

Задание (штрафное) №1. Вычисление значений элементарных функций

Выполняется в дополнение к основному заданию при нарушении срока сдачи

Цель задания: практическое освоение методов вычисления значений элементарных функций с заданной точностью.

1. Программно реализовать вычисление значений элементарных функций:

$$\exp(x), \sin(x), \cos(x), \operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x), \arctan(x)$$

с заданной точностью $\varepsilon \in [10^{-3}, 10^{-15}]$ с использованием степенных рядов (см. Приложение 1), а также вычисление квадратного корня (\sqrt{c} , $c > 0$) с помощью итерационной формулы Герона:

$$\rho_{i+1} = \frac{1}{2} \left(\rho_i + \frac{c}{\rho_i} \right)$$

в заданном интервале $[a, b]$ ($x = a + (h) \cdot b$, где $x_{i+1} = x_i + h$).

2. Используя программную реализацию из п. 1 заполнить таблицы 1 — 5 «Итоговые результаты тестирования» для узлов $x = x_i$, $i = \overline{1, k}$ ($a = 0$, $b = 5$, $h = 0.25$) с требуемой точностью $\varepsilon \in [10^{-3}, 10^{-15}]$.

Примечание 1: Δ_{\exp} — абсолютная погрешность вычисления значений функции $\exp(x)$, реализованной в п.1; в качестве «точного» решения для расчетов принимаются значения встроенной функции e^x . Аналогичные обозначения для остальных функций ($\operatorname{sqr}(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, ...).

Примечание 2: В таблице 4 «Итоговые результаты тестирования ...»: требуется сравнить k — количество итераций в зависимости от выбора ρ_0 — начального приближения к значению \sqrt{c} — задается в двух вариантах: $\rho_0 = 1$ и $\rho_0 = c$.

Примечание 3: В таблице 5 «Итоговые результаты тестирования ...»: k — количество итераций (количество членов ряда в итоговом разложении),

$\sin(x)$ — функция, вычисленная через разложение в ряд без дополнительных условий на аргумент x ,

$\sin_{\text{opt}}(x)$ — функция, вычисленная через разложение в ряд с дополнительным условием на аргумент x (если $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ — реализуется $\sin(x)$, иначе — $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$).

3. Оценить полученные результаты: сравнить значения функций, вычисленные с помощью Вашей программной реализации, со значениями встроенных функций.

Степенные ряды для элементарных функций и оценки их остатков

1. $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad |R_n(x)| \leq |u_n(x)|, \quad |x| < n + 2;$
2. $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |R_n(x)| \leq |u_n(x)|/3, \quad |x| \leq n;$
3. $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad |R_n(x)| \leq 2|u_n(x)|/3, \quad |x| \leq n;$
4. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |R_n(x)| \leq |u_n(x)|, \quad |x| \leq \frac{\pi}{4};$
5. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad |R_n(x)| \leq |u_n(x)|, \quad |x| \leq \frac{\pi}{4};$
6. $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, & |x| < 1; \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{-(2k+1)}}{2k+1}, & |x| \geq 1; \\ |R_n(x)| \leq |u_n(x)|. \end{cases}$