......

Классификация уравнений второго порядка

В этом параграфе мы дадим классификацию квазилинейных (линейных относительно всех старших производных) дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных.

Классификация уравнений в точке

Будем рассматривать функции n независимых переменных $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \qquad (2.41)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ij}(x)$ в области D. Можно считать без потери общности, что $a_{ij} = a_{ji}$. Зафиксируем определенную точку $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ в области D и составим квадратичную форму

$$g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) X_i X_j. \tag{2.42}$$

Квадратичная форма (2.42) называется квадратичной формой, связанной с уравнением (2.41). Составим определитель формы (2.42)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Будем говорить, что квадратичная форма (2.42) определенная, если она сохраняет знак при любых изменениях переменных X, и неопределенная, если ее знак меняется.

Мы скажем, что уравнение (2.41) принадлежит *эллиптическому типу* в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если $\Delta \neq 0$ и g — определенная форма; уравнение (2.41) принадлежит *гиперболическому типу*, если $\Delta \neq 0$ и g — неопределенная форма; уравнение (2.41) принадлежит *параболическому типу*, если $\Delta = 0$. Уравнение (2.41) принадлежит эллиптическому типу (соответственно, гиперболическому или параболическому) в области D, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому (соответственно, гиперболическому или параболическому) типу. Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных.

Отметим, что приведенная классификация не зависит от выбора переменных и остается неизменной при замене переменных. Введем вместо переменной x новые независимые переменные

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

при этом

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $J \neq 0$, то в некоторой окрестности можно выразить переменные x через переменные ξ: $x = x(\xi)$. Обозначим $u(x(\xi)) = \tilde{u}(\xi)$; тогда $\tilde{u}(\xi(x)) = u(x)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Здесь мы, конечно, предполагаем, что функции $\xi = \xi(x)$ обладают непрерывными вторыми производными. После подстановки последних выражений в уравнение (2.41), получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_l} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_i \partial x_j} + \tilde{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0. \quad (2.43)$$

Обозначив теперь новые коэффициенты при вторых производных через

$$\tilde{a}_{kl}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}, \quad (2.44)$$

перепишем уравнение (2.43) в виде

$$\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}_{kl}(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_l \partial \xi_k} + \tilde{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0.$$

В фиксированной точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ обозначим $\xi^0 = \xi(x^0)$, $\alpha_{li} = \partial \xi_l (x^0)/\partial x_i$; тогда формула (2.44) запишется в виде

$$\tilde{a}_{kl}(\xi^0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \alpha_{kj} \alpha_{li}. \quad (2.45)$$

Формула (2.45) преобразования коэффициентов $a_{ij}(x^0)$ совпадает с формулой преобразования квадратичной формы (2.42) при неособенном линейном преобразовании

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} Y_j, \quad \det(\alpha_{ji}) \neq 0, \quad (2.46)$$

переводящем форму (2.42) в форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(\xi^0) Y_i Y_j.$$

В курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует неособенное преобразование (2.46), при котором квадратичная форма (2.42) принимает следующий *канонический вид*

$$\sum_{i=1}^{r} Y_i^2 - \sum_{i=r+1}^{m} Y_i^2, m \leq n. \quad (2.47)$$

Кроме того, в силу закона инерции квадратичных форм, целые числа r и m не зависят от преобразования (2.46).[1]

Приведенная классификация зависит от точки x^0, так как числа r и m зависят от x^0.

[1] См., например, *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука. 1970. 400 с.; *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1980. 336 с.

Пусть коэффициенты a_{ij} в уравнении (2.41) постоянны, и пусть преобразование (2.46) приводит квадратичную форму (2.42) к каноническому виду (2.47). Тогда линейная замена независимых переменных

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

преобразует уравнение (2.41) к следующему каноническому виду:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_i^2} - \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi_i^2} + \tilde{\Phi}(\xi, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0.$$

Уравнения разных типов описывают разные по характеру явления и процессы и, наоборот, уравнения одного типа описывают схожие явления. Например, гиперболические уравнения описывают процессы распространения волн и колебания; параболические уравнения описывают явления переноса; эллиптические уравнения — статические процессы, задачи об установившихся стационарных движениях.

