**Лабораторная работа № 10**

**Критерии выбора рационального решения**

**Цель работы**

*Целью* работы является приобретение навыков решения статистических игр ЛПР с природой в условиях неопределенности, используя различные критерии принятия решений.

**Задание**

Машину (станок, технологическую установку, конвейер и т.п.) требуется подвергнуть проверке с приостановкой ее эксплуатации и выпуска продукции. Вовремя не обнаруженная неисправность может привести к капитальной поломке машины.

У ЛПР имеется три варианта решения:

$E_1$ – полная проверка; $E_2$ – минимальная проверка; $E_3$ – отказ от проверки.

Машина может находиться в следующих состояниях:

$F_1$ – исправна; $F_2$ – незначительная неисправность; $F_3$ – серьезная неисправность.

Необходимо найти оптимальное решение ЛПР по ***MM***-, ***S***-, ***HW***-, ***P***-, ***BL***-, ***HL***-, ***G***-критериям.

Для заданной матрицы выигрыша из списка найти оптимальное решение ЛПР по перечисленным выше критериям, если вероятности состояний спроса: 0,2; 0,5; 0,3; коэффициент пессимизма λ = 0,4; коэффициент достоверности информации о состояниях спроса u = 0,6.

Номер задачи соответствует порядковому номеру студента в списке группы. Оформить отчет о проделанной работе (MS Word). Обязательно титульный лист, задание и описание результатов решения. Отчет прикрепить через учебный портал. Имя файла делаем по шаблону ”ЛабР10-Фамилия.docx”.

**Теоретическая часть**

**<u>Пример 1</u>**

Предположим, что экспертно удалось оценить возможные результаты и представить их в виде матрицы выигрыша ЛПР (результаты включают затраты на проверку машины, ремонт, недополученную продукцию и т.п.).

Эта матрица выигрыша ЛПР и результаты поиска оптимального решения по ***ММ***-критерию представлены в виде следующей таблицы:

| | **F$_1$** | **F$_2$** | **F$_3$** | $Z_{MM} = \max\limits_i \min\limits_j e_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| **E$_1$** | –20 | –22 | –25 | ***–25*** |
| **E$_2$** | –14 | –23 | –31 | –31 |
| **E$_3$** | 0 | –24 | –40 | –40 |

Из таблицы видно, что для получения оптимального решения ЛПР по критерию ***ММ*** исходная матрица выигрышей ***Е*** дополняется столбцом, состоящим из минимальных элементов каждой строки, далее среди них выбирается максимальный элемент. Соответствующее решение является оптимальным по ***ММ***-критерию. В данном случае это решение **Е$_1$**. Оно полностью исключает риск.

Найдем оптимальное решение по ***S***-критерию Сэвиджа. Он так же, как ***ММ***-критерий, используется в условиях полной неопределенности. ***S***-критерий отражает позицию относительного пессимизма, поскольку рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется при наихудшем состоянии природы. Для оценки решения по ***S***-критерию вначале вычислим величину потерь, т.е. от исходной матрицы $E=(e_{ij})$ переходим к матрице недополученного выигрыша $R=(r_{ij})$, а затем используем минимаксную функцию и правило выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $Z_S = \min\limits_i \max\limits_j (\max\limits_i e_{ij} - e_{ij})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | –20 | –22 | –25 | 20 | 0 | 0 | 20 |
| $E_2$ | –14 | –23 | –31 | 14 | 1 | 6 | **14** |
| $E_3$ | 0 | –24 | –40 | 0 | 2 | 15 | 15 |

Оптимальным по ***S***-критерию является решение $\mathbf{E_2}$.

