

Лабораторная работа № 1

Составление математических моделей прикладных задач. Решение задач линейного программирования с применением надстройки Поиск решения в MS Excel

Цель работы

Изучение процесса составления математических моделей прикладных задач. Решение задач линейного программирования (ЗЛП) с применением MS Excel.

Задание: Построить математическую модель задачи. Номер задачи соответствует порядковому номеру студента в списке группы.

Изучить процесс решения ЗЛП с среде MS Excel (см. теоретическую часть данной работы). Решить задачу своего варианта с применением надстройки Поиск решения.

Оформить в MS word отчет о проделанной работе. Обязательно титульный лист и формулировка задания. Отчет прикрепить через учебный портал. Имя файла делаем по шаблону "ЛабР1-Фамилия.docx".

Теоретическая часть

Технология решения задач линейного программирования с помощью надстройки

Программа "Поиск решений" (в оригинале Excel Solver) – дополнительная надстройка табличного процессора MS Excel, которая предназначена для решения определенных систем уравнений, линейных и нелинейных задач оптимизации, используется с 1991 года.

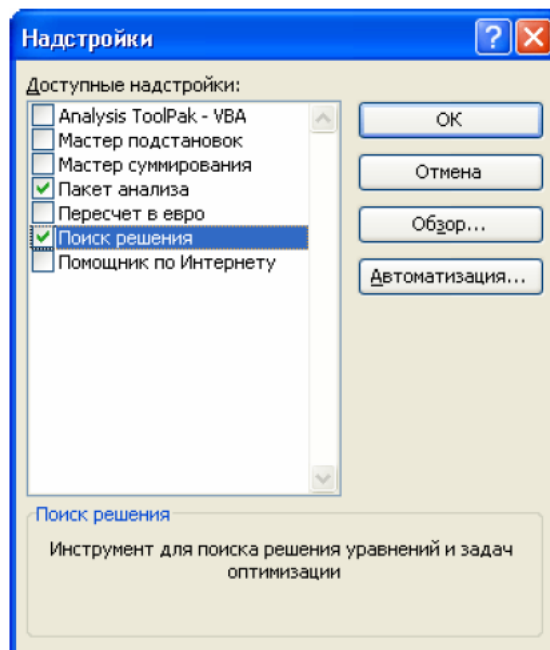


Рис. 1

Процедура поиска решения позволяет найти оптимальное значение формулы, содержащейся в ячейке, которая называется целевой. Эта процедура работает с группой ячеек, связанных с формулой в целевой ячейке. Процедура изменяет значения во влияющих ячейках до тех пор, пока не получит оптимальный результат по формуле, содержащейся в целевой ячейке. То есть, с ее помощью можно определить, при каких значениях указанных влияющих ячеек

формула в целевой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максимальное или равное какой-либо величине). Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем не обязательно, чтобы при этом использовались те же влияющие ячейки. Для расчета заданного значения применяются различные математические методы поиска. Можно установить режим, в котором полученные значения переменных автоматически заносятся в таблицу. Кроме того, результаты работы программы могут быть оформлены в виде отчета.

Разработчик программы Solver компания Frontline System уже давно специализируется на разработке мощных и удобных способов оптимизации, встроенных в среду популярных табличных процессоров разнообразных фирм-производителей (MS Excel Solver, Adobe Quattro Pro, Lotus 1-2-3).

Высокая эффективность их применения объясняется интеграцией программы оптимизации и табличного бизнес-документа. Благодаря мировой популярности табличного процессора MS Excel встроенная в его среду программа Solver есть наиболее распространенным инструментом для поиска оптимальных решений в сфере современного бизнеса.

По умолчанию в Excel надстройка Поиск решения отключена. Чтобы активизировать ее в Excel 2007, щелкните значок Кнопка Microsoft Office, щелкните Параметры Excel, а затем выберите категорию Надстройки. В поле Управление выберите значение Надстройки Excel и нажмите кнопку Перейти. В поле Доступные надстройки установите флажок рядом с пунктом Поиск решения и нажмите кнопку ОК.

