

Решение СЛАУ методом Зейделя

Найти решение СЛАУ $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Составим итерационный процесс в виде:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \dots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k)} + \dots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + c_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + d_n \end{cases},$$

где

$$c_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i, \\ 0, & j = i. \end{cases} \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = C_{12}x_2^{(0)} + C_{13}x_3^{(0)} + d_1 \\ x_2^{(1)} = C_{21}x_1^{(1)} + C_{23}x_3^{(0)} + d_2 \\ x_3^{(1)} = C_{31}x_1^{(1)} + C_{32}x_2^{(1)} + d_3 \end{cases}$$

Выберем в качестве начального приближения $x^0 = d$ (учитывая то, что матрица A является матрицей с диагональным преобладанием величины $\delta = 1$, метод Зейделя для решения СЛАУ $Ax = b$ сходится при любом начальном приближении):

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

После прохода первой итерации получаем:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{27}{35} \\ \frac{173}{175} \\ \frac{181}{175} \end{bmatrix}$$

Проверяем условие (критерий) остановки итерационного процесса:

$$\|Ax^{(k)} - b\| \leq \varepsilon$$

$\|Ax^{(1)} - b\| = 0.662857 > 0.001$ - условие остановки не выполнено, поэтому переходим на следующую итерацию:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{521}{525} \\ \frac{373}{375} \\ \frac{18409}{18375} \end{bmatrix}$$

$\|Ax^{(2)} - b\| = 0.03244 > 0.001$ - условие остановки не выполнено, продолжаем итерационный процесс.

...

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.00023 \\ 0.99997 \\ 0.99997 \end{bmatrix}$$

$\|Ax^{(4)} - b\| = 0.00062 < 0.001$ - условие остановки выполнено, итерационный процесс заканчивается.

Решение СЛАУ $Ax = b$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$x = x^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.00023 \\ 0.99997 \\ 0.99997 \end{bmatrix}$$