Найдем оптимальное решение по ***HW***-критерию Гурвица. Это компромиссный критерий пессимизма-оптимизма. Для его применения необходимо задать значение $\lambda$ – весовой множитель Гурвица. Пусть $\lambda = 0{,}5$. Для оценки решения по ***HW***-критерию необходимо воспользоваться правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $\lambda \min\limits_j e_{ij}$ | $(1-\lambda)\max\limits_j e_{ij}$ | $\max\limits_i [\lambda \min\limits_j e_{ij} + (1-\lambda)\max\limits_j e_{ij}]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | –20 | -22 | -25 | –12,5 | –10 | –22,5 |
| $E_2$ | –14 | -23 | -31 | –15,5 | –7 | –22,5 |
| $E_3$ | 0 | -24 | -40 | –20 | 0 | **–20** |

Оптимальным по ***HW***-критерию является решение $\mathbf{E_3}$. Однако при $\lambda > 0{,}57$ оптимальным по Гурвицу становится решение $\boldsymbol{E_2}$.

Найдем оптимальное решение по ***P***-критерию произведений. Он применим только для матриц выигрыша с *положительными* значениями элементов. Поскольку в исходной таблице элементы матрицы выигрыша являются неположительными, то для применения Р-критерия необходимо вначале прибавить ко всем элементам матрицы некоторое достаточно большое положительное число $c$. Рассмотрим два варианта: $c = 41$ и $c = 200$. Для оценки решения по ***P***-критерию необходимо воспользоваться правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $Z_{P(c=41)} = \max \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$ | $Z_{P(c=200)} = \max \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | –20 | –22 | -25 | 21 | 16 | 16 | ***6 384*** | 5 607 000 |
| $E_2$ | –14 | –23 | -31 | 27 | 18 | 10 | 4 860 | 5 563 818 |
| $E_3$ | 0 | –24 | -40 | 41 | 17 | 1 | 697 | **5 632 000** |

Из таблицы ***P***-критерия следует, что принимаемое решение зависит от величины константы ($c$), которая прибавляется ко всем элементам исходной матрицы с целью выполнения условия $e_{ij}>0$. При $c = 41$ оптимальным будет решение $E_1$ , при $c = 200$ – $E_3$.

Найдем оптимальное решение по ***BL***-критерию Байеса–Лапласа, который используют в условиях *частичной* неопределенности и котрый основан на поиске решения, дающего максимальный средний выигрыш при априорно известных вероятностях состояний природы $q_j$. Пусть состояния природы $F_1$, $F_2$, $F_3$ равновероятны: $q_1=q_2=q_3=1/3$. Для оценки решения по ***BL***-критерию воспользуемся правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $Z_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j , q1 = q2 = q3 = 1/3$ |
|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | –20 | –22 | –25 | –22,33 |
| $E_2$ | –14 | –23 | –31 | –33,67 |
| $E_3$ | 0 | –24 | –40 | ***–21,33*** |

Согласно ***BL***-критерию оптимальным будет решение $E_3$ – отказ от проверки.

Найдем оптимальное решение по ***HL***-критерию Ходжа–Лемана, который используют в условиях частичной неопределенности. Он опирается одновременно на критерии ***BL*** и ***MM*** путем введения некоторого параметра $0 \le \boldsymbol{v} \le 1$, выражающего степень доверия к используемому распределению вероятностей $\boldsymbol{q_j}$. Если это доверие велико, то акцент делается на ***BL***-критерий, иначе – на ***MM***-критерий. Пусть $\boldsymbol{v} = 0{,}5$, а состояния природы $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$, $\boldsymbol{F_3}$ равновероятны: $\boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{q_2} = \boldsymbol{q_3} = 1/3$. Для оценки решения воспользуемся правилом выбора решения по ***HL***-критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

| | $\mathbf{F_1}$ | $\mathbf{F_2}$ | $\mathbf{F_3}$ | $Z_{HL} = \max\limits_i \left( \nu \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min\limits_j e_{ij} \right); \nu = 0{,}5; qi = 1/3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{E_1}$ | -20 | -22 | -25 | ***–23,67*** |
| $\mathbf{E_2}$ | -14 | -23 | -31 | –26,84 |
| $\mathbf{E_3}$ | 0 | -24 | -40 | –30,76 |

Согласно ***HL***-критерию оптимальным будет решение $\mathbf{E_1}$ – полная проверка машины. При степени доверия $\boldsymbol{v} > 0{,}94$ оптимальным будет другое решение.