В Excel 2003 и ниже выберите команду Сервис/Надстройки, в появившемся диалоговом окне Надстройки установите флажок Поиск решения и щелкните на кнопке ОК. Если вслед за этим на экране появится диалоговое окно с предложением подтвердить ваши намерения, щелкните на кнопке Да. (Возможно, вам понадобится установочный компакт-диск Office).

Размер задачи, которую можно решить с помощью базовой версии этой программы, ограничивается такими предельными показателями:

- количество неизвестных (decision variable) – 200;
- количество формульных ограничений (explicit constraint) на неизвестные – 100;
- количество предельных условий (simple constraint) на неизвестные – 400.

Искомые переменные - ячейки рабочего листа Excel - называются регулируемыи ячейками. Целевая функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемая иногда просто целью, должна задаваться в виде формулы в ячейке рабочего листа. Эта

формула может содержать функции, определенные пользователем, и должна зависеть (ссылаться) от регулируемых ячеек. В момент постановки задачи определяется, что делать с целевой функцией. Возможен выбор одного из вариантов:

- найти максимум целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- найти минимум целевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- добиться того, чтобы целевая функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имела фиксированное значение: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$.

Функции $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются ограничениями. Их можно задать как в виде равенств, так и неравенств. На регулируемые ячейки можно наложить дополнительные ограничения: неотрицательности и/или целочисленности, тогда искомое решение ищется в области положительных и/или целых чисел.

Под эту постановку попадает самый широкий круг задач оптимизации, в том числе решение различных уравнений и систем уравнений, задачи линейного и нелинейного программирования. Такие задачи обычно проще сформулировать, чем решать. И тогда для решения конкретной оптимизационной задачи требуется специально для нее сконструированный метод. Решатель имеет в своем арсенале мощные средства решения подобных задач: метод обобщенного градиента, симплекс-метод, метод ветвей и границ.

Рассмотрим, как воспользоваться “Поиском решения” на примере квадратного уравнения.

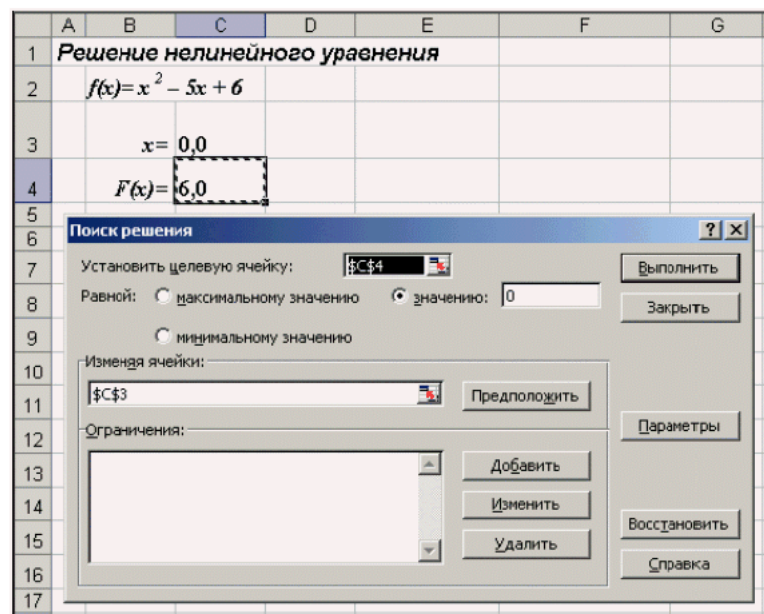


Рис. 2. Окно диалога Поиск решения

После открытия диалога “Поиск решения” (рис. 2) необходимо выполнить следующие действия:

