

Метод Хаусхолдера (метод отражений): QR – разложение

$$Ax = b, \det(A) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Пусть $A = QR$:

Q – ортогональная матрица ($Q^T Q = E$, $Q^{-1} = Q^T$)

R – верхняя треугольная матрица:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда СЛАУ можно представить в виде:

$$QRx = b$$

$$Rx = Q^T b$$

Матрица Q строится как произведение Q_i - матриц Хаусхолдера.

Пример: Найти решение СЛАУ $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1. Пусть $Q = Q_0 = E$ и $R = R_0 = A$:

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Строим вектор $w_1 = \frac{(y_1 - \alpha_1 z_1)}{\rho_1}$, где $\alpha_1 = \|y_1\|_2$, $\rho_1 = \|(y_1 - \alpha_1 z_1)\|_2$. В качестве z_1 выбираем орт e_1 : $z_1 = e_1 = (1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$, в качестве вектора y_1 – первый столбец матрицы R :

$$yI := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad zI := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha1 := 3.316624790$$

$$\rho1 := 1.44922436414881740$$

$$wI := \begin{bmatrix} -0.218478793129851 \\ 0.690024281200000 \\ 0.690024281200000 \end{bmatrix}$$

Вектор w_1 представляет собой вектор единичной длины, т.к. $\|w_1\|_2$:

$$Norm_2_wI := 1.00000000016931456$$

3. Строим матрицу отражений $Q_1 = E - 2w_1w_1^T$:

$$QI := \begin{bmatrix} 0.904534033905048 & 0.301511344373738 & 0.301511344373738 \\ 0.301511344373738 & 0.0477329827088468 & -0.952267017291153 \\ 0.301511344373738 & -0.952267017291153 & 0.0477329827088468 \end{bmatrix}$$

4. Преобразуем матрицу R : $R_1 = Q_1R = Q_1R_0 = Q_1A$:

$$RI := \begin{bmatrix} 3.31662479046262 & 2.71360210014748 & 3.31662478889495 \\ -0.14610928023017810^{-8} & -0.412090759373181 & -6.31662479395549 \\ -0.14610928023017810^{-8} & -4.41209075937318 & -0.316624793955487 \end{bmatrix}$$

Заметим, что у матрицы R_1 в первом столбце все элементы нулевые, кроме 1-го элемента:

$$RI := \begin{bmatrix} 3.31662479046262 & 2.71360210014748 & 3.31662478889495 \\ -0.146109280230178 & 10^{-8} & -0.412090759373181 & -6.31662479395549 \\ -0.146109280230178 & 10^{-8} & -4.41209075937318 & -0.316624793955487 \end{bmatrix}$$

Проверим, что матрицы $Q = Q_1 Q_0$ и $R = R_1$, действительно, являются QR - разложение матрицы A :

$$QIRI := \begin{bmatrix} 2.99999999978556 & 0.999999998839448 & 0.999999998431046 \\ 1.00000000067726 & 5.00000000366539 & 1.00000000495525 \\ 1.00000000067726 & 1.00000000366539 & 7.00000000495525 \end{bmatrix}$$

5. На втором шаге положим $z_2 = e_1 = (1, 0)^T \in \mathbb{R}^2$, в качестве вектора y_2 — первый столбец подматрицы $R_1(2 \dots 3, 2 \dots 3)$ (рассматриваемая подматрица выделена зеленым цветом, а столбец y_2 — желтым):

$$R1 := \begin{bmatrix} 3.31662479046262 & 2.71360210014748 & 3.31662478889495 \\ -0.146109280230178 & 10^{-8} & -0.412090759373181 \\ -0.146109280230178 & 10^{-8} & -4.41209075937318 \end{bmatrix}$$

$$y2 := \begin{bmatrix} -0.412090759373181 \\ -4.41209075937318 \end{bmatrix}$$

$$z2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Строим вектор $w_2 = \frac{(y_2 - \alpha_2 z_2)}{\rho_2}$, где $\alpha_2 = \|y_2\|_2$, $\rho_2 = \|y_2 - \alpha_2 z_2\|_2$:

$$\alpha_2 := 4.431293678$$

$$\rho_2 := 6.5517110495758999$$

$$w2 := \begin{bmatrix} -0.739254890643872 \\ -0.673425724099701 \end{bmatrix}$$

Вектор w_1 представляет собой вектор единичной длины, т.к. $\|w_2\|_2$:

$$Norm_2_w2 := 0.99999999961004494$$

6. Строим подматрицу матрицы отражений $Q_2(2 \dots 3, 2 \dots 3) = E - 2w_2 w_2^T$:

$$Q2_23 := \begin{bmatrix} -0.0929955866817658 & -0.995666520052190 \\ -0.995666520052190 & 0.0929955882415860 \end{bmatrix}$$

7. Преобразуем подматрицу $R_1(2 \dots 3, 2 \dots 3) : R_2(2 \dots 3, 2 \dots 3) = Q_2(2 \dots 3, 2 \dots 3)R_1(2 \dots 3, 2 \dots 3)$:

$$R2_23 := \begin{bmatrix} 4.43129367447356 & 0.902670935322380 \\ -0.32124156112978110^{-8} & 6.25980711810728 \end{bmatrix}$$

8. Матрица отражений Q_2 и матрица R_2 на 2-м шаге формируются следующим образом:

$$Q2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0929955866817658 & -0.995666520052190 \\ 0 & -0.995666520052190 & 0.0929955882415860 \end{bmatrix}.$$

$$R2 := \begin{bmatrix} 3.31662479046262 & 2.71360210014748 & 3.31662478889495 \\ -0.14610928023017810^{-8} & 4.43129367447356 & 0.902670935322380 \\ -0.14610928023017810^{-8} & -0.32124156112978110^{-8} & 6.25980711810728 \end{bmatrix}$$

Заметим, что у матрицы R_2 во втором столбце только первые 2 элемента не равны 0:

$$Q2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0929955866817658 & -0.995666520052190 \\ 0 & -0.995666520052190 & 0.0929955882415860 \end{bmatrix}$$

$$R2 := \begin{bmatrix} 3.31662479046262 & 2.71360210014748 & 3.31662478889495 \\ -0.146109280230178 & 10^{-8} & 4.43129367447356 & 0.902670935322380 \\ -0.146109280230178 & 10^{-8} & -0.321241561129781 & 10^{-8} & 6.25980711810728 \end{bmatrix}$$

В матрице Q_2 зеленым цветом выделена подматрица $Q_2(2 \dots 3, 2 \dots 3)$.

Проверим, что матрицы $Q = Q_2 Q_1 Q_0$ и $R = R_2$, действительно, являются QR - разложение матрицы A :

$$Q := \begin{bmatrix} 0.904534033905048 & -0.328243975370101 & -0.272165526177310 \\ 0.301511344373738 & 0.943701430535681 & -0.136082764221480 \\ 0.301511344373738 & 0.0410304971652571 & 0.952579344072295 \end{bmatrix}$$

$$R := \begin{bmatrix} 3.31662479046262 & 2.71360210014748 & 3.31662478889495 \\ -0.14610928023017810^{-8} & 4.43129367447356 & 0.902670935322380 \\ -0.14610928023017810^{-8} & -0.32124156112978110^{-8} & 6.25980711810728 \end{bmatrix}$$

$$QR := \begin{bmatrix} 3.00000000154389 & 1.00000000319233 & 1.00000000491923 \\ 0.999999998175645 & 4.99999999747243 & 0.999999995724356 \\ 0.999999997903895 & 0.999999996799692 & 6.99999999472160 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

9. Далее следует рассмотреть модифицированную СЛАУ:

$$Rx = y,$$

$$y = Q^T b.$$

R — правая треугольная матрица, поэтому с помощью обратного хода можно легко найти вектор x :

$$y := \begin{bmatrix} 9.34685167950504 \\ 5.33396461138658 \\ 6.25980711621375 \end{bmatrix}$$

$$x_3 := 0.99999999697510$$

$$x_2 := 1.00000000042057$$

$$x_1 := 0.99999999235319$$

Решение СЛАУ $Ax = b$:

$$x := \begin{bmatrix} 0.99999999235319 \\ 1.00000000042057 \\ 0.99999999697510 \end{bmatrix}$$