Найдем оптимальное решение по $G$-критерию Гермейера, который также рекомендуется использовать в условиях частичной неопределенности при оценке потерь ЛПР (элементы матрицы выигрышей $e_{ij} < 0$). Критерий ориентирован на поиск решений, которые не считаются заведомо худшими, чем другие. Пусть состояния природы $F_1$, $F_2$, $F_3$ равновероятны: $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$. Оценим решения по $G$-критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $Z_G = \max_i \min_j e_{ij} q_j \quad , q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$ |
|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | –20 | –22 | –25 | *–8,33* |
| $E_2$ | –14 | –23 | –31 | –10,33 |
| $E_3$ | 0 | –24 | –40 | –13,44 |

Согласно $G$-критерию оптимальным будет решение $E_1$ – полная проверка машины.

Анализ решений, полученных по всем критериям, показывает, что критерии не дают единогласного решения:

- решение $E_2$ не выгодно с различных точек зрения, его рекомендуют только $S$- и $HW$-критерии (при $\lambda > 0{,}57$);
- решение $E_1$ рекомендуют $MM$-, $P$-, $HL$- и $G$-критерии;
- решение $E_3$ рекомендуют $HW$-, $P$-, $BL$- и $HL$-критерии.

Если число реализаций решения невелико, то более надежным будет решение $E_1$.

**Пример 2**

Предположим, что лицо, принимающее решения рассматривает несколько возможных решений: $i = 1,\ldots,m$. Ситуация, в которой действует данное лицо, является неопределенной. Известно лишь, что присутствуют различные варианты решения: $j = 1,\ldots, n$. Если будет принято $i$-е решение, которой соответствует ситуация есть $j$-я , то фирма получит доход $q_{ij}$. Матрица составленная из вышеприведенных условий ($Q = q_{ij}$) называется матрицей возможных решений. В ситуации полной неопределенности могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера: предположим, что мы хотим оценить риск, который несет $i$-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация,но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. То естьнекоторую ситуацию $j$, приносящую фирме определенных результат (доход)$q_{ij}$.

Из вышеизложенного следуетчто, принимая *i-е* решение мы рискуем получить не полный результат $(q_j)$, а только один из его вариантов$(q_{ij})$, значит принятие одного из решений несет риск недобрать определенный результат, который определяется выражением:$r_{ij} = q_j - q_{ij}$, на основе которого составляется матрица рисков $(R = r_{ij})$.
Составим для примера условную матрицу последствий$(Q)$ для *i-х* решений:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Проанализирую представленную матрицу последствий, найдем максимально благоприятные решения, имеющие высокий показатель (по столбцам), $q_1$ =8, $q_2$ = 5, $q_3$ = 8, $q_4$ = 12.
Составим матрицу рисков$(R)$по вышеописанному условию, вычтем максимально выгодное решение из всех предложенных элементов по столбцам..

$$R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Для принятия решений в условиях неопределенностипридерживаются следующим правилам-рекомендациям по принятию решений в этой ситуации[6]:
1) **Правило Вальда** (правило крайнего пессимизма). Рассматривая *i*-е решение будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход $a_i$. При таких условиях для себя выберем решение *i* с наибольшим $a_i$. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение $a_i$, такое чтобы выполнялось условие:

$$a_{i0} = max_i(a_i) = max_i(min_j(q_{ij})) \quad (3)$$

Так, в вышеуказанном примере, имеем минимальные варианты решений (построчно), которые равняются:$a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$. Из приведенных значений максимальным является число 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение. Тем самым выбрать лучшее из наихудших.

