

Задача №1. Расчет плоской шарнирно-стержневой системы

Цель задачи:

Рассчитать на прочность по допускаемым напряжениям статически-определимую шарнирно-стержневую систему и определить перемещение узла *A*. Стержни изготовлены из стали Ст.3: модуль упругости $E=2.1 \cdot 10^5$ МПа, допустимое напряжение $[\sigma]=160$ МПа. Форма поперечного сечения у 1-го стержня – двутавр, 2-го – круглое сечение.

Данные для расчета берутся из таблицы 1.1, схема нагружения стержней приведена на рисунке 1.1.

Содержание и порядок расчета задачи:

1. Вычертить в масштабе схему шарнирно-стержневой системы с указанием численных значений заданных величин на чертеже.
2. Рассмотрев условия равновесия узла *A*, определить усилия в стержнях 1 и 2.
3. Из условия прочности по допускаемым напряжениям вычислить требуемые площади поперечного сечения стержней 1 и 2.
4. Подобрать номер двутавра для стержня 1 (по ГОСТ 8239-72) и диаметр стержня 2 (по ГОСТ 2590-71).
5. Провести расчет на недогруз или перегруз для каждого из стержней. При необходимости переназначить номер двутавра для стержня 1, диаметр стержня 2, при изменении площади поперечного сечения стержней.
6. Определить абсолютную и относительную деформации подобранных стержней под действием заданной нагрузки.
7. Графически определить перемещение узла *A*.

Таблица 1.1

Цифры шифра	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$P, \text{кН}$	$l, \text{м}$
	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
1	30	60	30	300	1.5
2	40	80	35	400	1.6
3	45	70	40	500	1.7
4	50	75	45	600	1.8
5	55	65	50	700	1.9
6	35	55	55	800	2.0
7	60	50	60	350	2.1
8	65	45	25	250	2.2
9	70	40	20	450	2.3
0	75	35	15	650	2.4

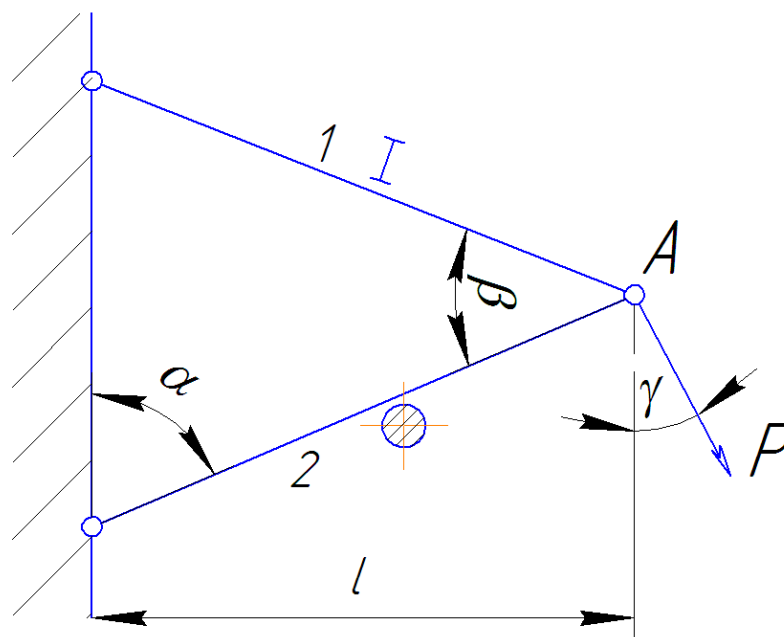


Рисунок 1.1. Схема плоской шарнирно-стержневой системы

Пример решения задачи:

Рассчитать на прочность по допускаемым напряжениям статически-определимую шарнирно-стержневую систему и определить перемещение узла A . Расстояние от заделки до узла A равно $l=1,4\text{ м}$, значение углов $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 20^\circ$, значение силы $P=260\text{ кН}$. Материал стержней: Ст.3, модуль упругости $E=2,1 \cdot 10^5\text{ МПа}$, допустимое напряжение $[\sigma]=160\text{ МПа}$.

