

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования

Нижегородский государственный технический университет

Кафедра "Автоматизация машиностроения"

Исследование систем автоматического управления

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине "Теория автоматического управления"
для студентов специальностей 21.02.00 и 21.03.00
всех форм обучения

Нижний Новгород
2006

Составитель И.А.Борисов

УДК 621.51

Исследование систем автоматического управления: метод. указания к лабораторным работам по дисциплине "Теория автоматического управления" для студентов специальностей 22 04 02.65 и 22 03 01.65 всех форм обучения /НГТУ ; сост.: И.А.Борисов. Н.Новгород, 2006.-90с

Методические указания содержат краткий теоретический материал по изучаемым разделам курса, задания к лабораторным работам, порядок их выполнения и формы отчетности.

Редактор Э.Б.Абросимова

Подписано в печать 27.03.06. Формат 60 x 84 ¹/₁₆. Бумага газетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,75. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 50 экз. Заказ 255.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный
технический университет, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа №1- Идентификация типа динамических звеньев.....	5
Лабораторная работа №2- Моделирование динамических звеньев линейных САУ.....	8
Лабораторная работа №3- Исследование САУ с помощью частотных характеристик.....	18
Лабораторная работа №4- Исследование устойчивости линейных систем автоматического управления.....	29
Лабораторная работа №5- Исследование качества процессов автоматического управления. Нахождение ошибки системы.....	43
Лабораторная работа №6- Исследование нелинейных звеньев.....	50
Лабораторная работа №7 Метод фазовой плоскости.....	55
Лабораторная работа №8- Исследование нелинейных САУ методом гармонической линеаризации.....	62
Лабораторная работа №9- Исследование устойчивости нелинейных САУ частотным методом В.М. Попова.....	72
Лабораторная работа №10- Исследование переходных процессов в нелинейных САУ аналитическими методами.....	76
Лабораторная работа №11- Исследование процесса квантования и восстановления непрерывного сигнала.....	84
Лабораторная работа №12- Исследование устойчивости дискретных САУ и построение переходного процесса.....	89

Введение

Методические указания к лабораторным работам по дисциплине "Теория автоматического управления" представляют собой сборник, содержащий методические материалы для выполнения студентами 12 лабораторных работ. Лабораторные работы 1,2,3,4,5 посвящены изучению и исследованию линейных систем автоматического управления (САУ), работы 6,7,8,9,10 – нелинейных САУ, а работы 11,12 – дискретных САУ.

Лабораторные работы выполняются бригадой студентов в лабораториях кафедры. Выполнение расчетов, моделирование и отображение полученных результатов производится на ИВЦ ФАМ с помощью программного обеспечения, разработанного для каждой лабораторной работы и хранящегося в памяти ПК.

Отчеты по лабораторным работам выполняются по установленной форме и должны содержать:

- титульный лист,
- задания к выполнению лабораторной работы,
- результаты исследования в виде таблиц, графиков и т.д.,
- анализ полученных результатов и выводы по работе.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Идентификация типа динамических звеньев

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала;
- ознакомление с методикой построения кривой переходного процесса по экспериментальным данным;
- определение типа переходного процесса и построение теоретической кривой переходного процесса.

2. Краткие сведения из теории

Для анализа системы автоматического управления (САУ) необходимо иметь ее математическое описание. Система разделяется на элементы, и составляются уравнения, описывающие их поведение (движение) – изменение состояния во времени. Будем рассматривать только стационарные САУ, у которых свойства элементов не изменяются с течением времени, и каждый динамический процесс зависит лишь от начального состояния элемента и характера внешних воздействий.

Составление дифференциальных уравнений объектов регулирования, а также исполнительных и усилительных элементов представляет собой сложную задачу, решаемую с существенными допущениями, то есть весьма приближенно. В этом случае целесообразно составлять математическое описание элемента на основании эксперимента.

Экспериментально определяют частотные характеристики элемента или его переходную характеристику. Чаще определяют переходную характеристику, что несколько проще. По переходной характеристике можно составить передаточную функцию и определить амплитудно-фазовую характеристику. Естественно, неизбежны погрешности, как при снятии экспериментальной характеристики, так и при ее аппроксимации.

Процесс экспериментального исследования объекта состоит из трех этапов: планирования и подготовки эксперимента, проведения эксперимента, обработки результатов. Обработка экспериментальной переходной характеристики заключается в ее сглаживании и аппроксимации. Сглаживание оказывается необходимым для устранения разброса измерений. Этот разброс создается различными причинами и прежде всего помехами, действующими на процесс. Для сглаживания и аппроксимации используют ряд методов. В данной работе используется метод наименьших квадратов (МНК).

Идея метода заключается в нахождении аппроксимирующего полинома из условий минимальности суммы квадратов значений отклонения этого полинома в данных точках от значений экспериментальной переходной характеристики. Математическая реализация метода МНК заключается в

нахождении коэффициентов b_0 и b_1 из условия минимальности суммы квадратов как функции:

$$S(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n (P(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i)^2.$$

Необходимым условием минимума функции $S(b_0, b_1)$ является равенство нулю ее частных производных. Следовательно, для нахождения b_0 и b_1 получим систему алгебраических уравнений, которая в матричном виде имеет вид

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i \end{bmatrix}.$$

Погрешность аппроксимации этим методом δ не более 15%.

3. Задание к работе и порядок выполнения работы:

- изучить методические указания по данной работе;
- ответить на контрольные вопросы;
- получить вариант задания;
- выполнить практическую часть работы, которая состоит в следующем:
 - на диске найти папку "TAU" и запустить программу ProjectTAU.exe;
 - после появления программного окна на экране "свернуть" его нажатием соответствующей кнопки;
 - в той же папке найти файл Аппроксимация.med и открыть его;
 - в этом файле по полученному варианту заполнить матрицу исходных данных;
 - с полученной экспериментальной кривой переходного процесса снять параметры (k , T_i , ξ , τ , ...);
 - из панели управления раскрыть окно приложения "Реакция типовых звеньев", нажав кнопкой мыши на соответствующий блок;
 - по программе "Реакция типовых звеньев" определить тип звена путем визуального сравнения экспериментальной кривой с кривой переходного процесса типового звена и получить теоретическую кривую переходного процесса.

4. Указания к составлению отчета

Отчет представляет собой распечатку экспериментальной и теоретической кривой переходного процесса, анализ полученных результатов, общие выводы по работе.

5. Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой реакция системы на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$?
2. В чем заключается идея аппроксимации методом наименьших квадратов?
3. Назначение аппроксимации?

4. Перечислите основные типы динамических звеньев.

5. Понятие стационарных систем автоматического управления.

6. Что называется переходной характеристикой?

7. Понятие монотонных и колебательных переходных процессов.

8. Основные показатели качества переходной характеристики и их расчет.

9. Связь передаточной функции и переходной характеристики.

6. Варианты заданий

t, с	y									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0,3	0,48	1,84	0
0,25	0,6	0,25	0,9	0,3	0,23	0,08	0,54	0,53	1,21	0,88
0,5	0,8	0,25	1,5	1,44	0,58	0,28	0,89	0,86	0,78	1,52
0,75	1,05	0,6	0,99	2	0,79	0,59	1,08	1,07	0,76	0,99
1	0,99	1,1	0,85	1,43	1,13	0,93	1,44	1,41	0,42	0,85
1,25	0,98	0,92	0,85	0,42	1,32	1,12	1,62	1,6	0,31	0,84
1,5	0,99	0,85	1	0,01	1,7	1,5	2,01	1,98	0,18	1,01
1,75	0,99	0,95	1,05	0,43	2,1	1,9	2,41	2,38	0,11	1,06
2	1	1	1,01	1,3	2,33	2,13	2,66	2,61	0,03	1,01
2,25	1	0,95	1,01	1,9	2,52	2,32	2,82	2,8	0,01	1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Моделирование динамических звеньев линейных САУ

1. Цель работы:

Целью работы является ознакомление с классификацией динамических звеньев систем автоматического управления, их математическим описанием и характеристиками и со способами моделирования типовых звеньев на ЭВМ.

2. Краткие сведения из теории:

Для исследования свойств САУ составляется математическое описание – математическая модель системы. Для этого система разбивается на звенья – части, которые обладают достаточно простым математическим описанием и динамическими характеристиками. При этом учитывается, что элементы автоматики, различные по значению, по физической природе, конструкции, по виду используемой энергии и т.д. обладают одинаковыми динамическими свойствами и, следовательно, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и передаточными функциями.

Динамическим звеном называется выделенная часть (элемент) САУ любого физического и технического исполнения, описываемая определенными дифференциальными уравнениями.

Типовым называется динамическое звено, описываемое дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Таким образом, динамическое звено является математической моделью элемента автоматики. Нужно заметить, однако, что динамические звенья отражают не столько элементы автоматики, составляющие САУ, сколько процессы, происходящие в ее частях. В связи с этим, разделение САУ на динамические звенья и на элементы автоматики могут не совпадать.

Например, несколько однотипных усилителей могут быть представлены одним динамическим звеном, и, наоборот, сложное звено – электродвигатель – отразится несколькими динамическими звеньями. Принято считать, что динамические звенья обладают однонаправленным действием, т.е. передают сигнал только с входа на выход, но не наоборот.

У динамического звена может быть одна входная величина – $x(t)$ и одна выходная – $y(t)$. Если сложный элемент имеет несколько входов или выходов, то его можно разделить на соответствующее число звеньев. На структурных схемах динамические звенья обозначают в виде прямоугольников, внутри которых вписывается передаточная функция звена или условно рисуется переходная характеристика (т.е. реакция выхода звена на единичное ступенчатое воздействие) – рис.2.1.

Математическое описание процессов, происходящих в звеньях и системах, и, следовательно, описание самих звеньев и систем делается с помощью временных и частотных характеристик.

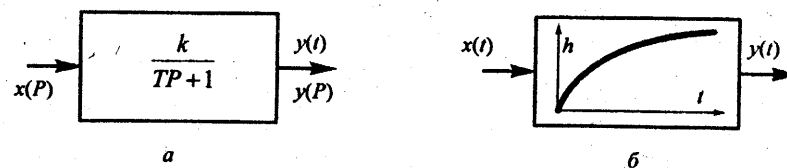


Рис. 2.1. Изображение динамических звеньев на структурных схемах: а – с помощью передаточной функции; б – с помощью переходной характеристики

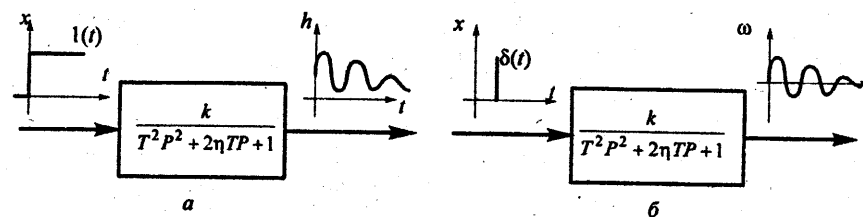


Рис. 2.2. Процессы на выходе динамического (колебательного) звена: а – переходная характеристика; б – импульсная (весовая) функция

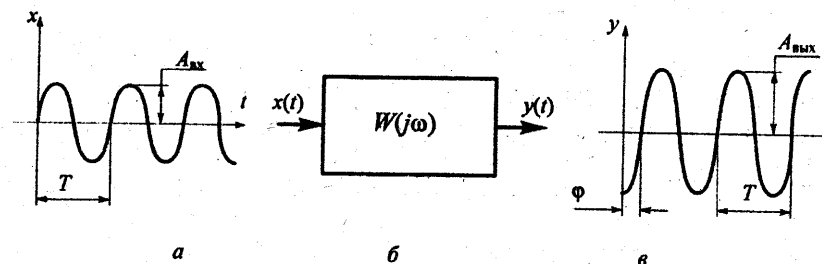


Рис. 2.3. Прохождение гармонического сигнала через звено

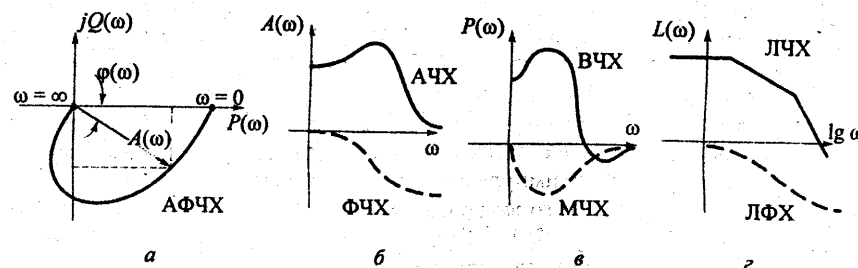


Рис. 2.4. Частотные характеристики звена: а – амплитудно-фазовая; б – амплитудная и фазовая; в – вещественная и мнимая; г – логарифмические амплитудная и фазовая

Временные характеристики – математические выражения, в которых аргументом является реальное (вещественное) время – t или комплексная переменная Лапласа p . Соответственно, в частотных характеристиках аргументом является частота синусоидального сигнала ω .

Самой главной характеристикой исходной формой математического описания, является дифференциальное уравнение.

Динамические линейные звенья и системы описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами вида:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \quad (2.1)$$

С помощью оператора (символа) дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ можно переписать это уравнение в операторной форме:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) x(t). \quad (2.2)$$

Сокращенный вид записи того же уравнения:

$$p^v F_1(p) y(t) = k F_2(p) x(t). \quad (2.3)$$

Здесь $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – нормированные (т.е. свободный член которых равен единице) операторные полиномы соответственно выхода и входа;

$k = \frac{b_0}{a_0}$ – коэффициент передачи (усиления);

сомножитель p^v (где $v = 0; 1; 2; \dots$ – степень астатизма) появляется, если a_0 или a_0 и a_1 в уравнении (2.2) равны нулю.

В реальных системах порядок правого полинома никогда не превышает порядка левого, т.е. $n \geq m$ (практически $m=0 \dots 2$, редко 3). Таким образом, порядок всего уравнения определяется порядком левой части. У типовых динамических звеньев порядок $n \leq 2$.

Решение уравнения (2.1) или (2.2), т.е. реализация математической модели, описывает переходный процесс на выходе звена $y(t)$.

Два вида переходных процессов играют роль самостоятельных динамических характеристик.

Процесс на выходе, возникающий при подаче на вход звена типового входного воздействия – единичной ступенчатой функции вида $x(t)=1(t)$, называется переходной характеристикой и обозначается $h(t)$. Вид переходной характеристики зависит от внутренних свойств звена; например на рис.2.2,а приведена переходная характеристика устойчивого колебательного звена.

Аналогично реакция на выходе звена на входной единичный дельта-импульс $\delta(t)$ носит название импульсной, или весовой функции и обозначается $\omega(t)$. Импульсная функция того же колебательного звена показана на рис.2.2,б. Заметим, что поскольку $\delta(t) = 1'(t)$, то импульсная функция является производной от переходной характеристики.

Наиболее распространенной характеристикой звеньев и САУ является передаточная функция $W(p)$. Она получается, если дифференциальное уравнение (2.3) преобразовать по Лапласу:

$$p^v F_1(p) Y(p) = k F_2(p) X(p), \quad (2.4)$$

где $Y(p)$ и $X(p)$ – изображения по Лапласу функций $y(t)$ и $x(t)$.

Передаточной функцией называется отношение лапласовских изображений выхода и входа звена или САУ:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k F_2(p)}{p^v F_1(p)}. \quad (2.5)$$

Нужно заметить, что в уравнениях (2.4) и (2.5) символ “ p ” приобрел другое значение, чем в (2.2) и (2.3); здесь это комплексная переменная Лапласа, играющая роль аргумента (в ряде источников ее для отличия обозначают через “ S ”).

При выполнении лабораторной работы студенты должны смоделировать динамические звенья из следующего списка:

- усилительное (безынерционное) звено;
- апериодическое звено первого порядка;
- колебательное затухающее звено;
- консервативное звено;
- неустойчивое звено;
- апериодическое звено второго порядка;
- инерционное (реальное) интегрирующее звено;
- изотропное интегрирующее звено;
- реальное дифференцирующее звено без статизма;
- реальное дифференцирующее звено со статизмом;
- интегро-дифференцирующее звено первого порядка.

Усилительное звено

Усилительное (безынерционное) звено описывается линейным алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t), \quad (2.6)$$

где k – коэффициент усиления (передачи) звена.

Следовательно, необходимости в интегрировании нет. Если подать на вход звена единичное ступенчатое воздействие $x(t)=1(t)$, то на выходе переходная характеристика $y(t)=h(t)=k1(t)$ будет иметь вид ступеньки высотой k .

Апериодическое звено I порядка

Это звено описывается дифференциальным уравнением

$$(Tp+1)y(t) = kx(t). \quad (2.7)$$

Для решения на ЭВМ уравнение преобразуется к виду

$$py = \frac{1}{T}(kx - y). \quad (2.8)$$

Позиционные звенья II порядка

Четыре типовых звена описывается уравнением

$$(T^2 p^2 + 2\eta Tp + 1)y(t) = kx(t). \quad (2.9)$$

и отличаются друг от друга значением коэффициента демпфирования η .

Уравнение приводится к виду

$$p^2 y = \frac{1}{T^2} (kx - 2\eta T p y - y). \quad (2.10)$$

Идеальное интегрирующее звено

Дифференциальное уравнение идеального интегрирующего звена

$$p y = k x(t). \quad (2.11)$$

В диалоге с программой вводится параметр k , и принимается $T=1$.

Инерционное интегрирующее звено

Инерционное (реальное) интегрирующее звено описывается уравнением второго порядка

$$p(Tp+1)y(t) = kx(t). \quad (2.12)$$

Уравнение легко можно привести к виду

$$p^2 y = \frac{1}{T} (kx - p y). \quad (2.13)$$

Вводятся заданные параметры k и T , параметр h принимается равным нулю.

Изодромное интегрирующее звено

Дифференциальное уравнение этого звена имеет вид

$$p y = k(tp+1)x(t). \quad (2.14)$$

Правая часть уравнения содержит производную входного сигнала, поэтому такое звено удобнее представить как составное, состоящее из двух параллельно соединенных звеньев – идеально интегрирующего с передаточной функцией $W_1(p)$ и усилительного с передаточной функцией $W_2(p)$. Схема такого параллельного соединения звеньев представлена на рис.2.5,а.

$$W(p) = \frac{k(tp+1)}{p} = \frac{k}{p} + k\tau = W_1(p) + W_2(p). \quad (2.15)$$

Соответственно, выходная величина $y(t)$ будет являться суммой - $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$. На рис.2.5,б представлена переходная характеристика звена $h(t)$ при $x(t)=1(t)$, являющаяся суммой

$$y(t) = h(t) = kt + k\tau.$$

Для моделирования вводятся параметры k и τ , принимается $T=1$.

В уравнениях дифференцирующих звеньев полином в правой части $F_2(p)$ содержит производные входного воздействия $x(t)$. Следовательно, если $x(t)=1(t)$, - ступенчатая функция, то правая часть дифференциального уравнения является разрывной функцией. Непосредственный ввод такой функции в ЭВМ вызовет сбой и остановку машины.

Для решения задачи будем рассматривать дифференцирующие звенья 10 и 11 как составные, состоящие из двух параллельно соединенных звеньев. При таком подходе одно из двух параллельных звеньев окажется безынерционным,

описываемым простым алгебраическим уравнением, а второе – аperiodическим звеном первого порядка, которое легко моделировать.

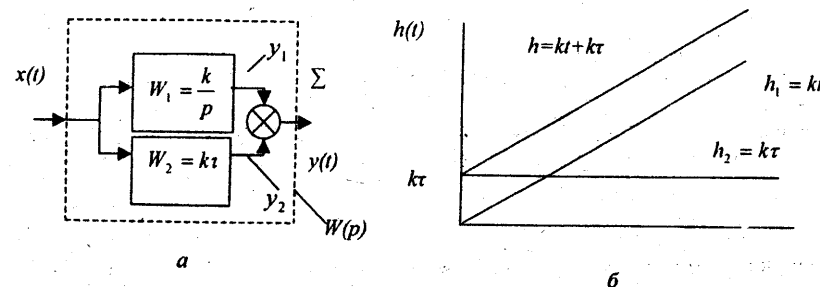


Рис. 2.5. Изодромное интегрирующее звено: а – схема параллельного соединения двух звеньев; б – переходная характеристика звена и ее слагаемые.