2) **Правило Сэвиджа** (правило минимального риска). При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = (r_{ij})$. Рассматривая *i*-е решение будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max [r_{ij}]$.
Но теперь уж выберем решение $i_0$ с наименьшим $b_{i0}$. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение $i_0$, такое чтобы выполнялось условие:

$$b_{i0} = min_i(b_i) = min_i(msx_j(r_{ij})) \quad (4)$$

В рассматриваемом примере имеем максимальные (построчные) риски такие как: $b_1 = 8$, $b_2 = 6$, $b_3 = 5$, $b_4 = 7$.. Минимальным из этих чисел является число 5. Т.е. правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение. С минимальным из предложенных построчных рисков.
3) **Правило Гурвица** (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение *i*, на котором достигается максимум из условия:

$$\lambda \cdot min_j(q_{ij}) + (1-\lambda) \cdot max_j(q_{ij}), \text{где } 0 \le \lambda \le 1 \quad (5)$$

Значение $\lambda$ выбирается из субъективных соображений. Если $\lambda$ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении $\lambda$ к 0, правило Гурвица приближается к правилу "розового оптимизма" (как говориться в обиходе розовых очков). В вышеуказанном примере при $\lambda$= 1/2 правило Гурвица рекомендует 2-е решение(по второй строке).
0,5*2+(1-0,5)*12 =7
Принятие решений в условиях частичной неопределенности
Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности $p_j$ того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется частичной неопределенностью. В таком случае возможно выбрать одно из следующих правил.
1) **Правило максимизации среднего ожидаемого дохода.**

Доход, получаемый фирмой при реализации *i-го* решения, является случайной величиной $Q_i$ с рядом распределения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $q_{i1}$ | $q_{i2}$ | … | $q_{in}$ |
| $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

Математическое ожидание $M[Q_i]$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый $\overline{Q_i}$. Правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Предположим, что в схеме из предыдущего примера вероятности взаимосвязаны как (1/2, 1/6, 1/6, 1/6). Тогда:

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{6} + \frac{4}{6} = \frac{23}{6} \\ Q_2 = \frac{2}{2} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{12}{6} = \frac{25}{6} \\ Q_3 = \frac{8}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} + \frac{10}{6} = \frac{7}{6} \\ Q_4 = \frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{8}{6} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

Максимальный средний ожидаемый доход равен 7, что соответствует третьему решению.

2) **Правило минимизации среднего ожидаемого риска**. Риск фирмы при реализации*i-го* решения, является случайной величиной $R_i$,,с рядом распределения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r_{i1}$ | $r_{i2}$ | | $r_{in}$ |
| $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

Математическое ожидание $M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $R_i$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск.Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях.

$$\begin{cases} R_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{6} + \frac{0}{6} + \frac{8}{6} = \frac{20}{6} \\ R_2 = \frac{6}{2} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{0}{6} = 4 \\ R_3 = \frac{0}{2} + \frac{0}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} \\ R_4 = \frac{7}{2} + \frac{1}{6} + \frac{6}{6} + \frac{4}{6} = \frac{32}{6} \end{cases}$$

Минимальный средний ожидаемый риск равен 7/6, соответствует третьему решению.

3) **Анализ принимаемых решений по двум критериям**: среднему ожидаемому доходу и среднему ожидаемому риску и нахождение решений, оптимальных по Парето, аналогично анализу доходности и риска финансовых операций. В примере множество решений, оптимальных по Парето операций, состоит только из одного 3-его решения.

В случае, если количество Парето-оптимальных решений больше одного, то для определения лучшего решения применяется взвешивающая формула f(Q)=2Q-R.

**4) Правило Лапласа**

Иногда в условиях полной неопределенности применяют правило Лапласа, согласно которому все вероятности $p_i$ считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений.

**Пример 3**

Сельскохозяйственное предприятие может реализовать некоторую продукцию одним из следующих способов:

А1) сразу после уборки;

А2) в зимние месяцы;

А3) в весенние месяцы.