1. Вычертить в масштабе схему шарнирно-стержневой системы с указанием численных значений заданных величин на чертеже.

2. Рассмотрев условия равновесия узла A , определить усилия в стержнях 1 и 2.

В местах крепления стержней 1 и 2 возникают реакции опор, направленные вдоль оси стержня (Рис. 1.2). Направление реакций опор выбираем произвольно. С учетом внешних сил и внутренних составим систему сходящихся сил, которые сходятся в одной точке – узел A .

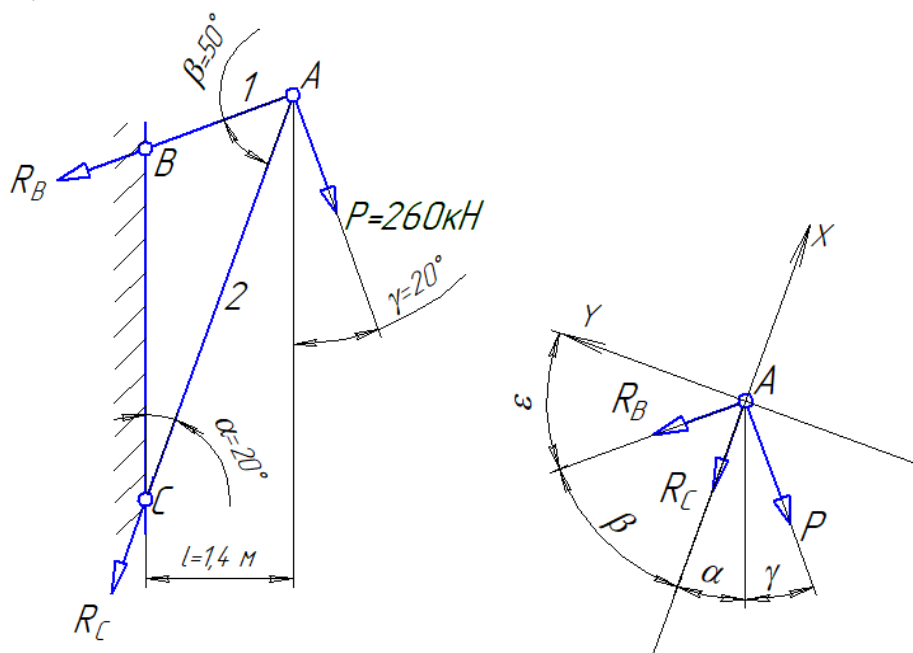


Рисунок 1.2. Схема расположения усилий

Выберем оптимальные оси координат x и y , составим уравнения равновесия:

$$\sum F_i(x) = 0, \sum F_i(y) = 0;$$

$$\sum F_i(x) = -R_C - P \cdot \cos(\alpha + \gamma) - R_B \cdot \cos(\beta) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_i(y) = -P \cdot \sin(\alpha + \gamma) + R_B \cdot \cos(\varepsilon) = 0 \quad (2)$$

Из уравнения (2) выражаем

$$R_B = \frac{P \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\cos(\varepsilon)} = \frac{260 \cdot \sin(40^\circ)}{\cos(40^\circ)} = \frac{260 \cdot 0,643}{0,766} = 218,251 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1) выражаем

$$\begin{aligned} R_C &= -P \cdot \cos(\alpha + \gamma) - R_B \cdot \cos(\beta) = -260 \cdot \cos(40^\circ) - 218,251 \cdot \cos(50^\circ) = \\ &= -199,172 - 140,289 = -339,461 \text{ кН} \end{aligned}$$

Под действием силы P стержень 1 испытывает растяжение, а стержень 2 испытывает сжатие.

$$R_B = N_1 = 218,251 \text{ кН (растяжение);}$$

$$R_C = N_2 = -339,461 \text{ кН (сжатие).}$$

3. Из условия прочности по допускаемым напряжениям вычислить требуемые площади поперечного сечения стержней 1 и 2.

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где A – площадь поперечного сечения, м^2 .

