

Составители: ПАНОВ Вадим Владимирович
ЛОСЕВА Ирина Васильевна

УДК 620.10

Сопротивление материалов: Методические для студентов-заочников: ч.1 / Сост.: В.В. Панов, И.В. Лосева; Самарск. гос. арх.-строит. ун-т. Самара, 2006. 46 с.

Содержат задания к контрольным работам с примерами расчета. Контрольные работы выполняются в четвертом семестре и предназначены для студентов II курса специальности 290300 «Промышленное и гражданское строительство», а также в шестом семестре для студентов III курса специальностей 290700 «Теплогазоснабжение и вентиляция», 330400 – «Пожарная безопасность».

Настоящие методические указания не могут быть полностью или частично воспроизведены, тиражированы (в том числе ксерокопированы) и распространены без разрешения Самарского государственного архитектурно-строительного университета.

Ответственный редактор Ю.Э. Сеницкий
Редактор Л.И. Глезерова
Технический редактор А. И. Непогодина
Корректор Е. М. Фоменкова

Подписано в печать 20.01.07 Формат 60 x 84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Уч.-изд. л.3.0
Усл. печ. л.2.8.
Тираж 150 экз. Заказ № 1268

Типография ООО «СЦП-М»
443010, Самара, ул. Галактионовская, 79, тел. 9912379

Самарский государственный архитектурно-строительный университет.
443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

© Самарский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2006

УКАЗАНИЯ О ПОРЯДКЕ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В процессе изучения первой части курса сопротивления материалов студенты заочного факультета специальности ПГС выполняют две контрольные работы. Первая контрольная работа включает в себя задачи 1,2,3,4 вторая -5,6,7.

Исходные данные для выполнения работы каждый студент выписывает из таблицы в соответствии со своим учебным шифром, т.е. по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Например, если номер зачетной книжки 99123, то первая цифра шифра 1, вторая-2, третья-3.

При решении задач нельзя допускать небрежность в изложении материала и его оформлении. Графики (эпюры) должны выполняться тщательно и с соблюдением масштаба.

Получив контрольную работу с рецензией, студент обязан внести все исправления и дополнения, соответствующие указаниям преподавателя. Если работа не зачтена, то после ее исправления (на отдельных листах) следует представить полностью всю работу для повторного рецензирования.

Контрольная работа, выполненная не по соответствующему шифру, не зачитывается и возвращается студенту без ее проверки.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ - СЖАТИИ.

Задача 1. Один конец вертикального бруса жестко зашпелен, другой - свободен. Общая длина бруса L (рис. 1). Одна часть бруса, длина которой l_1 , имеет постоянную по длине площадь поперечного сечения F_1 , другая часть - постоянную площадь F_2 . В сечении, отстоящем от свободного конца бруса на расстоянии C , действует сила P . Вес единицы объема материала $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Требуется:

1. Вычертить расчетную схему, указав числовые значения размеров и нагрузки.
2. Составить для каждого участка бруса в сечении с текущей координатой Z ($0 \leq Z \leq L$) аналитические выражения изменения продольного усилия N и нормального напряжения σ с учетом собственного веса бруса.
3. Построить эпюры продольных усилий N и напряжений σ .
4. Вычислить с учетом собственного веса бруса перемещение сечения, обстоящего от свободного конца бруса на расстоянии l .

Данные взять из табл. 1.



РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ - СЖАТИИ

Задача 2. Абсолютно жесткий брус (рис.2), имеющий одну шарнирно-неподвижную опору и прикрепленный двумя тягами из упруго-пластического материала, нагружен переменной по значению силой P . Площадь поперечного сечения тяг $F_1 = F$ и $F_2 = 2F$, модуль упругости и предел текучести материала тяг $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_T = 240$ МПа; допустимое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}$, где коэффициент запаса прочности $k = 1,5$.

Требуется:

1. Сделать чертеж всей конструкции по заданным размерам, соблюдая масштаб.
2. Найти усилия и напряжения в тягах, выразив их через силу P .
3. Определить допустимую нагрузку $P_{доп}$, приравняв большее из напряжений в двух тягах допустимому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа.
4. Найти предельную грузоподъемность системы P_T^* и допустимую нагрузку $P_{доп}^*$.
5. Сравнить величины $P_{доп}$, полученные при расчете по допустимым напряжениям (см.п.3) и допустимым нагрузкам (см.п.4).

Данные взять из табл.2

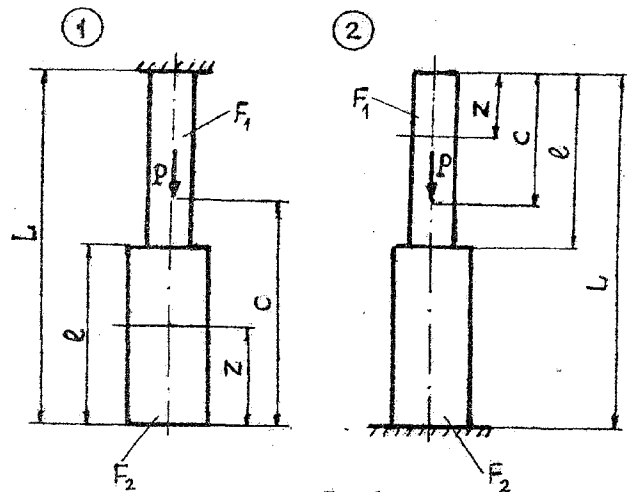


Рис. 1

Таблица 1

Первая цифра шифра	L, м	C, м	$\frac{c}{L}$	Вторая цифра шифра	$F_1,$ 10^{-4} м^2	$F_2,$ 10^{-4} м^2	P, кН	Третья цифра шифра (№ схемы)	Схема (рис. 1)
1	6	1	0,80	1	40	100	0,6	1	1
2	4	2	0,75	2	60	120	0,7	2	2
3	5	3	0,70	3	80	160	0,8	3	1
4	6	1	0,60	4	100	180	0,9	4	2
5	4	2	0,50	5	120	200	1,0	5	1
6	5	3	0,40	6	100	140	1,1	6	2
7	6	1	0,30	7	80	120	1,2	7	1
8	5	2	0,25	8	60	160	1,3	8	2
9	6	3	0,20	9	80	180	1,4	9	1
0	4	1	0,10	0	40	200	1,5	0	2

Таблица 2

Первая цифра шифра	F, 10^{-4} м^2	Вторая цифра шифра	a, м	b, м	c, м	Третья цифра шифра (№ схемы)	$l_1,$ м	$l_2,$ м
1	11	1	1,1	1,1	1,1	1	0,6	0,6
2	12	2	1,2	1,2	1,2	2	0,8	0,8
3	13	3	1,3	1,3	1,3	3	1,0	1,0
4	14	4	1,4	1,4	1,4	4	1,2	1,2
5	15	5	1,5	1,5	1,5	5	1,4	1,4
6	16	6	1,6	1,6	1,6	6	1,5	1,5
7	17	7	1,7	1,7	1,7	7	1,6	1,6
8	18	8	1,8	1,8	1,8	8	1,8	1,8
9	19	9	1,9	1,9	1,9	9	2,0	2,0
0	20	0	1,0	1,0	1,0	0	2,2	2,2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ
ПРИ КРУЧЕНИИ

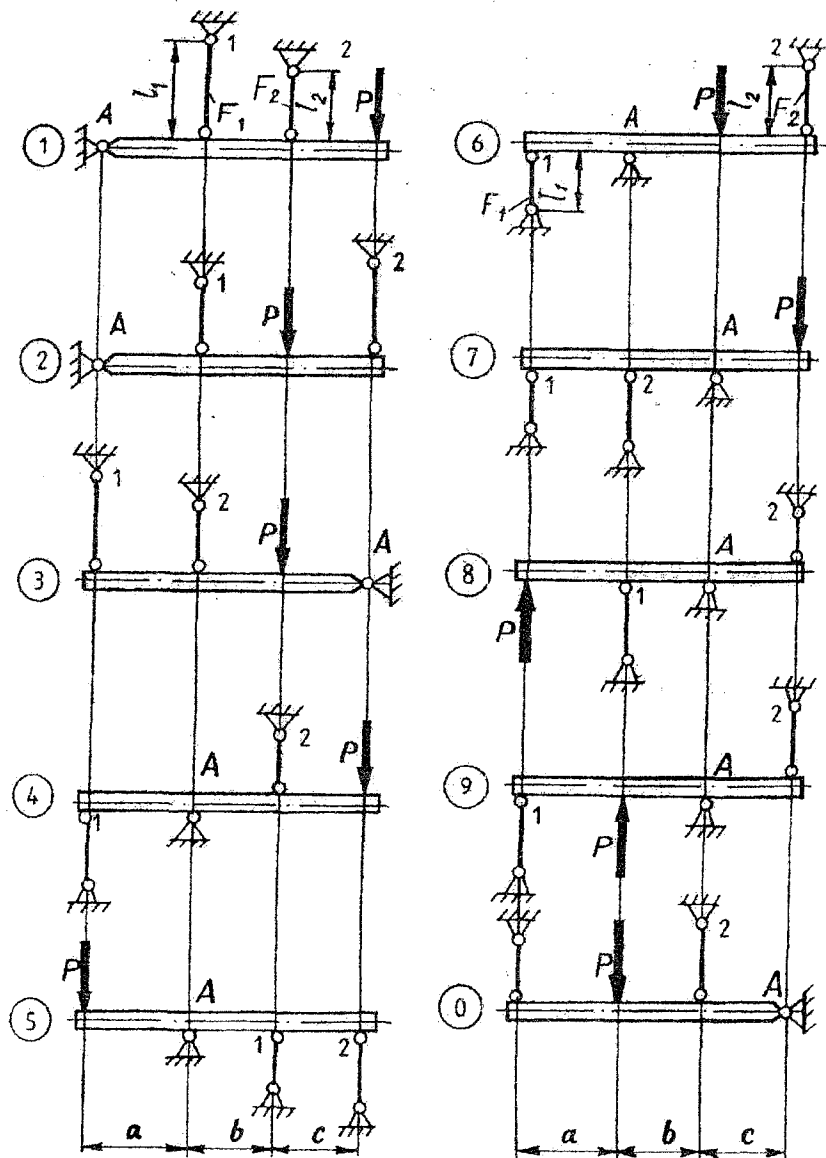


Рис.2

Задача 3. К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 (рис.3).

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента X угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю.
2. Для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов.
3. При заданном значении $R_{ср}$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины, соответственно равной 30,35,40,45,50,60,70,80,90,100 мм.
4. Построить эпюру углов закручивания.

Данные взять из табл. 3

Таблица 3

Первая цифра шифра	a , м	M_1 , кНМ	Вторая цифра шифра	b , м	M_2 , кНМ	Третья цифра шифра	Схема по рис. 3	c , м	M_3 , кНМ	$R_{ср}$, МПа
1	1,1	1,1	1	1,1	1,1	1	I	1,1	1,1	90
2	1,2	1,2	2	1,2	1,2	2	II	1,2	1,2	95
3	1,3	1,3	3	1,3	1,3	3	III	1,3	1,3	100
4	1,4	1,4	4	1,4	1,4	4	IV	1,4	1,4	105
5	1,5	1,5	5	1,5	1,5	5	V	1,5	1,5	110
6	1,6	1,6	6	1,6	1,6	6	VI	1,6	1,6	90
7	1,7	1,7	7	1,7	1,7	7	VII	1,7	1,7	95
8	1,8	1,8	8	1,8	1,8	8	VIII	1,8	1,8	100
9	1,9	1,9	9	1,9	1,9	9	IX	1,9	1,9	105
0	2,0	2,0	0	2,0	2,0	0	X	2,0	2,0	110

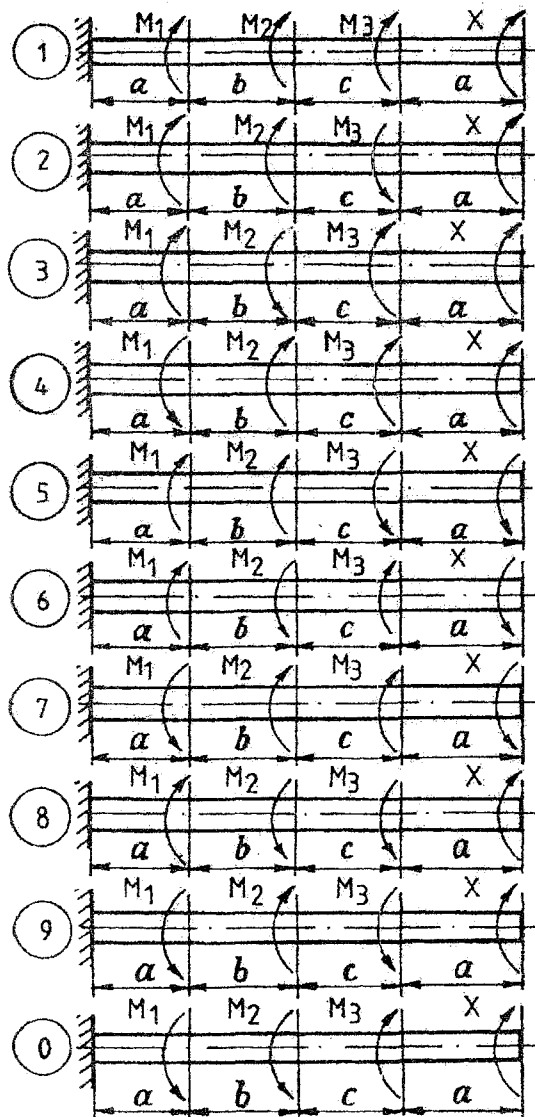


Рис.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Задача 4. Поперечное сечение бруса (рис.4) состоит из двух частей, соединенных в одно целое.