1. в поле “Установить целевую ячейку” ввести адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значений оптимизируемой функции, в нашем примере целевая ячейка - это C4, а формула в ней имеет вид: $= C3^2 - 5 * C3 + 6$;
2. для максимизации значения целевой ячейки, установить переключатель “максимальному значению” в положение 8, для минимизации используется переключатель “минимальному значению”, в нашем случае устанавливаем переключатель в положение значению и вводим значение 0;
3. в поле “Изменяя ячейки” ввести адреса изменяемых ячеек, т.е. аргументов целевой функции (C3), разделяя их знаком ";" (или щелкая мышью при нажатой клавише *Ctrl* на соответствующих ячейках), для автоматического поиска всех влияющих на решение ячеек используется кнопка “Предположить”;
4. в поле “Ограничения” с помощью кнопки “Добавить” ввести все ограничения, которым должен отвечать результат поиска: для нашего примера ограничений задавать не нужно;
5. для запуска процесса поиска решения нажать кнопку “Выполнить”.

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель “Сохранить найденное решение” в открывшемся окне диалога “Результаты поиска решения”. После чего рабочий лист примет вид, представленный на рис.3. Полученное решение зависит от выбора начального приближения, которое задается в ячейке C4 (аргумент функции). Если в качестве начального приближения в ячейку C4 ввести значение, равное 1,0, то с помощью “Поиска решения” найдем второй корень, равный 2,0.

	A	B	C	D	E
1	Решение нелинейного уравнения				
2		$f(x) = x^2 - 5x + 6$			
3		$x = 3,0$			
4		$F(x) = 0,0$			

Рис. 3

Надстройка Microsoft Excel Solver (Поиск решения) позволяет, также, решать системы уравнений или неравенств. Рассмотрим простой пример: попробуем решить систему уравнений.

$$x + y = 2$$

$$x - y = 0$$

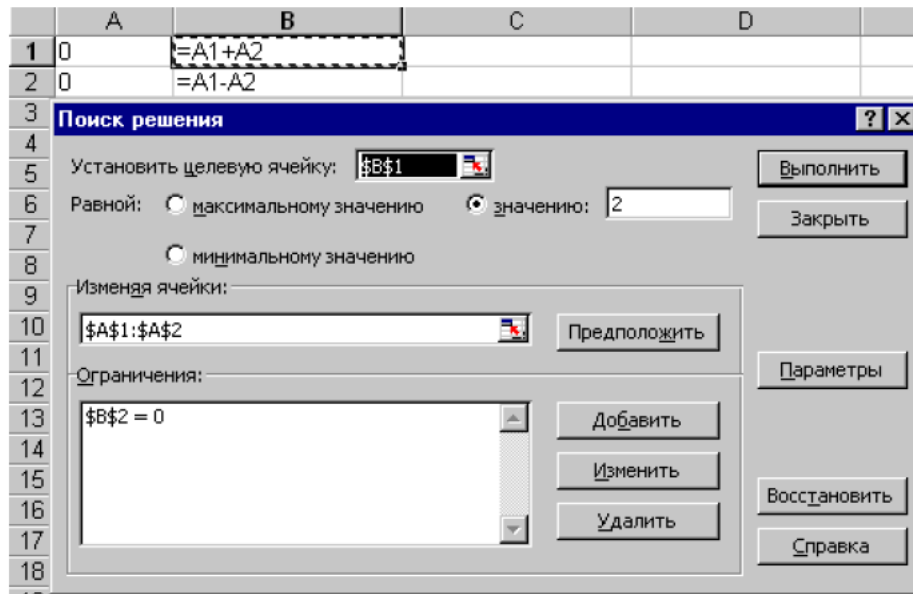


Рис.4

- Введем в ячейки, предназначенные для решения (**A1:A2**) произвольные величины, лежащие в области определения (начальные значения).
- В ячейки **B1** и **B2** внесем формулы, по которым должны вычисляться правые части уравнений ($= A1 + A2$ и $= A1 - A2$).
- Запустим *Solver (Поиск решения)* из меню *Tools (Сервис)*.
- Выберем одну из ячеек, содержащих формулы, в качестве целевой ячейки (например, **B1**), сделаем ее равной 2.
- Кликнем на кнопке *Guess (Предположить)* для того, чтобы Excel определил влияющие ячейки (**A1:A2**).
- Добавим ограничение **B2 = 0**.
- Кликнем на клавише *Solve (Выполнить)*.