Рассмотрим ряд примеров.

1. Уравнение Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Составим для него квадратичную форму $g = X^2 + Y^2 + Z^2$; определитель этой формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ясно, что g — определенная форма (положительно определенная). Следовательно, уравнение Лапласа принадлежит к эллиптическому типу. К этому же типу относятся уравнения Пуассона и Гельмгольца.

2. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Составим для него квадратичную форму $g = X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2/a^2$; определитель этой формы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2} \neq 0.$$

Очевидно, что g — неопределенная форма; тип уравнения — гиперболический.

3. Уравнение Фурье

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

Квадратичная форма $g = X^2 + Y^2 + Z^2$; определитель этой формы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Уравнение относится к параболическому типу.

4. Уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Квадратичная форма $g = yX^2 + Y^2$; определитель этой формы

$$\Delta=\begin{vmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=y.$$

Это уравнение *смешанного типа*. Если $y<0$ — тип уравнения гиперболический; если $y>0$ — эллиптический тип, а если $y=0$, то уравнение параболического типа.

Классификация уравнений с двумя независимыми переменными

В предыдущем разделе мы рассмотрели вопрос о приведении квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка к каноническому виду в каждой отдельной точке, где задано это уравнение. Для каждой точки x^0 имеется свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду. Дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в сколь угодно малой области. В случае же двух независимых переменных такое преобразование независимых переменных существует при достаточно общих предположениях о коэффициентах уравнения.

Для случаев двух, трех или четырех независимых переменных классификацию уравнений можно упростить.

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\Phi\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (2.48)$$

где коэффициенты A, B и C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. Будем предполагать, что A, B и C не обращаются одновременно в нуль. Уравнению (2.48) соответствует квадратичная форма

$$g = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

определитель которой есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Пусть $\Delta = AC - B^2 > 0 \Rightarrow A \neq 0$. Тогда можно записать

$$g = \frac{1}{A}[(AX + BY)^2 + (AC - B^2)Y^2]. \quad (2.49)$$

Форма (2.49), очевидно, определенная. Следовательно, уравнение принадлежит эллиптическому типу.

Пусть $\Delta = AC - B^2 < 0$. Возможны два случая:

1. $A \neq 0$, тогда имеет место равенство (2.49), но в зависимости от Y знак g меняется; форма неопределенная. Следовательно, уравнение (2.48) — гиперболического типа.
2. $A = 0$, тогда запишем g в виде $g = (2BX + CY)Y$. Ясно, что g — неопределенная форма, тип уравнения — гиперболический.

Пусть $\Delta = AC - B^2 = 0$. Тип уравнения — параболический.

Таким образом, окончательно получаем: если $\Delta > 0$, то уравнение эллиптического типа; если $\Delta < 0$, то уравнение гиперболического типа; если $\Delta = 0$, то уравнение параболического типа.

Преобразование уравнений второго порядка с помощью замены переменных

Всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными может быть записано в виде

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \quad (2.50)$$

где A, B, C, D, E, F, G — заданные функции от x и y (или, в частном случае, постоянные).

Попытаемся упростить это уравнение с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y); \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad (2.51)$$

Здесь ξ и η — новые независимые переменные. Функции φ и ψ, связывающие новые переменные со старыми переменными, будут подобраны позднее. Пока же мы будем считать, что отображение (2.51) является взаимно однозначным. Сделаем требуемую замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y};\tag{2.52}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right];\tag{2.53}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right];\tag{2.54}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right].\tag{2.55}$$

Правые части формул (2.52)–(2.55) представляют собой линейные функции относительно частных производных $u'_\xi, u'_\eta, u''_{\xi\xi}, u''_{\xi\eta}, u''_{\eta\eta}$. Подставляя $u'_x, u'_y, u''_{xx}\ldots$ из этих формул в уравнение (2.50), мы получим снова *линейное уравнение второго порядка* с неизвестной функцией u и независимыми переменными ξ и η

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0,\tag{2.56}$$

где

$$\overline{A}=A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2;$$

$$\overline{B}=A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y};$$

$$\overline{C}=A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

а функция Φ линейна относительно u, u'_ξ, u'_η.