Требуется:

1. Вычертить схему сечения в масштабе 1:2, на которой указать положение всех осей и все размеры.
2. Определить положение центра тяжести.
3. Найти осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно центральных осей.
4. Определить направление главных центральных осей.
5. Найти моменты инерции относительно главных центральных осей.

Исходные данные взять из табл. 4.

Таблица 4

Первая цифра шифра	Равнобокий уголок	Вторая цифра шифра	Швеллер	Третья цифра шифра (№ схемы)	Двутавр
1	80x80x8	1	14	1	12
2	80x80x6	2	16	2	14
3	90x90x7	3	18	3	16
4	90x90x6	4	20	4	18
5	90x90x8	5	22	5	20a
6	100x100x8	6	14	6	20
7	100x100x10	7	16	7	22a
8	100x100x12	8	18	8	22
9	125x125x10	9	20	9	24a
0	125x125x12	0	22	0	24

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

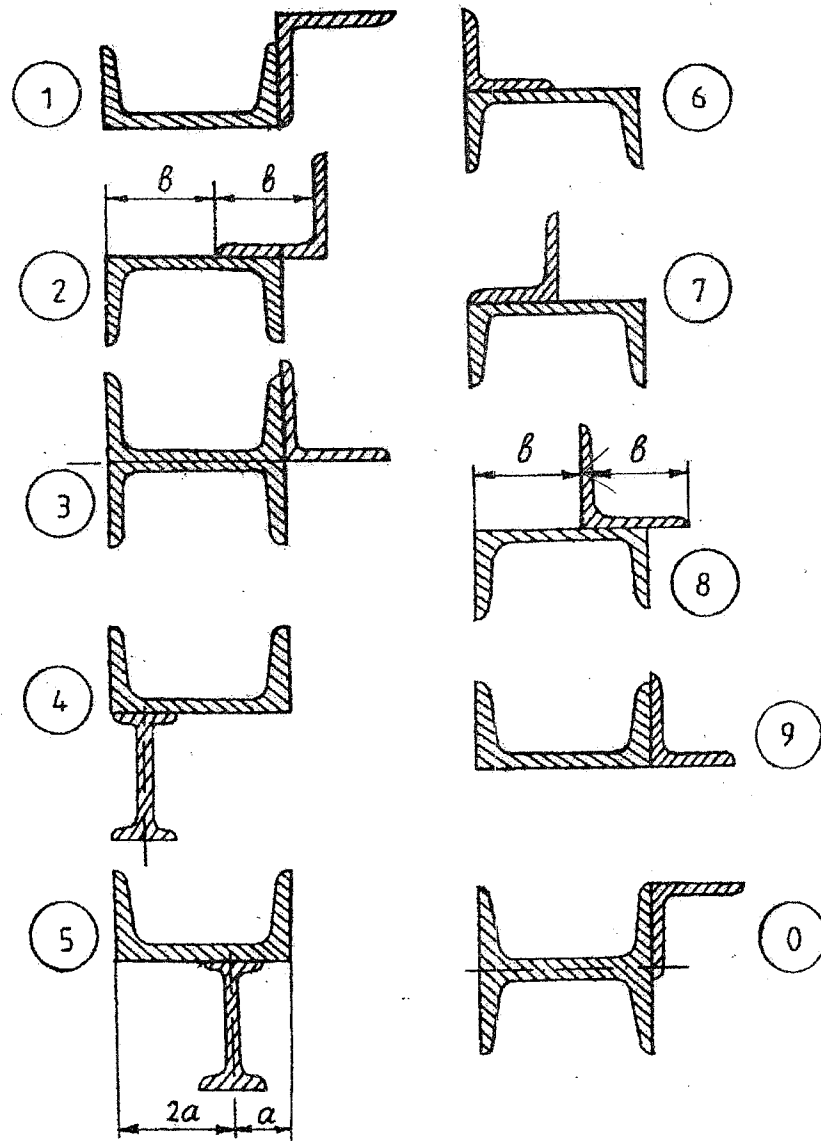


Рис. 4

- Задача 5. Для схем балок I (рис.5), II (рис.6). Требуется:
1. Вычертить расчетные схемы, указав числовые значения размеров и нагрузок.
 2. Вычислить опорные реакции и проверить их.
 3. Для всех схем составить аналитические выражения изменения поперечной силы Q и изгибающего момента M на всех участках.
 4. Для всех схем построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .
 5. По опасному сечению подобрать поперечные сечения:
 - а) Для схемы I- круглое при расчетном сопротивлении $R=10$ МПа. (дерево);
 - б) Для схемы II- двуглавное при расчетном сопротивлении $R=200$ МПа (сталь).

Исходные данные взять из табл. 5.

Таблица 5

Первая цифра цифра	q кН/м	a м	Вторая цифра цифра	c/a	p/qa	M/qa^2	Третья цифра цифра (№ схемы)	Схема I рис.5	Схема II рис.6
1	6	0,5	1	1,2	0,6	0,2	1	1	1
2	8	1,0	2	1,4	0,5	0,4	2	2	2
3	10	1,5	3	1,6	0,8	0,6	3	3	3
4	12	2,0	4	1,8	1,2	0,8	4	4	4
5	14	2,5	5	2,0	1,5	1,0	5	5	5
6	16	1,5	6	1,2	1,6	0,2	6	6	6
7	12	2,0	7	1,4	1,0	0,4	7	7	7
8	10	1,0	8	1,6	1,8	0,6	8	8	8
9	8	2,5	9	1,8	2,4	0,8	9	9	9
0	6	0,5	0	2,0	2,0	1,0	0	0	0

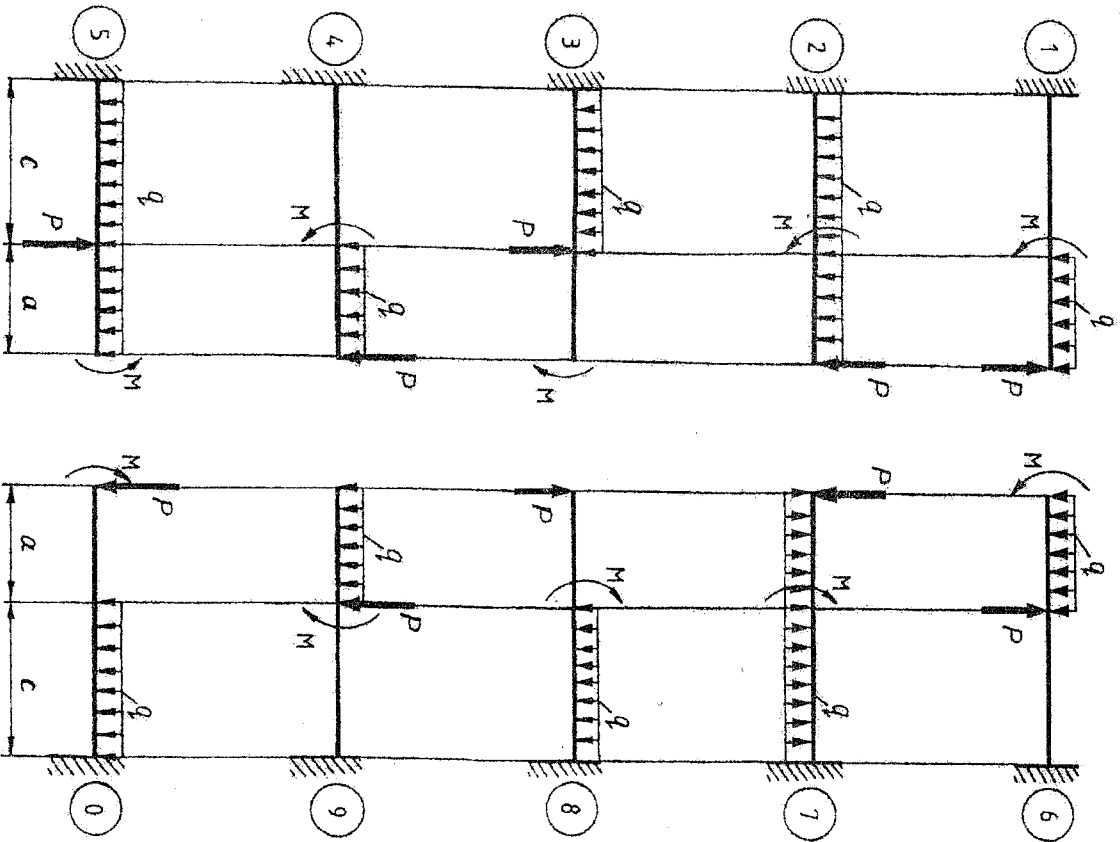


Рис.5

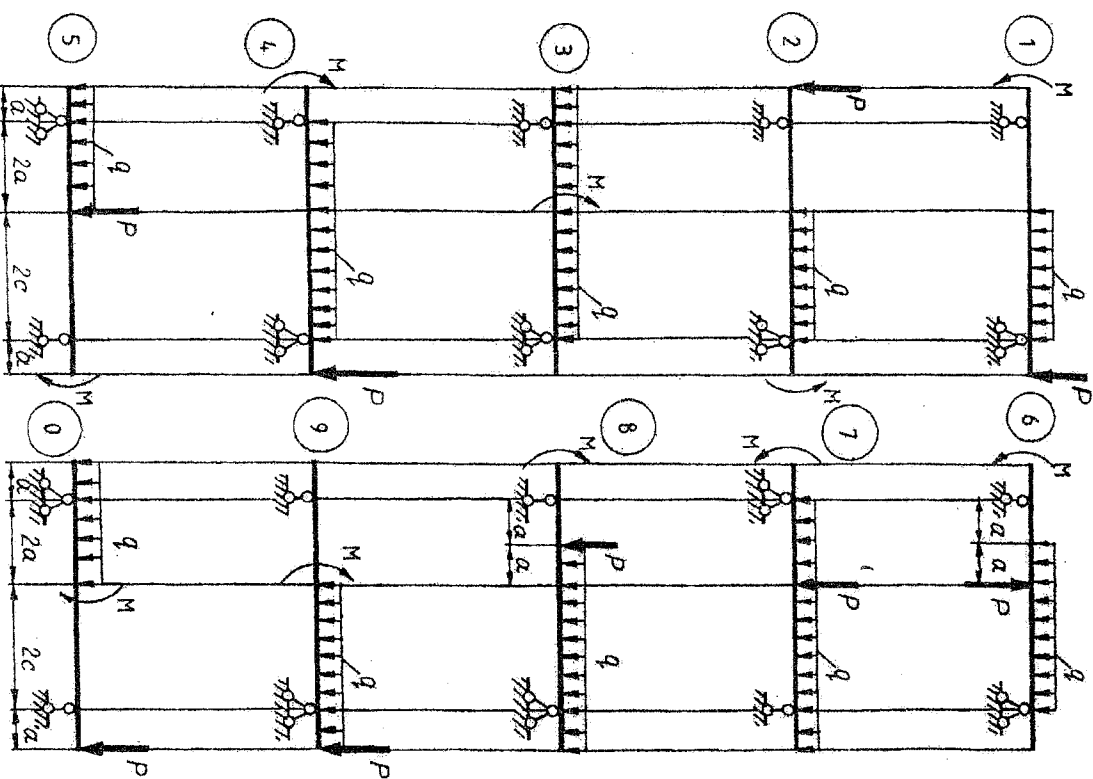


Рис.6

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Задача 6. Для балки, изображенной на рис. 7, требуется:

1. Найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2).
2. Построить эпюры Q и M .
3. Построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.