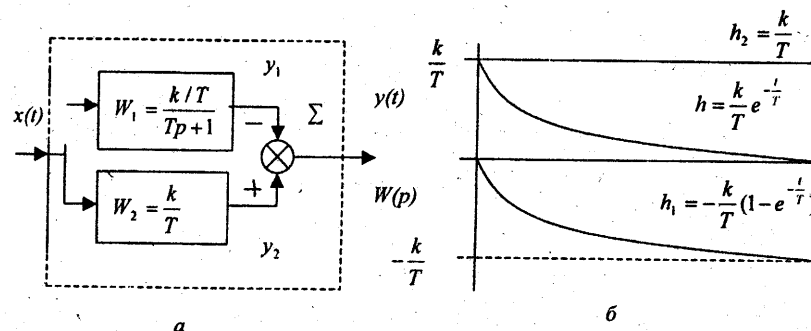


Рис. 2.6. Реальное дифференцирующее звено без статизма: а – схема параллельного соединения аperiodического и усилительного; б – переходная характеристика и ее составляющие

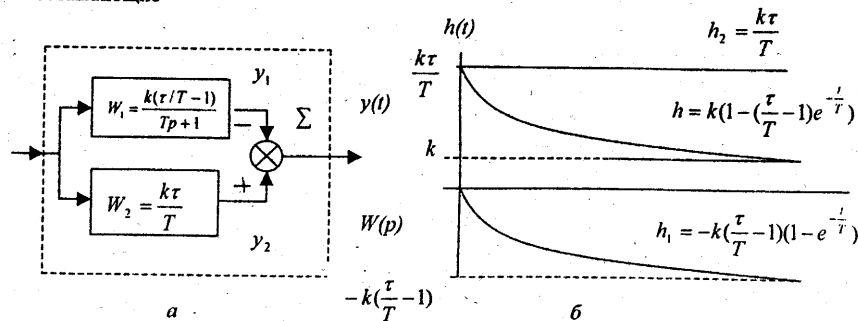


Рис. 2.7. Реальное дифференцирующее звено со статизмом: а – схема соединения звеньев; б – переходная характеристика звена и ее составляющие
Примечание. Если у звена отсутствует какой-либо параметр, то его необходимо определить как "0".

Реальное (инерционное) дифференцирующее звено без статизма

Дифференциальное уравнение, описывающее звено и его передаточная функция имеют вид:

$$(Tp+1)y(t) = Kp x(t); W(p) = \frac{kp}{Tp+1} \quad (2.16)$$

Преобразуем передаточную функцию следующим образом: множим числитель и знаменатель на T и прибавим к числителю $\pm k$:

$$\frac{kp}{Tp+1} = \frac{Tkp+k-k}{T(Tp+1)} = \frac{Tkp+k}{T(Tp+1)} - \frac{k}{T(Tp+1)} = \frac{k}{T} - \frac{k/T}{Tp+1}$$

Теперь, как это видно из рис.2.6, звено можно представить как параллельное соединение аperiодического звена и усилительного безинерционного звена с передаточными функциями:

$$W_1(p) = \frac{k/T}{Tp+1}; W_2(p) = \frac{k}{T}$$

Соответственно, выходная величина $y(t)$ будет являться разностью $y(t) = y_2(t) - y_1(t)$. Если на вход задать воздействие $x(t)=1(t)$, то переходную характеристику аperiодического звена $h_1(t)$ можно получить, интегрируя уравнение первого порядка $(Tp+1)y_1(t) = \frac{k}{T}x(t)$, а усилительного $h_2(t)$ - согласно (2.6):

$$h_1(t) = \frac{k}{T}(1 - e^{-\frac{t}{T}}); h_2(t) = \frac{k}{T}$$

На рис.2.6 показаны переходные характеристики $h_1(t)$ и $h_2(t)$ и общая переходная характеристика моделируемого звена:

$$h(t) = h_2(t) - h_1(t) = \frac{k}{T} - \frac{k}{T}(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}$$

Вводятся параметры звена, и принимается $\tau=1$.

Реальное дифференцирующее звено со статизмом

Это звено называют также интегро-дифференцирующим звеном с преобладанием дифференцирующих свойств, если $\tau \geq T$, дифференциальное уравнение и передаточная функция таковы:

$$(Tp+1)y(t) = k(\tau+1)x(t); W(p) = \frac{k(\tau+1)}{Tp+1} \quad (2.17)$$

Чтобы представить это звено как составное, преобразуем передаточную функцию так: умножим дробь на T и прибавим к числителю величину $\pm k\tau$; тогда получим:

$$\frac{k(\tau+1)}{Tp+1} = \frac{Tk\tau+k\tau}{T(Tp+1)} - \frac{k\tau-kT}{T(Tp+1)} = \frac{k\tau}{T} - \frac{k(\tau/T-1)}{Tp+1}$$

Выражение описывает параллельное соединение аperiодического и усилительного звеньев согласно схеме на рис.2.7а. Переходная характеристика

звена, т.е. решение исходного уравнения, будет получена, как это видно на рис.2.7б, как разность выходных величин звеньев. Вводятся параметры k, T, τ , а также уравнения звеньев.

3. Задание к работе и порядок выполнения:

- изучить данные методические указания и ответить на нижеприведенные вопросы;
- получить задание у преподавателя;
- проследить на дисплее ЭВМ переходные процессы для всех динамических звеньев при всех возможных видах воздействий;
- исследовать влияние параметров k, T, τ, η на характер переходных процессов 2-3 звеньев;

4. Указания к составлению отчета

Отчет должен содержать для каждого моделируемого звена следующее:

- передаточные функции звеньев и их числовые параметры;
- графики $h(t)$, полученные в результате выполнения работы;
- выводы по отдельным звеньям и общие по всей работе.

5. Варианты заданий

1. Моделировать усилительное (безинерционное) звено с коэффициентом усиления K .

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
K	12	5	20	4	15	8	10	25
	0.8	0.4	2	0.5	0.5	1.5	1.2	2.5

2. Моделировать аperiодическое звено первого порядка с коэффициентом усиления K и постоянной времени T .

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
K	3	5	6	4	2	2	4	4
	6			8	4		12	
T, c	0.1	0.5	0.4	0.05	0.8	0.2	0.2	2
		0.05	0.1			0.05		0.1

3.... 5. Моделировать колебательные звенья второго порядка: затухающее (сходящееся), консервативное и неустойчивое (расходящееся) с параметрами K, T и η .

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
K	4	6	5	3.5	7	8	4.5	5.5
T, c	0.05	-0.1	0.2	0.5	0.4	0.8	0.08	0.15

Коэффициент демпфирования η .

Затухающее звено η_1	0.05	0.1	0.12	0.04	0.08	0.075	0.1	0.15
	0.01	0.03	0.01	0.005	0.02	0.015	0.01	0.05
Консервативное звено η_2	Для всех вариантов $\eta=0$							
Неустойчивое звено η_3	0.01	0.03	0.015	0.04	0.02	0.1	0.08	0.05

6. Моделировать апериодическое звено второго порядка с параметрами K, T и η

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
K	2	3	3.5	4	5	4.5	5.5	6
T, c	0.05	0.1	0.2	0.5	0.4	0.8	0.08	0.15
η	1.01	1.005	1.008	1.006	1.004	1.012	1.01	1.015
	1.1	1.5	1.08	1.6	1.04	1.2	1.5	1.1

7. Моделировать идеальное интегрирующее звено с коэффициентом усиления K (принять $T=1$)

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, 1/c$	1.5	2	1.2	1.4	1.35	1.3	0.8	0.75

8. Моделировать инерционное (реальное) интегрирующее звено с параметрами K и T (принять $\eta=0$)

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, 1/c$	1.1	1.5	1.35	1.6	1	0.9	0.8	1.2
T, c	1.25	0.75	0.6	0.5	1	0.9	1	1.25

9. Моделировать изотропное интегрирующее звено с параметрами K и τ (принять $T=1$).

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, 1/c$	1.6	1.2	0.9	1.5	2.0	1.8	0.8	1.35
τ, c	0.9	1.1	1.6	0.8	0.7	0.75	1.5	0.95

10. Моделировать реальное дифференцирующее звено без статизма с параметрами K и T (принять $\tau=1$).

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, 1/c$	6	5	3	2.4	3.3	4.5	4	4.2
T, c	1.4	1.2	0.7	0.6	0.75	1.2	1	0.9

11. Моделировать интегро-дифференцирующее звено со статизмом (интегро-дифференцирующее звено с $\tau > T$) с параметрами K, T и τ .

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, 1/c$	2.5	3	3.5	5	4	2.3	3.4	4.5
T, c	0.4	1.5	0.8	2	0.9	0.5	1.5	1.0
τ, c	0.8	2.5	1.2	2.2	1.2	1.2	2.3	1.15

12. Моделировать интегро-дифференцирующее звено первого порядка (с $\tau < T$) с параметрами K, T и τ .

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8
$K, 1/c$	3.3	4	5	8	6.6	6.9	6	4.5
T, c	0.6	2	1.2	1.8	1.5	0.7	2.4	0.45
	1	3.5	2.5	3.32	5	1.5	3.3	0.9
τ, c	0.4	1.5	0.8	1.6	0.9	0.5	1.1	0.3

6. Вопросы для самопроверки

1. Что называется динамическим звеном САУ?
2. Какие динамические звенья называются типовыми?
3. Какими характеристиками описываются динамические звенья?
4. Что такое передаточная функция звена?
5. Что такое переходная характеристика динамического звена?
6. Что такое импульсная функция (функция веса) звена?
7. По каким признакам классифицируются динамические звенья?

8. Перечислите основные типовые динамические звенья.

9. Как зависит характер процесса в позиционных звеньях второго порядка от коэффициента демпирования?

10. В каких единицах может измеряться коэффициент передачи интегрирующего звена?

11. Как зависит переходная характеристика $h(t)$ интегро-дифференцирующего звена от соотношения τ и T ?

12. Как зависит переходная характеристика $h(t)$ апериодического звена второго порядка от величины η ?

13. В чем состоит особенность составления уравнения для ЭВМ при моделировании дифференцирующих звеньев?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Исследование САУ с помощью частотных характеристик

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала, касающегося частотных динамических характеристик звеньев и систем автоматического управления;
- ознакомление со схемами, методами и приборами для экспериментального определения амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик;
- исследование процессов в линейной САУ с помощью частотных характеристик.

2. Краткие сведения из теории

2.1. Общие сведения о частотных характеристиках

Частотные характеристики являются одним из важнейших динамических характеристик звеньев и систем САУ. Они описывают свойства звеньев и систем при прохождении через них гармонического воздействия (сигнала). При пропускании через звено периодического воздействия любой формы оно может быть представлено как сумма гармонических составляющих в соответствии с разложением Фурье. Тогда, с учетом принципа суперпозиции, с помощью частотных характеристик можно описать прохождение через это звено любого периодического сигнала.

На основе частотных характеристик созданы инженерные методы анализа и синтеза САУ. При исследовании САУ достоинства частотных методов проявляются в том, что они позволяют легко определить влияние того или иного параметра звена или всей САУ на их динамические свойства (устойчивость, характер и качество переходного процесса и т.д.), очень важной является возможность экспериментально определять частотные характеристики реальных звеньев; это может существенно упростить оценку и расчет САУ в случаях, когда уравнения динамики трудно составить аналитически.

Обычно рассматривают семь частотных характеристик:

- амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);
- фазовая частотная характеристика (ФЧХ);
- амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ или АФХ);
- логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАХ или ЛАЧХ);
- логарифмическая фазовая частотная характеристика (ЛФХ или ЛФЧХ);
- вещественная частотная характеристика (ВЧХ);
- мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Первые три характеристики, рассматриваемые ниже, являются исходными, и именно они могут быть определены экспериментально.

Последующие четыре получаются из АФЧХ и широко используются для расчета и синтеза САУ. Все частотные характеристики однозначно связаны друг с другом.

Весьма наглядную характеристику динамических свойств звена можно получить, если в качестве функции на его входе принять гармоническое воздействие (сигнал)

$$x = A_{\text{вх}} \sin \omega t, \text{ или в комплексной форме } x = A_{\text{вх}} e^{j\omega t}, \quad j\omega t \quad (2.1)$$

где $A_{\text{вх}}$ - амплитуда входных колебаний,
 ω - их круговая частота и f - частота в Гц.

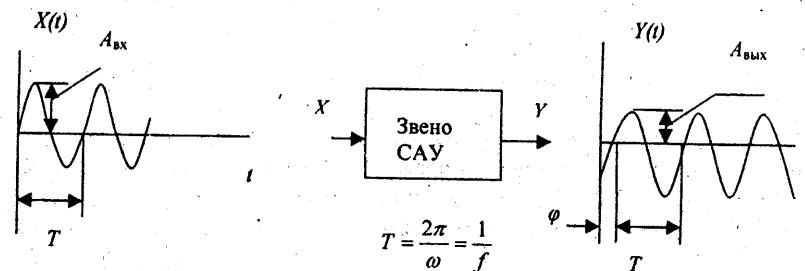


Рис.3.1. Прохождение гармонического воздействия через линейное звено

На выходе линейного звена или системы после некоторого переходного процесса установятся вынужденные колебания. Их выходная величина y (рис.3.1.) также будет представлять собой вынужденные колебания с той же частотой ω , но с иной амплитудой $A_{\text{вх}}$ и с фазой, смещенной на угол φ по отношению ко входным колебаниям:

$$y = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad y = A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (2.2)$$

Если изменить частоту ω , сохраняя амплитуду входной величины $A_{\text{вх}}$, то амплитуда на выходе $A_{\text{вых}}$ и сдвиг по фазе φ (рис.3.2,а) также изменятся. При увеличении частоты обычно (для инерционных звеньев) выходная амплитуда уменьшается, а фазовый сдвиг колебаний растет (рис.3.2,б), но возможны и противоположные изменения.

Таким образом, частотная характеристика представляет собой реакцию динамического звена на входное гармоническое воздействие изменяющейся частоты. Следовательно, амплитуда выходной величины, а также отношение амплитуд выходной и входной величин $A_{\text{вых}}/A_{\text{вх}}$ и фазовый сдвиг φ являются функциями частоты ω :

$$(A_{\text{вых}}/A_{\text{вх}}) = A(\omega) \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi(\omega). \quad (2.3)$$

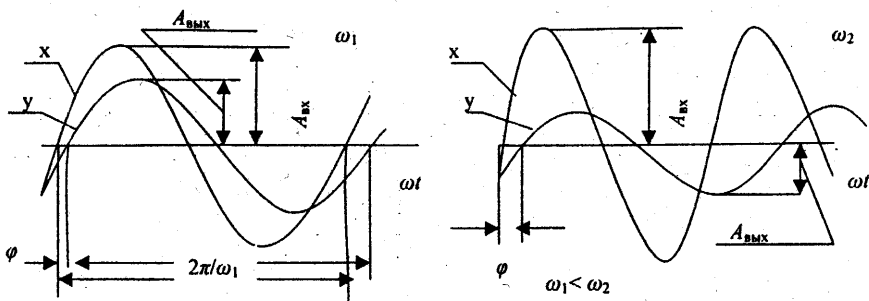


Рис.3.2. Изменение амплитуды и фазы на выходе звена от частоты

Амплитудной частотной характеристикой звена или системы (АФХ) называется зависимость отношения амплитуд выходной и входной величины от частоты. Фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) называется зависимость фазового сдвига между входной и выходной синусоидами от частоты.

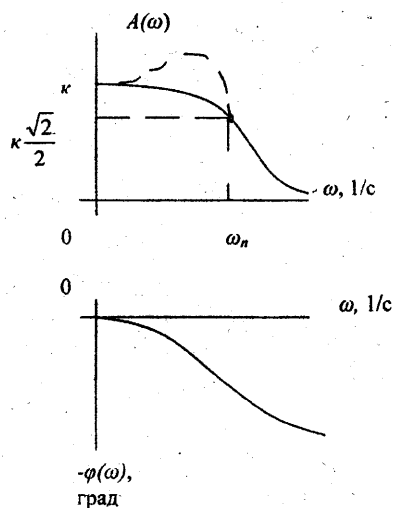


Рис.3.3. Характеристики АЧХ и ФЧХ

Возможный вид этих характеристик показан на (рис.3.3). АЧХ как правило, монотонна, но для колебательных звеньев с малым затуханием она может иметь максимум на резонансной частоте (пунктирная кривая на рис.3.3). АЧХ имеет размерность, равную отношению размерностей выходной и входной величин; в этом случае характеристика начинается на оси ординат в точке K , где K – статический коэффициент передачи (усиления) звена.

Важной точкой АЧХ является та, при которой ордината $A(\omega)$ составляет $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$ от начальной при $\omega = 0$. Интервал частот, при которых амплитуда на выходе составляет не менее 0,7 от начальной $A_{\text{вых}}(0)$, называется полосой пропускания динамического звена (системы).

Если представить, что $A(\omega_i)$ является модулем некоторого вектора, а сдвиг по фазе $\varphi(\omega_i)$ – его аргументом, то этот вектор (который мы будем в дальнейшем называть вектором частотной функции), построенный в полярных координатах для некоторой частоты ω_i (рис.3.4,а), будет характеризовать свойства звена при передаче, т.е. при пропускании сигнала с частотой ω_i . Тот же вектор может быть изображен в прямоугольных координатах $P(\omega_i)$ и $jQ(\omega_i)$ – рис.3.4,б, тогда он будет задан проекциями на оси координатами $P(\omega_i)$ и $jQ(\omega_i)$. Эти проекции носят название соответственно вещественная (ВЧХ) и мнимая (МЧХ) частотные характеристики. В интервале изменения частоты от 0 до ∞ различным ее значениям $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ будут соответствовать различные векторы (рис.3.4,в). Если соединить концы векторов линией, то получится кривая – геометрическое место точек концов вектора, – называемая амплитудно-фазовой частотной характеристикой (рис.3.4,г).

Амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) звена или системы называется годограф вектора частотной функции при изменении частоты ω от 0 до ∞ .

Аналитическое выражение частотной функции можно получить, если рассмотреть дифференциальное уравнение звена. Связь входной и выходной величин и, следовательно, свойства этого звена описываются линейным дифференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (2.4)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ и $b_0, b_1, \dots, b_m$ – постоянные коэффициенты, определяющие свойства динамического звена.

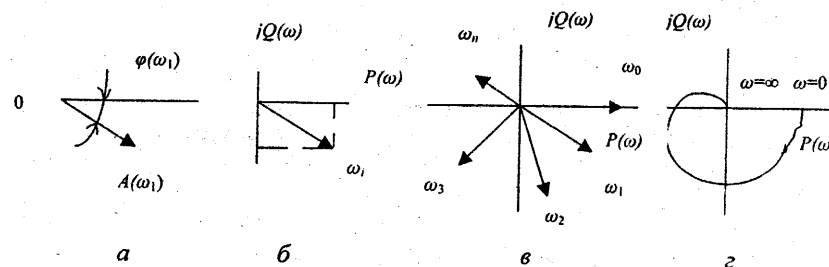


Рис.3.4. Амплитудно-фазовая характеристика

В это уравнение нужно подставить принятые ранее для звена входную и

выходную гармонические величины и их производные:

$$x = A_{\text{вх}} e^{j\omega t}; \frac{dx}{dt} = (j\omega) A_{\text{вх}} e^{j\omega t}; \dots \frac{d^m x}{dt^m} = (j\omega)^m A_{\text{вх}} e^{j\omega t}, \quad (2.5)$$

$$y = A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)}; \frac{dy}{dt} = (j\omega) A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)}; \dots \frac{d^n y}{dt^n} = (j\omega)^n A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Подставляя, получим

$$\left[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 \right] A_{\text{вх}} e^{j(\omega t + \varphi)} = \left[b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0 \right] A_{\text{вых}} e^{j\omega t}. \quad (2.6)$$

Преобразуем выражение к виду

$$\frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{A_{\text{вых}} e^{j(\omega t + \varphi)}}{A_{\text{вх}} e^{j\omega t}}. \quad (2.7)$$

Левая часть выражения — отношение комплексных полиномов, характеризует внутренние свойства звена, а правая часть — отношение выходного и входного сигналов.

Отношение в левой части носит название частотной функции звена $W(j\omega)$; его называют также частотной передаточной функцией, комплексной передаточной функцией, комплексной частотной функцией, комплексным коэффициентом передачи и т.д.

