

Модификация метода Гаусса: LU (P) – разложение

$$Ax = b, \det(A) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$PA = LU$$

P – матрица перестановок

L – нижняя треугольная матрица

U – верхняя треугольная матрица

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

$$Ly = Pb \quad Ux = y$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица P – формируется из матрицы E путем перестановки соответствующих строк.

Например, матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует единичной матрице без перестановок, матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует матрице E , у которой 1-ая и 3-я строки переставлены местами.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Пусть матрица $M = A$.

1.1. Определяем ведущий элемент (i –го шага):

$$el_{\max}[i] = \max_{j=\overline{1,n}} \{ | M[j, i] | \},$$

$$i = 1, j = \overline{1, 3}$$

$$el_{\max}[1] = \max\{0, 1, 1\} = 1 \text{ при } j = 2$$

1.2. Переставляем i -ю строку со строкой, в которой нашли ведущий элемент (в данном пример: первую со второй) в матрицах M и P :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Проводим преобразование матрицы M :

$$M[j, i] = \frac{M[j, i]}{M[i, i]}, \quad j = \overline{i+1, n}$$

$$i = 1 \quad M[1, 1] = 1 \quad j = \overline{2, 3}$$

$$j = 2:$$

$$M[2, 1] = \frac{M[2, 1]}{M[1, 1]} = \frac{0}{1} = 0$$

$$M[j, k] = M[j, k] - M[j, i] * M[i, k], \quad k = \overline{i+1, n}$$

$$k = \overline{2, 3}$$

$$k = 2:$$

$$M[2, 2] = M[2, 2] - M[2, 1] * M[1, 2] = 1 - 0 * 5 = 1$$

$$k = 3:$$

$$M[2, 3] = M[2, 3] - M[2, 1] * M[1, 3] = 1 - 0 * 1 = 1$$

$$j = 3:$$

$$M[3, 1] = \frac{M[3, 1]}{M[1, 1]} = \frac{1}{1} = 1$$

$$k = \overline{2, 3}$$

$$k = 2:$$

$$M[3, 2] = M[3, 2] - M[3, 1] * M[1, 2] = 1 - 1 * 5 = -4$$

k = 3:

$$M[3,3] = M[3,3] - M[3,1] * M[1,3] = 7 - 1 * 1 = 6$$

После проведенных преобразований получаем матрицу M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.1.

Переходим к выбору очередного ведущего элемента:

$$el_{\max}[i] = M[j, i]: |M[j, i]| = \max_{j=i, n} \{ |M[j, i]| \},$$

$$i = 2, j = 2, 3$$

$$el_{\max}[2] = M[3,2] = -4: \max\{|M[2,2]|, |M[3,2]|\} = 4 \text{ при } j = 3$$

2.1. Перестановка:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. После преобразования (аналогичного пункту 1. 3) получаем матрицу M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \end{pmatrix}$$

2.3. В итоге получаем матрицу $M = L + U - E$, таким образом:

$$Sum = L + U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1/4 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

и итоговая матрица перестановок:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$