

# РАСЧЕТ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ

## Требуется:

- 1) Построить эпюры внутренних силовых факторов  $Q$  и  $M$  в балке (рис. 1);
- 2) Подобрать размеры поперечных сечений разной формы (круг, прямоугольник, швеллер, двутавр) из условия прочности по нормальным напряжениям;
- 3) Произвести полную проверку на прочность двутаврового сечения.

## Исходные данные:

$$F_1 = 200 \text{ кН}; F_2 = 50 \text{ кН}; M = 20 \text{ кНм}; q = 200 \text{ кН/м}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

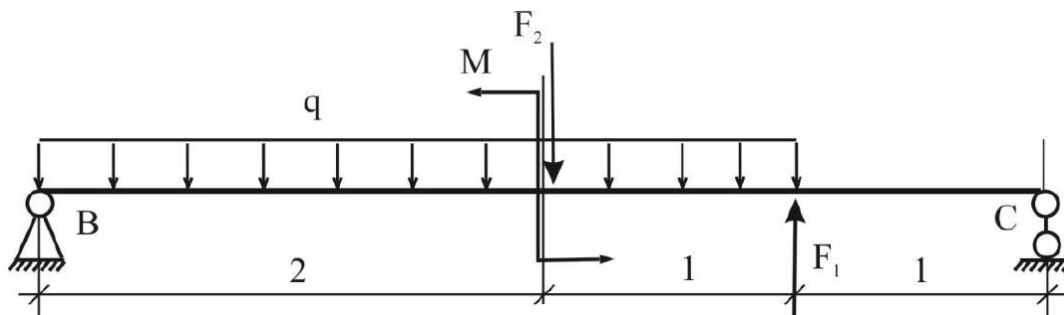


Рис. 1. Исходные данные к задаче

### 1. Определение опорных реакций

Составляются уравнения равновесия и определяются реакции  $Y_B$  и  $Y_C$  (рис. 2):

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; \quad & q \cdot 3^2 / 2 - M + 2 \cdot F_2 - 3 \cdot F_1 - 4 \cdot Y_C = 0 \\ Y_C &= (3^2 \cdot 200 / 2 - 20 + 2 \cdot 50 - 3 \cdot 200) / 4 = 95 \text{ кН}; \\ \sum M_C = 0; \quad & 3 \cdot q \cdot (1,5 + 1) + M + 2 \cdot F_2 - 1 \cdot F_1 - 4 \cdot Y_B = 0 \\ Y_B &= (3 \cdot 200 \cdot 2,5 + 20 + 2 \cdot 50 - 1 \cdot 200) / 4 = 355 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Положительные значения свидетельствуют о том, что первоначальное направление реакций выбрано верно. Отрицательные значения говорили бы о том, что фактическое направление реакций противоположно, принятому на схеме. В этом случае на схеме показывается истинное направление реакций и в дальнейшем используется положительное значение.

$$\begin{aligned}\text{Проверка } \sum F_y = 0; \quad & -q \cdot 3 - F_2 + Y_B + F_1 + Y_C = 0; \\ & -200 \cdot 3 - 50 + 355 + 200 + 95 = 0, \quad 0 = 0.\end{aligned}$$

### 2. Построение эпюр поперечных сил $Q$ и изгибающих моментов $M$

Балка разбивается на три силовых участка. Составляются уравнения поперечных сил и изгибающих моментов на каждом участке:

#### Первый участок

$$\begin{aligned}z_1 &= 0 \div 2 \text{ м} \\ Q(z_1) &= -q \cdot z_1 + Y_B \text{ (линейная зависимость } Q \text{ от } z_1); \\ z_1 = 0 \quad & Q(0) = 355 \text{ кН}; \\ z_1 = 2 \text{ м} \quad & Q(2) = -200 \cdot 2 + 355 = -45 \text{ кН};\end{aligned}$$

$$M(z_1) = -q \cdot z_1^2 / 2 + Y_B \cdot z_1 \text{ (параболическая зависимость } M \text{ от } z_1);$$

$$z_1 = 0 \quad M(0) = 0;$$

$$z_1 = 2 \text{ м} \quad M(2) = -200 \cdot 2^2 / 2 + 355 \cdot 2 = 310 \text{ кНм.}$$