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}. \quad (2.8)$$

В правой части согласно принятому ранее обозначим отношение через $A(\omega)$ и сократим дробь на $e^{j\omega t}$. Окончательно получим

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9.) носит название показательной формы частотной функции. Ей соответствует АФЧХ в полярных координатах. Очевидно, что функции АЧХ и ФЧХ будут соответственно

$$A(\omega) = \text{mod } W(j\omega) = |W(j\omega)| \text{ и } \varphi(\omega) = \arg W(j\omega), \quad (2.10)$$

другая форма частотной функции — алгебраическая — имеет вид

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (2.11)$$

Ей соответствует АФЧХ, построенная в прямоугольных координатах $P(\omega)$ и $jQ(\omega)$ — рис.3.4,з. Очевидно, что функции ВЧХ и МЧХ можно выразить следующим образом:

$$P(\omega) = \text{Re } W(j\omega); Q(\omega) = \text{Im } W(j\omega). \quad (2.12)$$

Частотные характеристики связаны между собой отношениями:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \varphi(\omega) = \text{arctg} \left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right],$$

$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (2.13)$$

2.2. Частотные оценки качества систем автоматического регулирования

С помощью полученных частотных характеристик можно определять показатели качества систем автоматического управления, не прибегая к сложным математическим операциям. Для этого существуют два способа оценки качества.

1. По виду вещественной частотной характеристики $P(\omega)$;
2. По номограммам В.В.Солодовникова.

В данной лабораторной работе частично будет рассмотрен только первый способ.

Переходный процесс в системе выражается через вещественную частотную характеристику замкнутой системы $P(\omega)$ по формуле

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega. \quad (2.14)$$

На основании формулы (2.14) можно сделать вывод, что различным вещественным частотным характеристикам соответствуют различные переходные процессы: выпуклой ВЧХ соответствует колебательный переходный процесс (рис. 3.5,а), вогнутой — монотонный (рис. 3.5, з).

Рассмотрим взаимосвязь вида ВЧХ и некоторых основных характеристик переходного процесса.

1. **Изменение масштаба по оси абсцисс и ординат.** Изменение масштаба ВЧХ по оси ординат в n раз приводит к пропорциональному изменению масштаба кривой переходного процесса в то же число раз (рис.3.5,а и б). Изменение масштаба ВЧХ по оси абсцисс в n раз приводит к обратному пропорциональному изменению масштаба переходного процесса в тоже число раз (рис.3.5,а и в).

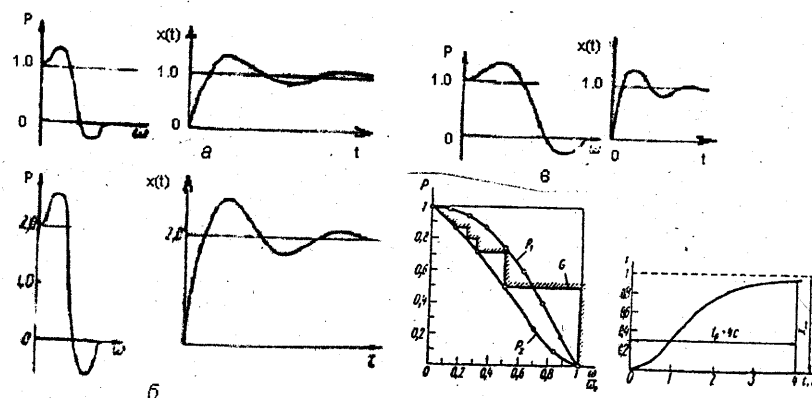


Рис.3.5. Вещественные частотные характеристики и соответствующие им переходные процессы

2. Установившееся значение переходного процесса.

Согласно теореме о конечном значении имеем

$$y_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega Y(j\omega), \quad (2.15)$$

где $Y(j\omega)$ - изображение Фурье выходной величины.

Для принятого нами единичного воздействия получим

$$Y(j\omega) = \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega}, \quad (2.16)$$

где $\Phi(j\omega)$ - передаточная функция замкнутой системы.

Подставив выражение (2.16) в соотношение (2.15), найдем:

$$y_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(j\omega). \quad (2.17)$$

При этом действительная часть частной характеристики равна $P(0)$, а ее мнимая часть $Q(0)=0$; поэтому из соотношения (2.17) следует

$$y_{\infty} = P(0).$$

3. Максимум перерегулирования при невозрастающей вещественной частотной характеристике. Частотная характеристика на интервале положительности $[0, \omega_n]$ имеет вид кривой, показанной на рис. 3.6,а, представим ее в виде

$$\text{суммы: } y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n}} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\omega_n}}^{\frac{2\pi}{\omega_n}} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \dots \quad (2.18)$$

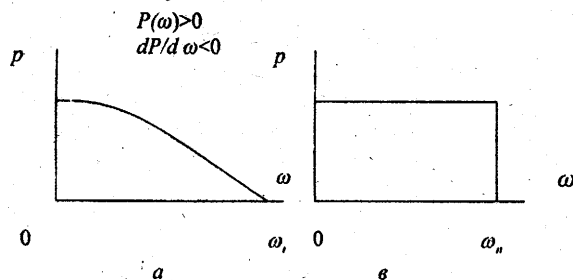


Рис.3.6. Виды положительных невозрастающих вещественных частотных характеристик

Известно, что сумма знакопеременного сходящегося ряда (2.18) не может превышать значение его первого члена. Поэтому:

$$y(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n}} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (2.19)$$

Последнее неравенство можно усилить, если вместо $P(\omega)$ подставить $P(0)$:

$$y(t) \leq \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n}} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (2.20)$$

Введем новую переменную $\omega t = z$ и $d\omega = \frac{dz}{t}$. Тогда неравенство (2.20) можно переписать в виде:

$$y(t) \leq \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n t}} \frac{\sin z}{z} dz, \quad (2.21)$$

откуда

$$y(t) \leq \frac{2P(0)}{\pi} 1.85 = \frac{2}{\pi} 1.85 y_{\infty}. \quad (2.22)$$

Определим

$$[y(t) - y_{\infty}] < \left(\frac{2}{\pi} 1.85 - 1\right) y_{\infty}, \quad (2.23)$$

тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{y(t) - y_{\infty}}{y_{\infty}} 100\% < \left(\frac{2}{\pi} 1.85 - 1\right) 100\% = 18\%. \quad (2.24)$$

Для вещественной частотной характеристики, имеющей вид прямоугольника (рис.3.6,б), неравенство (2.24) станет равенством, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{y(t) - y_{\infty}}{y_{\infty}} = 18\%.$$

4. Зависимость максимума перерегулирования от пика вещественной частотной характеристики. Рассмотрим вещественную частотную характеристику на интервале положительности $[0, \omega_n]$. Разобьем ее на две характеристики (рис.3.7,б), т.е.

$$P(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega), \quad (2.25)$$

где

$$P_1(0) = P_{\max}.$$

Тогда формулу для определения переходного процесса можно представить в следующем виде:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n}} P_1(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n}} P_2(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (2.26)$$

В соответствии с (2.20)

$$y(t) < \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_n}} P_1(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (2.27)$$

на основании свойства 2 запишем

$$\frac{y(t)}{y_{\infty}} < 1.8 \frac{P_{\max}}{P(0)},$$

откуда

$$\sigma_{\max} = \frac{1.18P_{\max} - P(0)}{P(0)} 100\% \quad (2.28)$$

5. Время переходного процесса t_p и максимум перерегулирования $\sigma_{\max}$, когда вещественная частотная характеристика мало отличается от трапецеидальной.

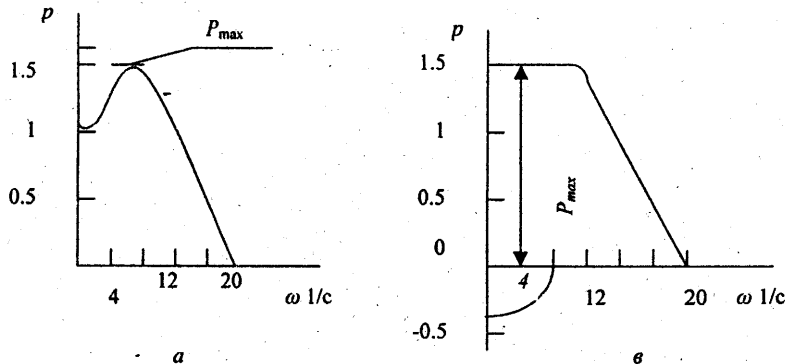


Рис.3.7. Вещественные частотные характеристики с $P_{\max}$ (имеющие пик)

Если невозрастающую непрерывную вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ (см.рис.3.6, а) можно заменить эквивалентной трапецеидальной частотной характеристикой¹ с частотами ω_0 и ω_n (рис.3.8, а), то время переходного процесса t_p будет находиться в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_0} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_0} \quad (2.29)$$

Более точно время регулирования можно оценить по кривой на рис.3.8,б. Величина перерегулирования $\sigma_{\max}$ определяется с помощью кривой на рис. 3.8,в. Абсциссой для данных графиков служит коэффициент наклона трапецеидальной частотной характеристики

$$x = \frac{\omega_d}{\omega_0}$$

б. Зависимость времени переходного процесса от длины интервала положительности. Если вещественная частотная характеристика $P(\omega) > 0$ интервале $[0, \omega_n]$, то время переходного процесса t_p заведомо больше, чем

$$\frac{\pi}{\omega_n}, \quad \text{т.е.} \quad t_p > \frac{\pi}{\omega_n}.$$

Для монотонного переходного процесса, т.е. для которого $\frac{dy}{dt} \geq 0$, будет выполняться следующее неравенство: $t_p < \frac{4\pi}{\omega_n}$.

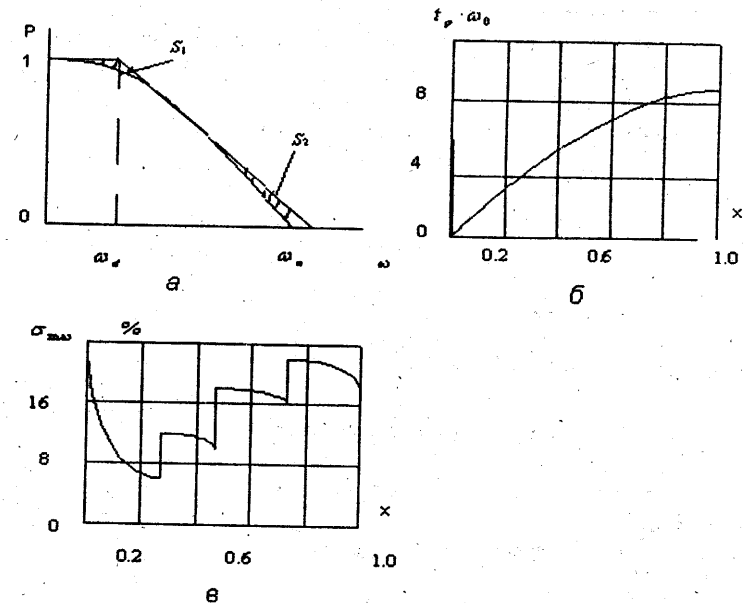


Рис.3.8. Графики для определения $\sigma_{\max}$ и t_p при невозрастающих вещественных частотных характеристиках: а-аппроксимация характеристики $P(\omega)$ трапецеидальной характеристикой; б- график для определения t_p ; в- график для определения $\sigma_{\max}$

3. Задание к лабораторной работе и порядок ее выполнения:

- изучить методические указания по данной работе;
- ответить на контрольные вопросы;
- получить задание в виде структурной схемы замкнутой САУ;
- построить амплитудные частотные характеристики САУ;
- построить вещественную и мнимую частотные характеристики замкнутой САУ;
- построить логарифмическую амплитудную частотную характеристику разомкнутой САУ;

¹Аппроксимацию характеристики $P(\omega)$ трапециями необходимо проводить таким образом, чтобы недостающая часть площади вещественной характеристики S_1 была избыточной части характеристики S_2 (см. рис. 3. 8,а). только при этом условии замена исходной вещественной характеристики трапецеидальной будет правильной.

- с помощью частотных характеристик построить переходный процесс в замкнутой САУ при единичном ступенчатом входном воздействии;
- построить асимптотическую логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАХ) разомкнутой САУ.

4. Результаты работы, включаемые в отчет:

- структурная схема исследуемой САУ;
- распечатки графиков построенных частотных характеристик;
- исследование частотных характеристик и определение необходимых численных параметров;
- расчет показателей качества САУ;
- кривая переходного процесса (h – функция);
- асимптотическая ЛАХ разомкнутой САУ.

5. Вопросы для самопроверки

1. Перечислите частотные характеристики, используемые для исследования САУ.
2. Какие частотные характеристики позволяют спрогнозировать процессы в САУ?
3. Как строятся ЛЧХ, ФЧХ, АФЧХ, ВЧХ?
4. Какая связь существует между АЧХ, ВЧХ и процессами в САУ?
5. Как влияют параметры частотных характеристик на тип переходного процесса и качественные его показатели?
6. Чем отличается асимптотическая ЛАХ от обычной?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Исследование устойчивости линейных систем автоматического управления

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала, касающегося устойчивости линейных и линеаризованных систем автоматического управления;
- экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости линейной САУ;
- анализ влияния отдельных параметров системы на ее устойчивость.

2. Краткие сведения из теории

Одной из важнейших динамических характеристик САУ является ее устойчивость. Система всегда подвергается внешним воздействиям, которые выводят её из состояния установившегося равновесия.

Под устойчивостью понимается свойство системы самостоятельно возвращаться к состоянию установившегося равновесия после устранения воздействия, которое нарушило это равновесие.

Устойчивость САУ является необходимым (но недостаточным) условием её работоспособности. Устойчивость САУ предусматривает, что переходные процессы, происходящие в системе в результате внешних воздействий, будут сходящимися во времени (рис. 4.1,а). Наоборот, если процессы, происходящие в системе в результате внешних воздействий, будут расходящимися, т.е. если выходная величина будет со временем колебательно или аperiodически неограниченно возрастать (рис.4.1,б), то такая система будет неработоспособной.

Для линеаризованных систем теоретически возможен третий, промежуточный случай, когда процесс в системе не сходится и не расходится, а становится незатухающим колебательным (рис. 4.1,в). Тогда говорят, что система находится на колебательной границе устойчивости. Однако, для обычных технических систем этот случай является практически нереальным. Это связано с тем, что, во-первых, при теоретической оценке устойчивости не учитываются отброшенные при линеаризации члены высших степеней разложения характеристик САУ, которые могут повлиять на устойчивость. Во-вторых, параметры реальных САУ, находящиеся под неизбежным влиянием внешней среды – колебаний температуры, давления, электрических и магнитных полей, старения нестабильных характеристик источников питания, - флуктуируют, что также вызывает сдвиг системы с границы устойчивости.

Следовательно, для реальных линеаризованных и линейных систем практически возможны лишь два состояния: устойчивое или неустойчивое.

Для реальных САУ вероятен случай, когда внешние воздействия следуют настолько часто одно за другим, что установившееся равновесное состояние даже в устойчивой системе может не наступать.

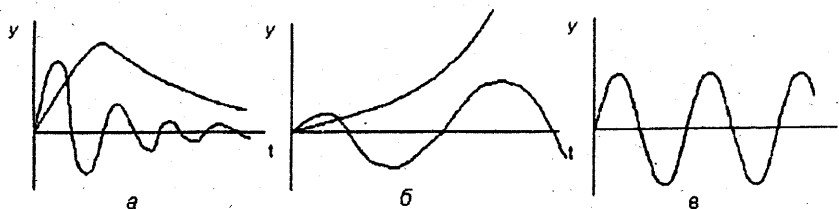


Рис. 4.1. Виды переходных процессов:

а - сходящийся; б - расходящийся; в - стационарный

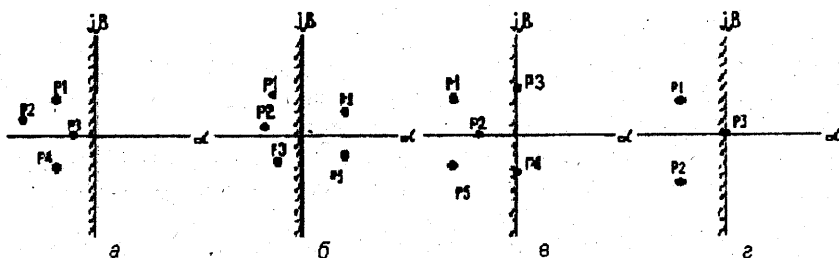


Рис 4.2. Положение корней характеристического уравнения:

а - устойчивой САУ; б - неустойчивой САУ; в, г - САУ на границе устойчивости

Тогда уместно следующее, более общее понятие устойчивости.

Система устойчива, если ее выходная величина остаётся ограниченной в условиях действия на систему ограниченных по величине воздействий.

Физическая сущность явления неустойчивости связана с наличием в САУ главной (внешней) обратной связи (ОС). Принцип регулирования по отклонению требует, чтобы сигнал ОС в сумматоре был противоположного знака или был в противофазе по отношению к сигналу задающего (управляющего воздействия), т.е. чтобы ОС была *отрицательной*.

При нарушении установившегося состояния в объекте регулирования появляется избыток или недостаток энергии или вещества; это вызывает отклонение регулируемой величины от заданного значения, сигнал об этом по каналу отрицательной ОС передаётся на вход системы с целью вызвать такое регулирующее воздействие, которое восстановит баланс энергии или вещества и стабилизирует выходную величину.

Однако при прохождении замкнутого контура САУ сигнал может существенно замедлиться. Причина этого замедления состоит в том, что многие звенья САУ являются инерционными, т.е. способны накапливать энергию. Так, обмотки электродвигателей, генераторов и других электроаппаратов обладают магнитными полями; в конденсаторах

скапливается энергия в виде электрических полей; в механических звеньях системы при движении накапливается кинетическая энергия и т.д. Изменение запаса энергии в этих инерционных звеньях не может происходить мгновенно, следовательно, прохождение сигнала ОС по контуру САУ замедляется.

При определённых условиях такое запаздывание сигнала может привести к тому, что регулирующее воздействие настолько отстанет от отклонений выходной величины, что будет не уменьшать их, а усиливать; сигнал ОС при этом будет не стабилизировать систему, а раскачивать её, т.е. отрицательная ОС фактически станет *положительной*.

В возмущённой системе уровни энергии в различных звеньях колеблются относительно своего среднего стационарного значения. В устойчивой малоинерционной системе энергия колебаний постепенно выделяется и рассеивается в виде тепла и колебания выходной величины затухают.

В неустойчивой системе САУ, когда коэффициент усиления контура системы по амплитуде велик, а параметры звеньев системы таковы, что необходимое затухание (рассеивание) энергии не обеспечивается, а инерционное запаздывание (фазовые сдвиги) значительно, запас колебательной энергии в звеньях нарастает, пополняясь из основного энергетического канала. В этом случае колебания выходной величины нарастают неограниченно и выводят систему из строя.

Строгую и законченную постановку и методы решения задачи об устойчивости систем дал выдающийся русский ученый, академик А.М.Ляпунов.

Если к линейной (линеаризованной) системе приложить импульсное воздействие, то свободное движение в ней будет описываться однородным дифференциальным уравнением:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad (2.1)$$

Система будет устойчивая, если свободная составляющая движения, т.е. $y_{св}(t)$, будет с течением времени стремиться к нулю, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св}(t) = 0. \quad (2.2)$$

Наоборот, если $y_{св}(t)$ будет неограниченно возрастать, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св}(t) = \infty, \quad (2.3)$$

то система окажется неустойчивой.

Следовательно, условие устойчивости системы определяется видом решения дифференциального уравнения (2.1).

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (2.4)$$

где C_i - постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий, а p_i - корни характеристического уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 = 0. \quad (2.5)$$

А.М. Ляпунов показал, что для выполнения условия устойчивости (2.5) необходимо, чтобы каждый член вида $Ce^{p_i t}$ стремился к нулю. Это, в свою очередь, возможно только в том случае, когда все корни уравнения (2.5) вида $p_i = \alpha_i + j\beta_i$, какими бы они ни были (вещественными, комплексными, кратными), будут иметь отрицательную вещественную часть $\alpha_i < 0$.

Если изобразить положение корней уравнения (2.5) на комплексной плоскости (рис.4.2), то будет видно, что все корни характеристического уравнения устойчивой системы должны быть "левыми", т. е. располагаться левее мнимой оси, которая играет здесь роль границы устойчивости (рис.4.2,а).

Если хотя бы один корень будет иметь $\alpha_i > 0$ (рис.4.2,б), то соответствующий член $Ce^{p_i t}$ при $t \rightarrow \infty$ будет неограниченно возрастать и система окажется неустойчивой.

Случай, когда среди корней характеристического уравнения найдется пара чисто мнимых (а остальные будут "левыми"), соответствует системе, находящейся на колебательной границе устойчивости (рис.4.2,в), а случай, когда имеется вещественный нулевой корень, - системе на аperiodической границе, т. е. безразлично устойчивой (рис.4.2,г). Эти случаи, как показано выше, для технических систем практически нереальны.

