

Задание №2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Цель задания: практическое освоение точных и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Решить СЛАУ с помощью программной реализации ниже указанных методов:

Точные методы:

- Метод Гаусса (LU – разложение)
- Метод Отражений (QR – разложение (метод Хаусхолдера))

Итерационные методы:

- Метод простой итерации
- Метод Зейделя

Примечание: пользоваться встроенными функциями языка программирования можно только при вычислении абсолютной погрешности решения для заполнения таблиц «Результаты тестирования». Операции с матрицами и векторами необходимо запрограммировать самостоятельно. Для вычисления квадратного корня используйте итерационную формулу Герона.

2. Используя программную реализацию методов из п. 1, заполнить таблицы «Результаты тестирования» для тестов №0 – №5.

Примечание: Параметр N в тестах №0 – №5 должен совпадать с Вашим номером в списке группы.

Тест №0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Тест №1.

$$A = \begin{pmatrix} N+2 & 1 & 1 \\ 1 & N+4 & 1 \\ 1 & 1 & N+6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} N+4 \\ N+6 \\ N+8 \end{pmatrix}$$

Тест №2.

$$A = \begin{pmatrix} -(N+2) & 1 & 1 \\ 1 & -(N+4) & 1 \\ 1 & 1 & -(N+6) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -(N+4) \\ -(N+6) \\ -(N+8) \end{pmatrix}$$

Тест №3.

$$A = \begin{pmatrix} -(N+2) & N+3 & N+4 \\ N+5 & -(N+4) & N+1 \\ N+4 & N+5 & -(N+6) \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} N+4 \\ N+6 \\ N+8 \end{pmatrix}$$

Tecm №4.

$$A = \begin{pmatrix} N+2 & N+1 & N+1 \\ N+1 & N+4 & N+1 \\ N+1 & N+1 & N+6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} N+4 \\ N+6 \\ N+8 \end{pmatrix}$$

Тест №5. Плохо обусловленная СЛАУ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon N \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = (-1, -1, \dots, -1, 1)^T.$$

Здесь ε можно брать в широком диапазоне от 10^{-3} до 10^{-6} . Систему следует решать при увеличивающейся размерности n матрицы A и вектора b .

Обозначения в таблицах №1, №2:

x – решение, полученное с помощью программной реализации соответствующего метода

\bar{x} – «точное» решение, полученное с помощью встроенных функций (или внешних сервисов)

ϵ – допустимая погрешность решения (требуемая точность решения)

 Δ – абсолютная погрешность решения x

k – количество итераций

n – размерность системы

Таблица №1. Результаты тестирования №0 – №4.

| № теста | \bar{x} | е | МПИ | | | Метод Зейделя | | | М-д Гаусса | | М-д Хаусхолдера | |
|------------|-----------|-----------|-----|----------|---|---------------|----------|---|------------|----------|-----------------|----------|
| | | | х | Δ | к | х | Δ | к | х | Δ | х | Δ |
| 0 | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| 1 | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| 2 | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| 3 | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| 4 | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |
| | | ... | | | | | | | | | | |

Таблица №2. Результаты тестирования №5.

| № теста | n | ε | \bar{x} | е | МПИ | | | Метод Зейделя | | | М-д Гаусса | | М-д Хаусхолдера | |
|------------|-----|---------------|-----------|-----------|-----|----------|---|---------------|----------|---|------------|----------|-----------------|----------|
| | | | | | х | Δ | k | х | Δ | k | х | Δ | х | Δ |
| 5 | 4 | 10^{-3} | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | | | ... | | | | | | | | | | |
| | | 10^{-6} | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | | | ... | | | | | | | | | | |
| | 5 | 10^{-3} | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | | | ... | | | | | | | | | | |
| | | 10^{-6} | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | | | ... | | | | | | | | | | |
| | ... | 10^{-3} | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | | | ... | | | | | | | | | | |
| | | 10^{-6} | | 10^{-2} | | | | | | | | | | |
| | | | | ... | | | | | | | | | | |