Уравнение момента исследуется на экстремум  $dM / dz = 0$ :

$$-q \cdot z_1 + Y_B = 0 \quad z_{\text{ЭК}} = 355 / 200 = 1,78 \text{ м.}$$

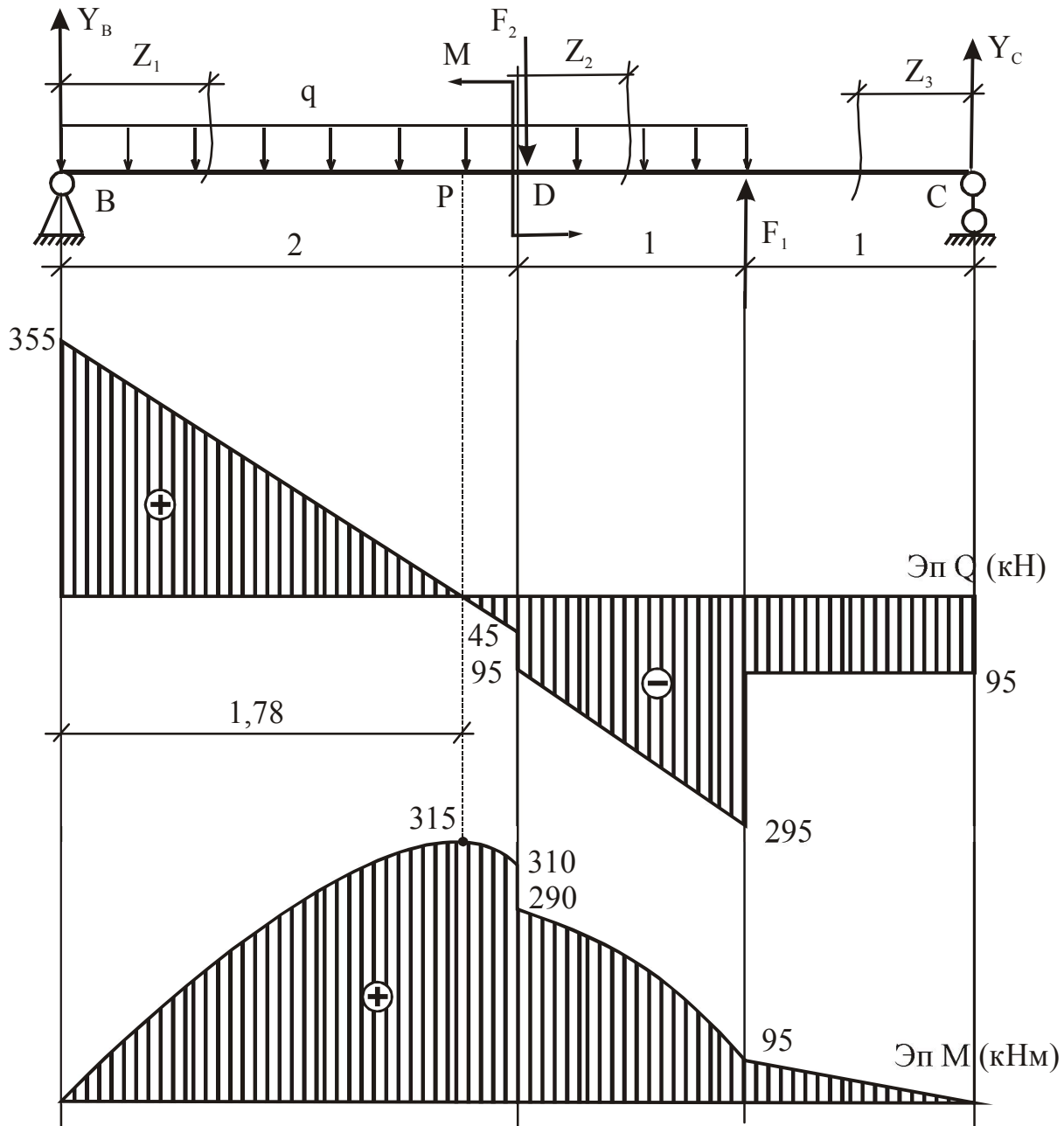


Рис. 2. Расчетная схема шарнирно закрепленной балки

Экстремум расположен в пределах рассматриваемого участка.