Данные взять из табл. 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛКИ-КОНСОЛИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Задача 7. Определить прогиб и угол поворота свободного конца балки переменного сечения (рис. 8)

Данные взять из табл. 6

Таблица 6

Первая цифра шифра	α	β	Вторая цифра шифра	к	Третья цифра шифра (№ схемы)	Схема	
						Рис. 7	Рис. 8
1	0,1	0,1	1	1,5	1	1	
2	0,2	0,2	2	2	2	2	
3	0,3	0,3	3	3	3	3	
4	0,4	0,4	4	4	4	4	
5	0,5	0,5	5	5	5	5	
6	0,6	0,6	6	6	6	6	
7	0,7	0,7	7	7	7	7	
8	0,8	0,8	8	8	8	8	
9	0,9	0,9	9	9	9	9	
0	1,0	1,0	0	10	0	0	

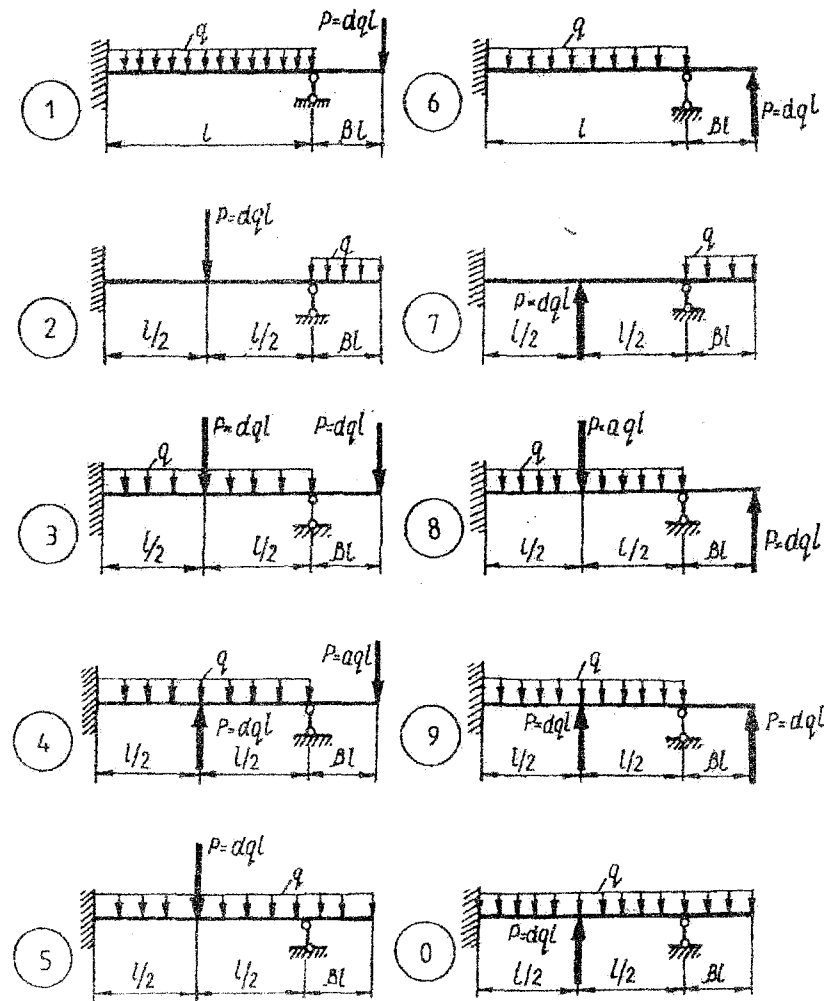


Рис. 7

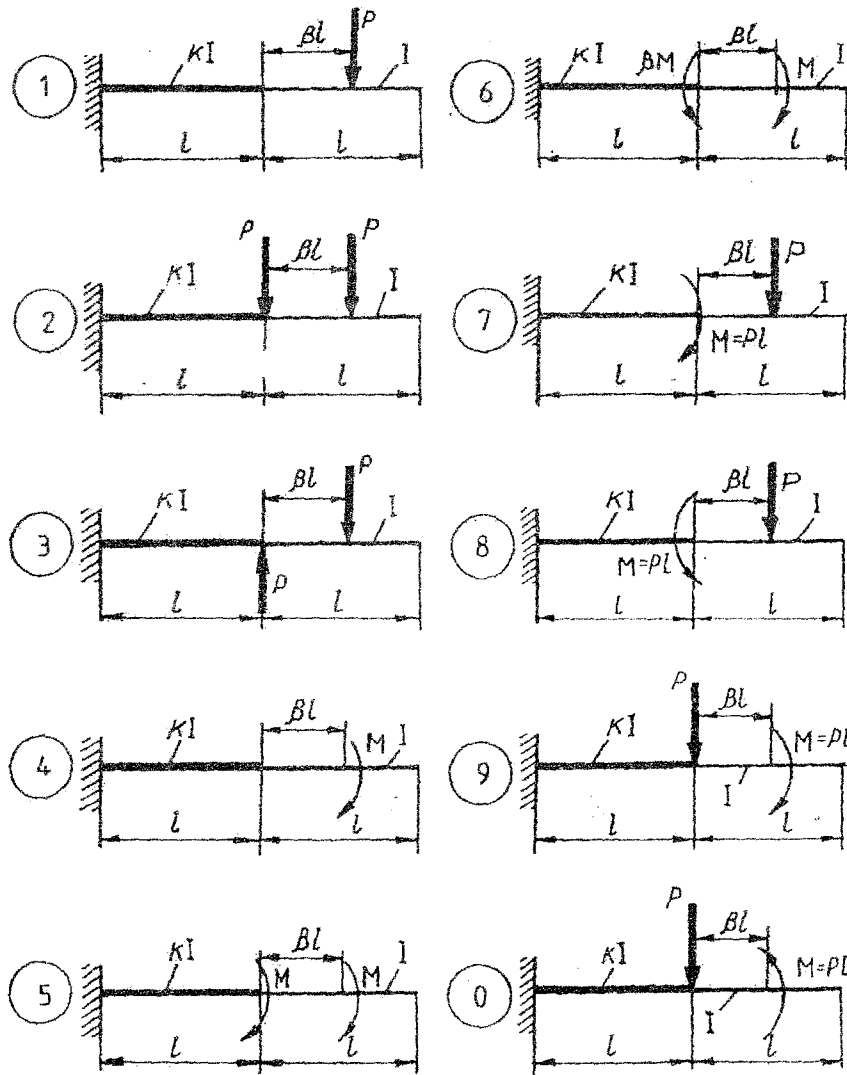


Рис. 8

Пример расчета (задача 1). Стальной стержень находится под действием продольной силы P и собственного веса (рис. 9а).

Требуется: 1) составить аналитические выражения для продольных сил N , нормальных напряжений σ и вычислить их значения для каждого из участков, с учетом их собственного веса; 2) построить эпюры N и σ ; 3) найти перемещение свободного конца колонны от действия силы P и собственного веса.

Исходные данные: $P=2\text{кН}$; $l_1=l_2=1\text{м}$; $E=2 \cdot 10^8 \text{кН/м}^2$;

$F_1=20 \cdot 10^{-4} \text{м}^2$; $F_2=40 \cdot 10^{-4} \text{м}^2$; $\gamma=78 \text{кН/м}^3$.

Решение

1. Составить аналитические выражения для продольных сил N_z , нормальных напряжений σ_z и вычислить их значения для каждого из участков с учетом их собственных весов.

Для этого воспользуемся методом сечений.

I участок : $0 \leq Z_1 \leq 1\text{м}$.

Проведя сечение 1-1 на расстоянии Z_1 от свободного конца (точка А), рассмотрим равновесие нижней части. При этом к рассматриваемой части прикладывается сосредоточенная сила P , в центре ее тяжести-собственный вес P_{z_1} и продольная сила N_{z_1} , заменяющая действие отброшенной верхней части бруса на нижнюю рассматриваемую (рис. 9, б).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum Z=0; \quad N_{z_1} - P - P_{z_1} = 0.$$

В свою очередь, собственный вес нижней части колонны определяется следующим образом:

$$P_{z_1} = \gamma F_1 Z_1 = 78 \cdot 20 \cdot 10^{-4} Z_1 = 1560 \cdot 10^{-4} Z_1.$$

Тогда выражение для продольной силы N_{z_1} будет иметь вид:

$$N_{z_1} = P + P_{z_1} = 2 + 1560 \cdot 10^{-4} Z_1,$$

а для нормальных напряжений σ_{z_1} :

$$\sigma_{z_1} = N_{z_1} / F_1 = (2 + 1560 \cdot 10^{-4} Z_1) / 20 \cdot 10^{-4} = 1000 + 78 Z_1.$$

Так как N_{z_1} и σ_{z_1} линейно зависят от Z_1 , то для построения их графиков (эпюр) достаточно определить значения этих величин на границах участка, т.е.

$$\text{при } Z_1=0 \quad N_{z_1}(0) = 2\text{кН}; \quad \sigma_{z_1}(0) = 1000 \text{кН/м}^2;$$

$$\text{при } Z_1=1\text{м} \quad N_{z_1}(1) = 2,156\text{кН}; \quad \sigma_{z_1}(1) = 1078 \text{кН/м}^2.$$

Знак плюс при N_{z_1} и σ_{z_1} указывает на то, что принятое направление для этих величин совпадает с действительным, т.е. в принятой схеме продольная сила растягивает первый участок.

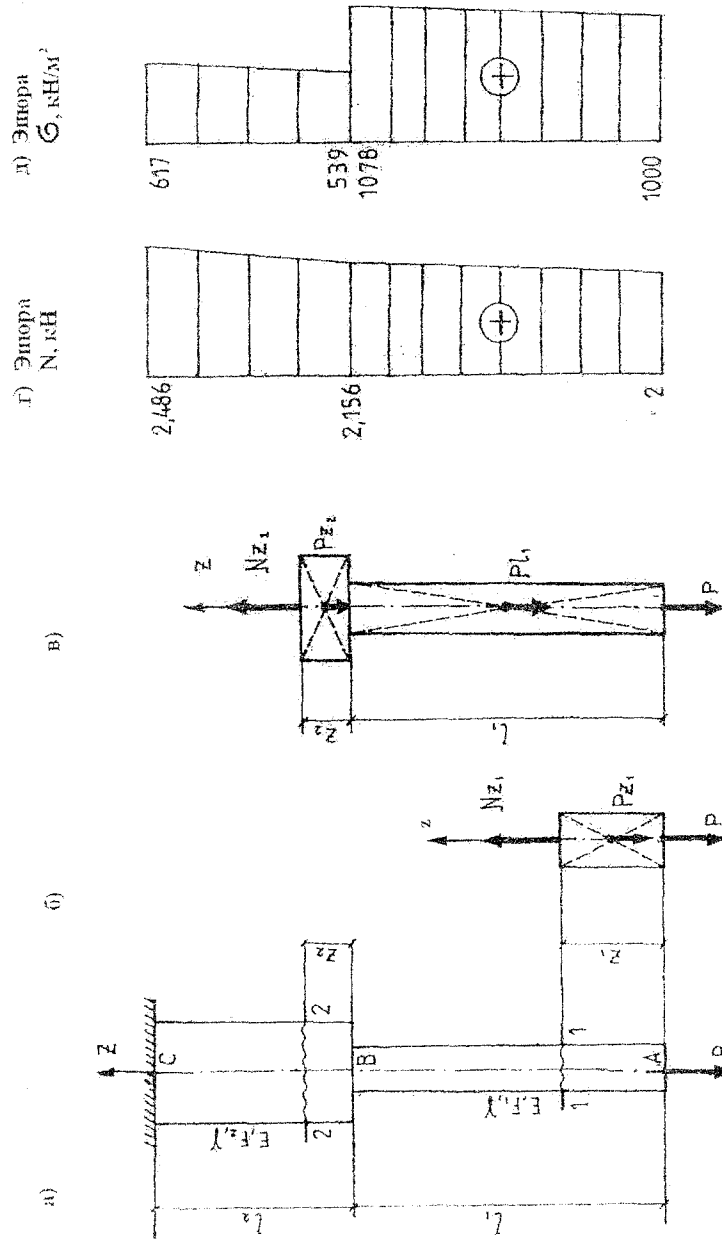


Рис. 9

и участок $0 < z_2 < l_2$.
 Аналогично предыдущему проводим сечение 2-2 на расстоянии Z_2 (рис. 9, в). Для нижней части составляем уравнение равновесия $\sum Z = 0$.
 В это уравнение войдут сосредоточенная сила P , собственный вес первого участка $P_1 = \gamma F_1 l_1$, собственный вес отсеченной части второго участка $P_2 = \gamma F_2 l_2$, а также сила N_{z_2} .