Из условия прочности определяем площади поперечных сечений:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} \geq \frac{218,251 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,00136 \text{ м}^2 = 13,6 \text{ см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} \geq \frac{339,461 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,00212 \text{ м}^2 = 21,2 \text{ см}^2.$$

4. Подобрать номер двутавра для стержня 1 (по ГОСТ 8239-72) и диаметр стержня 2 (по ГОСТ 2590-71).

Для первого стержня площадь поперечного сечения $A_1^{\text{ГОСТ}} = 14,7 \text{ см}^2$ – Двутавр №12.

У второго стержня круглое поперечное сечение. Зная площадь поперечного сечения $A_2 = 21,2 \text{ см}^2$ можно определить диаметр:

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0,00212 \text{ м}^2, \quad d^2 = \frac{4 \cdot A_2}{\pi} = \frac{4 \cdot 0,00212}{3,14} = 0,00270 \text{ м}^2,$$

$$d = \sqrt{0,00270} = 0,052 \text{ м} = 52 \text{ мм.}$$

По ГОСТ 2590-71 $d_{\text{ГОСТ}} = 52 \text{ мм} = 0,052 \text{ м}.$

Определим площадь поперечного сечения с учетом значения диаметра по ГОСТу:

$$A_2^{\text{ГОСТ}} = \frac{\pi d_{\text{ГОСТ}}^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,052^2}{4} = 0,00212 \text{ м}^2.$$

5. Провести расчет на недогруз или перегруз для каждого из стержней. При необходимости переназначить номер двутавра для стержня 1 и выбрать другой диаметр стержня 2, при изменении площади поперечного сечения стержней.

Недогруз разрешен в пределах до 10%, перегруз – до 5%.

Определим действительные напряжения:

$$\sigma_1^{\text{действ}} = \frac{N_1}{A_1^{\text{ГОСТ}}} = \frac{218,251}{0,00147} = 148,5 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_2^{\text{действ}} = \frac{N_2}{A_2^{\text{ГОСТ}}} = \frac{339,461}{0,00212} = 160,1 \text{ МПа}.$$

Определим недогруз или перегруз стержней:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\sigma_1^{\text{действ}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{148,5 - 160}{160} \cdot 100\% = -7,2\% \text{ (недогруз), в пределах допустимого значения (до 10\%).}$$

$$\Delta\sigma_2 = \frac{\sigma_2^{\text{действ}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{160,1 - 160}{160} \cdot 100\% = 0,06\% \text{ (перегруз), в пределах допустимого значения (до 5\%).}$$

6. Определить абсолютную и относительную деформации подобранных стержней под действием заданной нагрузки.

Закон Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon$, где E – модуль упругости материала, ε – относительная линейная деформация, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, где Δl – абсолютная линейная деформация, l – длина стержня.

Определим относительную линейную деформацию:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^{\text{действ}}}{E} = \frac{148,5}{2,1 \cdot 10^5} = 7,071 \cdot 10^{-4}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2^{\text{действ}}}{E} = \frac{160,1}{2,1 \cdot 10^5} = 7,624 \cdot 10^{-4}.$$

Для определения абсолютной линейной деформации необходимо сначала определить длину каждого из стержней (Рис. 1.3).

$$l_1 = \frac{l}{\cos \beta_1} = \frac{1,4}{\cos(20^\circ)} = \frac{1,4}{0,939} = 1,5 \text{ м}.$$

$$l_2 = \frac{l}{\cos \beta_2} = \frac{1}{\cos(\beta + \beta_1)} = \frac{1,4}{\cos(70^\circ)} = \frac{1,4}{0,342} = 4,1 \text{ м}$$

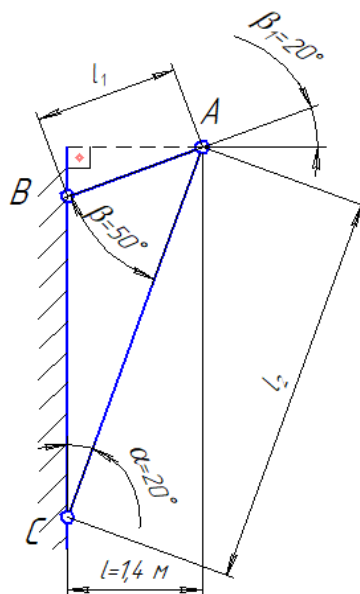


Рисунок 1.3. Определение длин стержней

Определим абсолютную линейную деформацию:

$\Delta l_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 7,071 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 0,00106 \text{ м} = 1,06 \text{ мм}$ – удлинение стержня, так как деформация растяжения.