Определяется величина  $M_{\text{ЭК}}$ :

$$M_{\text{ЭК}} = M(1,78) = -200 \cdot 1,78^2 / 2 + 355 \cdot 1,78 = 315 \text{ кНм.}$$

**Второй участок**

$$z_2 = 0 \div 1 \text{ м}$$

$$Q(z_2) = -q \cdot (2 + z_2) + Y_B - F_2 \text{ (линейная зависимость } Q \text{ от } z_2);$$

$$z_2 = 0 \quad Q(0) = -95 \text{ кН};$$

$$z_2 = 1 \text{ м} \quad Q_{Z2} = -200 \cdot 3 + 355 - 50 = -295 \text{ кН};$$

$M(z_2) = -q \cdot (2 + z_2)^2 / 2 + Y_B(2 + z_2) - M - F_2 \cdot z_2$  (параболическая зависимость  $M$  от  $z_2$ );

$$z_2 = 0 \quad M(0) = 290 \text{ кНм};$$

$$z_2 = 1 \text{ м} \quad M(1) = -200 \cdot (2 + 1)^2 / 2 + 355 \cdot 3 - 20 - 50 \cdot 1 = 95 \text{ кНм}.$$

Уравнение момента исследуется на экстремум  $dM / dz = 0$ :

$$-2q - q \cdot z_2 + Y_B - F_2 = 0 \quad z_{\text{ЭК}} = (-2 \cdot 200 + 355 - 50) / 200 = -0,475 \text{ м}.$$

Экстремум расположен за пределами участка.

**Третий участок**

$$z_3 = 0 \div 1 \text{ м}$$

$Q(z_3) = -Y_C = -95 \text{ кН}$  (постоянное значение  $Q$  на участке, линия эпюры параллельна нулевой линии);

$$M(z_3) = Y_C \cdot z_3 \quad (\text{линейная зависимость } M \text{ от } z_3);$$

$$z_3 = 0 \quad M(0) = 0;$$

$$z_3 = 1 \text{ м} \quad M(1) = 95 \cdot 1 = 95 \text{ кНм}.$$

По полученным значениям строятся эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 2).

### 3. Определение размеров поперечного сечения балки

Из эпюры  $M$  определяется максимальное значение изгибающего момента  $M_{MAX}$  (сечение Р, рис. 2). Рассчитывается требуемый момент сопротивления сечения из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$W_X^{mp} = \frac{|M_{MAX}|}{[\sigma]} = \frac{315 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,97 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1970 \text{ см}^3.$$

Определяются размеры сечений разной формы (рис. 3):

- размеры сечения прямоугольной формы  $b, h$  для заданного соотношения  $h = 2b$ :

$$W_X^{mp} = \frac{h^2 b}{6} = \frac{4b^2 \cdot b}{6}; \quad b = \sqrt[3]{\frac{6W_X^{mp}}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1970}{4}} = 14,35 \text{ см}; \quad h = 2 \cdot 14,35 = 28,7 \text{ см}.$$

- диаметр  $d$  круглого сечения:

$$W_X^{mp} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad d = \sqrt[3]{\frac{32W_X^{mp}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1970}{3,14}} = 27 \text{ см}.$$

- номер швеллера для сечения, состоящего из четырех швеллеров:

$$W_X^{mp} = 4 \cdot W_X; \quad W_X = W_X^{mp} / 4 = 1970 / 4 = 492,5 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбирается наиболее подходящий швеллер № 33:  
 $W_X^{\text{сечения}} = 4 \cdot W_X^{\text{табл}} = 4 \cdot 484 = 1936 \text{ см}^3.$