Тогда уравнение равновесия примет вид:

$$N_{z_2} - P - P_1 - P_2 = 0;$$

$$N_{z_2} = P + P_1 + P_2 = 2 + 1560 \cdot 10^{-4} + 3120 \cdot 10^{-4} Z_2$$

Выражение для напряжения:

$$\sigma_{z_2} = N_{z_2} / F_2 = 2 + 1560 \cdot 10^{-4} (1 + 2Z_2) / 40 \cdot 10^{-4} = 500 + 39(1 + 2Z_2).$$

Вычислим значение ординат N_{z_2} и σ_{z_2} в граничных сечениях второго участка:

при $Z_2 = 0$ $N_{z_2}(0) = 2,156 \text{ кН}$; $\sigma_{z_2}(0) = 539 \text{ кН/м}^2$;

при $Z_2 = 1 \text{ м}$ $N_{z_2}(1) = 2,468 \text{ кН}$; $\sigma_{z_2}(1) = 617 \text{ кН/м}^2$.

2. Построить эшоры N_z и σ_z .

По причине линейной зависимости нормальной силы и напряжений от координаты Z , для построения их эшор достаточно значений N_z и σ_z в граничных сечениях каждого из участков (см. рис. 9, г, д).

3. Вычислить перемещения нижнего конца колонны до действия всех сил.
 Полное перемещение согласно закону Гука может быть вычислено по формуле

$$\Delta l = \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} \frac{N_z dz}{EF_i}$$

В данном случае это выражение принимает следующий вид:

$$\Delta l = \int_0^1 \frac{N_{z_1} dz}{EF_1} + \int_0^1 \frac{N_{z_2} dz}{EF_2} = \frac{1}{EF_1} \int_0^1 N_{z_1} dz + \frac{1}{EF_2} \int_0^1 N_{z_2} dz$$

Так как величины определенных интегралов равны площадям, очерченным соответствующими подынтегральными функциями, то для вычисления перемещений Δl достаточно вычислить площади эшор $N(Z)$ на каждом из этих участков и разделить их на EF_i . Следовательно,

$$\Delta l = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{(2 + 2,156) \cdot 1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{(2,156 + 2,468) \cdot 1}{2} = 0,08085 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

Пример расчета (задача 2). Абсолютно жесткий брус, имеющий одну шарнирно-неподвижную опору, прикреплен к двум стержням при помощи шарниров и нагружен силой P (рис. 10, а).

Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу P ; 2) определить допускаемую нагрузку $P_{\text{доп}}$, приняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$; 3) найти предельную грузоподъемность системы P_T^k и допускаемую нагрузку $P_{\text{доп}}^k$, если предел текучести материала $\sigma_T = 240 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ и запас прочности $k=1,5$; 4) сравнить величины $P_{\text{доп}}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и нагрузкам.

Исходные данные:

$$F = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2; \quad a = 1,3 \text{ м}; \quad b = 1 \text{ м}; \quad c = 1,3 \text{ м}; \\ l_1 = 2,3 \text{ м}; \quad l_2 = 1,3 \text{ м}.$$

Решение

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразить их через силу P . Освобождаем систему от связей и вводим неизвестные усилия N_1 , N_2 и реакцию V_A (рис. 10.б). На этом же рисунке показано положение оси бруса после деформации системы.

Составляем условия равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad V_A + N_1 + N_2 = 0. \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0; \quad N_1 a + N_2 (a + b + c) - P(a + b) = 0. \quad (2)$$

Следовательно, задача один раз статически неопределима. Для ее решения требуется составить дополнительное уравнение, вытекающее из условия совместности деформаций всех элементов системы. Это означает, что стержни 1 и 2 удлиняются совместно друг с другом, образуя подобные треугольники ABB_1 и ADD_1 (рис. 10.б). Из этого подобия следует пропорция:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{a + b + c}; \quad \Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a}{a + b + c}. \quad (3)$$

Так как удлинения Δl_1 и Δl_2 пропорциональны усилиям в этих стержнях N_1 и N_2 , то, пользуясь законом Гука, выразим их через силы

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}$$

и, подставив в выражение (3), имеем:

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_2 l_2}{E \cdot 2F} \frac{a}{a + b + c},$$

отсюда, сократив на EF , получим:

$$N_1 = N_2 \frac{l_2}{2l_1} \frac{a}{a + b + c}. \quad (4)$$

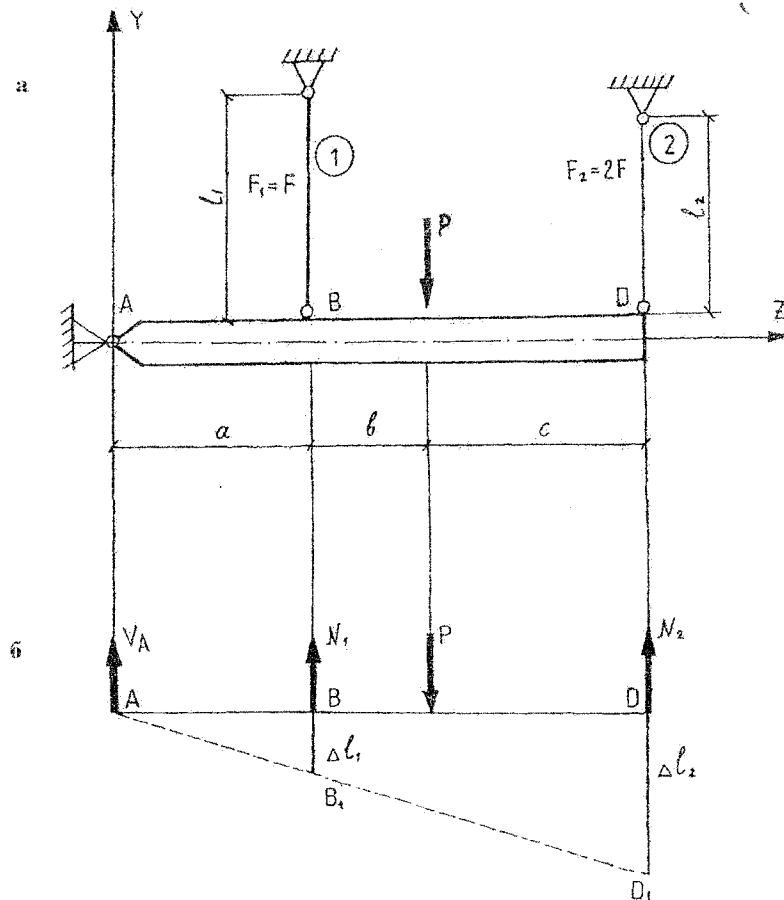


Рис. 10

Это и есть дополнительное уравнение, связывающее усилия N_1 и N_2 .

Так как реакция опоры V_A нас не интересует в данном случае, то уравнение (1) мы рассматривать не будем (его можно было и не составлять), а совместно решим систему уравнений (2) и (4).

$$\left. \begin{aligned} N_1 a + N_2 (a + v + c) &= P(a + v) \\ N_1 &= N_2 \frac{l_2}{2l_1} \cdot \frac{a}{a + v + c} \end{aligned} \right\}$$

Затем, подставляя числовые значения входящих величин, определим усилия N_1 и N_2 через P : $N_1 = 0,06P$; $N_2 = 0,62P$.

По найденным усилиям определяем напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,06P}{20 \cdot 10^{-4}} = 30P \text{ кН/м}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,62P}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 155P \text{ кН/м}^2$$

2. Определение $P_{\text{доп}}$ по допускаемому напряжению в наиболее напряженном стержне системы. В нашем случае $\sigma_1 > \sigma_2$, поэтому приравняем σ_2 допускаемому напряжению:

$$\sigma_2 = 155P_{\text{доп}}^{\sigma} = [\sigma]$$

$$\text{отсюда } P_{\text{доп}}^{\sigma} = [\sigma]/155 = 160 \cdot 10^3 / 155 = 1032 \text{ кН}$$

3. Определение грузоподъемности системы по методу разрушающей нагрузки.

При расчете конструкций по разрушающей (предельной) нагрузке за опасное принимается такое состояние конструкции, когда напряжения достигают предела текучести σ_{τ} уже не в одном (самом опасном) элементе, а во всех элементах её. Назовем эту нагрузку P_{τ}^* . В соответствии с этим, если только в одном элементе системы будет достигнут предел текучести σ_{τ} , состояние конструкции не считается опасным (как по методу допускаемых напряжений), так как она и дальше способна воспринимать увеличение нагрузки за счет недоиспользования остальных элементов. В этот момент усилие в опасном (в нашем случае во втором) стержне будет равно $N_2^* = \sigma_{\tau} \cdot F_2 = \text{const}$ и будет оставаться постоянным при дальнейшей деформации системы за счет площадки текучести пластичного материала.

Дальнейший рост нагрузки будет восприниматься остальными элементами конструкции до появления в них также текучести. И только тогда, когда напряжения во всех элементах системы достигнут предела текучести, наступит опасное состояние для всей системы в целом — конструкция будет разрушаться. При этом нагрузка достигнет предельного значения P_{τ}^* . В нашем примере напряжение в первом стержне тоже достигнет значения σ_{τ} , а усилие в нем будет равно $N_1^* = \sigma_{\tau} \cdot F_1 = \text{const}$.

весия (2). Подставив в него $N_1 = N_1^*$; $N_2 = N_2^*$ и $P = P_{\tau}^*$, получим:

$$N_1^* a + N_2^* (a + v + c) = P_{\tau}^* (a + v)$$

После подстановки значений $N_1^* = \sigma_{\tau} \cdot F_1$, $N_2^* = \sigma_{\tau} \cdot F_2$, находим:

$$P_{\tau}^* = \frac{\sigma_{\tau} [F_1 a + F_2 (a + v + c)]}{a + v} = \frac{240 \cdot 10^3 [20 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3 + 40 \cdot 10^{-4} \cdot 3,6]}{2,3} = 1774 \text{ кН}$$

тогда допускаемая нагрузка может быть определена так:

$$P_{\text{доп}}^* = \frac{P_{\tau}^*}{k} = \frac{1774}{1,5} = 1183 \text{ кН}$$

4. Из сопоставления $P_{\text{доп}}^{\sigma}$ и $P_{\text{доп}}^*$ видно, что $P_{\text{доп}}^* > P_{\text{доп}}^{\sigma}$. Отсюда следует вывод, что метод расчета по разрушающей нагрузке позволяет выявить скрытые запасы прочности конструкции и добиться повышения ее несущей способности.

Пример расчета (задача 3). К стальному валу приложены три известных крутящих момента M_1, M_2, M_3 (рис. 11, а).

Требуется: 1) установить, при каком значении момента X угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю; 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении $R_{\text{ср}}$ определить диаметр вала из расчета на прочность; 4) построить эпюру углов закручивания.

Дано: $M_1 = 1,9 \text{ кНм}$; $M_2 = 1,1 \text{ кНм}$; $M_3 = 1,3 \text{ кНм}$; $a = 1,9 \text{ м}$; $v = 1,1 \text{ м}$; $c = 1,3 \text{ м}$; модуль упругости при сдвиге $G = 8 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$; расчетное сопротивление на срез $R_{\text{ср}} = 10^5 \text{ кН/м}^2$.

Решение

1. Установить, при каком значении момента X угол закручивания правого концевого сечения вала равен нулю.

Составляем условие равновесия (рис. 3, а):

$$\sum M_z = 0; M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + X, \quad (1)$$

которого недостаточно для определения двух неизвестных моментов M_0, X . Следовательно, задача один раз статически неопределима. Для ее решения требуется составить дополнительное уравнение деформаций при заданном условии, что угол закручивания правого конца сечения D равен нулю. Имеем: $\varphi_{OD} = \varphi_{OA} + \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = 0$.