Прибыль зависит от цены реализации в данный период времени, затратами на хранение и возможных потерь. Размер прибыли, рассчитанный для разных состояний-соотношений дохода и издержек (S1, S2 и S3), в течение всего периода реализации, представлен в виде матрицы (млн. руб.)

| | **S1** | **S2** | **S3** |
|---|---|---|---|
| **A1** | 2 | -3 | 7 |
| **A2** | -1 | 5 | 4 |
| **A3** | -7 | 13 | -3 |

**Необходимо**: определить наиболее выгодную стратегию по всем критериям (*критерий Байеса, критерий Лапласа, максиминный критерий Вальда, критерий пессимизма-оптимизмаГурвица, критерий Ходжа-Лемана, критерий минимаксного риска Сэвиджа)*, если вероятности состояний спроса: 0,2; 0,5; 0,3; коэффициент пессимизма λ = 0,4; коэффициент достоверности информации о состояниях спроса u = 0,6.

**Решение**

1. **Критерий Байеса** (максимального математического ожидания)

Расчет осуществляется по формуле:

$$W_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot p_j = a_{i1} \cdot p_1 + a_{i2} \cdot p_2 a_{i3} \cdot p_3$$

По вышепредставленной формуле расчитано:

$W_1$ = 2·0,2 + (-3) ·0,5 + 7·0,3 = 0,4 – 1,5 + 2,1 = 1

$W_2$ = -1·0,2 + 5 ·0,5 + 4·0,3 = -0,2 + 2,5 + 1,2 = 3,5

$W_3$ = -7·0,2 + 13 ·0,5 + (-3)·0,3 = -1,2 + 6,5 - 0,9 = 4,2

Найденные значения заносим в столбец (Б) таблицы 1 и выбираем максимальноеW = max{1;3.5;4.2} = 4.2,значит оптимальной по данному критерию является стратегия А3 – продавать в весенние месяцы.

2. **Критерий недостаточного основания Лапласа (НО)**

Находим среднее значение элементов каждой строки:

$$W_i = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \frac{1}{3} 〖(a〗_{i1} + a_{i2} + a_{i3})$$

$$W_1 = \frac{1}{3}(2 - 3 + 7) = 2$$

$$W_2 = \frac{1}{3}(-1 + 5 + 4) = 2,7$$

$$W_3 = \frac{1}{3}(-7 + 13 - 3) = 1$$

Найденные значения заносим во второй столбец (НО) таблицы 1 и выбираем максимальное W = max{2; 2.7; 1} = 2.7, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

3. **Максиминный критерий Вальда (ММ)**

В каждой строке находим минимальный элемент:

$W_i = min_{1<j<3} a_{ij}$

$W_1$ = min{2; -3; 7} = -3

$W_2$ = min{-1; 5; 4} = -1
$W_3$ = min{-7; 13; -3} = -7
Найденные значения заносим в третий столбец (ММ)таблицы 1 и выбираем максимальное W= max{-3; -1; 7} = -1, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

4. **Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица (П-О)**

Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле:
$W_i = \lambda \cdot min_{1<j<3} a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot max_{1<j<3} a_{ij}$
Из исходных данных λ = 0.4, значит:
$W_1$ = 0,4·min{2; -3; 7} + (1-0,4) · max{2; -3; 7} = 0,4·(-3) + 0,6·7 = -1,2 + 4,2 = 3
$W_2$ = 0,4·min{-1; 5; 4} + (1-0,4) · max{-1; 5; 4} = 0,4·(-1) + 0,6·5 = -0,4 + 3 = 2,6
$W_3$ = 0,4·min{-7; 13; -3} + (1-0,4) · max{-7; 13; -3} = 0,4·(-7) + 0,6·13 = -2,8 + 7,2 = 5
Найденные значения заносим в четвертый столбец (П-О) таблицы 1 и выбираем максимальное W = max{3; 2.6 5} = 5, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А3 – продавать в весенние месяцы.

