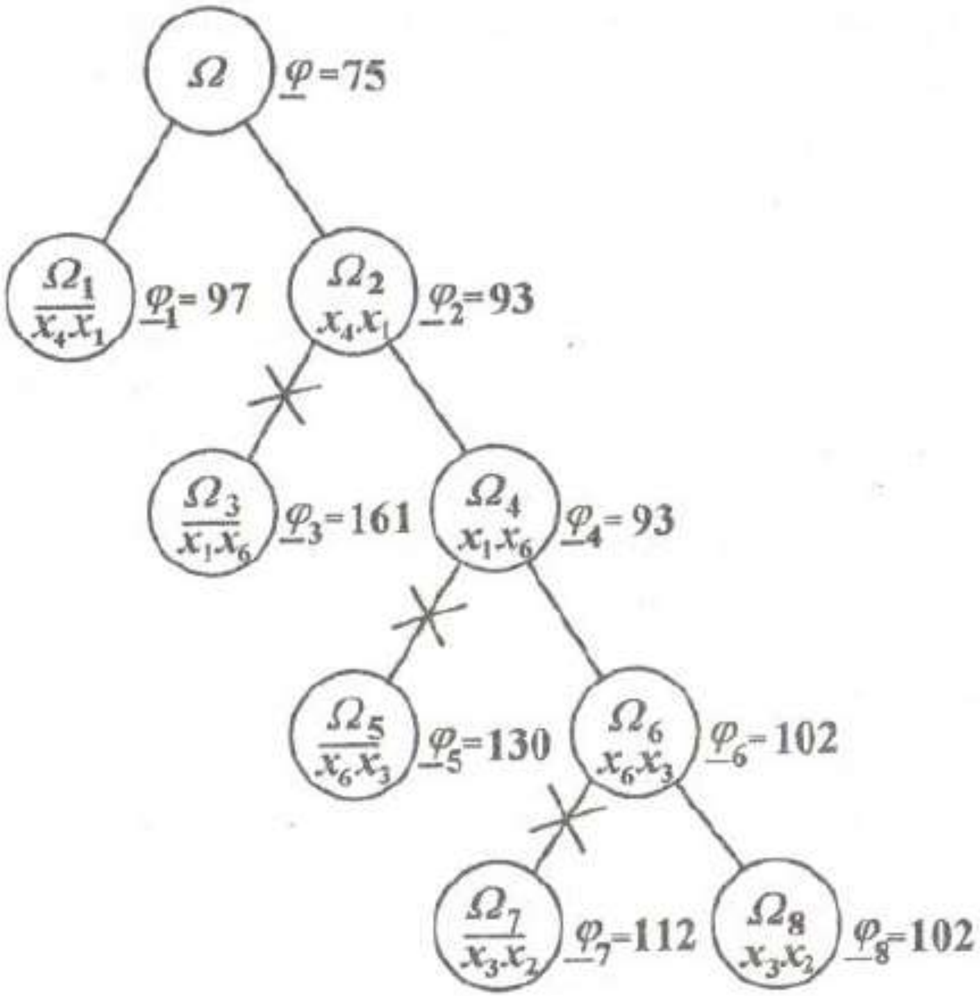

Рис. 5. Проверка оптимальности

ПРОВЕРКА ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

- Для матрицы Ω_1 проделаем общий шаг 2.
- Матрица Ω_1 не является приведенной, поэтому произведем операцию приведения и получим Ω_1^0 (табл. 11).
- Для ветвления выбираем дугу $\langle x_6; x_1 \rangle$ и разбиваем множество Ω_1 на $\Omega_9 = \Omega_1(\overline{x_6 x_1})$ и $\Omega_{10} = \Omega_1(x_6 x_1)$.
- Нижняя граница:

$$\varphi_9 = \varphi_1 + 42 = 97 + 42 = 139;$$

$$\varphi_{10} = \varphi_1 + 9 = 97 + 9 = 106.$$

Таблица 11. Матрица Ω_1^0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	–	59	64	0	61	0
x_2	42	–	5	18	0	81
x_3	49	0	–	62	4	9
x_4	–	0	42	–	18	36
x_5	52	15	0	27	–	55
x_6	0	71	0	34	37	–