Результаты поиска отобразятся в предназначенных для решения ячейках (**A1:A2**), отчет о результатах появится на экране.

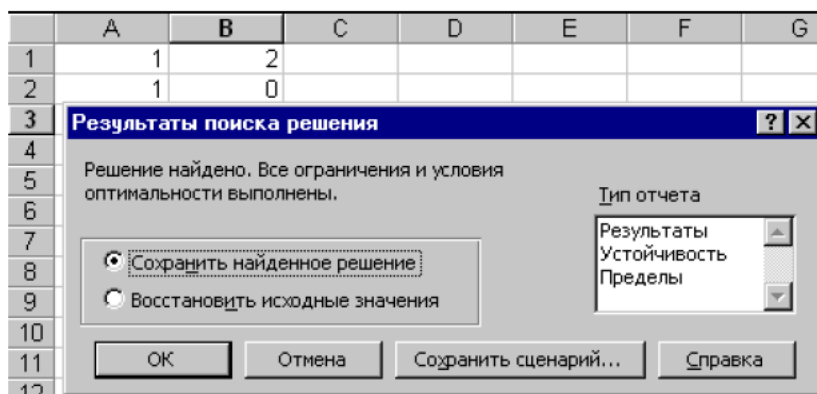


Рис. 5

Опции, управляющие работой “Поиска решения”, задаваемые в окне “Параметры” (окно появляется, если нажать на кнопку “Параметры” окна “Поиск решения”), следующие (рис. 6):