Таким образом, для проверки устойчивости конкретной САУ достаточно решить характеристическое уравнение, чтобы выяснить расположение корней. Однако уже при степени уравнения $n \geq 3$ такая работа становится весьма трудоемкой. Удобнее использовать сравнительно простые алгоритмы - правила, позволяющие судить о знаке вещественной части корней без определения их числового значения. Такие правила получили название *критериев* или *условий устойчивости*.

Первым необходимым условием устойчивости САУ является положительность коэффициентов характеристического уравнения. Это уравнение можно представить, согласно теореме Безу в виде

$$a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0. \quad (2.6)$$

Для устойчивой системы все корни p_i левые, т. е. $p_i = -\alpha_i \pm j\beta_i$. Если подставить их в (2.6) и раскрыть скобки, то в итоге все коэффициенты $a_0 \dots a_n$ окажутся положительными.

Положительность коэффициентов характеристического уравнения называется условием А. Стодоль. Оно является достаточным для систем первого и второго порядков. Для систем $n \geq 3$ условие является необходимым, а для полной проверки устойчивости нужно, кроме того, применить еще какой-либо из критериев устойчивости. Критерии устойчивости подразделяются на алгебраические и частотные. К алгебраическим относят критерии Рауса, Гурвица, Вышнеградского и Ленара, к частотным - критерии Михайлова, Найквиста и логарифмический.

В 1877 году Э. Раус сформировал условия для коэффициентов характеристического уравнения, выполнение которых обеспечивает отрицательность вещественных частей его корней, т. е. устойчивость САУ. Условия представляют собой неравенства, составленные из коэффициентов характеристического уравнения.

В 1895 году другой математик, А. Гурвиц, выразил условия устойчивости в форме определителей, составленных из коэффициентов характеристического уравнения. Такая форма оказалась более удобна для вычислений при проверке устойчивости систем до пятого порядка включительно. Все же для систем с $n \geq 7$ применение критерия Рауса более целесообразно. Нужно заметить, что математическая суть обоих критериев одинакова.

Оба критерия, особенно Рауса, хорошо реализуются в программах, составленных для определения устойчивости на ЭВМ.

Критерий устойчивости Рауса

Формулировка этого критерия такова.

Для того чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса были одного знака, т. е. положительны при $a_n > 0$.

Для неустойчивой системы число нарушений этого правила в первом столбце таблицы равно числу "правых" корней характеристического уравнения.

Таблица Рауса состоит из N строк и M столбцов. При этом для системы порядка n

$$N = n + 1, \quad (2.7)$$

$$M = \text{INT} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \quad (2.8)$$

Таблица Рауса составляется следующим образом: (таблица 1).

В первую строку таблицы записываются последовательно коэффициенты характеристического уравнения, начиная с a_n , через один; во вторую, - начиная с a_{n-1} , также через один. При этом если n - четное, то в первой строке таблицы оказываются коэффициенты с четными индексами, а во второй строке - с нечетными; если же n - нечетное, то коэффициенты характеристического уравнения располагаются наоборот. Элементы третьей и последующих строк вычисляются.

Строки нумеруются $1, 2, 3, \dots, N$; столбцы нумеруются $1, 2, 3, \dots, M$. Элементам строк, начиная с третьего, присваивается двойной индекс a_{ij} , определяющий номера строки и столбца.

Далее вычисляются вспомогательные множители Z_i , равные отношению элементов двух вышележащих строк в первом столбце:

$$Z_i = \frac{a_{i-2,i}}{a_{i-1,i}}, \quad (2.9)$$

которые для удобства записываются с левой стороны таблицы против соответствующих строк.

Затем вычисляются элементы таблицы, начиная с третьей строки, до M , т.е. до конца таблицы. Для вычисления числового значения элемента составляется определитель 2×2 из элементов двух вышележащих строк и вспомогательного множителя данной строки; четвертый элемент определителя равен единице.

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{i-2,j+1} & Z_i \\ a_{i-1,j+1} & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Справа строки заканчиваются нулевыми значениями.

Когда таблица Рауса сформирована, рассматриваются знаки элементов первого столбца и делается вывод об устойчивости системы. Если все элементы положительны, то система устойчива. Если окажется, что один из N элементов первого столбца равен нулю, то это означает, что САУ находится на границе устойчивости; это соответствует тому, что среди корней характеристического уравнения есть корни, находящиеся на мнимой оси плоскости корней.

1. Таблица Рауса

Вспомогательные множители	Столбцы	1	2	3	...	j	...	M
Строки								
	1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...		...	
	2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}			...	
$Z_3 = a_n/a_{n-1}$	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}			...	
$Z_4 = a_{n-1}/a_{31}$	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}			...	
.....		...	...	...			...	
$Z_i = (a_{i-2,1})/(a_{i-1,1})$	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}		a_{ij}	...	
.....		...	...	...	...	...	...	...
	N	a_{N1}	a_{N2}	a_{N3}				

$$a_{ij} = a_{i-2,j+1} - Z_i \cdot a_{i-1,j+1}.$$

Критерий устойчивости Гурвица

Для определения устойчивости САУ с помощью алгебраического критерия Гурвица из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой

системы составляется матрица следующим образом. Коэффициенты с a_{n-1} по a_0 располагают последовательно по главной диагонали; затем дополняют столбцы вверх коэффициентами с последовательно меньшими индексами, а вниз – с большими индексами. Свободные места заполняются нулями.

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ \Delta_2 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \Delta_3 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Затем, начиная с левого верхнего угла матрицы, составляются диагональные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$. Последний определитель Δ_n включает всю матрицу.

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix};$$

Критерий Гурвица формулируется так.

Для того чтобы система была устойчива (т.е. чтобы все корни характеристического уравнения были левыми), необходимо и достаточно, чтобы при $a_n > 0$ определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots \Delta_n$ были положительны.

Определение устойчивости САУ по критерию Гурвица для систем 3-го порядка не представляет труда. Вычисление определителей для систем 4-го, 5-го и 6-го целесообразно выполнять на ЭВМ. Для систем более высокого порядка трудоемкость вычисления определителей заметно возрастает; в этих случаях удобнее использовать критерий Рауса.

При подготовке задач по определению устойчивости по Гурвицу для ввода в ЭВМ вычисление определителей ведут путем разложения их по минорам либо применяют готовые формулы из справочных пособий, либо, наконец, используют специальные программы из обеспечения ЭВМ.

Вычисление определителей облегчается двумя обстоятельствами. Во-первых, крайний правый столбец исходной матрицы содержит только член a_0 , остальные члены – нули. Тогда $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_0$, а так как все коэффициенты характеристического уравнения и в том числе a_0 больше нуля, то последний определитель Δ_n будет положителен, если был положителен предпоследний Δ_{n-1} . Следовательно, вычислять Δ_n нет необходимости.

Во-вторых, как показал Льенар, при выполнении того же условия для определения устойчивости системы достаточно проверить положительность определителей $\Delta_{n-1}, \Delta_{n-3}, \Delta_{n-5}, \dots$, т.е. через один.

И, наконец, устойчивость САУ можно определить с помощью неравенств, полученных из соответствующих матриц. Для систем третьего порядка:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (2.11)$$

Для систем четвертого порядка:

$$a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0. \quad (2.12)$$

Критерий устойчивости Михайлова

Формулировка критерия.

Для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор характеристического многочлена на комплексной плоскости при $\omega=0$, начиная с первого квадранта, последовательно проходил n

квадрантов, поворачиваясь на угол $\psi = n \frac{\pi}{2}$.

Последовательность расчетов при этом следующая.

Характеристическое уравнение САУ записывают в частотной форме:

$$a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = 0$$

Обозначим левую часть уравнения $D(j\omega)$:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Изменяя ω в пределах $0 \leq \omega \leq \infty$, можно вычислить значения $X(\omega)$ и $Y(\omega)$, на комплексной плоскости построить годограф (кривую Михайлова), а затем по ее расположению относительно координатных осей сделать вывод об устойчивости САУ (рис.4.3).

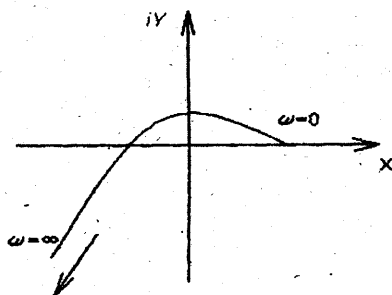


Рис.4.3. Годограф $D(j\omega)$ на комплексной плоскости для устойчивой САУ, описываемой уравнением третьего порядка

Критерий устойчивости Найквиста

Для определения устойчивости САУ с помощью критерия Найквиста необходимо построить амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) разомкнутой системы на комплексной плоскости. В этом случае, если разомкнутая САУ устойчива, то для САУ в замкнутом состоянии годограф АФЧХ разомкнутой системы не должен охватывать точку с координатами $(-1;j0)$.

На рис.4.4 представлена АФЧХ разомкнутой статической САУ. Так как годограф АФЧХ не охватывает точку $(-1;j0)$, то замкнутая САУ устойчива (но при этом должна быть устойчива и разомкнутая система).

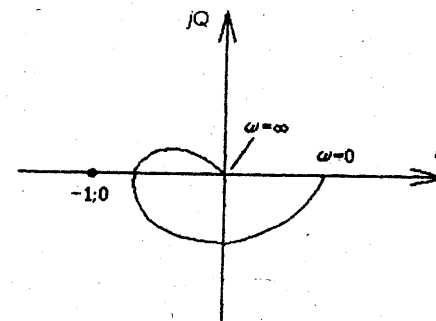


Рис.4.4. АФЧХ разомкнутой системы

Существуют, однако, системы, которые остаются неустойчивыми при любых сочетаниях значений коэффициентов характеристического уравнения. Такие САУ структурно неустойчивы.

Повышение устойчивости САУ

Тенденция к неустойчивости САУ тем выше, чем больше ее инерционность, т. е. чем больше инерционных, например апериодических звеньев, вызывающих отрицательные фазовые сдвиги сигнала. Следовательно, для повышения устойчивости число таких звеньев нужно уменьшить. Но на практике это редко бывает возможным по конструктивным соображениям.

С другой стороны, при заданном числе n апериодических звеньев устойчивость САУ тем меньше, чем ближе друг к другу значения постоянных времени. Если все T одинаковы, то граничные значения коэффициентов усиления $K_{гр}$ составляют:

$$\begin{array}{ll} \text{при } n=3 & K_{гр} = 8 \\ n=4 & K_{гр} = 4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{при } n=5 & K_{гр} = 2,9, \\ n=6 & K_{гр} = 2,4. \end{array}$$

Следовательно, для повышения устойчивости САУ нужно увеличивать разницу между соседними значениями постоянных времени звеньев. Если постоянная времени одного из звеньев меньше других на один – два порядка, то для упрощения расчетов инерционностью звена можно пренебречь. В реальных системах, однако, изменять постоянные времени достаточно трудно.

Наиболее действенным путем повышения устойчивости САУ является изменение структуры – введение внутренних ОС и последовательных корректирующих звеньев. Например, последовательные корректирующие звенья дифференцирующего характера вносят в систему положительные фазовые сдвиги, т. е. уменьшают инерционность системы.

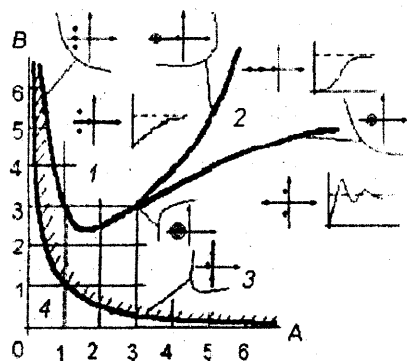


Рис. 4.5. Диаграмма Вышнеградского:
1-область монотонных процессов; 2-область аperiodических процессов; 3-область колебательных процессов; 4-область неустойчивых процессов

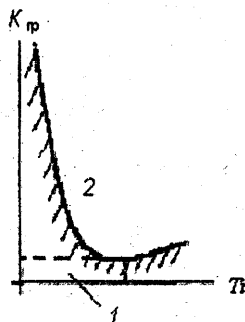


Рис. 4.6. Область и граница устойчивости в плоскости параметров K_p и T :
1-область устойчивости; 2- область неустойчивости

Критерий устойчивости Вышнеградского.

Выделение областей устойчивости

Русский ученый И. А. Вышнеградский около 100 лет назад разработал первый из критериев устойчивости. Критерий был специально предназначен для систем третьего порядка и впоследствии стал частным случаем критерия Гурвица. Особенностью этого критерия является наглядность влияния отдельных параметров на ее устойчивость. Изображение условий устойчивости на плоскости в виде двух областей - устойчивости и неустойчивости, - получило название диаграммы Вышнеградского.

Если в характеристическом уравнении третьего порядка вида

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

ввести новую переменную и обозначения

$$p = p_3 \sqrt{\frac{a_0}{a_3}}, A = 3 \sqrt{\frac{a_2^2}{a_3 a_0^2}}, B = 3 \sqrt{\frac{a_1^3}{a_0^2 a_3}}$$

то его можно привести к виду:

$$p^3 + A p^2 + B p + 1 = 0.$$

Здесь коэффициенты A и B носят название параметров Вышнеградского. Применяя к полученному уравнению критерий Гурвица, определим, что САУ будет устойчива, если $AB-1 < 0$ или $AB > 1$.

В случае, когда коэффициенты уравнения таковы, что $AB=1$, система будет на границе устойчивости. Эта граница - гипербола и может быть построена в координатах $(A; B)$ (рис. 4.5). Область, лежащая выше и правее кривой, - область устойчивости, она отмечена штриховкой.

Диаграмма Вышнеградского позволяет не только проверить устойчивость системы, но и определить характер происходящих в ней процессов. Более подробный анализ структуры корней характеристического уравнения позволяет построить дополнительные кривые, проходящие через точку $(3; 3)$ плоскости AB . Эти кривые делят область устойчивости на подобласти, которые отражают различный характер процессов в системе - затухающие колебательные, аperiodические и монотонно сходящиеся.

Более общим случаем является потребность исследовать влияние любого из параметров на устойчивость САУ различных порядков. Наибольший интерес представляет влияние на устойчивость тех параметров, которые могут быть изменены разработчиком САУ в известных пределах. Этими параметрами являются коэффициент усиления и постоянные времени элементов системы.

Для этой цели на плоскости или в пространстве строят так называемую область устойчивости - геометрическое место точек, в которых комбинация параметров системы обеспечивает ее устойчивость. Дело сводится, таким образом, к определению границ областей устойчивости - линий на плоскости или поверхности в пространстве.

Наиболее общим методом определения областей устойчивости является Д-разбиение пространства параметров, разработанное А. А. Соколовым и Ю. И. Неймарком в 1940-48 годах.

Сущность его состоит в том, что n -мерное пространство параметров САУ n -го порядка разделяются на несколько Д-областей, каждая из которых соответствует определенному соотношению правых и левых корней характеристического уравнения. Та область, для которой все корни - левые, является областью устойчивости.

Допустим, требуется найти пределы изменения параметра K_i или T_i , сохраняя при этом устойчивость САУ. Очевидно, характеристическое уравнение замкнутой САУ содержит члены, линейно зависящие от исследуемого параметра.

Обозначим исследуемый параметр τ . Тогда характеристическое уравнение САУ можно представить в виде

$$\tau Q_1(p) + Q_2(p) = 0. \quad (2.13)$$

Разрешая уравнение (2.13) относительно τ и заменяя p на $j\omega$ получим

$$\tau(j\omega) = -\frac{Q_2(j\omega)}{Q_1(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega). \quad (2.14)$$

Построенная на комплексной плоскости функция $T(j\omega)$ называется кривой Д-разбиения. Она представляет собой отображение мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения САУ на плоскость параметра τ при изменении частоты $-\infty < \omega < \infty$.

Далее на кривую Д-разбиения наносят штриховку таким образом, чтобы при движении от $-\infty$ до ∞ она располагалась слева от кривой.

В представленном на рис.4.7. примере кривая Д-разбиения делит комплексную плоскость на четыре области по параметру τ . Та область, внутри которой направлена штриховка, может быть областью устойчивости. Чтобы убедиться в этом, нужно взять какую-либо точку на оси абсцисс этой области и, пользуясь любым критерием устойчивости, проверить устойчивость САУ в этой области.

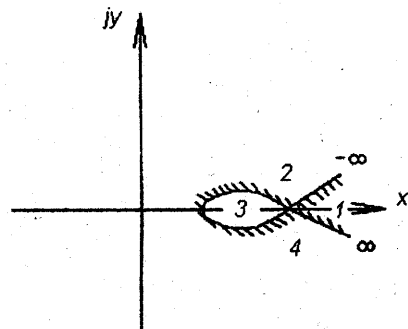


Рис.4.7. Д - разделение по параметру τ область 1 - вероятная область устойчивости

На практике часто пользуется более простым приемом – построением областей устойчивости по двум параметрам с применением критериев устойчивости. Так, наиболее распространенная задача – определение критических, т. е. граничных значений коэффициента передачи разомкнутой САУ решается для систем до четвертого порядка включительно с помощью критерия Гурвица.

Для этого составляется характеристическое уравнение замкнутой системы и условие ее устойчивости, например неравенства (2.11, 2.12). Затем неравенство превращается в равенство и решается относительно $K_{Гр}$:

$$K_{Гр} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0).$$

Подставляя параметры – постоянные времени T , определяют $K_{Гр}$ от любого из параметров системы, принимая при этом, что остальные параметры неизменны. Задаваясь рядом значений интересующего параметра, вычисляют $K_{Гр}$ и строят границу области устойчивости (рис. 4.6).

Очевидно, чтобы САУ была работоспособна, ее режим работы должен быть достаточно удален от границ неустойчивости. Для этого устанавливают рабочее значение коэффициента усиления разомкнутой системы, оно должно быть меньше критического:

$$K_{раб} = K_{Гр} / \beta,$$

здесь β – коэффициент запаса устойчивости.

3. Задание к лабораторной работе:

- изучить данные методического указания по исследованию устойчивости линейных САУ и ответить на контрольные вопросы;
- получить задание для выполнения лабораторной работы;
- составить исходные данные для моделирования исследования устойчивости САУ на ЭВМ;
- исследовать устойчивость замкнутой САУ с помощью заданных критериев устойчивости;
- для заданных параметров и структурной схемы САУ определить методом Д-разбиения область устойчивости по параметру K – коэффициенту усиления разомкнутой системы;
- составить структурную схему упрощенной системы, пренебрегая малыми постоянными времени (т.е. считать четвертое звено системы безынерционным с $T_4=0$);
- для модели упрощенной системы исследовать методом Д-разбиения влияние параметра T_2 – постоянной времени второго звена – на устойчивость и построить границу устойчивости по этому параметру;
- используя критерий устойчивости Гурвица, аналитически построить границу устойчивости в плоскости параметров T_2 и $K_{Гр}$ для упрощенной системы;
- произвести обработку результатов моделирования на ЭВМ;
- произвести анализ полученных данных и сделать выводы по проделанной работе.

4. Указания к составлению отчета

В отчет должны быть включены следующие материалы лабораторной работы:

- структурная схема заданной исходной САУ с ее параметрами;
- определение устойчивости САУ по заданному критерию устойчивости;
- кривые Д-разбиения для исходной (4-го порядка) и упрощенной (3-го порядка) систем с их анализом;
- построение границы устойчивости по критерию Гурвица в плоскости параметров T_2 и $K_{Гр}$;
- общие выводы по работе.

5. Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность явления неустойчивости замкнутой САУ?
2. Дайте определение устойчивой и не устойчивой системы.
3. В чем состоят условия устойчивости линейных и линеаризованных систем по Ляпунову?
4. Как геометрически отражается устойчивость системы на плоскости корней характеристического уравнения?
5. Каковы необходимые и достаточные условия устойчивости, предъявляемые к параметрам характеристического уравнения замкнутой системы?
6. Для чего применяются критерии устойчивости?
7. Какие существуют критерии устойчивости?
8. Что представляют собой области устойчивости САУ?
9. Какие существуют аналитические методы построения областей устойчивой системы?
10. Что такое рабочий и критический коэффициенты усиления системы?
11. Какими способами можно повысить значение критического коэффициента усиления системы?
12. Как влияют постоянные времени элементов системы на ее устойчивость?
13. Как влияет звено последовательной коррекции на устойчивость системы?
14. Что представляют собой "структурно устойчивая" и "структурно неустойчивая" системы?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Исследования качества процессов автоматического управления. Нахождение ошибки системы

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала, касающегося качества САУ;
- составление уравнения ошибок;
- нахождение ошибки системы.