ПРОВЕРКА ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

- Так как полученные нижние границы множеств Ω_9 и Ω_{10}, равные соответственно 139 и 106, выше нижней границы φ_8=102 , по которому уже составлен замкнутый маршрут, то эти концевые множества необходимо отсечь (рис. 6).
- На схеме (рис. 6) не осталось не отсеченных концевых множеств.
- Следовательно, найденный маршрут

$$x_2 \to x_5 \to x_4 \to x_1 \to x_6 \to x_3 \to x_2$$

является искомым, то есть кратчайшим замкнутым маршрутом, проходящим ровно по одному разу через каждый из шести городов. Длина его равна 102.

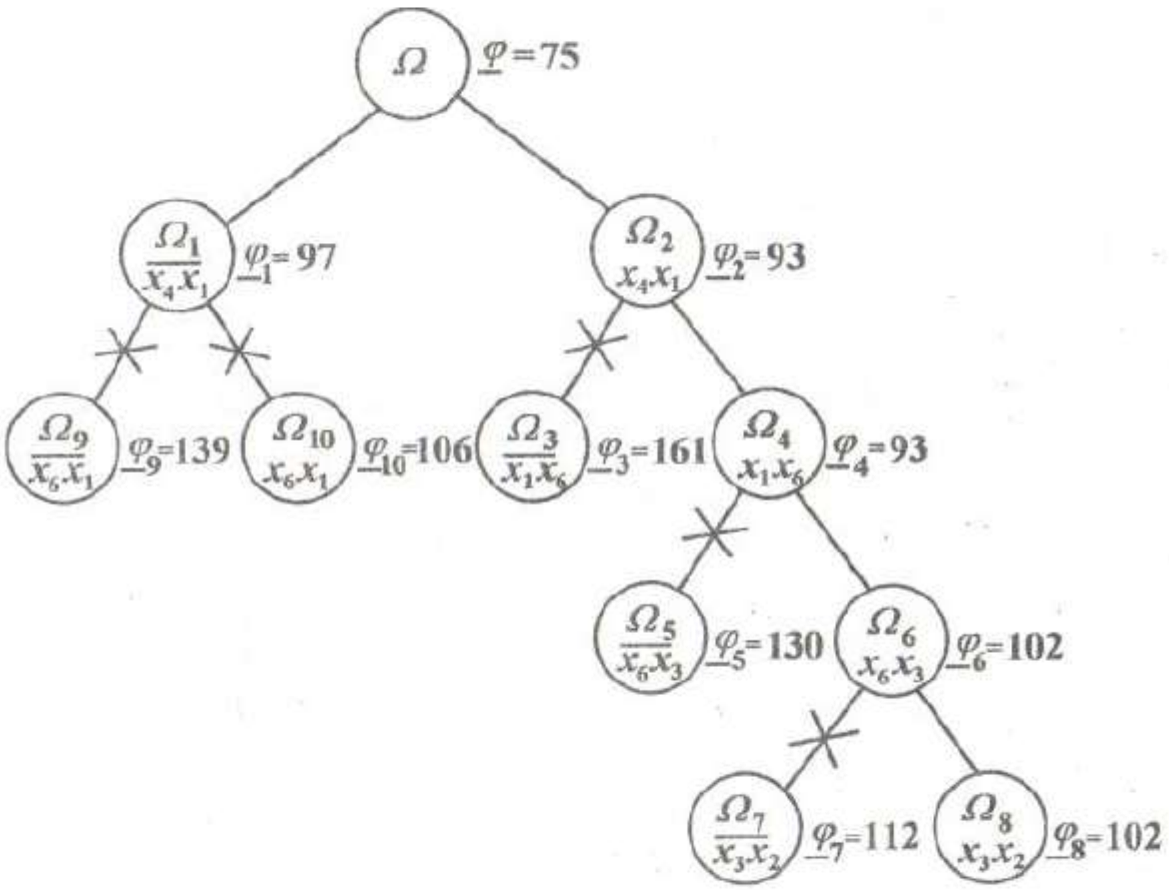

Рис. 6. Ветвление Ω_1