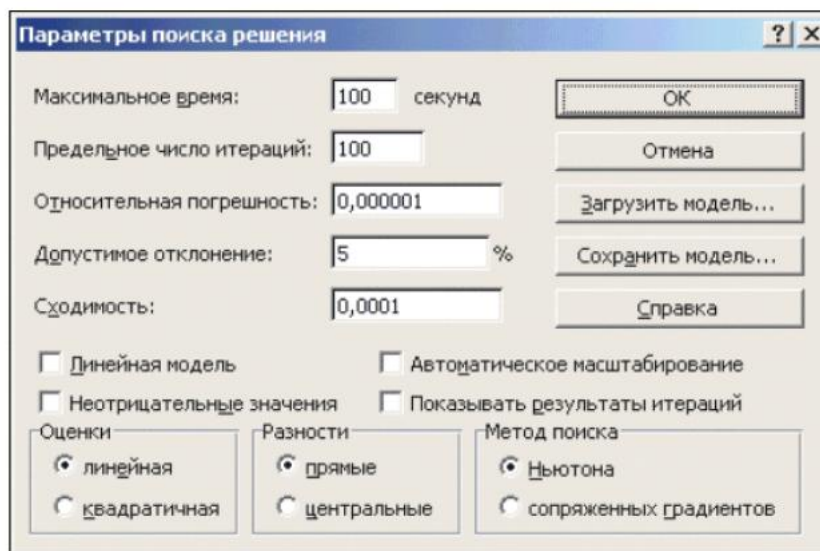


Рис. 6. Настройка параметров Решателя

- Максимальное время - ограничивает время, отведенное на процесс поиска решения (по умолчанию задано 100 секунд, что достаточно для задач, имеющих около 10 ограничений, если задача большой размерности, то время необходимо увеличить).
- Предельное число итераций - еще один способ ограничения времени поиска путем задания максимального числа итераций. По умолчанию задано 100, и, чаще всего, если решение не получено за 100 итераций, то при увеличении их количества (в поле можно ввести время, не превышающее 32767 секунд) вероятность получить результат мала. Лучше попытаться изменить начальное приближение и запустить процесс поиска заново.
- Относительная погрешность - задает точность, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным ограничениям (десятичная дробь от 0 до 1).
- Допустимое отклонение - задается в % только для задач с целочисленными ограничениями. Поиск решения в таких задачах сначала находит оптимальное нецелочисленное решение, а потом пытается найти ближайшую целочисленную точку, решение в которой отличалось бы от оптимального не более, чем на указанное данным параметром количество процентов.
- Сходимость - когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа (дробь из интервала от 0 до 1), указанного в данном параметре, поиск прекращается.
- Линейная модель - этот флажок следует включать, когда целевая функция и ограничения - линейные функции. Это ускоряет процесс поиска решения.
- Неотрицательные значения - этим флажком можно задать ограничения на переменные, что позволит искать решения в положительной области значений, не задавая специальных ограничений на их нижнюю границу.
- Автоматическое масштабирование - этот флажок следует включать, когда масштаб значений входных переменных и целевой функции и ограничений отличается, возможно, на порядки. Например, переменные задаются в штуках, а целевая функция, определяющая максимальную прибыль, измеряется в миллиардах рублей.
- Показывать результаты итераций - этот флажок позволяет включить пошаговый процесс поиска, показывая на экране результаты каждой итерации.
- Оценки - эта группа служит для указания метода экстраполяции - линейная или квадратичная, - используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске. Линейная служит для использования линейной экстраполяции вдоль касательного вектора. Квадратичная служит для использования квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач.
- Разности (производные) - эта группа служит для указания метода численного дифференцирования, который используется для вычисления частных производных целевых и ограничивающих функций. Параметр Прямые используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока. Параметр Центральные используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдается сообщение о том, что получить более точное решение не удастся.

- Метод поиска - служит для выбора алгоритма оптимизации. Метод Ньютона был рассмотрен ранее. В Методе сопряженных градиентов запрашивается меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно велика и необходимо экономить память, а также если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

Сохранить модель поиска решения можно следующими способами:

1. При сохранении книги Excel после поиска решения все значения, введенные в окнах диалога “Поиск решения”, сохраняются вместе с данными рабочего листа. С каждым рабочим листом в рабочей книге можно сохранить один набор значений параметров “Поиска решения”;
2. Если в пределах одного рабочего листа Excel необходимо рассмотреть несколько моделей оптимизации (например найти максимум и минимум одной функции, или максимальные значения нескольких функций), то удобнее сохранить эти модели, используя кнопку “Параметры/Сохранить модель” окна “Поиск решения”. Диапазон для сохраняемой модели содержит информацию о целевой ячейке, об изменяемых ячейках, о каждом из ограничений и все значения диалога “Параметры”. Выбор модели для решения конкретной оптимизационной задачи осуществляется с помощью кнопки “Параметры/Загрузить модель” диалога “Поиск решения”;
3. Еще один способ сохранения параметров поиска - сохранение их в виде именованных сценариев. Для этого необходимо нажать на кнопку “Сохранить сценарий” диалогового окна “Результаты поиска решений”.

Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки “Поиск решения” позволяет представлять результаты в виде трех отчетов: “Результаты”, “Устойчивость” и “Пределы”. Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога “Результаты поиска решения”.

Рассмотрим более подробно каждый из них.

Отчет по устойчивости содержит информацию о том, насколько целевая ячейка чувствительна к изменениям ограничений и переменных. Этот отчет имеет два раздела: один для изменяемых ячеек, а второй для ограничений. Правый столбец в каждом разделе содержит информацию о чувствительности. Каждая изменяемая ячейка и ограничения приводятся в отдельной строке. Раздел для изменяемых ячеек содержит значение нормированного градиента, которое показывает, как целевая ячейка реагирует на увеличение значения в соответствующей изменяемой ячейке на одну единицу. Подобным образом, множитель Лагранжа в разделе для ограничений показывает, как целевая ячейка реагирует на увеличение соответствующего значения ограничения на одну единицу. При использовании целочисленных ограничений Excel выводит сообщение Отчеты устойчивости и Пределы не применимы для задач с

целочисленными ограничениями. Если в окне диалога Параметры поиска решения установлен флажок Линейная модель, то отчет по устойчивости содержит несколько дополнительных столбцов информации.