Поскольку момент сопротивления сечения несколько меньше требуемого, необходимо определить перегрузку по напряжениям:

$$\sigma = \frac{M_{MAX}}{W_X^{\text{сечения}}} = \frac{315 \cdot 10^3}{1936 \cdot 10^{-6}} = 163 \text{ МПа};$$

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\sigma - [\sigma]}{[\sigma]} \right| \cdot 100\% = \frac{163 - 160}{160} 100\% = 1,9\%.$$

Если величина перегрузки не превышает 5 %, то надежность конструкции считается достаточной.

Площадь сечения  $A_{шв} = 4 \cdot A_{табл} = 4 \cdot 46,5 = 186 \text{ см}^2$ .

- по таблице сортамента выбирается двутавр № 55:

$W_X^{\text{сечения}} = W_X^{\text{табл}} = 2035 \text{ см}^3$ , площадь сечения  $A_{дв} = A_{табл} = 118 \text{ см}^2$ .

Наиболее рациональным по весу одного погонного метра балки является сечение, имеющее наименьшую площадь поперечного сечения:

двутавр  $A_{дв} = 118 \text{ см}^2$ , швеллер  $A_{шв} = 186 \text{ см}^2$ ,

прямоугольник  $A_{пр} = hb = 14,35 \cdot 28,7 = 411,8 \text{ см}^2$ ,

круг  $A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 27^2}{4} = 572 \text{ см}^2$ .

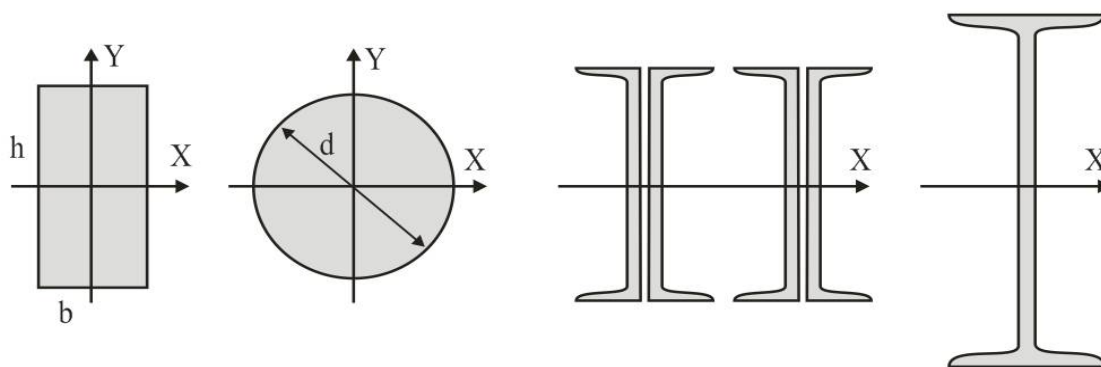


Рис. 3. Схемы поперечных сечений балки

#### 4. Полная проверка прочности балки двутаврового сечения

Для наиболее рационального двутаврового сечения балки производится проверка по касательным и эквивалентным напряжениям в опасных точках опасных сечений и оценивается надежность по условиям прочности.

При проверке по касательным напряжениям в качестве опасного принимается сечение с  $Q_{MAX}$  (сечение В, рис. 2).

**При проверке по эквивалентным напряжениям расчет выполняется для сечений, в которых  $M$  и  $Q$  одновременно достигают больших значений** (например, сечение D, рис. 2).