Уравнение (2.56) становится особенно простым, если в нем коэффициенты $\overline{A}$ и $\overline{C}$ окажутся равными нулю. Для того чтобы первоначально заданное уравнение (2.50) можно было привести к такому простому виду, надо в нем сделать замену переменных (2.51), подобрав функции φ и ψ так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0.\tag{2.57}$$

Это уравнение является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка. Следующая теорема показывает, как связаны его решения с общим решением некоторого обыкновенного уравнения.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы функция $z = f(x,y)$ во всех точках области Ω удовлетворяла уравнению (2.57), необходимо и достаточно, чтобы семейство $f(x,y) = \mathrm{const}$ было общим интегралом уравнения*

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0 \tag{2.58}$$

в той же области Ω.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Ю. С. Очана [19]. Теорема открывает путь для упрощения исходного уравнения (2.50). Для этого сначала составляем вспомогательное уравнение (2.58); оно называется *характеристическим уравнением* для данного уравнения (2.50). Характеристическое уравнение есть *обыкновенное* дифференциальное уравнение первого порядка, но второй степени. Разрешая его относительно производной y', получим два уравнения

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \tag{2.59}$$

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}; \tag{2.60}$$

Если общий интеграл уравнения (2.59) имеет вид $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$, то, полагая $\xi = \varphi(x,y)$, мы обращаем в нуль коэффициент при производной $u''_{\xi\xi}$. Если $\psi(x,y) = \mathrm{const}$ является общим интегралом уравнения (2.60), независимым от интеграла $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$, то, полагая $\eta = \psi(x,y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при производной $u''_{\eta\eta}$.

Интегральные кривые характеристического уравнения, то есть все кривые, входящие в семейства $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ и $\psi(x,y) = \mathrm{const}$, называются *характеристиками* заданного дифференциального уравнения (2.50). В связи с этим рассматриваемый метод упрощения уравнения (2.50) называется *методом характеристик*.

Уравнение гиперболического типа

Семейства $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ и $\psi(x,y) = \mathrm{const}$ можно рассматривать, как общие интегралы уравнения (2.58) — это уравнение распадается на два уравнения (2.59) и (2.60). Правые части уравнений (2.59) и (2.60) действительны и различны. Следовательно, согласно указанной теореме, функции $z = \varphi(x,y)$ и $z = \psi(x,y)$ являются решениями уравнения в частных производных (2.57). Функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ линейно независимы (можно доказать, что их определитель Вронского отличен от нуля, если $AC - B^2 < 0$). Поэтому, возвращаясь к уравнению (2.50), мы можем в нем сделать замену переменных по формулам (2.51). Так как функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют уравнению (2.58), то в результате этой замены переменных окажется $\overline{A} = 0$ и $\overline{C} = 0$. Следовательно, уравнение (2.50) преобразуется к виду

$$2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0,$$

или, после деления на $2\overline{B}$ и переноса в другую часть равенства, к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \overline{\Phi}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{2.61}$$

Полученное уравнение имеет более простой вид, чем исходное уравнение (2.50); если мы его сможем решить, то для того, чтобы найти решение исходного уравнения, достаточно вернуться к старым переменным.

Уравнение (2.61) представляет собой каноническую форму уравнения гиперболического типа. Иногда пользуются другой канонической формой уравнения гиперболического типа. Сделаем в уравнении (2.61) замену переменных по закону $\xi = t + \tau$, $\eta = t - \tau$, где t и τ — новые переменные. В результате этого преобразования уравнение (2.61) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} = \tilde{\Phi},$$

где $\tilde{\Phi} = 4\overline{\Phi}$. (Проверьте самостоятельно!)