	A	B	C	D	E	F
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости					
2	Рабочий лист: [Optim.xls]Поиск решения					
3	Отчет создан: 06.02.02 23:34:04					
4						
5						
6	Изменяемые ячейки					
7			Результ.		Нормир.	
8	Ячейка Имя		значение		градиент	
9	\$C\$3	x=	3,0		0,0	
10						
11	Ограничения					
12	НЕТ					
13						

Рис. 7

Отчет по результатам содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй - значения искоемых переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей - результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как статус и разница. Статус может принимать три состояния: связанное, несвязанное или невыполненное. Значение разницы - это разность между значением, выводимым в ячейке ограничения при получении решения, и числом, заданным в правой части формулы ограничения. Связанное ограничение - это ограничение, для которого значение разницы равно нулю. Несвязанное ограничение - это ограничение, которое было выполнено с ненулевым значением разницы.

	A	B	C	D	E
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам				
2	Рабочий лист: [Optim.xls]Поиск решения				
3	Отчет создан: 06.02.02 23:34:04				
4					
5					
6	Целевая ячейка (Значение)				
7	<u>Ячейка</u> <u>Имя</u> <u>Исходное значение</u> <u>Результат</u>				
8	\$C\$4	F(x)=	6,0	0,0	
9					
10					
11	Изменяемые ячейки				
12	<u>Ячейка</u> <u>Имя</u> <u>Исходное значение</u> <u>Результат</u>				
13	\$C\$3	x=	0,0	3,0	
14					
15					
16	Ограничения				
17	НЕТ				

Рис. 8

Отчет по пределам содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

Microsoft Excel

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

A1 Microsoft Excel 7.0a Отчет по пределам

prim1.xls

Microsoft Excel 7.0a Отчет по пределам

Рабочий лист: [prim1.xls]Лист3

Отчет создан: 27.5.99 11:01

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
\$C\$4		6,07306E-13

Изменяемое			Нижний Целевой		Верхний Целевой	
Ячейка	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат
\$A\$1		0,999999585	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D
\$A\$2		3,000000044	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D
\$A\$3		-1,250000165	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D

Готово Сумма=0

Рис. 9

Замечание

Если нет надстройки Поиск Решения на вкладке Данные в MS Excel 2007, то...

Жмем на кружок, который в левом верхнем углу, затем выбираем команду Параметры-Надстройки. Внизу окна ищем раскрывающийся список с названием "Управление" - в нем выбираем "Надстройки Excel", и нажимаем кнопку "Перейти". В появившемся окне ищем Поиск решения - Solver, ставим галочку в окне, нажимаем ОК. По окончании процедуры Поиск решения можно будет найти на вкладке Данные.

Задачи

1. Задача о составлении плана

Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий, которые обрабатываются на четырех видах машин. Известны определенные возможности и производительность оборудования; цена изделий, обеспечивающая прибыль заводу, составляет 6 тыс. руб. за изделие I вида, 8 тыс. руб. - за изделие II вида. Составить план выпуска этих изделий так, чтобы от реализации их завод получил наибольшую прибыль. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого из двух видов изделий на оборудовании всех четырех видов.