5. **Критерий Ходжа-Лемана (Х-Л)**

Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле:

$$W_i = u \cdot \sum_{j=1}^{3} a_{ij} p_j + (1 - u) \cdot min_{1<j<3} a_{ij}$$

Из исходных данных u = 0.6 и множители в каждом слагаемом уже рассчитаны, их можно взять их первого столбика (Б) таблицы 1 и из третьего столбика (ММ) таблицы 1, значит:
$W_1$ = 0,6·1 + (1-0,6) ·(-3) = 0,6 – 1,2 = -0,6
$W_2$ = 0,6·3,5 + (1-0,6) ·(-1) = 2,1 – 0,4 = 1,7
$W_3$ = 0,6·4,2 + (1-0,6) ·(-7) = 2,52 – 2,8 = -0,28
Найденные значения заносим в пятый столбец (Х-Л) таблицы 1 и выбираем максимальное W = max{-0.6; 1.7; -0.28} = 1.7, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

5. **Критерий минимаксного риска Сэвиджа**

Рассчитаем матрицу рисков. Заполнять ее лучше по столбцам. В каждом столбце находим максимальный элемент и вы читаем из него все остальные элементы столбца, результаты записываем на соответствующих местах.

Максимальный элемент в первом строчке это 2 значит по формуле:
$r_{ij} = max_i a_{ij} - a_{ij}$
$r_{11} = 2 - a_{11} = 2 - 2 = 0$
$r_{21} = 2 - a_{21} = 2 - (-1) = 3$
$r_{31} = 2 - a_{31} = 2 - (-7) = 9$
Рассчитаем второй столбец матрицы рисков. Максимальный элемент во втором столбце:
$a_{32} = 13$, значит:
$r_{12} = 13 - a_{12} = 13 - (-3) = 16$
$r_{22} = 13 - a_{22} = 13 - 5 = 8$
$r_{32} = 13 - a_{32} = 13 - 13 = 0$

Рассчитаем третий столбец матрицы рисков.

Максимальный элемент в третьем столбце: $a_{13} = 7$, значит:
$r_{13} = 7 - a_{13} = 7 - 7 = 0$
$r_{23} = 7 - a_{23} = 7 - 4 = 3$
$r_{33} = 7 - a_{33} = 7 - (-3) = 10$
Таким образом, матрица рисков имеет вид (в каждом столбце на месте максимального элемента платежной матрицы должен стоять ноль):

| S1 | S2 | S3 |
|---|---|---|
| 0 | 16 | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 8 | 3 |
| 9 | 0 | 10 |

Дополним матрицу рисков рассчитанными значениями критерия $W_i$ – в каждой строке выбираем максимальный элемент из условия:

$W_i = max_j r_{ij}$

$W_1$ = max{0; 16; 0} = 16

$W_2$ = max{3; 8; 3} = 8

$W_3$ = max{9; 0; 10} = 10

Найденные значения заносим в столбец ($W_i$).

| **S1** | **S2** | **S3** | **$W_i$** |
|---|---|---|---|
| 0 | 16 | 0 | 16 |
| 3 | 8 | 3 | 8 |
| 9 | 0 | 10 | 10 |

Выбираем минимальное W = min{16,8,10} = 8, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

Рассчитанные по всем правилам варианты, для наглядности представления занесем в общую таблицу 1.

Таблица 1 - Результаты расчетов по всем правилам

| | **S1** | **S2** | **S3** | **Б** | **НО** | **ММ** | **П-О** | **Х-Л** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A1** | 2 | -3 | 7 | 1 | 2 | -3 | 3 | -0,6 |
| **A2** | -1 | 5 | 4 | 3,5 | 2,7 | -1 | 2,6 | 1,7 |
| **A3** | -7 | 13 | -3 | 4,2 | 1 | -7 | 5 | -0,28 |
| **$p_i$** | **0,2** | **0,5** | **0,3** | **A3** | **A2** | **A2** | **A3** | **A2** |

**Вывод:**

Стратегия А1 (продавать сразу после уборки) не является оптимальной ни по одному из критериев.