2. Краткие сведения из теории

Каждая система автоматического регулирования оценивается устойчивостью, точностью в установившихся режимах и качеством переходных процессов. Устойчивость обеспечивает затухание переходных процессов. Кроме обеспечения устойчивости необходимо, чтобы в установившихся режимах регулируемая величина была достаточно близка к заданному значению, т.е. обеспечивалась требуемая точность регулирования. Необходимо также, чтобы затухание каждого переходного процесса было достаточно быстрым и с допустимым отклонением регулируемой величины, т.е. обеспечивалось бы требуемое качество переходных процессов.

Точность установившихся режимов и качество переходных процессов в совокупности определяют качество регулирования. Всякая реальная система действует при различных значениях задающего воздействия и возмущений при различном характере их изменения. Чем меньшее значение имеет при этом рассогласование (отклонение регулируемой величины от заданного значения), тем выше качество регулирования. Однако качество регулирования не может быть оценено единым числовым показателем.

Точность оценивается отсутствием или наличием рассогласования в установившихся режимах. Ошибка (рассогласование) САР имеет две составляющие:

$$x = x_f + x_g. \quad (2.1)$$

Здесь x_f – ошибка воспроизведения задающего воздействия; x_g – ошибка, создаваемая возмущением. При нескольких возмущениях x_g имеет соответственно несколько слагаемых. Значения составляющих ошибки в установившемся режиме можно определить с помощью теоремы о конечном значении:

$$X_{fp} = \lim pX_f; X_{gp} = \lim pX_g, \quad (2.2)$$

где $X_{gp} = W_{xg}G$ и $X_{fp} = W_{xf}F$ – изображения составляющих ошибки; G и F изображения соответственно g и f ; W_{xf} и W_{xg} передаточные функции ошибки от задающего воздействия и от возмущения. На рис.5.1 изображена типичная

структурная схема САР, на которую воздействуют два возмущения. Одно из них приложено к объекту регулирования и другое - на входе системы.

Передаточные функции для ошибки от задающего воздействия и для ошибки от возмущения соответственно:

$$W_x(p) = 1/(1+W(p)), \quad W_{\kappa}(p) = W_1(p)W_0(p)/(1+W(p)), \quad (2.3)$$

где $W(p) = W_0(p)W_1(p)W_2(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы.

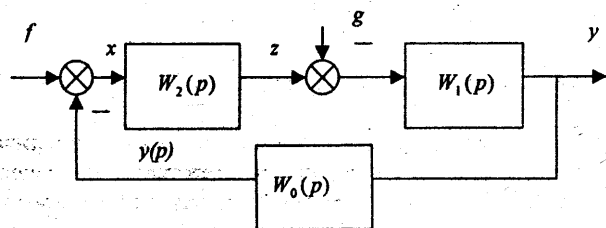


Рис.5.1 Структурная схема одноконтурной САУ

$f(t)$ - задающее воздействие, законы изменения его различны. Например, возможно изменение задающего воздействия по гармоническому закону:

$f(t) = A_1 \sin \omega t$. При этом установившаяся ошибка в линейной системе также будет гармонической:

$$X_{f1} = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.4)$$

Установившееся значение X_{f2} ошибки воспроизведения задающего воздействия:

$$X_{f2}(t) = C_0 \cdot f(t) + C_1 \frac{d}{dt} f(t) + C_2 \frac{d^2}{dt^2} f(t) + C_3 \frac{d^3}{dt^3} f(t) + \dots, \quad (2.5)$$

где $C_0, C_1, C_2, \dots$ - коэффициенты уравнения ошибок.

В данном случае выполнено разложение ошибки в ряд по производным от воздействия. В случае достаточно медленно изменяющихся воздействий в представленном выражении можно ограничиться небольшим числом членов.

Пример нахождения ошибки САУ

Известно задающее воздействие $f(t) = 5t^2$.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = 300 \cdot \frac{0.05 \cdot p^3 + 0.01 \cdot p^2 + 0.03 \cdot p + 1}{0.007 \cdot p^3 + 0.02 \cdot p^2 + 0.001 \cdot p + 1},$$

где $K = 300; a_0 = 0.05; a_1 = 0.001; a_2 = 0.03; b_0 = 0.007$.

Находим коэффициенты уравнения ошибок по формулам, приведенным в программе "oshibka.mcd":

$$C_0 = 1/1+k$$

$$C_0 = 3.322 \cdot 10^{-3}$$

$$C_1 = -2.941 \cdot 10^{-4}$$

$$C_2 = -1.726 \cdot 10^{-4}$$

$$C_3 = \frac{[b_0 - (b_0 + k \cdot a_0)C_0 - (b_1 + k \cdot a_1)C_1 - (b_2 + k \cdot a_2)C_2]}{1+k}, \quad C_3 = -1.472 \cdot 10^{-4}.$$

Установившееся значение ошибки воспроизведения задающего воздействия:

$$X_{f2}(t) = C_0 \cdot f(t) + C_1 \frac{d}{dt} f(t) + C_2 \frac{d^2}{dt^2} f(t) + C_3 \frac{d^3}{dt^3} f(t).$$

Находим ошибку системы:

$$X_{f2} = 16.61 \cdot 10^{-3} t^2 - 2.941 \cdot 10^{-3} t - 1.726 \cdot 10^{-3}.$$

3. Задание к лабораторной работе и порядок ее выполнения:

- по заданной структурной схеме определить передаточную функцию системы;
- в зависимости от вида передаточной функции по соответствующим формулам найти коэффициенты уравнения ошибок;
- используя найденные коэффициенты, составить уравнение ошибок;
- найти ошибку САУ.

4. Результаты работы, включаемые в отчет

В отчет должны быть включены следующие материалы лабораторной работы:

- структурная схема заданной САУ с ее параметрами;
- передаточная функция заданной САУ;
- коэффициенты ошибок, вычисленные по формулам;
- уравнение ошибок системы;
- выражение для ошибки САУ.

5. Вопросы для самопроверки

1. Какими показателями определяется качество регулирования?
2. Какие составляющие имеет ошибка САУ?
3. Для чего вводятся коэффициенты уравнения ошибок?
4. Как зависит качество регулирования от рассогласования?
5. Как можно выразить передаточную функцию по ошибке через передаточную функцию разомкнутой системы?

Таблица 2. Варианты заданий к лабораторной работе

Задающее воздействие	Варианты задания	Параметры системы										
		K1	K2	K3	K4	K5	T1	T2	T3	T4	T5	T6
1 $f(t)=5\sin 3t$	1	1	3	2.3	2.5	3.3	0.1	0.015	0.3	0.015	0.3	0.01
	2	2	2.5	1.2	2.3	4.2	0.2	0.01	0.4	0.01	0.25	0.02
	3	3	1.4	1.25	2.4	4.1	0.3	0.02	0.5	0.02	0.35	0.08
	4	4	0.8	1.6	1.6	4.6	0.4	0.08	0.05	0.08	0.02	0.06
2 $f(t)=3\cos 4t$	5	0.5	2.1	1.7	1.5	-	0.5	0.06	0.03	-	-	-
	6	0.6	1.3	1.8	1.3	-	0.05	0.3	0.6	-	-	-
	7	2.5	3.5	2	3.2	-	0.03	0.25	0.015	-	-	-
	8	1.6	4	3.5	4.2	-	0.6	0.35	0.01	-	-	-
3 $f(t)=2t^4+3t^3$	9	3.2	2.8	3.2	1.9	3	0.015	0.4	0.02	0.25	0.35	-
	10	0.8	1	4.2	1	2.3	0.01	0.1	0.02	0.35	0.4	-
	11	1.25	1.7	2	2.4	2.5	0.02	0.2	0.08	0.4	0.2	-
	12	2.6	1.2	4	2.3	3.4	0.08	0.3	0.06	0.2	0.1	-
4 $f(t)=2\cos^2 t$	13	3.5	2	3	3.5	-	0.06	0.4	-	-	-	-
	14	2.2	4	2.4	3.7	-	0.04	0.5	-	-	-	-
	15	1.2	3	1	2.4	-	0.3	0.5	-	-	-	-
	16	1.5	4.3	1.8	2.5	-	0.25	0.05	-	-	-	-
5 $f(t)=2.5\sin^2 t$	17	3.5	5	3.5	1.9	-	0.35	0.03	0.08	0.01	-	-
	18	4.3	2.8	3.6	1.2	-	0.4	0.6	0.06	0.02	-	-
	19	1.8	3	2.5	3	-	0.2	0.015	0.04	0.08	-	-
	20	1.75	1	2	4.3	-	0.1	0.01	0.3	0.06	-	-

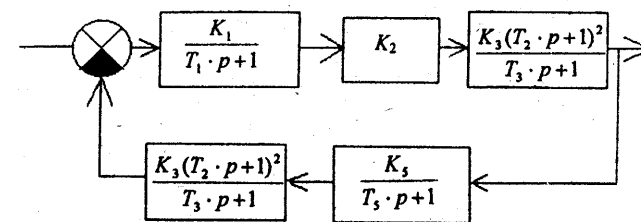


Схема1

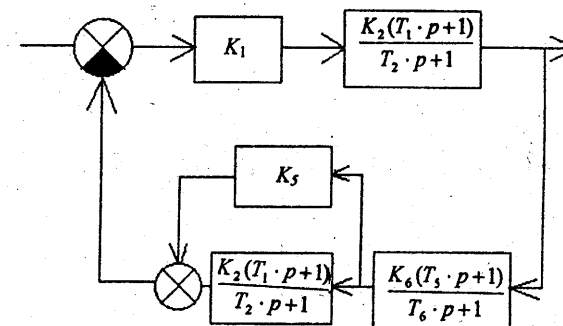


Схема2

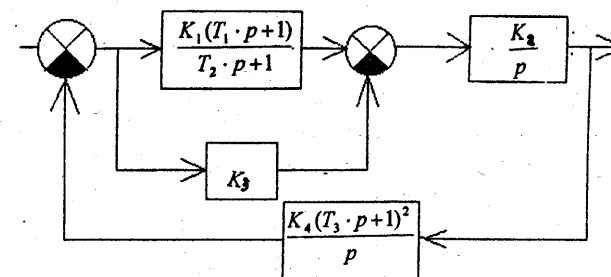


Схема3

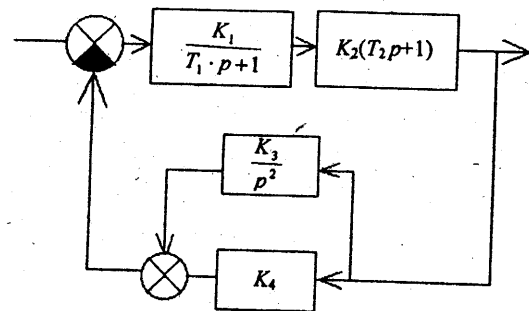


Схема4

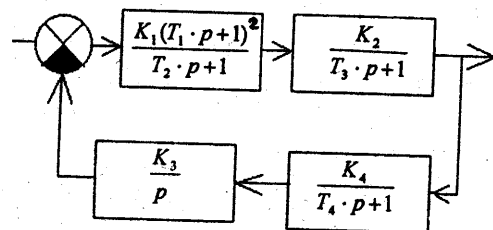


Схема5

Варианты заданий к лабораторной работе №4

Варианты задания		Структурная схема												Параметры системы											
														T	K1	K2	K3	K4	T1	T2	T3	T4			
1														1	2.5	2	1.4	1	0.1	0.2	0.1	0.01			
2														2	4.5	2.5	1.2	1	0.5	0.8	0.5	0.015			
3														3	5	2	1	0.6	0.05	0.1	0.05	0.001			
4														4	3	3	3	0.8	0.3	0.4	0.3	0.05			
5														5	0.5	2	3	4		0.25	0.25	0.02			
6														6	2	1.5	3	1		0.1	0.2	0.01			
n														n	1.5	2	5	1		0.2	0.15	0.02			
8														8	2	2	2	1.25		0.08	0.1	0.01			
9														9	0.12	0.05	2	2.5	1.5	1	0.1	0.25	0.1	0.01	
10														10	0.6	0.4	5	3	1.5	1	0.5	0.6	0.5	0.015	
11														11	0.1	0.04	5	2	0.5	0.05	0.1	0.05	0.001		
12														12	0.4	0.2	3	5	2	1	0.3	0.5	0.3	0.1	

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Исследование нелинейных звеньев

1. Цель работы

- закрепление лекционного материала, касающегося нелинейных звеньев и их типов;
- экспериментальное и теоретическое исследование процесса на выходе нелинейных звеньев;
- анализ влияния отдельных параметров нелинейного звена на процессы в нем.

2. Краткие сведения из теории

Нелинейной автоматической системой называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Различают статические и динамические нелинейности.

Статические нелинейности выражаются статическими характеристиками нелинейного звена и разделяются на однозначные (безгистерезисные) и неоднозначные.

Динамические нелинейности это такие, которые проявляются только в динамическом режиме работы системы. Они описываются уравнениями, коэффициенты в которых являются функциями переменных

$$y = k/(T(x)p + 1)x.$$

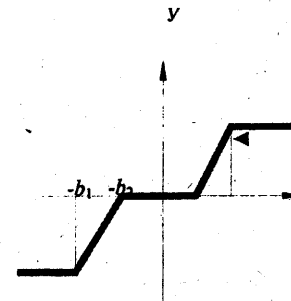
Основные свойства нелинейных систем:

- характер процессов, происходящих в нелинейной системе, зависит от начальных условий;
- так как выходная величина y не пропорциональна входной величине x , то кривая переходного процесса зависит от амплитуды и формы воздействий;
- устойчивость нелинейной системы зависит от амплитуды и формы воздействий. Для нелинейных систем характерно понятие устойчивости в "малом", "большом" и "целом". Система устойчива в "малом", если она устойчива только при малых (бесконечно малых) начальных отклонениях. Система устойчива в "большом", если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях;
- для нелинейных систем характерен режим незатухающих колебаний, возникающий в системе при отсутствии внешних воздействий за счет внутренних свойств системы. Они характеризуются равенством потерь энергии за колебательный цикл притоку энергии извне от объекта и усилителей. Указанные колебания могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Устойчивые колебания нелинейных систем называются автоколебаниями;

- в отличие от нелинейных систем, которые имеют одинаковые статические характеристики, но различные динамические, нелинейные системы характеризуются различными статическими характеристиками, но имеют одинаковые динамические характеристики.

Статические характеристики ряда типовых нелинейных звеньев

1. Усилитель с зоной нечувствительности и зоной насыщения.



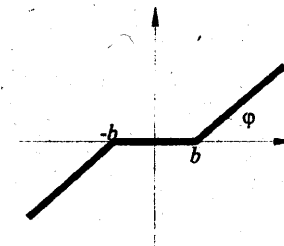
$$Y = c, x > b_1, Y = -c, x < -b_1$$

$$Y = 0, -b_2 \leq x \leq b_2$$

$$Y = K(x + b_2), b_2 < x < -b_1$$

$$K = \operatorname{tg} \varphi$$

2. Усилитель с зоной нечувствительности.



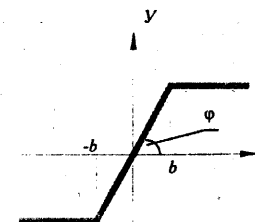
$$Y = k(x + b), x < -b$$

$$Y = k(x - b), x > b$$

$$Y = 0, -b < x < b$$

$$K = \operatorname{tg} \varphi$$

3. Усилитель с зоной насыщения.



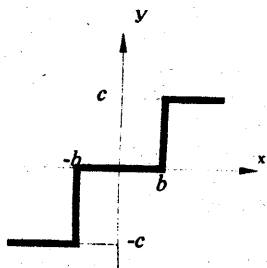
$$Y = c, x > b$$

$$Y = -c, x < -b$$

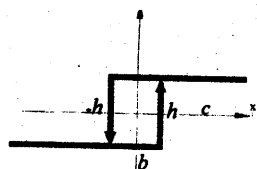
$$Y = x \operatorname{tg} \varphi$$

4. Реле с зоной нечувствительности и зоной насыщения (идеальное трехпозиционное реле).

$$\begin{aligned} Y &= c, x > b \\ Y &= -c, x < -b \\ Y &= 0, -b \leq x \leq b \end{aligned}$$



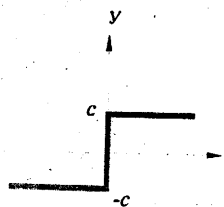
6. Двухпозиционное реле.



x возрастает: $Y = c, x > b$
 $Y = -c, x < -b$
 x убывает: $Y = c, x > -b$
 $Y = -c, x < b$

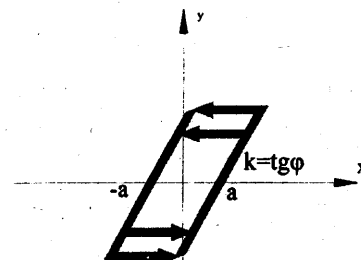
6. Идеальное реле.

$$\begin{aligned} Y &= c, x > 0 \\ Y &= -c, x < 0 \end{aligned}$$



7. Люфт.

$$Y = kx - c, Y = kx + c, Y = c, Y = -c$$



3. Задание к лабораторной работе и порядок ее выполнения:

- задать параметры входного воздействия в соответствии с вариантом;
- подать заданное воздействие на вход каждого нелинейного элемента;
- проанализировать зависимость выходного сигнала от типа нелинейности;
- исследовать одно нелинейное звено (по заданию преподавателя), изменяя последовательно параметры самого звена и параметры входного воздействия (фазу, амплитуду, смещение и тип самого воздействия).

4. Варианты заданий

Таблица 3.

№ варианта	Входное воздействие
1	$1,25\sin(3t+1) + 0,7$
2	$2,5\cos t$
3	$3\sin 0,4t - 0,8$
4	$2\sin 2t + 1$
5	$2\cos t + 0,6$
6	$1,5\sin(t+2)$
7	$3\sin 0,5t$
8	$3\sin(0,5t+2)$
9	$2,5\cos(t-1) - 1$
10	$2\cos(t-1)$

№ звена	Параметры звена						
	c	b	b_1	b_2	b_3	b_4	$\varphi, ^\circ$
1	1	2	1	2,5	3	1,5	30
2	1,5	1,5	3	1,5	4	3	45
3	2	2,5	3,5	2	3,5	4	60
4	3	1	4	1	2,5	3,5	60
5	2,5	3	2,5	3,5	2	2,5	45
6	3,5	4	2	4	1	2	30
7	4	3,5	1,5	3	1,5	1	45

5. Результаты работы, включаемые в отчет:

- графики входного и выходного сигналов для каждого вида нелинейности и их анализ (вид зависимости, сдвиг по фазе и т. д.);
- графики входного и выходного сигналов для одного звена в зависимости от изменяемых параметров и их анализ.

6. Вопросы для самопроверки

1. Что такое нелинейное динамическое звено?
2. Назовите основные типовые нелинейности.
3. Что такое однозначные и неоднозначные нелинейные статические характеристики?
4. Что такое динамические нелинейности?
5. Как выглядит переходный процесс в нелинейном звене?
6. Какой сигнал имеет место на входе релейных нелинейных звеньев?
7. Назовите основные свойства нелинейных САУ.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Метод фазовой плоскости

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала;
- исследование нелинейных систем методом фазовой плоскости;
- изучение методики построения фазовых портретов нелинейных САУ.

2. Краткие сведения из теории

Состояние автоматической системы в любой момент времени может быть охарактеризовано значениями рассматриваемой переменной и $(n-1)$ ее производных. Для рассмотрения системы n -го порядка необходимо использовать n -мерное пространство, содержащее n осей координат.

Если в данный момент времени по указанным осям отложить значения переменной и $(n-1)$ ее производных, то будет получена точка, изображающая состояние системы. Указанное пространство называется фазовым, а точка, соответствующая состоянию системы в фазовом пространстве, - изображающей.

При установившемся равновесном состоянии системы изображающая точка находится в покое. Во время переходного процесса переменная и ее производные в каждый момент времени будут иметь различные значения, поэтому изображающая точка будет перемещаться в фазовом пространстве. Каждому определенному переходному процессу автоматической системы в фазовом пространстве соответствует определенная траектория движения изображающей точки. Начальное положение изображающей точки определяется начальными условиями свободного движения системы. При равновесии системы все производные рассматриваемой переменной равны нулю; соответствующие этому точки фазового пространства называются особыми. Совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных отклонений вместе с особыми точками называются *фазовым портретом* системы.