Изделия	Виды машин			
	1	2	3	4
I	2	0,5	2	1
II	4	3	0	5
Возможное время работы машин	20	17	10	19

2. Задача составления смеси

Еще одна распространенная задача ЛП - задача о составлении смеси. Примером таких задач может быть задача о составлении таких смесей нефтепродуктов, которые бы удовлетворяли определенным техническим требованиям и были наиболее дешевыми по стоимости. Либо задачи о рационе, когда известна потребность в определенных веществах и содержание этих веществ в различных продуктах. Необходимо составить рацион так, чтобы удовлетворить потребности в необходимых веществах и при этом продуктовая корзина имела бы минимальную стоимость при заданных ценах на продукты. Практически подобные задачи ставятся, к примеру, в любом животноводческом хозяйстве и имеют очень большой спектр применения. Рассмотрим пример. Для откорма цыплят на птицефабрике в их рацион необходимо включать не менее 43 единиц вещества A , 24 единиц питательного вещества B , 15 единиц C . Для откорма используются три вида корма. Данные о содержании питательных веществ в каждом виде корма заданы таблицей. Также известна стоимость кормов. Необходимо составить наиболее дешевый рацион.

Корма-продукты	Вещества			Стоимость 1 ед. корма
	A	B	C	
I	8	3	4	30
II	1	3	10	15
III	5	1	20	25

Для понимания задачи можете представить себе, что вещества A, B, C - это жиры, белки, углеводы, а продукты I, II, III - то, чем кормят цыплят, например пшено, комбикорм, витаминные добавки.

3. Задача использования ресурсов (сырья)

Условие: Для изготовления 2 видов продукции используется 3 видов ресурсов.

Известны:

- запасы каждого i -го вида ресурса: 10, 15, 30
- a_{ij} ($i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$) — затраты каждого i -го вида ресурса на производство единицы объема j -го вида продукции приведены в таблице;

▪	▪ P1	P2	P3
▪ П1	▪ 2	1	5
▪ П2	▪ 1	1	4

-
- прибыль от реализации единицы объема j-го вида продукции: 13, 10 ден.ед.

Требуется составить план производства продукции, который обеспечивает максимум прибыли при заданных ограничениях на ресурсы (сырье).

4. Задача

Имеются корма двух видов и силос. Их можно использовать для кормления скота в количестве не более 60 и 90 кг соответственно. Стоимость 1 кг сена -11 ден.ед., а силоса - 9 ден.ед. Составить кормовой рацион минимальной стоимости. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Корма		Минимальное содержание питательных веществ
	Сено	Силос	
Кормовые ед., кг	0,5	0,3	40
Протеин, г	50	20	1500
Кальций, г	1,25	2,5	200
Фосфор, г	2	3	40

5. Задача

Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в таблице. Производственные ресурсы: 7000 га пашни, 6000 чел.-дней труда механизаторов, 10000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	30	20	200
Затраты механизаторов, чел.-дней	0.5	2	6
Затраты ручного труда, чел.дней	0.5	0.5	20
Прибыль от реализации 1 ц продукции, ден.ед.	6	10	5

6. Задача

Для изготовления трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часы) на обработку одного изделия каждого вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (часы)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	4	150
Токарное	1	6	6	280
Сварочное	8	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	400
Прибыль	20	10	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

7. Задача

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часов. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 часов. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

8. Задача

Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60 кв. м. Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа *A* стоимостью 3 ден. ед., требующие производственную площадь 3 кв. м (с учетом проходов), и производительностью за смену 2 т зерна, и более мощные машины типа *B* стоимостью 4 ден. ед., занимающие площадь 5 кв. м, и производительностью за смену 3 т сортового зерна.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более 8 машин типа *B*.

9. Задача

Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий, которые обрабатываются на четырех видах машин. Известны определенные возможности и производительность оборудования; цена изделий, обеспечивающая прибыль заводу, составляет 6 тыс. руб. за изделие I вида, 10 тыс. руб. - за изделие II вида. Составить план выпуска этих изделий так, чтобы от реализации их завод получил наибольшую прибыль. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого из двух видов изделий на оборудовании всех четырех видов.