С использованием формулы для углов закручивания $\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}$ составляем

выражение для φ_{OD} в виде:

$$\varphi_{OD} = \frac{M_2 a}{GJ_p} + \frac{M_2 v}{GJ_p} + \frac{M_2 c}{GJ_p} + \frac{M_2 a}{GJ_p} = 0, \quad (2)$$

a M_0 $M_1=1,9\text{кН}\cdot\text{м}$ $M_2=1,1\text{кН}\cdot\text{м}$ $M_3=1,3\text{кН}\cdot\text{м}$ $X=0,95\text{кН}\cdot\text{м}$

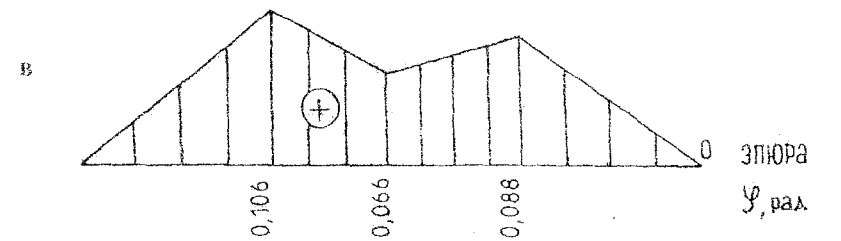
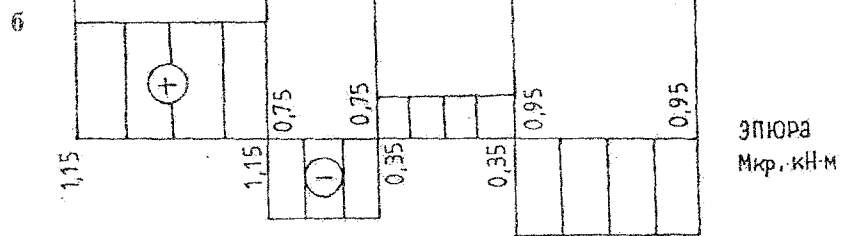
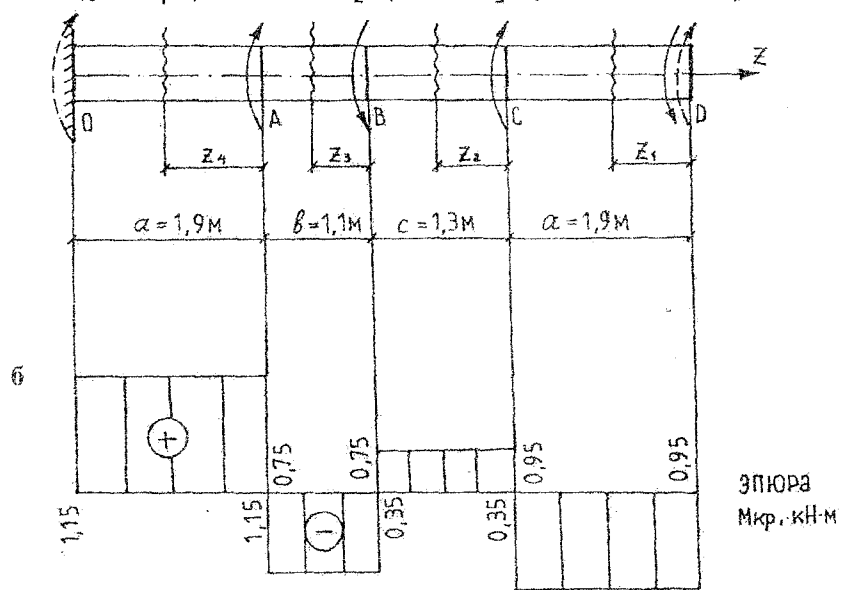


Рис. 11

где $M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}, M_{z_4}$ - крутящие моменты на соответствующих участках;
 GJ_p - жесткость при кручении.

В нашем примере (консольный вал) крутящие моменты лучше начинать составлять со свободного конца вала (рис. 11, а);

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ участок } 0 \leq z_1 \leq 1,9\text{м} & \quad M_{z_1} = X \\ 2 \text{ участок } 0 \leq z_2 \leq 1,3\text{м} & \quad M_{z_2} = X + M_3 = X + 1,3 \\ 3 \text{ участок } 0 \leq z_3 \leq 1,1\text{м} & \quad M_{z_3} = X + M_3 - M_2 = X + 0,2 \\ 4 \text{ участок } 0 \leq z_4 \leq 1,9\text{м} & \quad M_{z_4} = X + M_3 - M_2 + M_1 = X + 2,1 \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

Подставляя числовые значения, а также соотношение (а) в уравнение (2), имеем: $(X+2,1)1,9+(X+0,2)1,1+(X+1,3)1,3+X \cdot 1,9=0$, откуда $X=-0,95\text{кН}\cdot\text{м}$.

2. Для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов (рис.3,б), используя соотношение (а).

$$M_{z_1} = -0,95\text{кН}\cdot\text{м}; M_{z_2} = 0,35\text{кН}\cdot\text{м}; M_{z_3} = -0,75\text{кН}\cdot\text{м}; M_{z_4} = 1,15\text{кН}\cdot\text{м}.$$

Из эпюры крутящих моментов видно, что участок 4 является самым опасным, поэтому $M_{кр. расч.} = 1,15\text{кН}\cdot\text{м}$.

3. Определяем диаметр из условия прочности по следующей формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр. расч.}}{W_p} \leq R_{сп.}$$

где $W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$ - полярный момент сопротивления, тогда

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{кр. расч.}}{0,2 R_{сп.}}} = \sqrt[3]{\frac{1,15}{0,2 \cdot 10^5}} = 3,86 \cdot 10^{-2}\text{м}.$$

Округляем его до ближайшей большей величины принимаем $D=40\text{мм} = 4,0 \cdot 10^{-2}\text{м}$.

4. Построить эпюру углов закручивания (рис 11, в).

Для рассматриваемого вала будем определять углы закручивания относительно защемления (сечение О). В интервале между границами участков величины углов закручивания изменяются по линейному закону

$$\varphi = \frac{M_2 l}{GJ_p}$$

$$\text{где } J_p = \frac{\pi D^4}{32} = 0,1D^4 = 0,1 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4 = 25,6 \cdot 10^{-8}\text{м}^4.$$

Угол закручивания сечения А относительно сечения О:

$$\varphi_{0A} = \frac{M_{z_1} a}{GJ_p} = \frac{1,15 \cdot 1,9}{8 \cdot 10^7 \cdot 25,6 \cdot 10^{-8}} = 0,106\text{ рад}.$$

Угол закручивания сечения В относительно сечения А:

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{Z_3} \cdot b}{GJ_p} = \frac{0,75 \cdot 1,1}{8 \cdot 10^7 \cdot 25,6 \cdot 10^{-8}} = -0,04 \text{ рад.}$$

Угол закручивания сечения В относительно сечения О:

$$\varphi_{OB} = \varphi_{OA} + \varphi_{AB} = 0,106 - 0,04 = 0,066 \text{ рад.}$$

Аналогично:

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{Z_2} \cdot c}{GJ_p} = \frac{0,35 \cdot 1,3}{8 \cdot 10^7 \cdot 25,6 \cdot 10^{-8}} = 0,022 \text{ рад.}$$

$$\varphi_{OC} = \varphi_{OB} + \varphi_{BC} = 0,066 + 0,022 = 0,088 \text{ рад.}$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{Z_1} \cdot a}{GJ_p} = \frac{0,95 \cdot 1,9}{8 \cdot 10^7 \cdot 25,6 \cdot 10^{-8}} = -0,088 \text{ рад.}$$

$$\varphi_{OD} = \varphi_{OC} + \varphi_{CD} = 0,088 - 0,088 = 0.$$

Пример расчета (задача 4). Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, (рис. 12, а).

Требуется: 1) определить положение центра тяжести; 2) найти величины осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей x_c и y_c ; 3) определить направление главных центральных осей x_0 и y_0 ; 4) найти величину главных центральных моментов инерции.

Решение

Из сортамента выписываем все необходимые геометрические характеристики для профилей, входящих в составное сечение.

Швеллер №20 (ГОСТ 8240-72): $h=20\text{см}$; $v=7,6\text{см}$; $F=23,4\text{см}^2$; $J_x=1520\text{см}^4$;

$J_y=133\text{см}^4$; $Z_0=2,07\text{см}$.

Уголок (100x100x100мм): $b=10\text{см}$; $F=19,2\text{см}^2$; $J_x=J_y=133\text{см}^4$; $J_{x_0}=284\text{см}^4$;

$J_{y_0}=74,1\text{см}^4$; $Z_0=2,83\text{см}$.

Далее следует вычертить сечение и произвести разметку составного сечения. Обозначим швеллер цифрой I, а уголок II. Затем нанесем собственные оси на эти фигуры, которые обозначим: для швеллера X_1 и Y_1 , для уголка X_2 и Y_2 (рис. 4,а).

1. Определение координат центра тяжести сечения.

$$X_c = \frac{S_{Y_1}}{F}; Y_c = \frac{S_{X_1}}{F}, \text{ где } F = F_1 + F_2.$$

В качестве вспомогательных осей удобнее всего принять главные центральные оси швеллера X_1 и Y_1 . Вычисляем статические моменты всего сечения относительно этих осей:

$$S_{Y_1} = F_1 \cdot 0 - F_2 (Z_{01} + Z_{02}) = -19,2(2,07 + 2,83) = -94,1 \text{ см}^3;$$

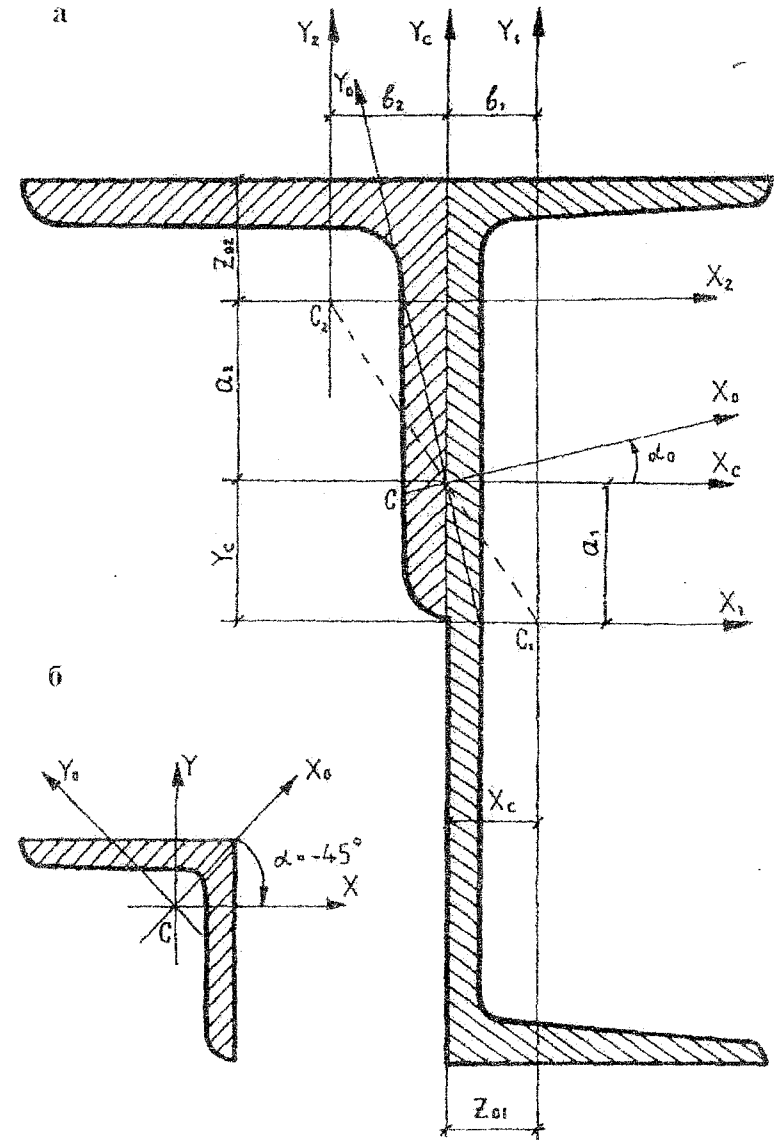


Рис. 12

$$S_{X_1} = F_1 \cdot 0 - F_2 \left(\frac{h_1}{2} - Z_{02} \right) = 19,2 \cdot (10 - 2,83) = 137,6 \text{ см}^3;$$

$$F = 23,4 + 19,2 = 42,6 \text{ см}^2.$$

Координаты центра тяжести:

$$X_c = -\frac{94,1}{42,6} = -2,2 \text{ см}; Y_c = \frac{137,6}{42,6} = 3,2 \text{ см}.$$

Получим точку С, через которую проводим центральные оси X_c и Y_c и параллельные вспомогательные оси X_1 и Y_1 . Заметим, что точка С должна лежать на прямой, соединяющей центры тяжести швеллера C_1 и уголка C_2 .