Уравнение параболического типа

В этом случае уравнения (2.59) и (2.60) совпадают, и мы получаем один общий интеграл $\varphi(x,y) = \text{const}$, определяющий одно семейство характеристик. Тогда можно принять $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ — любая функция, независимая от функции $\varphi(x,y)$, лишь бы она была дифференцируема нужное число раз. Очевидно, при выбранной замене переменных коэффициент $\overline{A}$ в уравнении (2.56) обращается в нуль, то есть

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

С учетом того, что $AC - B^2 = 0$ или $B = \sqrt{A}\sqrt{C}$, последнее равенство можно переписать в виде

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{A}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Это поможет доказать, что коэффициент $\overline{B} = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{B} &= A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \\
&= A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \sqrt{A}\sqrt{C}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \sqrt{A}\sqrt{C}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} = \\
&= \sqrt{A}\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\sqrt{A}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + \sqrt{C}\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(\sqrt{A}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = \\
&= \left(\sqrt{A}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \sqrt{C}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Итак, уравнение (2.56) принимает вид

$$\bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

После деления на $\bar{C}$ окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \bar{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{2.62}$$

Уравнение (2.62) называется *канонической формой уравнения параболического типа*. Интересно отметить, что если правая часть уравнения (2.62) не содержит производной $\partial u/\partial \xi$, то оно становится обыкновенным дифференциальным уравнением, где роль параметра играет ξ.

Уравнение эллиптического типа

Правые части уравнений (2.59) и (2.60) комплексно сопряжены. Пусть $\varphi(x,y)$ — комплексный интеграл уравнения (2.59). Тогда $\varphi^*(x,y) = \text{const}$ — интеграл уравнения (2.60), где $\varphi^*(x,y)$ — функция, комплексно сопряженная с функцией $\varphi(x,y)$. Если теперь перейти к комплексным переменным $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \varphi^*(x,y)$, то, согласно общей теории, уравнение (2.50) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

то есть точно к такому же виду, как и гиперболическое уравнение. Чтобы остаться в действительной области, сделаем еще одну замену переменных:

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где α и β — новые переменные. Тогда $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$. Нетрудно показать, что при такой замене переменных $\bar{A} = \bar{C}$, $\bar{B} = 0$. Таким образом, уравнение (2.50) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Theta\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right),$$

который называется *каноническим видом уравнения эллиптического типа*.

Классная работа № 1

1. Определить области изменения независимых переменных, в которых уравнение имеет эллиптический, гиперболический, параболический типы. Привести в каждой из этих областей уравнение к каноническому виду.

$$y^2 U_{xx} - 2y\sin(x) U_{xy} - \cos^2(x) U_{yy} - (x+1) U_x = 0$$

Домашнее задание № 1

Привести к каноническому виду

$$10. U''_{xx} - 2\cos x \cdot U''_{xy} - (3 + \sin^2 x)U''_{yy} - yU'_y = 0$$

$$11. y^2 U''_{xx} + 2xyU''_{xy} + 2x^2 U''_{yy} + yU'_y = 0$$

$$12. tg^2 x \cdot U''_{xx} - 2y \cdot tgx \cdot U''_{xy} + y^2 U''_{yy} + tg^3 x \cdot U'_x = 0$$

$$13. \sin^2 x \cdot U''_{xx} - 2y \cdot \sin x \cdot U''_{xy} + y^2 U''_{yy} = 0$$

Ответы

$$10.\ U''_{\xi\eta} + \frac{\eta - \xi}{32}(U'_\xi - U'_\eta) = 0;\ \xi = 2x + \sin x + y, \eta = 2x - \sin x - y$$

$$11.\ U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi - \eta}U'_\xi + \frac{1}{2\eta}U'_\eta = 0;\ \xi = x^2 - y^2, \eta = x^2$$

$$12. U''_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}U'_\xi = 0; \quad \xi = y \cdot \sin x, \eta = y$$

$$13.\ U''_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}U'_\xi = 0; \quad \xi = y \cdot tg\frac{x}{2}, \eta = y.$$