Изделия	Виды машин			
	1	2	3	4
I	6	1	0	1
II	5	3	2	5
Возможное время работы машин	10	20	30	19

10. Задача

Для откорма цыплят на птицефабрике в их рацион необходимо включать не менее 50 единиц вещества *A*, 25 единиц питательного вещества *B*, 15 единиц *C*. Для откорма используются три вида корма. Данные о содержании питательных веществ в каждом виде корма заданы таблицей. Также известна стоимость кормов. Необходимо составить наиболее дешевый рацион.

Корма-продукты	Вещества			Стоимость 1 ед. корма
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
I	10	4	4	50
II	1	3	10	25
III	5	2	20	15

Вещества *A*, *B*, *C* - это жиры, белки, углеводы, а продукты I, II, III - то, чем кормят цыплят, например пшено, комбикорм, витаминные добавки.

11. Задача использования ресурсов (сырья)

Условие: Для изготовления 2 видов продукции используется 3 видов ресурсов.

Известны:

- запасы каждого *i*-го вида ресурса: 20, 25, 35
- a_{ij} ($i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$) — затраты каждого *i*-го вида ресурса на производство единицы объема *j*-го вида продукции приведены в таблице;

	P1	P2	P3
П1	4	4	5
П2	1	6	4

- прибыль от реализации единицы объема *j*-го вида продукции: 24, 10 ден.ед.

Требуется составить план производства продукции, который обеспечивает максимум прибыли при заданных ограничениях на ресурсы (сырье).

12. Задача

Имеются корма двух видов и силос. Их можно использовать для кормления скота в количестве не более 70 и 100 кг соответственно. Стоимость 1 кг сена -15 ден.ед., а силоса -19 ден.ед. Составить кормовой рацион минимальной стоимости. Данные приведены в таблице:

Питательные вещества	Корма		Минимальное содержание питательных веществ
	Сено	Силос	
Кормовые ед., кг	1	2	40
Протеин, г	40	30	2000
Кальций, г	2	3	100
Фосфор, г	4	5	70

13. Задача

Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в таблице. Производственные ресурсы: 8000 га пашни, 7000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	300
Затраты механизаторов, чел.-дней	1	2	6
Затраты ручного труда, чел.дней	2	4	20
Прибыль от реализации 1 ц продукции, ден.ед.	7	15	7

14. Задача

Для изготовления трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Тип оборудования	Затраты времени	Общий фонд рабочего
------------------	-----------------	---------------------

	(станко-часы) на обработку одного изделия каждого вида			времени (часы) оборудования
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	4	200
Токарное	1	5	6	300
Сварочное	3	4	5	260
Шлифовальное	5	6	7	500
Прибыль	60	20	15	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

15. Задача

Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1020, 1030 и 9000 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,2 и 0,25 машино-часов. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часов. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 150000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16 часов. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 15 и 150 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготавливать заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

16. Задача

Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 50 ден. ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 70 кв. м. Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины типа *A* стоимостью 4 ден. ед., требующие производственную площадь 4 кв. м (с учетом проходов), и производительностью за смену 6 т зерна, и более мощные машины типа *B* стоимостью 6 ден. ед., занимающие площадь 6 кв. м, и производительностью за смену 7 т торгового зерна.

Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность при условии, что фермер может приобрести не более 8 машин типа *B*.

17. Задача

Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий, которые обрабатываются на четырех видах машин. Известны определенные возможности и производительность оборудования; цена изделий, обеспечивающая прибыль заводу, составляет 16 тыс. руб. за изделие I вида, 20 тыс. руб. - за изделие II вида. Составить план выпуска этих изделий так, чтобы от реализации их завод получил наибольшую

прибыль. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого из двух видов изделий на оборудовании всех четырех видов.

Изделия	Виды машин			
	1	2	3	4
I	1	0	0	1
II	15	30	1	5
Возможное время работы машин	5	15	24	20

18. Задача

Для изготовления трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 1

Тип оборудования	Затраты времени (станко-часы) на обработку одного изделия каждого вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (часы)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	4	300
Токарное	1	6	6	400
Сварочное	1	3	7	500
Шлифовальное	4	6	7	600
Прибыль	35	20	15	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.