Таким образом, при выполнении полной проверки балки на прочность могут рассматриваться разные сечения балки (сечения Р, В, D, рис. 2). Если же имеет место случай, когда  $M$  и  $Q$  достигают своих экстремальных значений одновременно в одном и том же сечении балки, тогда все проверки выполняются для одного сечения, являющегося опасным одновременно по всем условиям прочности. Значения  $M$  и  $Q$  принимаются по модулю (без учета знака):  $Q_{MAX} = 355 \text{ кН}$ ; в сечении с неблагоприятным сочетанием внутренних силовых факторов  $Q = 95 \text{ кН}$ ;  $M = 310 \text{ кНм}$ ;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

По таблице сортамента определяем геометрические параметры двутавра № 55:

$$h = 550 \text{ мм} = 55 \text{ см}; b = 180 \text{ мм} = 18 \text{ см}; d = 11 \text{ мм} = 1,1 \text{ см};$$

$$t = 16,5 \text{ мм} = 1,65 \text{ см}; A = 118 \text{ см}^2; I_X = 55962 \text{ см}^4; S_X = 1181 \text{ см}^3; W_X = 2035 \text{ см}^3.$$

Рассчитываем наибольшее нормальное напряжение в наиболее удаленной от нейтральной оси (оси X) точке 1 (или 1' рис. 11) опасного сечения Р балки (рис. 9):

$$\sigma_{MAX} = M_{MAX} / W_X = 315 \cdot 10^{-3} / 2035 \cdot 10^{-6} = 155 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Рассчитываем наибольшее касательное напряжение в точка 2 на нейтральной оси (оси X, рис. 4) опасного сечения В балки (рис. 2):

$$\begin{aligned} \tau_{MAX} = \tau_{(2)} &= Q_{MAX} \cdot S_X / b(y) \cdot I_X = \\ &= 355 \cdot 10^{-3} \cdot 1181 \cdot 10^{-6} / (11 \cdot 10^{-3} \cdot 55962 \cdot 10^{-8}) = 68 \text{ МПа} < [\tau], \end{aligned}$$

где  $b(y) = d$  – ширина сечения на уровне, где определяются напряжения;  $S_X$  – статический момент половины сечения.

Рассчитываем эквивалентные напряжения в сечении D балки (рис. 2), в котором силовые факторы  $M, Q$  создают наиболее неблагоприятное сочетание  $Q = 95 \text{ кН}$ ,  $M = 310 \text{ кНм}$ . В поперечном сечении рассматриваем угловые точки 3 (или 3' рис. 4), в которых одновременно возникают большие нормальные и касательные напряжения, т. е. создается их неблагоприятное сочетание:

$$\begin{aligned} \sigma_{(3)} &= M \cdot y_3 / I_X = M \cdot (h/2 - t) / I_X = \\ &= 310 \cdot 10^{-3} \cdot (550/2 - 16,5) \cdot 10^{-3} / 55962 \cdot 10^{-8} = 143 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

где  $y_3$  – расстояние от оси X до точки 3 рассматриваемого сечения.

$$\text{Касательные напряжения в точке 3: } \tau_{(3)} = Q \cdot S_X^{omc} / b(y) \cdot I_X,$$

где  $b(y) = d$  – ширина сечения на уровне, где определяются напряжения;  $S_X^{omc}$  – статический момент отсеченной части сечения (верхней полки).

Определяем статический момент отсеченной части сечения:

$$S_X^{omc} = A^{omc} y^{omc} = bt(h/2 - t/2) = 18 \cdot 1,65(55/2 - 1,65/2) = 792 \text{ см}^3,$$

где  $A^{omc}$  – площадь отсеченной части сечения (полки двутавра);  $y^{omc}$  – координата центра тяжести отсеченной части сечения.

$$\tau_{(3)} = 95 \cdot 10^{-3} \cdot 792 \cdot 10^{-6} / (11 \cdot 10^{-3} \cdot 55962 \cdot 10^{-8}) = 12,4 \text{ МПа}$$

Эквивалентные напряжения в точке 3 рассчитываются по IV теории прочности:

$$\sigma_{ЭKB}^{IV} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 3\tau_{(3)}^2} = \sqrt{143^2 + 3 \cdot 12,4^2} = 145 \text{ МПа} < [\sigma].$$

По полученным значениям строятся эпюры нормальных и касательных напряжений (рис. 4) для рассматриваемых сечений балки. Во всех опасных точках сечения условия прочности выполняются.

