Теория

Исходное дифференциальное уравнение записывается исходя из физических законов.

Для описания механических систем используются законы Ньютона, а для электрических систем — законы Кирхгофа. Например, простой механический амортизатор, изображенный на рис. 2.2(*а*), описывается вторым законом Ньютона. (Подобное устройство может, например, представлять собой модель автомобильного амортизатора.)

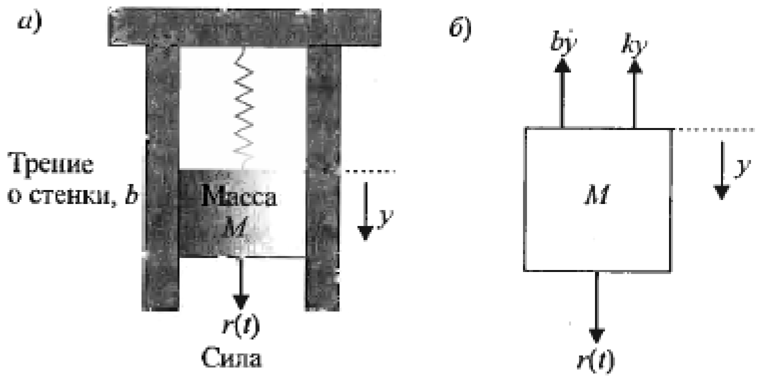


Рис. 2.2
(*а*) Система пружина–масса с демпфированием.
(*б*) Условное обозначение

Схематическое изображение динамики массы M показано на рис. 2.2(*б*). В этом примере мы будем считать, что трение груза о стенки является **вязким**, т. е. сила трения линейно зависит от скорости движения груза. В действительности сила трения может описываться более сложной зависимостью. Например, трение о стенки может быть **кулоновым**. Сила кулонова, или сухого, трения является нелинейной функцией скорости груза, которая имеет разрывный характер вблизи нулевой скорости. Для хорошо смазанной гладкой поверхности наиболее адекватным является вязкое трение, поэтому в данном и всех последующих примерах, где рассматривается механическая система, состоящая из массы и пружины, будет использоваться именно вязкое трение. В соответствии со вторым законом Ньютона, суммируя все силы, действующие на массу M, запишем:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t),$$

Переходя от общепринятых обозначений физических величин к абстрактным обозначениям, можно записать дифференциальное уравнение в следующем виде, а затем привести его к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (так, чтобы в левой части каждого уравнения была производная первого порядка):

Пример 1.1. Модель объекта управления имеет вид $\ddot{y}+5\dot{y}+7y=10u$. Записать уравнения состояния объекта.

Решение. Выбираем переменные состояния $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$. Для каждой из переменных состояния записываем дифференциальное уравнение первого порядка с учетом исходного уравнения объекта

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-7x_1-5x_2+10u.\end{cases}$$

Пример

Исходная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 2u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 7x_2 - 4x_3 - u_2 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + u_1 + 2u_2 \\ y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

Заменяем

$$p = \frac{d}{dt} \implies \dot{x} = \frac{dx}{dt} = px$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \boldsymbol{px_1} = \boldsymbol{2x_1} + 3x_2 + 2u_1 \\ \boldsymbol{px_2} = x_1 + \boldsymbol{7x_2} - 4x_3 - u_2 \\ \boldsymbol{px_3} = -3x_1 - 4x_2 - \boldsymbol{5x_3} + u_1 + 2u_2 \\ y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(p-2) = 3x_2 + 2u_1 \ (1) \\ x_2(p-7) = x_1 - 4x_3 - u_2 \ (2) \\ x_3(p+5) = -3x_1 - 4x_2 + u_1 + 2u_2 \ (3) \\ y_1 = x_1 + x_2 \ (4) \\ y_2 = x_3 \ (5) \end{cases}$$

Из первого (1) уравнения

$$x_2 = \frac{x_1(p-2) - 2u_1}{3} \qquad (6)$$

Подставляем (6) во второе (2) уравнение

$$x_2(p-7) = x_1 - 4x_3 - u_2$$

$$\frac{(x_1(p-2) - 2u_1)(p-7)}{3} = x_1 - 4x_3 - u_2$$

$$(x_1(p-2) - 2u_1)(p-7) = 3(x_1 - 4x_3 - u_2)$$

$$x_1(p^2 - 9p + 14) + u_1(-2p + 14) = 3x_1 - 12x_3 - 3u_2$$

$$x_1(p^2 - 9p + 11) + u_1(-2p + 14) + 3u_2 = -12x_3$$

$$x_3 = \frac{x_1(p^2 - 9p + 11) + u_1(-2p + 14) + 3u_2}{-12} \qquad (7)$$

Подставляем (6) и (7) в (3) третье уравнение

$$\frac{[x_1(p^2 - 9p + 11) + u_1(-2p + 14) + 3u_2](p+5)}{-12} =$$
$$= -3x_1 - 4\frac{x_1(p-2) - 2u_1}{3} + u_1 + 2u_2$$

$$[x_1(p^2-9p+11)+u_1(-2p+14)+3u_2](p+5)=$$
$$=36x_1+16(x_1(p-2)-2u_1)-12u_1-24u_2 \quad (8)$$