Наиболее наглядно фазовые траектории могут быть представлены для систем второго порядка в системе координат x (переменная величина) и dx/dt (скорость изменения переменной величины), т.е. на фазовой плоскости. В связи с этим наибольшее практическое применение для исследования нелинейных систем получил метод фазовой плоскости. Метод фазовой плоскости используется для любого типа нелинейности, а также для сочетания нелинейностей. Недостатком метода является его ограничение системами второго порядка.

В некоторых случаях можно аппроксимировать системы высокого порядка системой второго порядка, что расширяет область применения метода фазовой плоскости. При изображении процессов на фазовой плоскости

уравнение второго порядка заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dx}{dt} &= y.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Чтобы изобразить процесс по фазовой плоскости, из уравнения (2.1) исключают время, для чего делят первое уравнение на второе:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.\quad (2.2)$$

После решения нелинейного дифференциального уравнения (2.2) получается уравнение фазовой траектории:

$$y = F(x) + C.\quad (2.3)$$

Каждой совокупности начальных условий x_0, y_0 будет соответствовать свое решение (2.3) и своя фазовая траектория. Фазовые траектории, определяемые уравнением (2.2), имеют следующие свойства:

- при $y > 0$ переменная x всегда возрастает;
- при $y < 0$ переменная x всегда убывает;
- при возрастании x движение изображающей точки происходит слева направо в верхней полуплоскости и справа налево в нижней полуплоскости;
- при $y = 0$ значение $dy/dx = \infty$, поэтому в точках пересечения фазовых траекторий с осью абсцисс касательные к ним перпендикулярны к оси x . Хотя метод фазовой плоскости разработан применительно к нелинейным системам, интересно сначала рассмотреть фазовые траектории линейного звена второго порядка и затем проследить получение фазовых траекторий и особых точек наиболее важных типов, которые встречаются и в нелинейных системах.

Рассмотрим свободное движение линейного звена (или системы) второго порядка, которое в общем случае определяется однородным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\eta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,\quad (2.4)$$

где η — коэффициент демпфирования;

ω_0 — частота собственных колебаний системы.

Запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} &= -2\eta\omega_0 y - \omega_0^2 x, \\ \frac{dx}{dt} &= y,\end{aligned}$$

из которой после исключения параметра времени (путем деления первого уравнения на второе) получим дифференциальное уравнение фазовой траектории линейного звена (или системы) второго порядка:

$$\frac{dy}{dt} = -2\eta\omega_0 y - \omega_0^2 \frac{x}{y}.\quad (2.5)$$

После интегрирования (2.5) с учетом начальных значений найдем аналитическое уравнение фазовой траектории, вид которой зависит от параметров ω_0 и η . Например, при $\eta = 0$, когда звено является консервативным, получим

$$\int y dy + \int \omega_0^2 x dx = 0,\quad (2.6)$$

или

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) \int y dy + \int x dx = 0.\quad (2.7)$$

После интегрирования (2.6.) и (2.7) запишем:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = C,$$

$$\frac{y^2}{2\omega_0^2} + \frac{x^2}{2} = C.$$

Деля на постоянную интегрирования C и принимая $2C = A^2$, найдем

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{A^2} = 1,\quad (2.8)$$

$$\frac{y^2}{A^2 \omega_0^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1.\quad (2.9)$$

Уравнения (2.8) и (2.9) являются уравнениями эллипса, определяющими фазовые траектории для случая незатухающих колебаний, что соответствует наличию пары чисто мнимых корней в уравнении (2.4), если $\eta = 0$.

Аналогично могут быть получены аналитические выражения для фазовых траекторий при других значениях η , определяющих корни характеристического уравнения и характер переходного процесса.

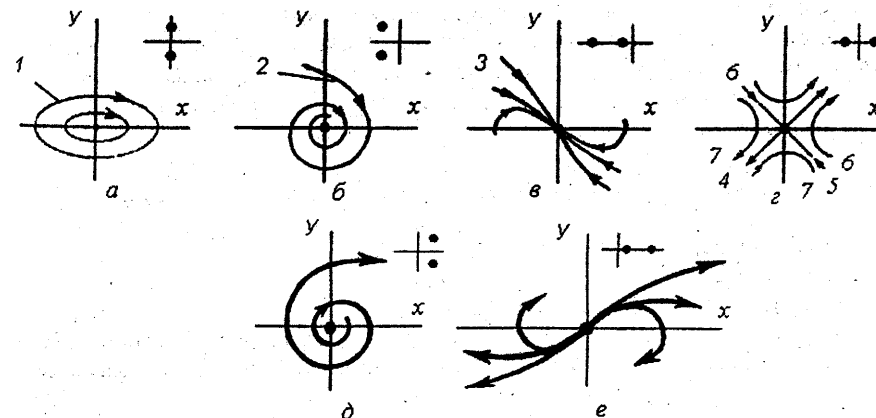


Рис. 7.1 Типы особых точек фазовой плоскости

В зависимости от вида фазовой траектории особая точка фазовой плоскости может быть центром, фокусом, узлом и седлом (рис.7.1,а,г соответственно). Центр является точкой безразличного равновесия. Фокус и узел могут характеризовать как устойчивые (рис.7.1,б,в), так и неустойчивые процессы (рис.7.1,д,е). Седло (рис.7.1,з) характеризует неустойчивый процесс.

В правом углу фазовых портретов представлена плоскость корней уравнения (2.4), которые и определяют тип особой точки.

Замкнутые фазовые траектории нелинейных систем, называемые предельными циклами, могут быть устойчивыми (рис. 7.2, а, штриховая). К этим предельным циклам стремятся изображающие точки при различных начальных отклонениях по различным фазовым траекториям (сплошные кривые, рис.7.2, а, б).

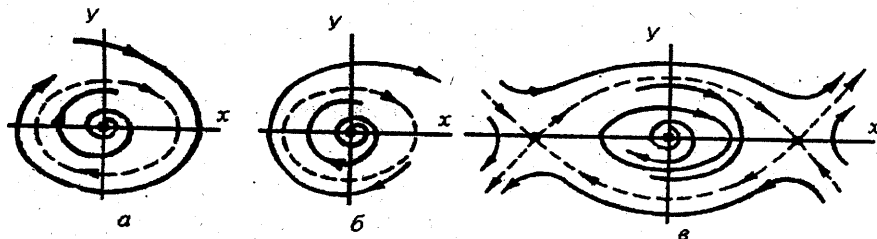


Рис.7.2 Замкнутые предельные циклы и сепаратрисы

Фазовый портрет нелинейной системы может иметь различные фазовые траектории и несколько особых точек (рис.7.2,в). При этом кривые, разделяющие области с различными траекториями, называют сепаратрисами (штриховые).

Для фазового портрета двухлинейных систем с разрывными характеристиками (например, 2-позиционное реле) характерно наличие линий переключения, которыми фазовая плоскость разделяется на ряд областей с различными фазовыми траекториями. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на предыдущем участке.

3. Задание к лабораторной работе и порядок ее выполнения:

- получить задание;
- составить уравнение системы;
- составить уравнение фазовой траектории;
- с помощью программы *MathCad* и файлов *Idealnoe.mcd*, *Dvuhpoz_gister.mcd*, *Trehpoz.mcd*, *Trehpoz_gister.mcd*, построить фазовые портреты;
- определить тип особой точки;
- определить замкнутые предельные циклы;
- построить ориентировочно процесс в системе для всех нелинейностей.

4. Порядок работы с программой

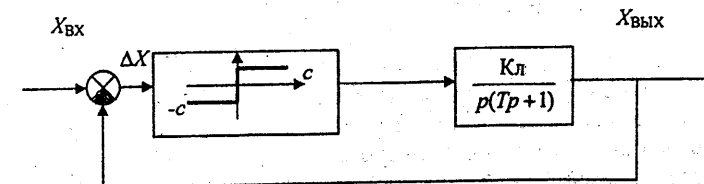
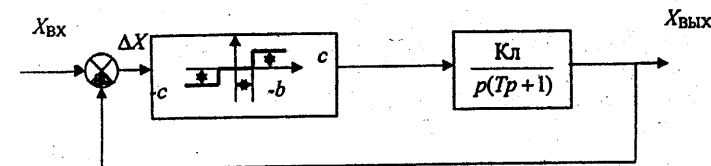
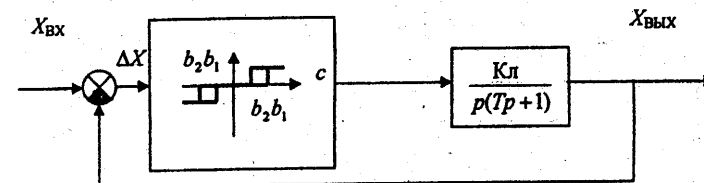
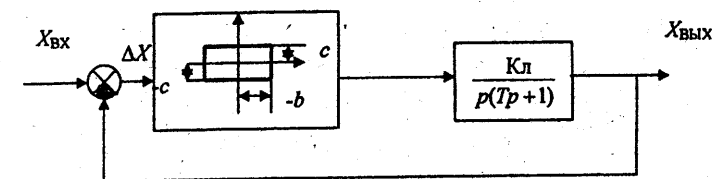
Процесс работы на компьютере заключается в следующем:

- загрузка операционной системы Windows;
- поиск и загрузка программы MathCad;
- составление уравнения фазовой траектории.

Поиск и открытие файлов *Idealnoe.mcd*, *Dvuhpoz_gister.mcd*, *Trehpoz.mcd*, *Trehpoz_gister.mcd*. Дальнейшая работа будет состоять в изменении параметров в соответствии с заданным вариантом.

5. Варианты заданий

Ниже представлены структурные схемы нелинейных САУ с нелинейностями различного типа и численные значения параметров в соответствии с вариантом задания.



Для файлов Dvuhpoz_gister.mcd, Trehpoz.mcd, Trehpoz_gister.mcd:

Таблица 4.

Вариант	y	k	T	c	b
1	13	12	0.4	1	0.5
2	26	18	0.8	1	0.5
3	10	12	0.35	1	0.5
4	20	18	0.7	1	0.5
5	11	10	0.3	1	0.5
6	22	15	0.6	1	0.5
7	12	10	0.4	1	0.5
8	24	15	0.8	1	0.5
9	15	12	0.5	1	0.5
10	30	18	1.0	1	0.5

*Примечание для файла Trehpoz_gister.mcd ($b_1 = 0.5, b_2 = 1$)

Для файла Idealnoc.mcd:

Таблица 5.

Вариант	y	k	T	c
1	-0.5	9	0.2	1
2	-0.25	18	0.4	1
3	-0.6	10	0.25	1
4	-0.3	20	0.5	1
5	-0.4	8	0.23	1
6	-0.2	16	0.46	1
7	-0.56	10	0.18	1
8	-0.28	20	0.36	1
9	-0.46	10	0.2	1
10	-0.23	20	0.4	1

6. Результаты работы, включаемые в отчет:

- фазовые портреты, полученные в ходе работы с файлами программы;
- анализ полученных результатов;
- построение ориентировочно процессов в системе;
- выводы по работе.

7. Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит суть метода фазовой плоскости?
2. Что такое фазовый портрет, фазовая траектория?
3. Что такое особая точка фазового портрета?
4. Назовите типы особых точек фазового портрета.
5. Чем отличается фазовый портрет нелинейной САУ от фазового портрета линейной САУ?
6. Что означают линии переключения, асимптоты и сепаратрисы на фазовом портрете?

7. Как связаны между собой особые точки фазового портрета и корни характеристического уравнения системы, описывающего процесс в окрестностях особых точек?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

Исследование нелинейных САУ методом гармонической линеаризации

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала;
- исследование нелинейных САУ методом гармонической линеаризации;
- изучение способов нахождения периодического решения и определения его устойчивости.

2. Краткие сведения из теории

Под этим общим названием объединяется группа приближенных способов анализа нелинейных систем, основанных на принципе гармонического баланса (эквивалентной линеаризации), разработанном Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. Применительно к автоматическим системам этот метод разработан Л.С. Гольдфарбом, Е.П. Поповым и др. При этом для приближенного исследования автоколебаний нелинейных систем используется линейная теория автоматических систем, что основано на гипотезе фильтра и предположении о гармоническом характере свободного движения в нелинейной системе.

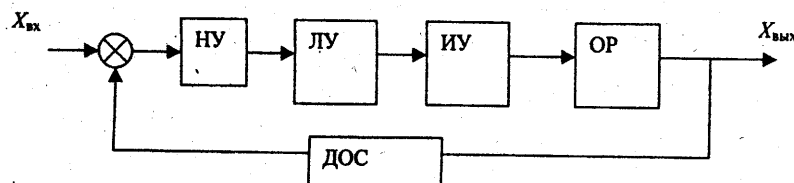


Рис.8.1 Функциональная схема САУ

НУ – нелинейный усилитель;
ЛУ – линейный усилитель;
ИУ – исполнительное устройство;
ОР – объект регулирования;
ДОС – датчик обратной связи.

Предположим, что автоматическая система содержит нелинейный усилитель НУ, включенный последовательно в цепь прохождения основного сигнала (рис.8.1). В этом случае структурную схему системы можно представить в виде линейной части ЛЧС передаточной функцией $W(p)$ и нелинейного звена НЛЗ с характеристикой $F(x)$ (рис.8.2).

Рассмотрим прохождение некоторого гармонического сигнала через разомкнутую нелинейную систему. Если сигнал на входе НЭ является синусоидальным

$$x = A \sin \omega t,$$

то на выходе НЭ получим сигнал

$$x_{Н.Э} = F(x) = F(A \sin \omega t). \quad (2.2)$$

Функция $F(A \sin \omega t)$ является периодической и может быть разложена в ряд Фурье:

$$x_{Н.Э} = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin n\omega t + a_n \cos n\omega t). \quad (2.3)$$

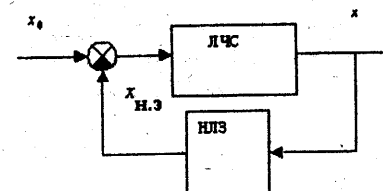


Рис.8.2. Преобразование функциональной схемы

Если характеристика нелинейного звена является симметричной, то $x_0 = 0$, для однозначных характеристик отсутствуют четные гармоники и коэффициенты $a_n = 0$. Следовательно, на линейную часть системы действует сигнал, содержащий весь спектр частот.

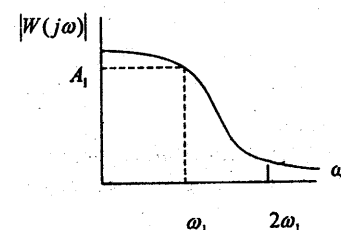


Рис.8.3 Амплитудно-частотная характеристика линейной части САУ

В силу принципа суперпозиции каждая гармоника действует на линейную часть системы независимо от остальных. Таким образом, на выходе системы установятся негармонические колебания; их спектр будет содержать все те же частоты, что и спектр колебаний на выходе нелинейного элемента, но амплитуда каждой гармоники будет зависеть от свойств линейной части и изменяться в $|W(j\omega_n)|$ раз. Амплитудная характеристика линейной части системы позволяет установить, во сколько раз изменяются амплитуды всех гармоник, порожденных нелинейностью, при прохождении их через линейную часть системы. Для этого надо при заданном значении частоты ω_1 основной гармоники рассмотреть ординаты амплитудной характеристики $|W(j\omega_n)|$ при $\omega_1, 2\omega_1$ и т.д. (рис.8.3). Если ордината A_1 при ω_1 несоизмеримо больше амплитуд более высоких гармоник, то система является фильтром и не пропускает высшие гармоники, порождаемые нелинейностью.

Если в замкнутой системе имеются автоколебания, то при входном сигнале $x_0 = 0$ в контуре системы (рис.8.2) имеет место сигнал, обеспечивающий автоколебательный режим.

Приближенное определение автоколебаний в нелинейной системе связано с предположением, что на вход нелинейного элемента поступает гармонический сигнал, а линейная часть системы гасит все высшие гармоники, продолжаемые нелинейностью. Это позволяет производить гармоническую линеаризацию нелинейной характеристики и исследовать систему по гармонически линеаризованному уравнению методами линейной теории.

Гармоническая линеаризация нелинейной характеристики заключается в том, что записывается ряд Фурье для выходной переменной НЭ при гармоническом входном сигнале; далее используется только первая гармоника, в результате чего получается аналитическая линейная зависимость между входным и выходным сигналами НЭ. Для однозначных симметричных нелинейных характеристик:

$$x_{\text{Н.Э}} \approx b_1 \sin \omega_1 t, \quad (2.4)$$

где

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t), \quad (2.5)$$

где

$$\omega t = \omega_1 t.$$

Для неоднозначных симметричных нелинейных характеристик

$$x_{\text{Н.Э}} \approx b_1 \sin \omega_1 t + a_1 \cos \omega_1 t, \quad (2.6)$$

где

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t), \quad (2.7)$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t). \quad (2.8)$$

Для замкнутой нелинейной системы сигнал на входе нелинейного элемента равен выходной переменной линейной части (рис.8.3), поэтому $x = A \sin \omega t$; $dx/dt = \omega A \cos \omega t$, откуда

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega t &= x/A \\ \cos \omega t &= \frac{1}{\omega A} \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

Отсюда получим линейное уравнение безгистерезисного звена

$$F(x) = x_{\text{Н.Э}} \approx (b_1/A)x = q(A)x, \quad (2.10)$$

где $q(A) = b_1/A$ - гармонический коэффициент усиления нелинейного звена или коэффициент гармонической линеаризации.

Аналогично для (2.6) запишем

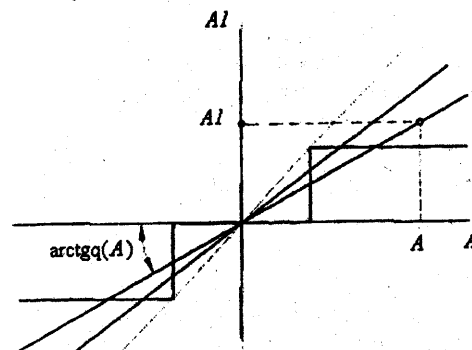
$$F(x) = x_{\text{Н.Э}} \approx (b_1/A)x + \frac{a_1}{\omega A} \frac{dx}{dt}, \quad (2.11)$$

$$\text{или} \quad F(x) = x_{\text{Н.Э}} \approx q(A)x + \frac{q_1(A)}{\omega} \frac{dx}{dt},$$

где $q(A) = b_1/A$ - гармонический коэффициент усиления, определяющий производную в приближенном уравнении нелинейного звена.

Для петлевых характеристик гистерезисного типа производная всегда отрицательна, что вносит запаздывание при работе звена.

Таким образом, ограничиваясь рассмотрением первой гармоники на выходе нелинейного элемента при гармоническом сигнале на его входе, нелинейное уравнение можно заменить линейным. Такая замена называется гармонической линеаризацией нелинейных зависимостей. Однозначные характеристики $F(x)$ можно представить прямыми линиями с углом наклона, пропорциональным амплитуде входного сигнала (рис.8.4.). Угол наклона при



этом характеризует амплитуду только первой гармоники. В связи с тем, что коэффициент $q(A)$, определяющий угол наклона луча гармонической линеаризации характеристики $F(x)$, зависит от амплитуды входного сигнала A , при различных A лучи будут различными.

Рис.8.4 Предобавление нелинейного звена линейным

В результате гармонической линеаризации получается своеобразное линейное звено, коэффициент усиления которого $q(A)$ зависит от амплитуды входного сигнала A . Сохранение этой очень существенной особенности нелинейных звеньев в коэффициентах $q(A)$ и $q_1(A)$ при гармонической линеаризации и является тем важным обстоятельством, которое позволяет методами линейной теории определять свойства нелинейных автоматических систем.

Алгебраический способ определения периодического решения

Гармоническая линеаризация нелинейной САУ дает возможность применять методы линейной теории для определения параметров автоколебаний и их устойчивости.

Допустим, что в САУ существуют устойчивые автоколебания гармонического характера. Тогда,

$$\begin{aligned} x &= A \sin \omega t, \\ W(P) &= \frac{R(P)}{Q(P)}; x = -\frac{R(P)}{Q(P)} Y; \\ W_{\text{НЛЗ}}(P, A) &= q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} P; x_{\text{Н.Э.}} = Y; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$Y = F(x) = W_{\text{НЛЗ}}(P, A) = \left[q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} P \right] x.$$

Следовательно, уравнение свободного движения замкнутой нелинейной САУ имеет вид

$$Q(P)x + R(P) \left[q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} P \right] x = 0,$$

а характеристическое уравнение:

$$Q(P) + R(P) \left[q(A) + \frac{q_1(A)}{\omega} P \right] = 0. \quad (2.13)$$

Согласно теории линейных САУ, автоколебания имеют место при наличии чисто мнимых корней характеристического уравнения. Поэтому периодическое решение можно найти с помощью критерия Михайлова.