2. Вычисление моментов инерции относительно центральных осей X_c и Y_c .

а) Осевые моменты инерции:

$$J_{X_c} = J_{X_c}^I + J_{X_c}^{II} = 1760 + 485 = 2245 \text{ см}^4;$$

$$J_{X_c}^I = J_{X_1}^I + a_1^2 \cdot F_1 = 1520 + (-3,2)^2 \cdot 23,4 = 1760 \text{ см}^4; a_1 = -y_c = -3,2 \text{ см};$$

$$J_{X_c}^{II} = J_{X_2}^{II} + a_2^2 \cdot F_2 = 179 + 4^2 \cdot 19,2 = 485 \text{ см}^4;$$

$$a_2 = \frac{h_1}{2} - y_c - Z_{02} = 10 - 3,2 - 2,83 \approx 4 \text{ см};$$

$$J_{Y_c} = J_{Y_c}^I + J_{Y_c}^{II} = 226 + 319 = 545 \text{ см}^4;$$

$$J_{Y_c}^I = J_{Y_1}^I + b_1^2 \cdot F_1 = 113 + 2,2^2 \cdot 23,4 = 226 \text{ см}^4; b_1 = x_1 = 2,2 \text{ см};$$

$$J_{Y_c}^{II} = J_{Y_2}^{II} + b_2^2 \cdot F_2 = 179 + (-2,7)^2 \cdot 19,2 = 319 \text{ см}^4;$$

$$b_2 = -[(Z_{01} + Z_{02}) - x_c] = -[(2,07 + 2,83) - 2,2] = -2,7 \text{ см};$$

б) Центробежный момент инерции:

$$J_{X_c Y_c} = J_{X_c Y_c}^I + J_{X_c Y_c}^{II}; J_{X_c Y_c}^I = J_{X_1 Y_1}^I + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 = 0 + (-3,2) \cdot 2,2 \cdot 23,4 = -165 \text{ см}^4;$$

$$J_{X_c Y_c}^I = 0, \text{ т.к. оси швеллера } X_1 \text{ и } Y_1 \text{ — главные};$$

$$J_{X_c Y_c}^{II} = J_{X_2 Y_2}^{II} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2.$$

Пример расчета (задача 2). Абсолютно жесткий брус, имеющий одну шарнирно-неподвижную опору, прикреплен к двум стержням при помощи шарниров и нагружен силой Р (рис. 10, а).

Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Р; 2) определить допустимую нагрузку $P_{\text{доп}}$, приняв большее из напряжений в двух стержнях допустимому напряжению $[\sigma] = 160 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$; 3) найти предельную грузоподъемность системы $P_{\text{г}}^k$ и допустимую нагрузку $P_{\text{доп}}^k$, если предел текучести материала $\sigma_{\text{т}} = 240 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ и запас прочности $k=1,5$; 4) сравнить величины $P_{\text{доп}}$, полученные при расчете по допустимым напряжениям и нагрузкам.

Исходные данные:

$$F = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2; a = 1,3 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; c = 1,3 \text{ м};$$

$$l_1 = 2,3 \text{ м}; l_2 = 1,3 \text{ м}.$$

Решение

1. Найти усилия и напряжения в стержнях, выразить их через силу Р.

Освобождаем систему от связей и вводим неизвестные усилия N_1, N_2 и реакцию V_A (рис. 10, б). На этом же рисунке показано положение оси бруса после деформации системы.

Составляем условия равновесия:

$$\sum Y = 0; V_A + N_1 + N_2 = 0. \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0; N_1 a + N_2 (a + b + c) - P(a + b) = 0. \quad (2)$$

Следовательно, задача один раз статически неопределима. Для ее решения требуется составить дополнительное уравнение, вытекающее из условия совместности деформаций всех элементов системы. Это означает, что стержни 1 и 2 удлинятся совместно друг с другом, образуя подобные треугольники ABB_1 и ADD_1 (рис. 10, б). Из этого подобия следует пропорция:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{a + b + c}; \Delta l_1 = \Delta l_2 \frac{a}{a + b + c}. \quad (3)$$

Так как удлинения Δl_1 и Δl_2 пропорциональны усилиям в этих стержнях N_1 и N_2 , то, пользуясь законом Гука, выразим их через силы

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}$$

и, подставив в выражение (3), имеем:

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_2 l_2}{E \cdot 2F} \frac{a}{a + b + c},$$

отсюда, сократив на EF , получим:

$$N_1 = N_2 \frac{l_2}{2l_1} \frac{a}{a + b + c}. \quad (4)$$

Пример расчета (задача 5). Для схем-балок I (рис.13,а), II (рис.14,а). Требуется: 1) вычислить опорные реакции и проверить их; 2) составить аналитические выражения изменения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x на всех участках; 3) для всех схем построить эпюры Q_y и M_x ; 4) по опасному сечению подобрать поперечные сечения:

а) для схемы I - круглое при расчетном сопротивлении $R = 10 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ (дерево); для схемы II - двутавровое (ГОСТ 8239-72) при расчетном сопротивлении $R = 200 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ (сталь).

Решение

Схема I. Консольная балка.

1. Определение опорных реакций.

Для вычисления опорных реакций V_A и M_A составляем уравнения равновесия (рис.13,а):

$$\sum y = 0; V_A - q \cdot a + P = 0; V_A = qa - P = 10 \cdot 3 - 4 = 26 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; -M_A + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M - P(a+b) = 0;$$

$$M_A = \frac{qa^2}{2} - M - P(a+b) = \frac{10 \cdot 3^2}{2} - 8 - 4 \cdot 5 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Составляем аналитические выражения изменения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x на участках.

I участок $0 \leq Z_1 \leq 2 \text{ м}$.

Проведем сечение, рассмотрим равновесие правой отсеченной части балки длиной Z_1 , приложив к ней действующую справа от сечения заданную нагрузку P и внутренние силовые факторы Q_{y1} и M_{x1} , возникающие в сечении, которое заменяет действие отброшенной части балки (рис.13,б).

Составим уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; Q_{y1} + P = 0; Q_{y1} = -P = -4 \text{ кН};$$

$$\sum M_{C_1} = 0; M_{x1} - P \cdot Z_1 = 0; M_{x1} = P \cdot Z_1 = 4Z_1$$

II участок $0 \leq Z_2 \leq 3 \text{ м}$.

Аналогично предыдущему проводим сечение на расстоянии Z_2 (рис.13,в). Для правой части составляем уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; Q_{y2} + P - qZ_2 = 0; Q_{y2} = -P + qZ_2 = -4 + 10Z_2$$

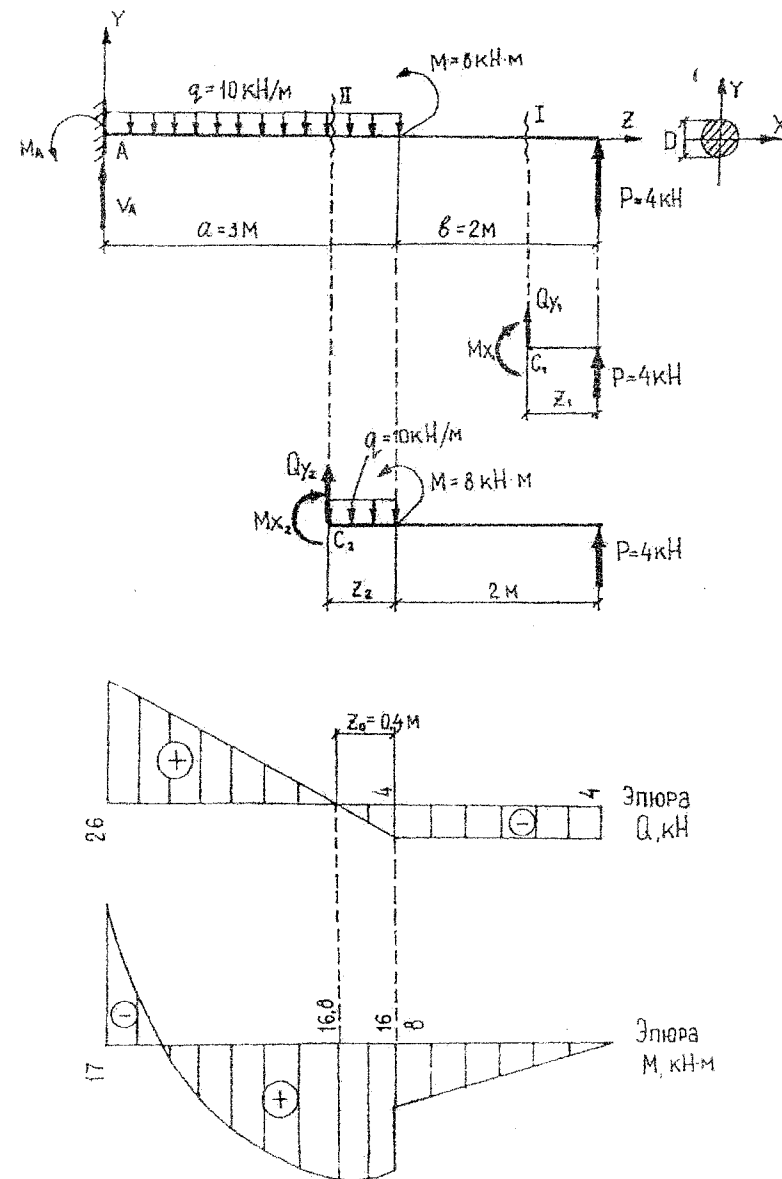


Рис. 13

$$\sum M_C = 0; M_{X_1} - P \cdot (2 + Z_2) - M + qZ_2 \cdot \frac{Z_2}{2} = 0;$$

$$M_{X_1} = P(2 + Z_2) + M - \frac{qZ_2^2}{2} = 4(2 + Z_2) + 8 - 5Z_2^2.$$

3. Построение эпюр Q_y и M_x для всей балки по участкам. Подставив значения Z , соответствующие характерным сечениям участков, в аналитические выражения изменения Q_y и M_x , определим координаты эпюр (рис. 13, г, д).

I участок При $Z_1 = 0; Q_{y_1} = -4 \text{ кН}; M_{X_1} = 0;$

При $Z_1 = 2 \text{ м}; Q_{y_1} = -4 \text{ кН}; M_{X_1} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

II участок При $Z_2 = 0; Q_{y_2} = -4 \text{ кН}; M_{X_2} = 8 + 8 = 16 \text{ кН} \cdot \text{м};$

При $Z_2 = 3 \text{ м}; Q_{y_2} = -4 + 10 \cdot 3 = 26 \text{ кН};$

$$M_{X_2} = 4(2 + 3) + 8 - 5 \cdot 3^2 = -17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так как поперечная сила в пределах участка II меняет знак, т.е. имеет промежуточное нулевое значение (рис. 13, г), то в этом сечении возникает экстремальное значение изгибающего момента. Для определения его величины вначале найдем значение Z_0 , при котором $Q_{y_2} = 0$. Получим:

$$-4 + 10Z_0 = 0; Z_0 = 0,4 \text{ м}.$$

Подставив найденное значение $Z_0 = 0,4 \text{ м}$ в аналитическое выражение изменения M_{X_2} , вычислим величину $M_{X_2}(Z_0)$:

$$M_{X_2}(Z_0) = 4(2 + 0,4) + 8 - 5 \cdot 0,4^2 = 16,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Подбор поперечного сечения.

Опасным сечением является то, в котором возникает наибольший по абсолютной величине изгибающий момент. В нашем примере опасным является сечение А, где $M_{\text{max}} = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Круглое сечение из дерева подбираем из условия прочности при расчетном сопротивлении $R = 10 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} \leq R,$$

откуда требуемый момент сопротивления сечения балки при изгибе будет равен:

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\text{max}}}{R} = \frac{16,8}{10 \cdot 10^3} = 1,68 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Момент сопротивления круглого сечения равен:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} = 0,1 D^3.$$

Приравняв его $W_x^{\text{тр}}$, получим $D = \sqrt[3]{16,8 \cdot 10^{-3}} = 0,256 \text{ м}.$

Округляя, принимаем диаметр $D = 0,3 \text{ м}.$

Схема II. Двухопорная балка

1. Определение опорных реакций.

