

## Решение СЛАУ методом простой итерации

Найти решение СЛАУ  $Ax = b$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Составим итерационный процесс в виде:

$$x^{k+1} = Bx^k + c$$

$$B = E - \mu A, \quad c = \mu b, \quad \text{где } \mu = \frac{1}{\|A\|}$$

$$\mu = 0.128560199638139$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.614319401085584 & -0.128560199638139 & -0.128560199638139 \\ -0.128560199638139 & 0.357199001809306 & -0.128560199638139 \\ -0.128560199638139 & -0.128560199638139 & 0.100078602533029 \end{bmatrix}$$

$$\text{Norm}_1(B) = 0.8714398004$$

$$\text{Norm}_2(B) = 0.6772224375$$

$$\text{Norm}_3(B) = 0.8714398004$$

Учитывая то, что  $\|B\| < 1$ , итерационный процесс сходится для любого начального приближения. Пусть  $x^0 = c = \mu b$ :

$$x^0 := \begin{bmatrix} 0.642800998190694 \\ 0.899921397466971 \\ 1.15704179674325 \end{bmatrix}$$

После прохода первой итерации получаем:

$$x1 := \begin{bmatrix} 0.773242523520447 \\ 0.989984273315036 \\ 1.07450422366164 \end{bmatrix}$$

Проверяем условие (критерий) остановки итерационного процесса:

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|x^k - x^{k-1}\| \leq \varepsilon$$

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| = 0.3749618250 > 0.001 \quad - \text{условие остановки не выполнено, поэтому}$$

переходим на следующую итерацию:

$$x2 := \begin{bmatrix} 0.852407828811718 \\ 1.01599610100356 \\ 1.03789588885466 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(2)} - x^{(1)}\| = 0.1909616837 > 0.001 \quad - \text{условие остановки не выполнено, продолжаем}$$

итерационный процесс.

...

$$x15 := \begin{bmatrix} 0.999122253731383 \\ 1.00030080621461 \\ 1.00012856271753 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(15)} - x^{(14)}\| = 0.000936 < 0.001 \quad - \text{условие остановки выполнено, итерационный}$$

процесс заканчивается.

Решение СЛАУ  $Ax = b$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ :

$$x = x^{(15)} = \begin{bmatrix} 0.99912 \\ 1.00030 \\ 1.00012 \end{bmatrix}$$