Запишем характеристическое уравнение замкнутой САУ в виде

$$X(A, \omega) + jY(A, \omega) = 0. \quad (2.14)$$

Существование чисто мнимых корней определяется системой:

$$\begin{cases} X(A, \omega) = 0, \\ Y(A, \omega) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при известных значениях $q(A)$ и $q_1(A)$ можно найти периодическое решение, т.е. амплитуду A и частоту автоколебаний в САУ.

Устойчивость полученного периодического решения определяется с помощью неравенства:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \omega} \right) - \left(\frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial x}{\partial \omega} \right) > 0. \quad (2.15)$$

*Обозначает подстановку значений A и ω соответствующих найденному периодическому решению.

Частотный способ нахождения периодического решения

Вернемся к схеме, изображенной на рис.8.5.

$$X = -W_{\text{лчс}}(P)Y,$$

Тогда

$$Y = W_{\text{нлз}}(P, A)X,$$

Подставляем Y в первое уравнение, имеем: $X = -W_{\text{лчс}}(P)W_{\text{нлз}}(P, A)X$, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{лчс}}(P)W_{\text{нлз}}(P, A) &= -1 \\ W_{\text{лчс}}(P) &= -\frac{1}{W_{\text{нлз}}(P, A)} \end{aligned} \right\}. \quad (2.16)$$

Полученные выражения называются уравнением гармонического баланса.

В частотной форме: $W_{\text{лчс}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{нлз}}(j\omega, A)}$.

Для однозначных нелинейностей $W_{\text{нлз}}(j\omega, A) = q(A)$, и тогда условие гармонического баланса имеет вид $W_{\text{лчс}}(j\omega) = -\frac{1}{q(A)}$.

Возьмем комплексную плоскость и построим АФЧХ линейной части системы

В этих же координатах построим функцию $Z(A) = -\frac{1}{q(A)}$, которая должна располагаться на отрицательной вещественной оси.

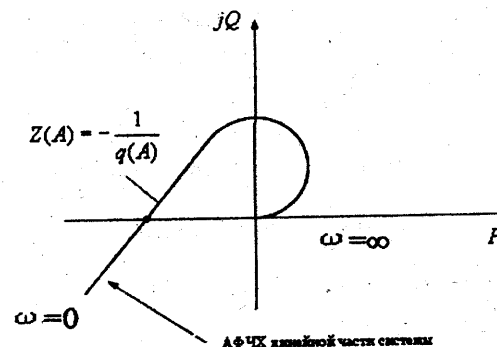


Рис.8.6. Нахождение периодического решения

Тогда точка пересечения АФЧХ линейной части САУ и функции $-\frac{1}{q(A)}$ дает периодическое решение. Причем амплитуда автоколебаний находится по функции $-\frac{1}{q(A)}$, а частота - по АФЧХ линейной части. Если пересечения графиков этих функций не происходит, то периодическое решение отсутствует.

На практике нет необходимости строить эти зависимости полностью. Положим $Q(\omega) = 0$, тогда решение этого уравнения дает частоту автоколебаний ($\omega_{\text{нк}}$). Подставляя затем $\omega_{\text{нк}}$ в $P(\omega)$ определяем значение $-\frac{1}{q(A)}$ и далее амплитуду автоколебаний ($A_{\text{нк}}$).

Полученное периодическое решение также проверяется на устойчивость. Для этого дается приращение $A_{\text{нк}}$ и рассматривается значение $-\frac{1}{q(A)}$ для нового значения $A_{\text{нк}} + \Delta A$.

Периодическое решение считается устойчивым, если точка, соответствующая значению $A_{\text{нк}} + \Delta A$, оказывается вне годографа АФЧХ линейной части (т.е. не охватывается последней). В противном случае автоколебания - неустойчивы.

3. Задание к лабораторной работе и порядок ее выполнения:

3.1. Алгебраический способ исследования нелинейных САУ методом гармонической линеаризации:

- получить задание у преподавателя;
- преобразовать структурную схему нелинейной системы с выделением линейной части системы;

- составить выражение для передаточной функции линейной части системы $W_{\text{лчс}}(P)$ и коэффициентов гармонической линеаризации нелинейного звена;
- составить характеристическое уравнение замкнутой нелинейной системы;
- найти периодическое решение (частоту $\omega_{\text{ж}}$ и амплитуду автоколебаний $A_{\text{ж}}$) и проверить его на устойчивость, используя программу;
- определить критическое значение коэффициента передачи системы $K_{\text{кр}}$;
- произвести анализ полученных результатов.

3.2. Частотный способ определения автоколебаний:

- в соответствии с полученным заданием составить структурную схему нелинейной системы;
- получить аналитические выражения для $P(\omega)$ и $Q(\omega)$;
- записать функцию $Z(A)$;
- построить АФЧХ линейной части системы и зависимость $Z(A)$ в координатах;
- найти периодическое решение, т.е. амплитуду и частоту автоколебаний;
- проверить устойчивость периодического решения.

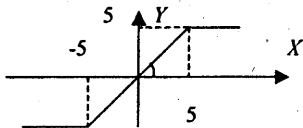
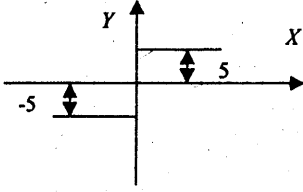
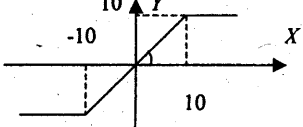
Варианты заданий

Таблица 6.

№ вар.	Передаточная функция линейной части $W_{\text{лчс}}(P)$	Статическая характеристика нелинейного звена
1	$\frac{80}{p(0,1p+1)^2}$	
2	$\frac{20}{p(0,1p+1)(0,5p+1)}$	
3	$\frac{16}{(p+1)^3}$	

Продолжение таблицы 6 на стр. 69,70

4	$\frac{48}{(0,1p+1)(0,2p+1)^2}$	
5	$\frac{10}{(0,1p+1)(0,2p+1)(0,06p+1)}$	
6	$\frac{40}{(0,1p+1)(0,17p+1)}$	
7	$\frac{100}{p(0,1p+1)(0,17p+1)(p+1)}$	
8	$\frac{12}{(0,1p+1)^2(0,25p+1)^2}$	
9	$\frac{32(0,15p+1)}{p(0,1p+1)^2}$	

10	$\frac{17(0,08p+1)}{(0,01p+1)(0,012p+1)}$	
11	$\frac{16(0,17p+1) \cdot}{p(0,01p+1)(0,06p+1)}$	
12	$\frac{18(0,015p+1)}{(0,4p+1)^3}$	

5. Результаты работы, включаемые в отчет

Алгебраический способ исследования нелинейных САУ методом гармонической линеаризации:

- структурная схема заданной нелинейной системы автоматического управления;
- статическая характеристика нелинейного звена;
- характеристическое уравнение нелинейной замкнутой системы;
- расчетные значения периодического решения с оценкой его устойчивости;
- выводы.

Частотный способ исследования нелинейных САУ методом гармонической линеаризации:

- выражения $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ линейной части САУ;
- распечатка графического изображения, пункта 4. (порядок выполнения работы);
- анализ полученных результатов;
- выводы.

6. Вопросы для самопроверки

1. В чем суть метода гармонической линеаризации?
2. Что выражают коэффициенты гармонической линеаризации?
3. Как найти периодическое решение и определить его устойчивости алгебраическим способом?
4. В чем состоит частотный способ нахождения периодического решения?
5. Какова область применения метода гармонической линеаризации?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9

Исследование устойчивости нелинейных САУ частотным методом В.М.Попова

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала, касающегося исследования устойчивости нелинейных систем;
- определение устойчивости нелинейных систем методом В.М.Попова;

2. Краткие сведения из теории

Данный метод позволяет дать заключение об устойчивости замкнутой нелинейной системы, если статическая характеристика нелинейного звена задана в виде кривой, набора точек или таблицы (т.е. неявном виде).

Допустим, имеется передаточная функция линейной части системы $W(j\omega)$. Вещественная и мнимая ее части соответственно равны $\text{Re}W(j\omega)$ и $\text{Im}W(j\omega)$. Введем некоторые функции $U(\omega) = \text{Re}W(j\omega)$ и $V(\omega) = \omega \text{Im}W(j\omega)$. Построим модифицированную АФЧХ в координатах $U(\omega), V(\omega)$.

Если, например, статическая характеристика нелинейного звена дана в виде графика, выраженного кривой, то возможны 2 варианта:

- кривую можно ограничить одной прямой (задан в угле ОК).

Угол наклона прямой к оси x равен $\arctg k$. Если через точку $(-1/k; j0)$ на модифицированной АФЧХ $V(\omega) = f(U(\omega))$ можно провести хотя бы одну прямую так, чтобы АФЧХ целиком лежала справа от этой прямой, то нелинейная САУ будет абсолютно устойчива.

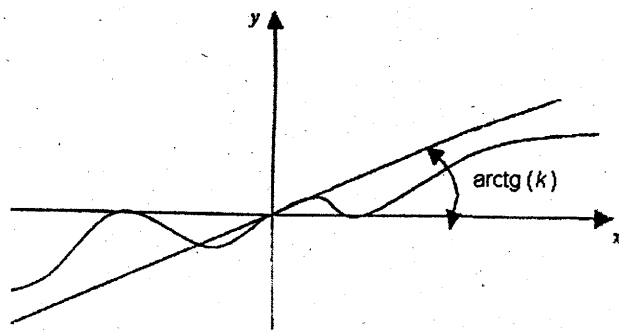


Рис.9.1. Статическая характеристика нелинейного звена задана в ОК

- кривую можно ограничить двумя прямыми (задан в угле k_1, k_2). Углы наклона прямых к оси x равны $\arctg k_1, \arctg k_2$. Если через точки $(-1/k_1; j0)$ и $(-1/k_2; j0)$ можно провести параболу с вертикальной осью, которая бы не пересекала АФЧХ, то нелинейная САУ будет абсолютно устойчивой.

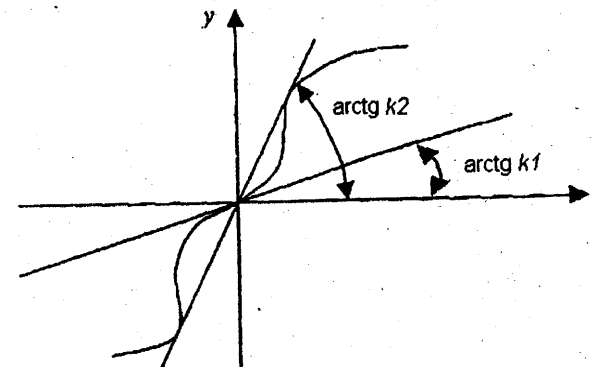


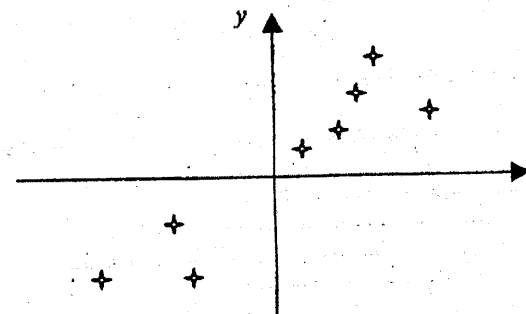
Рис.9.2. Статическая характеристика нелинейного звена задана в угле k_1, k_2

3. Задание к лабораторной работе и порядок выполнения:

- получить задание;
- рассмотреть статическую характеристику нелинейной части системы, найти значения k (или k_1, k_2);
- с помощью программы "porov.mcd", в зависимости от вида передаточной функции линейной части системы, построить зависимость $V(\omega) = f(U(\omega))$;
- построить в координатах $U(\omega), V(\omega)$ прямую в соответствии с найденными значениями k (или параболу в соответствии с найденными значениями k_1, k_2);
- сделать заключение об устойчивости нелинейной САУ.

4. Варианты заданий

$$1. W(j\omega) = \frac{1}{(0,05j\omega + 1)(0,32j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)}$$



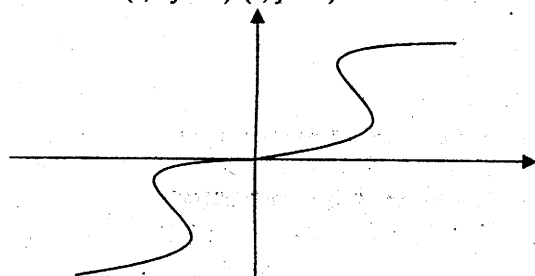
$$2. W(j\omega) = \frac{2}{(0,07j\omega + 1)(0,17j\omega + 1)}$$

X	1	4	3	-3	-8	0
Y	1	3	5	-4,5	-6	0

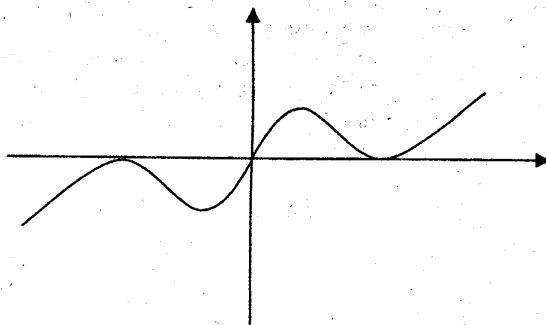
$$3. W(j\omega) = \frac{2}{(0,2j\omega + 1)(0,067j\omega + 1)^2(0,09j\omega + 1)}$$

X	1	4	3	6	-2	-7
Y	1	2,5	4	7	-2	-4

$$4. W(j\omega) = \frac{1}{(0,05j\omega + 1)^2(0,1j\omega + 1)}$$



$$5. W(j\omega) = \frac{8}{j\omega(0,05j\omega + 1)^2(0,23j\omega + 1)}$$



5. Результаты работы, включаемые в отчет

В отчете должны быть включены следующие материалы лабораторной работы:

- передаточная функция линейной части системы;
- статическая характеристика нелинейной части системы;
- зависимость $V(\omega) = f(U(\omega))$ с дополнительными пояснениями;
- заключение об устойчивости системы;- выводы

6. Вопросы для самопроверки

1. Укажите область применения частотного метода В.М.Попова;

2. Как задать статическую характеристику нелинейного звена в угле ОК, k_1, k_2 ?
3. Что такое модифицированная АФЧХ линейной части?
4. Как оценивается устойчивость нелинейной САУ методом В.М.Попова?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

Исследование переходных процессов в нелинейных САУ аналитическими методами

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала, касающегося оценки качества нелинейных систем;
- исследование устойчивости нелинейной системы, и построение переходных процессов в ней с помощью диаграмм качества.

2. Краткие сведения из теории

Характеристическое уравнение нелинейной системы в общем виде может быть представлено:

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0 \quad (2.1)$$

Будем считать переходные процессы близкими к синусоидальным, полагая, что показатель затухания ξ (является ближайшим к мнимой оси корнем характеристического уравнения) и частота ω медленно изменяются с изменением амплитуды колебаний a в ходе процесса.

При $\xi < 0$ колебания затухают, при $\xi > 0$ – расходятся.

В связи с этим первая гармоника колебаний на выходе нелинейного звена примет вид

$$F(x) = \left[q(a) + q_1(a) \frac{p}{\omega} \right] x, \quad (2.2)$$

где коэффициенты гармонической линеаризации $q(a), q_1(a)$ определяется соответствующими формулами.

Затухающие или расходящиеся колебания в линейной системе соответствуют комплексным корням характеристического уравнения. Следовательно, для их определения нужно получить характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы.

$$Q(p) + R(p) \left[q(a) + q_1(a) \frac{p}{\omega} \right] = 0 \quad (2.3)$$

Подставим в (2.3) $p = \xi + j\omega$, полагая, что это соответствует ближайшей к мнимой оси паре комплексных корней, получим

$$Q(\xi + j\omega) + R(\xi + j\omega) [q(a) + jq_1(a)] = 0 \quad (2.4)$$

В это комплексное уравнение входят неизвестные величины ξ, ω и a . Следовательно, из этого уравнения можно найти две из них как функцию третьей: $\xi(a)$ и $\omega(a)$.

Если нужно подобрать какой-либо параметр системы, например, коэффициент усиления линейной части k так чтобы ξ и ω удовлетворяли заданным требованиям, то можно пользоваться так называемыми диаграммами качества. Они строятся следующим образом. Пусть в какой-нибудь системе мы определили зависимость амплитуды автоколебаний a_* от параметра k . Здесь

по параметру k выделена область устойчивости. В случае $\xi = 0$ затухание отсутствует, устанавливаются автоколебания с амплитудой $a = A_c$ и частотой ω_1 (точки C и C', рис.10.1).

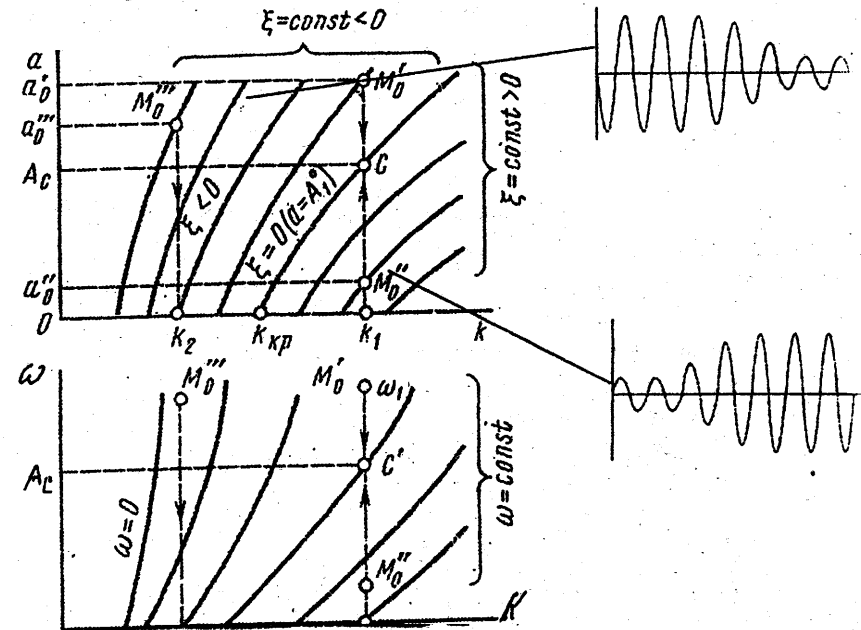


Рис.10.1. Диаграммы качества колебательных переходных процессов.

Слева от линии автоколебаний $\xi = 0$ расположена область затухания колебаний – линии с $\xi < 0$ (расположены выше линии $\xi = 0$). Справа от линии автоколебаний $\xi = 0$ расположена область расхождения колебаний – линии с $\xi > 0$ (расположены ниже линии $\xi = 0$).

Протеканию переходного процесса во времени соответствует движение точки на диаграмме по вертикали (так как амплитуда колебаний в переходном процессе меняется, а коэффициент усиления k сохраняется постоянным), как указано на рис.10.1 для точек M_0', M_0'' , и значение ξ и ω изменяются.

Если при $k_1 > k_{кр}$ начальное значение амплитуды $a_0 > A_c$ (точка M_0'), то колебания с течением времени затухают, значение ξ уменьшается до нуля, где устанавливаются устойчивые колебания с амплитудой A_c (отрезок $M_0'C$).

Если $a_0 < A_c$ (точка M_0''), колебания с течением времени расходятся, значение ξ уменьшается до нуля, где устанавливаются устойчивые колебания с амплитудой (отрезок $M_0''C$).

При значении $k_1 < k_{кр}$ колебания будут затухающими при любых начальных амплитудах a_0 , и устойчивых колебаний наблюдаться не будет.

В большинстве случаев при проектировании системы автоматического управления не требуется вычерчивать кривую переходного процесса. С помощью диаграмм качества, используя приближенные формулы, можно найти время затухания t_p колебательного процесса от a_0 до a_k , величину перерегулирования в относительных единицах σ и число колебаний m за время переходного процесса.

$$\begin{aligned} t_p &\approx (1/\xi_0) \ln(a_k/a_0), \\ \sigma &= |x_n/a_0| \approx \exp(\pi\xi/\omega_0), \\ m &\approx (\omega_0/(2\pi\xi_0)) \ln(a_k/a_0), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ξ_0, ω_0 - средние величины, определяемые по диаграмме качества начальным и конечным положением точки M_0 ; a_k - величина, определяемая конечным положением этой точки. Для автоколебательных процессов (точка С) $a_k = A_c$, для затухающих (без установления колебаний) $a_k \approx 0.05a_0$.