Для вычисления опорных реакций V_A и V_B составляем уравнения равновесия (рис. 14, а).

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot l + M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + P \cdot a = 0,$$

$$V_A = \frac{10 \cdot 8 \cdot 4 - 8 - 4 \cdot 2}{8} = 38 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; -V_B \cdot l + M + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + P \cdot (a + l) = 0,$$

$$V_B = \frac{10 \cdot 8 \cdot 4 + 8 + 4 \cdot 10}{8} = 46 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - q \cdot l - P = 0; 38 + 46 - 10 \cdot 8 - 4 = 0.$$

Обе реакции получились со знаком плюс, следовательно, мы правильно выбрали их направление.

2. Составляем аналитические выражения изменения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x на участках.

I участок $0 \leq Z_1 \leq 8 \text{ м}$ (рис. 14, б):

$$\sum y = 0; -Q_{y_1} + V_A - qZ_1 = 0; Q_{y_1} = V_A - qZ_1 = 38 - 10Z_1;$$

$$\sum M_C = 0; -M_{X_1} + V_A Z_1 + M - qZ_1 \cdot \frac{Z_1}{2} = 0;$$

$$M_{X_1} = V_A Z_1 + M - q \frac{Z_1^2}{2} = 38Z_1 + 8 - 5Z_1^2.$$

II участок

$0 \leq Z_2 \leq 2 \text{ м}$ (рис. 14, в)

$$\sum y = 0; Q_{y_2} - P = 0; Q_{y_2} = P = 4 \text{ кН};$$

$$M_C = 0; M_{X_2} + P \cdot Z_2 = 0; M_{X_2} = -PZ_2 = -4Z_2.$$

3. Построение эпюр Q_y и M_x для всей балки по участкам (рис. 14, г, д).

При $Z_1 = 0; Q_{y_1} = 38 \text{ кН}; M_{X_1} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$

I участок

При $Z_1 = 8 \text{ м}; Q_{y_1} = 38 - 10 \cdot 8 = -42 \text{ кН};$

$M_{X_1} = 38 \cdot 8 + 8 - 5 \cdot 8^2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$

$Q_{y_1}(Z_0) = 0; 38 - 10Z_0 = 0; Z_0 = 3,8 \text{ м};$

$M_{X_1}(Z_0) = 38 \cdot 3,8 + 8 - 5 \cdot 3,8^2 = 80,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

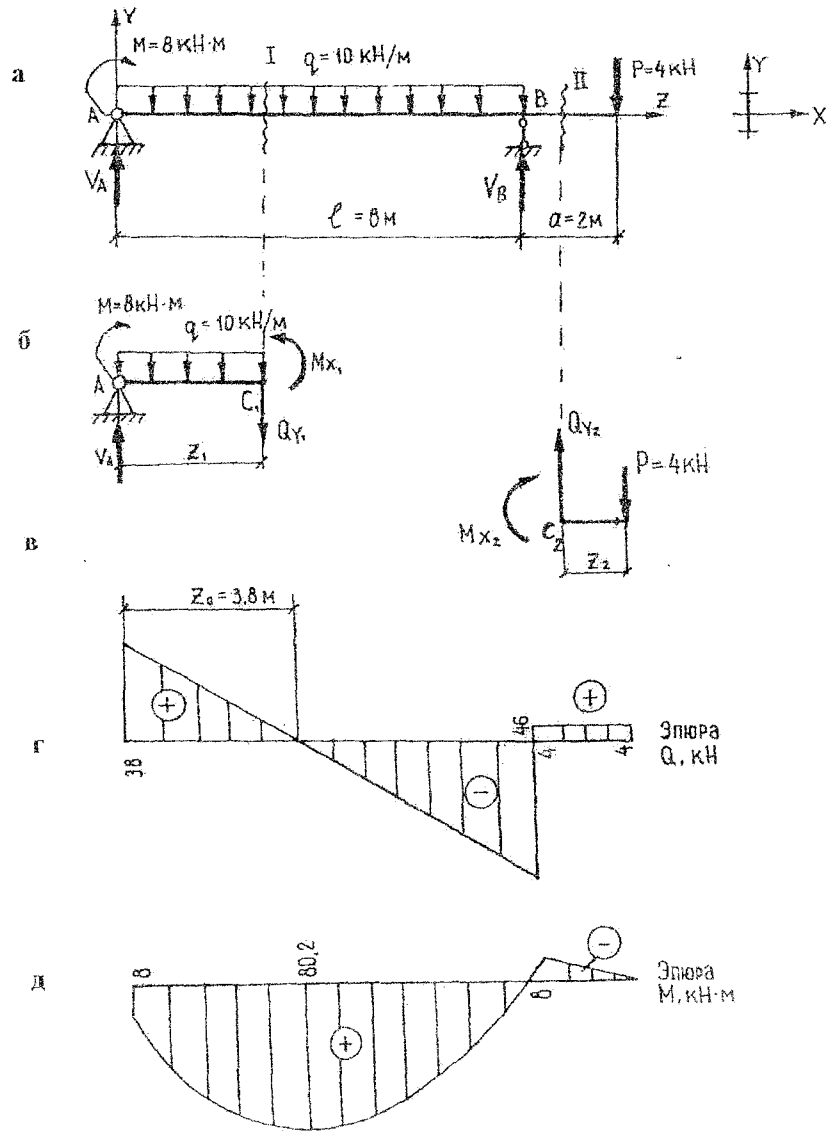


Рис. 14

II участок

При $Z_2 = 0$; $Q_{y1} = 4 \text{ кН}$; $M_{x1} = 0$;

При $Z_2 = 2 \text{ м}$; $Q_{y1} = 4 \text{ кН}$; $M_{x1} = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

4. Подбор поперечного сечения.

В нашем примере опасным сечением является сечение, где $M_{\max} = M_{x1}(Z_0) = 80,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Двутавровое сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе при расчетном сопротивлении материала $R = 200 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$ (сталь):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R.$$

Отсюда требуемый момент сопротивления W_x равен:

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{80,2}{2 \cdot 10^5} = 401 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-72) принимаем двутавр №27а с $W_x = 407 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$

Пример расчета (задача 6). Для балки, изображенной на рис.15а, требуется:

1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях $q l^2$); 2) построить эпюры Q и M ; 3) построить эпюру прогибов.

Решение.

1. Найти изгибающий момент на левой опоре.

Обозначим на рис.7а опорные реакции V_A , V_B и M_A . Составим уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - q l - P = 0. \quad (1)$$

$$\sum M_A = 0; -M_A + q l \frac{l}{2} - V_B \cdot l + P \cdot 1,2 \cdot l = 0. \quad (2)$$

При двух уравнениях (1),(2)- три неизвестных V_A , V_B и M_A . Следовательно, задача один раз статически неопределима. Для ее решения нужно выбрать основную систему в виде свободно лежащей на двух опорах балки (рис.15б), загруженной неизвестным изгибающим моментом X и нагрузкой.

Составим уравнение деформаций, выражающее мысль, что суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента равен нулю:

$$\theta_A = \theta_A(X) + \theta_A(q, P) = 0. \quad (3)$$

Для определения угла поворота $\theta_A(X)$ воспользуемся формулой нахождения прогибов методом начальных параметров (рис.15а). Определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; V_B \cdot l - X = 0; V_B = \frac{X}{l};$$

$$\sum y = 0; V_A - V_B = 0; V_A = V_B = \frac{X}{l}.$$

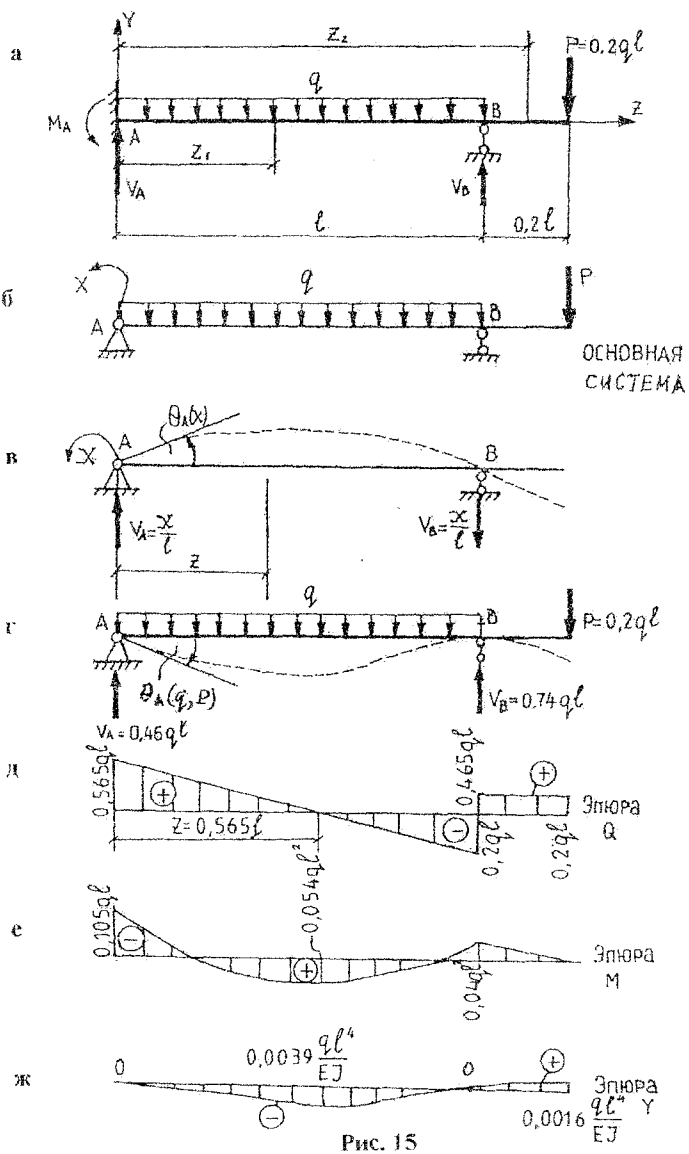


Рис. 15

$$EJy(Z) = EJ\theta_0 \cdot Z - X \cdot \frac{Z^2}{2} + \frac{X \cdot Z^3}{6}$$

При $Z=l$; $y_B=0$; $0 = EJ\theta_0 \cdot l - X \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{X \cdot l^3}{6}$;

$$EJ\theta_0 = EJ\theta_A(X) = \frac{X \cdot l}{3} \quad (4)$$

Аналогично, для нахождения угла поворота $\theta_A(q, P)$ (рис.15,г). Опорные реакции:

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 0,2ql \cdot 0,2l = 0; V_A = 0,46ql;$$

$$\sum y = 0; V_B + 0,46ql - ql = 0; V_B = 0,74ql.$$

Прогиб в произвольном сечении Z (рис.15,г):

$$EJy(Z) = EJ\theta_0 \cdot Z + 0,46ql \cdot \frac{Z^2}{6} - \frac{qZ^4}{24}$$

При $Z=l$; $y_B=0$; $0 = EJ\theta_0 \cdot l + 0,0767ql^4 - 0,0417ql^4$;

$$EJ\theta_0 = EJ\theta_A(q, P) = -0,035ql^3 \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в соотношение (3), находим:

$$\frac{Xl}{3} - 0,035ql^3 = 0; X = M_A = 0,105ql^2.$$

2. Построим эпюры Q и M .