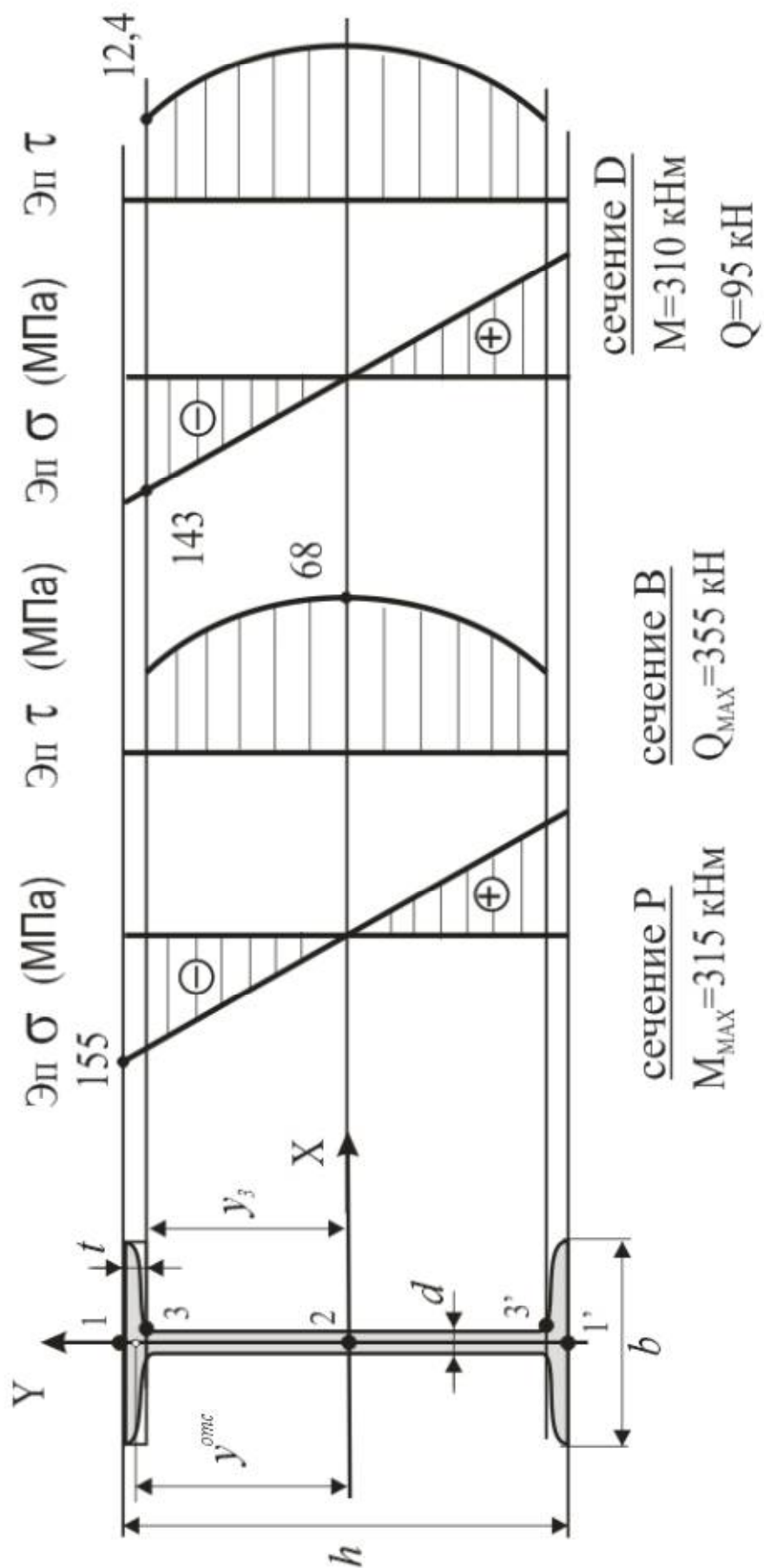


Рис. 4. Схема двутаврового сечения