Раскрывая скобки в (8) и решая уравнение относительно x_1 получаем

$$x_1=\frac{u_1(2p^2-4p-114)+u_2(-3p-39)}{p^3-4p^2-50p+51} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6) получаем выражение относительно x_2

$$x_2=\frac{\left(\frac{u_1(2p^2-4p-114)+u_2(-3p-39)}{p^3-4p^2-50p+51}\right)(p-2)-2u_1}{3}$$

$$x_2=\frac{(-2p+42)u_1+(-p^2-11p+26)u_2}{p^3-4p^2-50p+51} \quad (10)$$

Подставляя (9) в (7) получаем выражение относительно x_3

$$x_3=\frac{(p^2-15p+45)u_1+(2p^2-14p+23)u_2}{p^3-4p^2-50p+51} \quad (11)$$

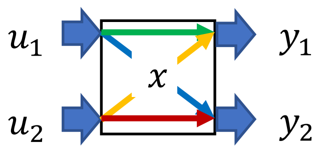
Подставляя (9) и (10) в (4) получаем выражение относительно y_1

$$y_1=\frac{(-2p^2+6p+72)u_1+(p^2+14p+13)u_2}{p^3-4p^2-50p+51} \quad (12)$$

Выражение (5)

$$y_2=x_3=\frac{(p^2-15p+45)u_1+(2p^2-14p+23)u_2}{p^3-4p^2-50p+51} \quad (13)$$

Передаточная функция выхода y_1 относительно входа u_1 равна



$$W|_{u_1\to y_1}=\frac{y_1}{u_1}=\frac{-2p^2+6p+72}{p^3-4p^2-50p+51}$$

Передаточная функция выхода y_1 относительно входа u_2 равна

$$W|_{u_1\to y_1}=\frac{y_1}{u_1}=\frac{p^2+14p+13}{p^3-4p^2-50p+51}$$

Передаточная функция выхода y_2 относительно входа u_1 равна

$$W|_{u_1\to y_2}=\frac{y_2}{u_1}=\frac{p^2-15p+45}{p^3-4p^2-50p+51}$$

Передаточная функция выхода y_2 относительно входа u_2 равна

$$W|_{u_1\to y_2}=\frac{y_2}{u_1}=\frac{2p^2-14p+23}{p^3-4p^2-50p+51}$$

Задания

Найти передаточную функцию W между входным u и выходным y сигналами

Вариант	Задание
1	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + 2u; \\ \dot{x}_2 = x_1 - 5x_2 - u; \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 + 7u; \\ y = x_1 + 3x_2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2 + 0.5u_1; \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3; \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 - x_3 + u_1 + 2u_2; \\ y_1 = x_1 + x_2; \\ y_2 = x_3. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 7u; \\ y = x_1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2; \\ \dot{x}_2 = 5x_3; \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 2x_2 - x_3 + 5u; \\ y = 0.1x_1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1; \\ \dot{x}_2 = 0.1x_3 - x_2; \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 5x_3 + u; \\ y = x_1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3 - 0.5x_2; \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5u; \\ y = x_1 + x_2. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 6x_2 - 3u; \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 + 2u; \\ y = -5x_1 + 2x_2. \end{cases}$

9	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_3 - u; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 + 2u; \\ y = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - x_3 + 2u; \\ y = x_1. \end{cases}$
11	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - x_2 - x_3 + 2u; \\ y = 3x_1 + 2x_2 + x_3. \end{cases}$
12	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 + 10u; \\ y = x_1. \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4u; \\ y = x_1. \end{cases}$
14	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_3; \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 + x_3 + 5u; \\ y = x_1 - 4x_2 + x_3. \end{cases}$
15	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4u; \\ y = x_1. \end{cases}$
16	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -5x_1 + x_2 - x_3 + 10u; \\ y = x_1. \end{cases}$
17	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 + 2u; \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 - u; \\ y = x_1. \end{cases}$

18	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - x_3 + 6u; \\ y = x_1 + 2x_2 - x_3. \end{cases}$
19	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - x_2 - 3x_3 + 4u; \\ y = 2x_1 - x_2 + x_3. \end{cases}$
20	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 0.5x_2 + 4u_1; \\ \dot{x}_2 = -0.1x_1 - x_2 + 0.4u_2; \\ y_1 = 2x_1; \\ y_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$
21	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.4x_1 + 2x_2; \\ \dot{x}_2 = -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 4.6x_2 - 10x_3 + 1.6u; \\ y = x_1 + 0.6x_2. \end{cases}$
22	$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & -2.5 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0.8 \end{bmatrix}; \quad C = [0.7 \quad 1].$
23	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \; C = [1 \quad 0 \quad 0].$