Для определения опорных реакций V_A и V_B составляем уравнения равновесия (рис.15,г):

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot l - M_A - ql \cdot \frac{l}{2} + P \cdot 0,2l = 0;$$

$$V_A = \frac{0,105ql^2 + 0,5ql^2 - 0,004ql^2}{l} = 0,565ql;$$

$$\sum M_A = 0; -V_B \cdot l - M_A + ql \cdot \frac{l}{2} + P \cdot 1,2l = 0;$$

$$V_B = \frac{-0,105ql^2 + 0,5ql^2 + 0,24ql^2}{l} = 0,635ql.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - ql - P = 0; \quad 0,565ql + 0,635ql + 1,2ql = 0.$$

Составляем аналитические выражения изменения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x на участках:

I участок $0 \leq Z_1 \leq l$;

$$Q_{y_1} = V_A - qZ_1 = 0,565ql - qZ_1;$$

$$Z_1 = 0 \quad Q_{y_1}(0) = 0,565ql;$$

$$Z_1 = l \quad Q_{y_1}(l) = 0,565ql - ql = -0,435ql;$$

$$Q_{y_1}(Z_0) = 0; \quad V_A - q \cdot Z_0 = 0; \quad Z_0 = \frac{V_A}{q} = 0,565l;$$

$$M_{x_1} = V_A \cdot Z_1 - M_A - qZ_1 \frac{Z_1}{2} = 0,565ql \cdot Z_1 - 0,105ql^2 - 0,5qZ_1^2;$$

$$Z_1 = 0 \quad M_{x_1}(0) = -0,105ql^2;$$

$$Z_1 = l \quad M_{x_1}(l) = -0,04ql^2;$$

$$M_{x_1}(Z_0) = 0,565ql \cdot 0,565ql^2 - 0,105ql^2 - 0,5q(0,565 \cdot l)^2 = 0,054ql^2.$$

II участок $l \leq Z_2 \leq 1,2l$;

$$Q_{y_2} = P = 0,2ql;$$

$$M_{y_2} = -P(1,2l - Z_2) = -0,2ql(1,2l - Z_2);$$

$$Z_2 = l \quad M_{y_2}(l) = -0,04ql^2;$$

$$Z_2 = 1,2l \quad M_{y_2}(1,2l) = 0.$$

Строим эпюры Q_y и M_x для всей балки (рис. 15, д, е).

3. Определить прогибы в середине пролета, на опоре и на конце консоли. Составляем аналитические выражения изменения прогибов $y(Z)$ на участках по методу начальных параметров:

I участок $0 \leq Z_1 \leq l$;

$$EJy(Z_1) = -0,105ql^2 \cdot \frac{Z_1^2}{2} + 0,565ql \cdot \frac{Z_1^3}{6} - \frac{qZ_1^4}{24};$$

$$Z_1 = 0 \quad EJy(0) = 0;$$

$$Z_1 = 0,5l \quad EJy(0,5l) = -0,0039ql^4; \quad y(0,5l) = -0,0039 \frac{ql^4}{EJ};$$

$$Z_1 = l \quad EJy(l) = 0.$$

II участок $l \leq Z_2 \leq 1,2l$;

$$EJy(Z_2) = -0,105ql^2 \cdot \frac{Z_2^2}{2} + 0,565ql \cdot \frac{Z_2^3}{6} - \frac{qZ_2^4}{24} + 0,635ql \frac{(Z_2 - l)^3}{6} + \frac{q(Z_2 - l)^4}{24};$$

$$Z_2 = 1,2l \quad EJy(1,2l) = 0,0016ql^4;$$

$$y(1,2l) = 0,0016 \frac{ql^4}{EJ}.$$

Построим эпюру прогибов y (рис. 15, ж).

Пример расчета (задача 7). Определить прогиб и угол поворота свободно-го конца балки переменного сечения (рис. 16, а).

Решение

Начало координат первого участка удобно расположить в заделке, где прогиб и угол поворота $y_{01} = \theta_{01} = 0$, так как на первом участке изгибающий момент (рис. 16, б):

$$M_1 = -P(2l - Z_1) - M = -P(2l - Z_1) - Pl = -P(3l - Z_1);$$

$$Z_1 = 0 \quad M_1(0) = -3Pl; \quad Z_1 = l; \quad M_1(l) = -2Pl.$$

По формулам найдем углы поворота и прогибы на первом участке (рис. 16, в, г):

$$\theta_1 = \theta_{01} - \int_0^{Z_1} \frac{M_1 dZ_1}{EJ_1} = \frac{1}{10EJ} (3Pl \cdot Z_1 - \frac{P \cdot Z_1^2}{2});$$

$$Z_1 = 0; \quad \theta_1(0) = 0; \quad Z_1 = l/2 \quad Q_1(l/2) = \frac{11}{80} \frac{Pl^2}{EJ}; \quad Z_1 = l \quad Q_1(l) = \frac{5Pl^2}{20EJ};$$

$$y_1 = y_{01} + \int_0^{Z_1} \theta_1 dZ_1 = \frac{1}{10EJ} \left(\frac{3}{2} PlZ_1^2 - \frac{P}{6} Z_1^3 \right);$$

$$Z_1 = 0; \quad y_1(0) = 0; \quad Z_1 = l/2 \quad y_1(l/2) = \frac{17Pl^3}{480EJ}; \quad Z_1 = l \quad y_1(l) = \frac{8Pl^3}{60EJ}.$$

На втором участке имеем изгибающий момент (рис. 16, б):

$$M_2 = -P(l - Z_2).$$

Найдем углы поворота и прогибы на втором участке (рис. 16, в, г):

$$\theta_2 = \theta_{02} - \int_0^{Z_2} \frac{M_2 dZ_2}{EJ_2} = \frac{5 \cdot Pl^2}{20EJ} + \frac{1}{EJ} (Pl \cdot Z_2 - \frac{P \cdot Z_2^2}{2});$$

$$y_2 = y_{02} + \int_0^{Z_2} \theta_2 dZ_2 = \frac{8Pl^3}{60EJ} + \frac{5Pl^2}{20EJ} Z_2 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pl}{2} Z_2^2 - \frac{PZ_2^3}{6} \right),$$

где θ_{02} и y_{02} - угол поворота и прогиб на границе участков при $Z_2=0$.

Используя условие непрерывности перемещений, найдем θ_{02} и y_{02} по формулам для перемещений первого участка при $Z_1=l$, а именно:

$$\theta_{02} = \theta_1(Z_1=l) = \frac{5Pl^2}{20EJ}; \quad y_{02} = y_1(Z_1=l) = \frac{8Pl^3}{60EJ}.$$

После чего по формулам для θ_2 и y_2 можно найти перемещения на втором участке. В частности, на конце балки при $Z_2=l$ получим:

$$\theta_2(l) = \frac{15Pl^2}{20EJ}; \quad y_2(l) = \frac{43Pl^3}{60EJ}.$$

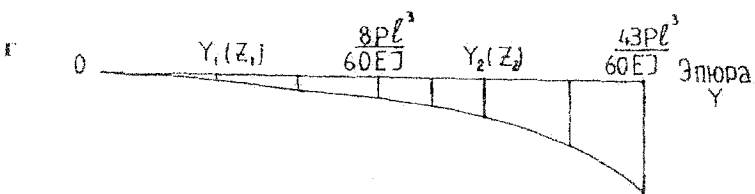
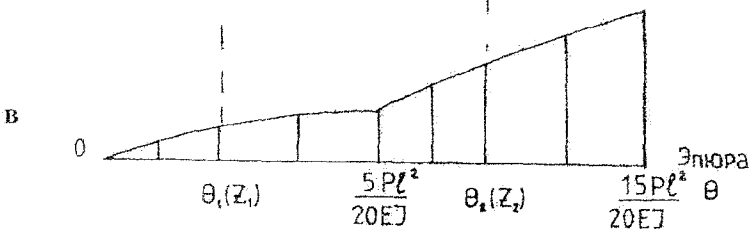
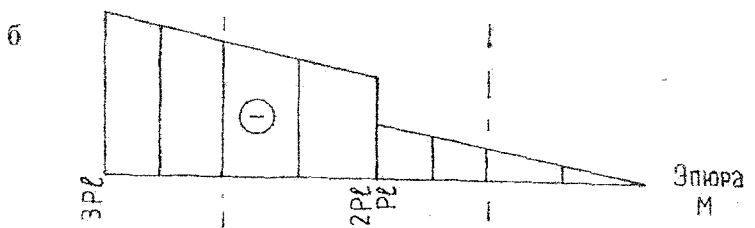
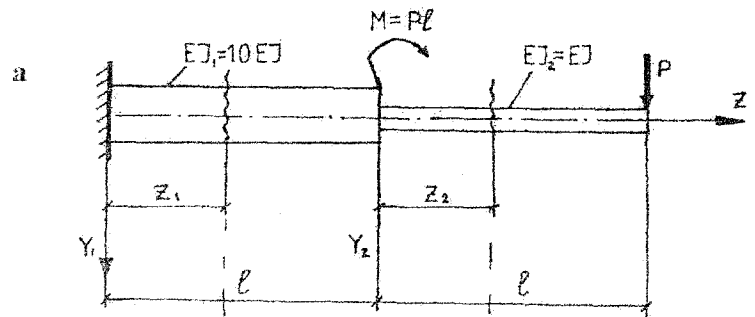


Рис. 16

Растяжение и сжатие

1. Дайте определение равновесного состояния стержня, называемого простым растяжением или сжатием.
2. Какое правило знаков принято для усилий и напряжений, возникающих при простом сжатии или растяжении?
3. Дайте определение статически определимых и неопределимых систем. Каков общий порядок их решения?
4. Поясните физический смысл модуля упругости материала первого рода.
5. Что такое пластичность?
6. Что такое предел пропорциональности, предел упругости и предел текучести?
7. Что такое хрупкость и перечислите хрупкие материалы?
8. Как находят удлинение стержня, растягиваемого собственным весом?
9. Как формулируется условие прочности?

Геометрические характеристики плоских сечений

1. Что такое статический момент сечения?
2. Дайте определение центральной оси сечения.
3. Дайте определение центра тяжести сечения.
4. Что такое осевые моменты инерции сечения?
5. Что такое центробежный момент инерции сечения?
6. Что такое полярный момент инерции сечения?
7. Что такое главные оси инерции сечения?
8. Дайте определение главных моментов инерции сечения.
9. Дайте определение радиусов инерции сечения.
10. Чему равен статический момент инерции составного сечения?
11. Чему равны моменты инерции составного сечения?

Кручение

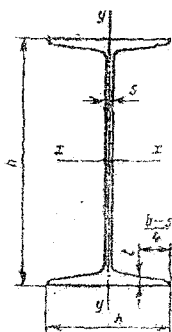
1. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении?
2. Как находят их значения в произвольной точке поперечного сечения?
3. Возникают ли при кручении нормальные напряжения?
4. Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?
5. Что называется моментом сопротивления при кручении?
6. Чему равен момент сопротивления кольцевого сечения?
7. Как формулируется условие прочности при кручении круглых стержней?

Изгиб

1. Какой вид равновесного состояния стержня называется изгибом?
2. Дайте определения чистого и поперечного изгиба соответственно.
3. Поясните физическую суть шарнирно-подвижного характера опирания.
4. Поясните физическую суть шарнирно-неподвижного характера опирания.
5. Поясните физическую суть жесткой заделки.
6. Поясните правило принятия знаков для изгибающего момента и поперечной силы.
7. Поясните суть основных дифференциальных соотношений теории изгиба.
8. Запишите формулу по определению нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях при чистом и поперечном изгибе.
9. Запишите формулу Д.И. Жуковского.
10. Поясните суть и предназначение метода начальных параметров.
11. Как формулируется условие прочности при изгибе?

ПРИЛОЖЕНИЯ

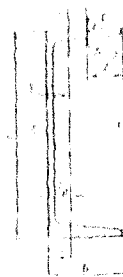
Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)



h - высота двутавра;
 b - ширина полки;
 s - толщина стенки;
 t - средняя толщина полки;
 A - площадь поперечного сечения;
 J - момент инерции;
 W - момент сопротивления;
 S - статистический момент полусечения;
 i - радиус инерции

№ двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$S_x, \text{см}^3$	$J_{xy}, \text{см}^4$	$W_{xy}, \text{см}^3$	$i_{xy}, \text{см}$
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1358	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

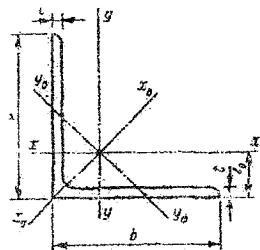
Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239-89)



h - высота швеллера;
 b - ширина полки;
 s - толщина стенки;
 t - средняя толщина полки;
 A - площадь поперечного сечения;
 J - момент инерции;
 W - момент сопротивления;
 S - статистический момент полусечения;
 i - радиус инерции;
 Z_0 - расстояние от оси y до наружной грани стенки

№ швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$Z_0, \text{см}$
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,1	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509-86)



b — ширина полки;
 t — толщина полки;
 A — площадь поперечного сечения;
 J — момент инерции;
 i — радиус инерции;
 J_{xy} — центробежный момент инерции;
 z_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

№ уголка	Масса 1м уголка, кг	Размеры, мм		A , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x0\max}$, см ⁴	$i_{x0\max}$, см	$J_{y0\min}$, см ⁴	$i_{y0\min}$, см	J_{xy} , см ⁴	z_0 , см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53