Стратегия А2 (продавать в зимние месяцы) является оптимальной согласно критериям недостаточного основания Лапласа, максиминного критерия Вальда и минимаксного критерия Сэвиджа.

Стратегия А3 (продавать в весенние месяцы) является оптимальной согласно критериям Байеса, пессимизма-оптимизма Гурвица, Ходжа-Лемана.

**Вариант 1.**

| | **F1** | **F2** | **F3** |
|---|---|---|---|
| **E1** | -10 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -11 | -3 |
| **E3** | 0 | -5 | -10 |

**Вариант 2.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -10 | -22 | -30 |
| **E2** | -14 | -19 | -23 |
| **E3** | 0 | -15 | -10 |

**Вариант 3.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -1 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -10 | -3 |
| **E3** | 0 | -50 | -10 |

**Вариант 4.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -9 | -15 | -23 |
| **E2** | -20 | -18 | -3 |
| **E3** | 0 | -5 | -14 |

**Вариант 5.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -12 | -14 | -20 |
| **E2** | -20 | -11 | -13 |
| **E3** | 0 | -5 | -10 |

**Вариант 6.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -17 | -18 | -20 |
| **E2** | -20 | -10 | -30 |
| **E3** | 0 | -5 | -1 |

**Вариант 7.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -11 | -15 | -20 |
| **E2** | -12 | -11 | -3 |
| **E3** | 0 | -5 | -10 |

**Вариант 8.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -10 | -15 | -20 |
| **E2** | -12 | -11 | -3 |
| **E3** | 0 | -15 | -10 |

**Вариант 9.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -10 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -11 | -3 |
| **E3** | 0 | -4 | -7 |

**Вариант 10.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -22 | -19 | -20 |
| **E2** | -20 | -10 | -3 |
| **E3** | 0 | -15 | -10 |

**Вариант 11.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -10 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -11 | -30 |
| **E3** | 0 | -50 | -10 |

**Вариант 12.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -14 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -17 | -31 |
| **E3** | 0 | -15 | -10 |

**Вариант 13.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -16 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -15 | -3 |
| **E3** | 0 | -12 | -10 |

**Вариант 14.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -25 | -35 | -20 |
| **E2** | -20 | -15 | -35 |
| **E3** | 0 | -25 | -10 |

**Вариант 15.**

| | F1 | F2 | F3 |
|---|---|---|---|
| **E1** | -9 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -23 | -5 |
| **E3** | 0 | -25 | -10 |

**Вариант 16.**

| | **F1** | **F2** | **F3** |
|---|---|---|---|
| **E1** | -59 | -19 | -20 |
| **E2** | -20 | -10 | -3 |
| **E3** | 0 | -15 | -10 |

**Вариант 17.**

| | **F1** | **F2** | **F3** |
|---|---|---|---|
| **E1** | -10 | -15 | -20 |
| **E2** | -48 | -11 | -30 |
| **E3** | 0 | -50 | -10 |

**Вариант 18.**

| | **F1** | **F2** | **F3** |
|---|---|---|---|
| **E1** | -14 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -27 | -31 |
| **E3** | 0 | -15 | -10 |

**Вариант 19.**

| | **F1** | **F2** | **F3** |
|---|---|---|---|
| **E1** | -26 | -15 | -20 |
| **E2** | -20 | -15 | -3 |
| **E3** | 0 | -12 | -10 |

**Вариант 20.**

| | **F1** | **F2** | **F3** |
|---|---|---|---|
| **E1** | -25 | -35 | -20 |
| **E2** | -20 | -15 | -35 |
| **E3** | 0 | -25 | -40 |