Если начальное положение точки M_0 находится на кривой $\omega=0$ или левее этой кривой, процесс будет монотонным и формулы (2.5) неприменимы.

Процесс будет монотонным также и (рис.10.2) при амплитуде $a < A_{\min}$ (в данном конкретном случае $A_{\min} = 1$) при любых значениях k .

$$\xi = \text{const}$$

$$\omega = \text{const}$$

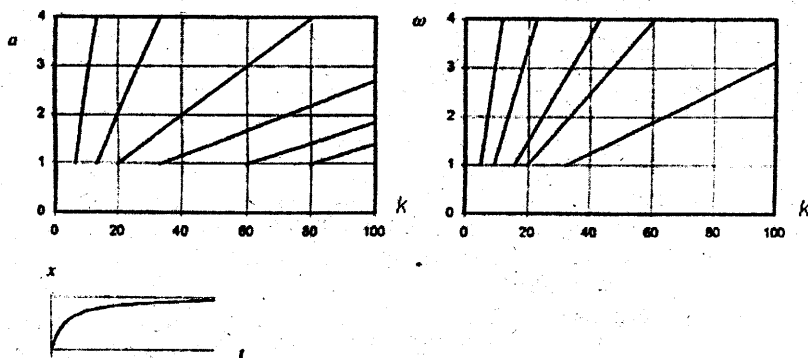


Рис.10.2. Диаграммы качества колебательных и апериодических переходных процессов

3. Порядок выполнения лабораторной работы

Задания на лабораторную работу приведены в таблице 7;

- составить схему и передаточную функцию линеаризованной нелинейной разомкнутой системы $W(p, a)$;
- по передаточной функции $W(p, a)$ определить характеристический полином замкнутой нелинейной системы в виде: $D(p, a) = p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3$;
- вычислить коэффициенты A_1, A_2, A_3 ;

- формулы для коэффициента затухания ξ и частоты колебаний ω можно записать в виде $\xi = \frac{A_3 - A_2 A_1}{2[A_2 + (A_1 + 2\xi)^2]}$; $\omega^2 = \frac{A_3}{A_1 + 2\xi} - \xi^2$;
- выразить из полученных формул k и ω^2 ;
- придавая величине ξ различные постоянные значения, получим семейство линий $a(k)$ при $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$;
- с помощью формул (2.5) оценить параметры переходного процесса: t_p, σ, m .

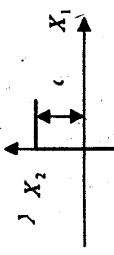
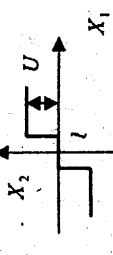
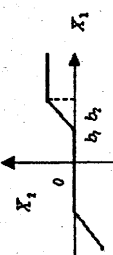
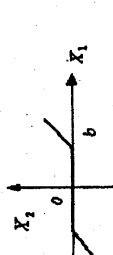
4. Результаты работы, включаемые в отчет:

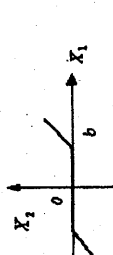
- структурная схема нелинейной САУ;
- выражения для передаточной функции W и полинома $D(p, a)$;
- распечатка графического изображения диаграмм качества;
- анализ полученных результатов;
- общие выводы по работе.

5. Вопросы для самопроверки

1. Чем отличаются переходные процессы в нелинейных САУ?
2. Что такое коэффициент затухания ξ ?
3. Что такое диаграммы качества, и как они строятся?
4. Как можно построить переходный процесс в нелинейной САУ с помощью диаграмм качества?
5. На какие области можно разбить диаграммы качества?

Таблица 7 Варианты заданий к лабораторной работе

№ Вар.	A	Значения k(c) T1 и T2(c)	Статистическая характеристика нелинейного звена	q(a)	Значени я «с» и «b»
1	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$K=0,5; T1=0,01; T2=0,08$		$\frac{4 \cdot c}{\pi \cdot a}$	$c=11$
2	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=0,82; T1=0,05$			$c=110$
3	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)^2}$	$K=2; T1=0,1$			$c=40$
4	$\frac{K}{p^3(T_1 p + 1)}$	$K=4; T1=0,01$		$\frac{4 \cdot c}{\pi \cdot a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ при $a \geq b$	$c=60; b=0,5$
5	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$K=2; T1=0,05; T2=0,02$			$c=40; b=0,2$
6	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)^2}$	$K=0,5; T1=0,01$			$c=5; b=0,1$
7	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)^2}$	$K=10; T1=1$		$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ при $a \geq b$	$b=0,5$
8	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=1; T1=0,05$			$b=0,25$
9	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$K=4; T1=0,05; T2=0,9$			$b=0,1$
10	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)^2}$	$K=0,82; T1=0,05$		$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \sqrt{1 - \frac{b_2^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{b_1^2}{a^2}} \right)$ при $a \geq b_2$	$b_1 = 0,25$ $b_2 = 0,5$
11	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$K=0,5; T1=0,01; T2=0,08$			$b_1 = 0,1$
12	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=4; T1=0,01$			$b_2 = 0,25$
13	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=5; T1=0,02$		$K - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ при $a \geq b$	$b=0,3$
14	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$K=0,7; T1=0,06; T2=0,02$			$b=0,2$
15	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=3; T1=0,05$			$b=0,5$

13	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=5; T1=0,02$		$K - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right)$ при $a \geq b$	$b=0,3$
14	$\frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	$K=0,7; T1=0,06; T2=0,02$			$b=0,2$
15	$\frac{K}{p^2(T_1 p + 1)}$	$K=3; T1=0,05$			$b=0,5$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11

Исследование процесса квантования и восстановления непрерывного сигнала

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала;
- исследование процесса квантования и дальнейшего преобразования дискретного сигнала в непрерывный.

2. Краткие сведения из теории

Сигнал – физический процесс (например, изменяющиеся во времени токи и напряжения), содержащий в себе некоторую информацию. Любой сигнал можно описать математической функцией.

Существуют аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Аналоговые сигналы описываются непрерывной во времени функцией $x(t)$, которая может принимать любые значения в определенном интервале; дискретные сигналы $x[nT]$ представляют собой последовательность или отсчеты функции $x(t)$, взятые в определенные дискретные моменты времени nT ; цифровыми являются сигналы, которые в дискретные моменты времени nT принимают конечные дискретные значения – уровни квантования, которые затем кодируются двоичными числами.

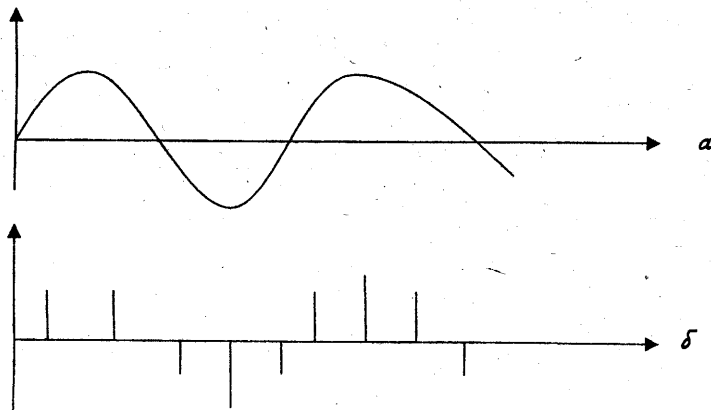


Рис.11.1 Графическое представление сигналов: а - аналоговый сигнал, б - дискретный сигнал.

Дискретные сигналы можно задавать графиками, как это показано на рис.11.1, формулами, в виде таблиц дискретных значений или в виде комбинаций этих способов.

Интервал времени T , через который отсчитываются значения непрерывного сигнала, называется интервалом дискретизации. Обратная величина $1/T$ (обозначим f_d) называется частотой взятия отсчетов или частотой дискретизации.

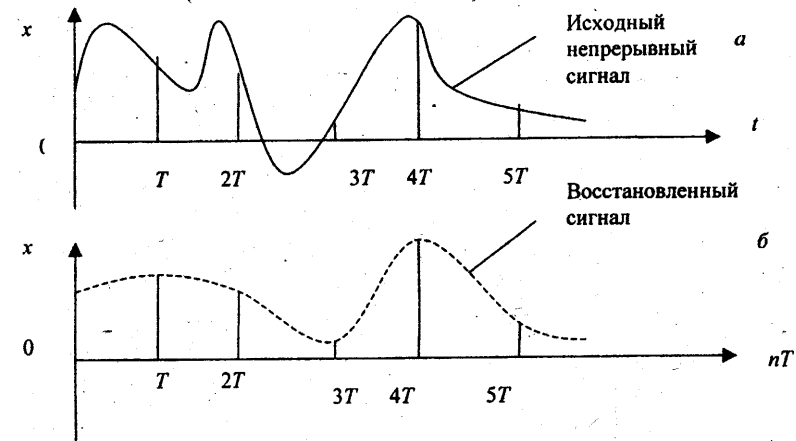


Рис.11.2. Исходный непрерывный -а и восстановленный -б сигналы

Отсчеты непрерывного сигнала следует брать с такой частотой (или через такой интервал времени), чтобы успевать отследить все, даже самые быстрые изменения сигнала. Иначе, при восстановлении этого сигнала по дискретным отсчетам часть информации будет потеряна и форма восстановленного сигнала будет отличаться от формы исходного (рис.11.2).

Для сигнала с ограниченным спектром, т.е. для тех сигналов, у которых спектральная плотность локализована в определенной полосе частот, существуют конкретные рекомендации по выбору интервала дискретизации T .

Теорема Котельникова: если непрерывная функция $x(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле (ограничена, кусочно-непрерывна и имеет ограниченное число экстремумов) и её спектр ограничен некоторой частотой ω_c (частотой спектра), то существует такой максимальный интервал T между отсчетами, при котором имеется возможность безошибочно восстанавливать дискретизируемую функцию $x(t)$ по дискретным отсчетам. Этот максимальный интервал:

$$T = \pi / \omega_c = 1 / (2f_c).$$

Дискретизированными называют сигналы, представленные функцией дискретного времени (или пространства) в виде совокупности отсчетов мгновенных значений непрерывной функции, взятых в определенные дискретные моменты времени.

Соответственно дискретизацией называется процесс перехода от функции непрерывного времени $x(t)$ в функцию дискретного времени $x[nT]$, по отсчетам которой можно восстановить новую непрерывную функцию $x_{\text{вос}}(t)$, воспроизводящую исходную с заданной точностью.

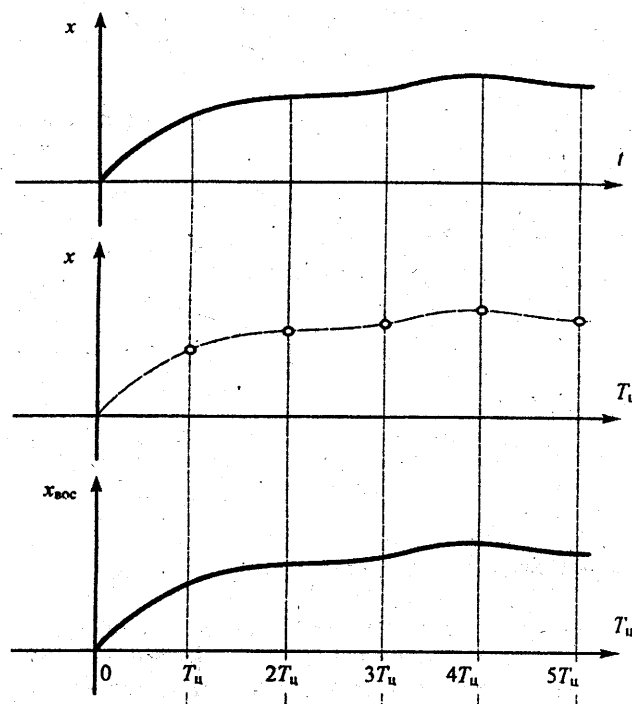


Рис. 11.3. Равномерная дискретизация по времени

Восстанавливаемый сигнал обычно выражается суммой базисных функций:

$$x_{\text{вос}}(t) = \sum_{i=1}^n a_i c_i(t),$$

где $c_i(t)$ – принятая в данном алгоритме аппроксимации система базисных функций, которая должна быть ортогональной;
 a_i – коэффициенты ряда.

Коэффициенты определяются как коэффициенты ряда Фурье:

$$a_i = \int_0^T x(t) c_i(t) dt.$$

Часто в качестве восстанавливающей функции используется ряд Котельникова, в котором базисные функции отвечают требованию минимума средней квадратической погрешности, а коэффициенты ряда равны соответствующим мгновенным значениям дискретизированного ряда.

Ряд Котельникова имеет вид

$$x_{\text{вос}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin \omega_c (t - kT)}{\omega_c (t - kT)}.$$

Как видно, непрерывный сигнал имеет вид суммы произведений мгновенных значений сигнала $x[nT]$, отсчитанных с интервалом $T = \pi/\omega_c$ на функцию типа $S = (\sin y)/y$, называемую функцией отсчетов:

$$S = \frac{\sin \omega_c (t - kT)}{\omega_c (t - kT)}.$$

Последовательность отсчетов $x[nT]$, являющихся коэффициентами разложения, называют решетчатой функцией.

В качестве критерия точности приближения используются оценки приближения в среднем. Чаще всего – это среднее квадратическое отклонение

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x_{\text{вос}}(t) - x(t)]^2 dt,$$

где T – интервал аппроксимации.

Погрешность восстановления непрерывной функции является основным критерием выбора шага дискретизации.

3. Порядок выполнения лабораторной работы

1. Получить задание у преподавателя;
2. Запустить программу Analizator.exe.;
3. Вставить параметры заданных сигналов;
4. Во вкладке “Дискретизация” на Амплитудно-Частотном спектре установить количество гармоник удобное для восприятия АЧХ;
5. Во вкладке “Восстановление” посмотреть восстановленный сигнал и сравнить с исходным, сделать выводы по графику и ошибке;
6. Составить таблицу зависимости изменения средне-квадратичной ошибки от изменения частоты, сделать выводы;
7. Изменяя ширину спектра ω_c , составить таблицу зависимости $\Delta(\omega_c)$, сделать выводы.

4. Содержание отчета:

- графики по каждому сигналу;
- таблицы зависимости $\Delta(\omega)$ и $\Delta(\omega_c)$;
- выводы.

Задание

№ Вар	Виды сигналов				
	периодические				не периодич еские
	1-й вид	2-й вид	Амплитуда(A)	Частота(ω), Гц	
1	Прямоугольные импульсы	Синусоидальный	60	5	x^2
2	Наклонные импульсы	Синусоидальный	40	7	$x^{(1/2)}$
3	Прямоугольные импульсы	Наклонные импульсы	50	4	$\exp(2 \cdot x)$
4	Наклонные импульсы	Синусоидальный	45	3	$x \exp(x)$
5	Наклонные импульсы	Прямоугольные импульсы	70	6	$x \cos(x)$
6	Треугольные импульсы	Наклонные импульсы	30	5	$x \sin(x)$
7	Треугольные импульсы	Синусоидальный	80	3	$\exp(3 \cdot x)$
8	Прямоугольные импульсы	Синусоидальный	65	2	$x \cos(x)$
9	Прямоугольные импульсы	Треугольные импульсы	10	4	$\exp(2 \cdot x) - \sin(7 \cdot x)$
10	Прямоугольные импульсы	Наклонные импульсы	90	5	$x \cos(x) \cdot 4$
11	Треугольные импульсы	Наклонные импульсы	100	6	$\exp(2 \cdot x) - \cos(10 \cdot x)$
12	Треугольные импульсы	Прямоугольные импульсы	20	4	$x \sin(4 \cdot x)$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 12

Исследование устойчивости дискретных систем автоматического управления и построение переходного процесса

1. Цель работы:

- закрепление лекционного материала, касающегося исследования устойчивости дискретных систем;
- теоретическое исследование устойчивости дискретной системы автоматического регулирования;
- построение переходного процесса дискретной системы при единичном ступенчатом воздействии.

2. Краткие сведения из теории

Дискретные системы - системы автоматического управления, в которых контур управления замыкается только на определенные промежутки времени, осуществляя воздействие на исполнительный орган импульсами. В паузах между импульсами цепи управления остается разомкнутой.

2.1. Z – преобразование

Анализ дискретных САУ значительно упрощается, если ввести Z – преобразование. С его помощью разностное уравнение, описывающее процессы в САУ преобразуется в линейное алгебраическое уравнение, которое решить намного легче, чем исходное. Поскольку дискретный сигнал получается из непрерывного посредством выборки, то Z – преобразование определяется с помощью дискретного преобразования Лапласа.

Сущность Z – преобразования заключается в использовании подстановки

$$Z = e^{Ts},$$

Откуда

$$P = \frac{1}{T} \ln z.$$

Если $f[nT]$ $n=0,1,2,\dots$ - некоторая заданная последовательность величин, появляющихся в дискретные моменты времени $T, 2T, 3T, \dots$, то Z – преобразование этой последовательности называют функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT] z^{-n}.$$

В импульсных системах последовательность $f[nT]$ получают из некоторой непрерывной функции $f(t)$ путем ее квантования. При квантовании по времени выделяют ординаты $f(t)$ в дискретные равноотстоящие моменты времени $t=nT$, где $n=0,1,2,\dots$, и функция $f(t)$ преобразуется в решетчатую $f[nT]$.

Коэффициенты ряда $f[nT]$ выражаются через $F(z)$ следующим образом:

$$f[nT] = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z) z^{n-1} dz.$$

Решетчатая функция $f[nT]$ называется оригиналом, функция $F(z)$ - Z - преобразованием или изображением функции $f[nT]$.

$$F(z) = Z\{f[nT]\}.$$

Передающая функция разомкнутой системы в форме Z - преобразования имеет вид:

$$W(z) = \frac{R(z)}{Q(z)}.$$

2.2. Устойчивость импульсных систем

Алгебраический критерий устойчивости Шур-Кона позволяет анализировать устойчивость импульсных систем регулирования по характеристическому уравнению замкнутой системы, записанному в форме Z - преобразования без нахождения его корней,

Для характеристического уравнения n -го порядка:

$$D(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0;$$

Запишем коэффициенты в виде следующего определителя:

$$\begin{array}{cccccccc} a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{k-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_{k-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_k a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3} & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+2} \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{array}$$

где $k=1,2,3,\dots$; $a_1^*, \dots, a_n^*$ - сопряженные значения коэффициентов. Определитель имеет $2k$ рядов и $2k$ столбцов. Корни характеристического уравнения будут лежать внутри единичной окружности, если коэффициент уравнения

$$D(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

удовлетворяют всем определителям Шур-Кона, имеющим

$$\Delta_k < 0 \text{ для нечетных } k,$$

$$\Delta_k > 0 \text{ для четных } k.$$

3. Задание к лабораторной работе и порядок

ее выполнения:

- получить задание,
- с помощью программы "Shur-Kon.mcd":
- ввести коэффициенты (a,b,c,d,e,f,m,t) при многочлене передаточной функции $W(z)$;
- проверить устойчивость системы по критерию Шур-Кона (по знакам определителей);

- сделать заключение об устойчивости дискретной САУ;
- построить переходный процесс в системе при единичном ступенчатом входном воздействии.

4. Результаты работы, включаемые в отчет:

- структурная схема дискретной САУ;
- оценка устойчивости САУ;
- график переходного процесса;
- заключение о характере переходного процесса.

5. Вопросы для самопроверки

1. В каком виде представляются уравнения динамики дискретных САУ?
2. В чем состоит Z - преобразование решетчатой функции?
3. В чем состоит необходимое и достаточное условие устойчивости дискретных САУ?
4. С помощью каких критериев определяется устойчивость дискретных САУ?
5. В чем состоит критерий устойчивости Шур-Кона?
6. Какие существуют способы построения переходного процесса в дискретной САУ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс лекций по Теории автоматического управления.
2. Солодовников В.В. и др. Теория автоматического управления техническими системами/В.В. Солодовников. М.:МГТУ, 1993.
3. Юревич Е.И. Теория автоматического управления/Е.И. Юревич.Л.: "Энергия", 1975.
4. Бесекерский В.А. Сборник задач по теории автоматического управления/под редакцией В.А. Бесекерского. М.:Высшая школа, 1967.
5. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления/П.В. Куропаткин. М.: Высшая школа, 1973.
6. Васильев Д.В., Системы автоматического управления/Д.В. Васильев, В.Г. Чуич. М.:Наука, 1967.
7. Бесекерский В.А., Теория систем автоматического регулирования/В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. М.: Наука, 1975.
8. Макаров И.М., Линейные автоматические системы/И.М. Макаров, Б.М. Менский. Машиностроение, 1982.