$\Delta l_2 = \varepsilon_2 \cdot l_2 = 7,624 \cdot 10^{-4} \cdot 4,1 = 0,00313 \text{ м} = 3,13 \text{ мм}$ – укорочение стержня, так как деформация сжатия.

7. Графически определить перемещение узла А.

Под действием внешней силы стержень А переместился на некоторое расстояние (рис.1.4). Определим его перемещение с помощью графоаналитического метода. Для этого необходимо задаться масштабом построения μ_l . Масштаб построения – это отношение истинного значения параметра к отрезку длины на чертеже, тогда

$\mu_l = \frac{\text{Истина}}{\text{Отрезок}}$. Пусть отрезок $\Delta l_{1\text{черт}}$ на чертеже изображает удлинение стержня 1 и равен 30мм. Тогда $\mu_l = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_{1\text{черт}}} = \frac{\Delta l_1}{30\text{мм}} = \frac{0,00106}{30} = 3,53 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{мм}}$. Откладываем вдоль оси стержня 1 отрезок $\Delta l_{1\text{черт}}$ (в сторону растяжения).

Соответственно, можно определить длину отрезка $\Delta l_{2\text{черт}} = \frac{\Delta l_2}{\mu_l} = \frac{0,00313}{3,53 \cdot 10^{-5}} = 88,7 \text{ мм}$. Откладываем вдоль оси стержня 2 отрезок $\Delta l_{2\text{черт}}$ (в сторону сжатия).

Восстанавливаем перпендикуляры к концам отрезков и на пересечении получаем точку А'. Соединив точки А и А' получаем отрезок $\Delta l_{A\text{черт}} = 144,5 \text{ мм}$. Зная масштаб и длину отрезку можно опередить истинное значение перемещение узла А.

$$\Delta l_A = \Delta l_{A\text{черт}} \cdot \mu_l = 144,5 \cdot 3,53 \cdot 10^{-5} = 0,0051 \text{ м} = 5,1 \text{ мм}.$$

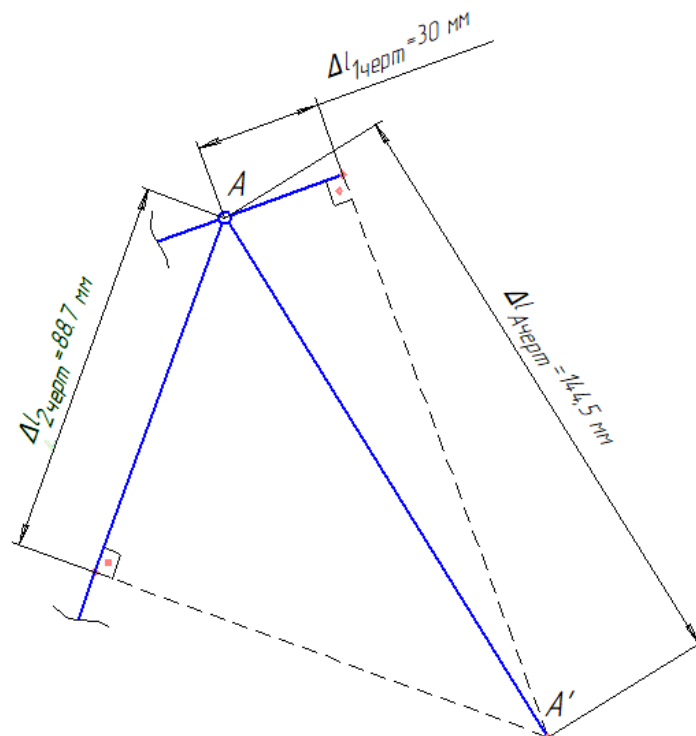


Рисунок 1.4. Определение перемещения узла А