

Задача Штурма—Лиувилля

В математической физике важны методы, при которых решение задачи получается в форме ряда, то есть в виде разложения по некоторой системе функций. Такие разложения хорошо изучены, когда каждая из функций, по которым осуществляется разложение, зависит только от одной из переменных, встречающихся в задаче. Чтобы найти естественную систему функций, по которой можно осуществить разложение, обычно необходимо найти решение некоторой граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, получившей название *задачи Штурма—Лиувилля*. Здесь и далее мы рассмотрим элементы теории задачи Штурма—Лиувилля и сформулируем соответствующие *теоремы разложения*. При этом, опуская доказательства, будем стремиться к изложению результатов в виде, диктуемом практическими потребностями¹

Рассмотрим обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.36)$$

где $p(x), q(x), r(x)$ — вещественные функции от x . Будем предполагать, что $p(x), p'(x), q(x), r(x)$ непрерывны в (a, b) ; $p(x)$ и $r(x)$ положительны в (a, b) ; λ — параметр, принимающий любые значения. Уравнение (3.36) можно записать в виде

$$p(x)X''(x) + p'(x)X'(x) + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0 \quad (3.37)$$

или в виде

$$X''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}X'(x) + \left[\lambda \frac{r(x)}{p(x)} - \frac{q(x)}{p(x)} \right]X(x) = 0.$$

Коэффициенты уравнения (3.37) в силу сделанных предположений непрерывны в интервале (a, b) . Каждая внутренняя точка интервала (a, b) — обыкновенная точка уравнения (3.37). Концы интервала (a, b) могут быть как обыкновенными точками, так и особыми (сингулярными). Напомним, что если при некотором x хотя бы один из коэффициентов уравнения (3.37) имеет бесконечный разрыв или $p(x) = 0$, то говорят, что *коэффициенты уравнения имеют особенность* в точке x .

Нас будут интересовать решения уравнения (3.36), удовлетворяющие *однородным линейным граничным условиям с вещественными коэффициентами*. Граничную задачу с такими условиями называют *задачей Штурма—Лиувилля*. Таким образом, под задачей Штурма—Лиувилля понимается следующая задача: найти решения уравнения (3.36), принадлежащие классу $C^{(2)}((a, b))$ и удовлетворяющие некоторым однородным граничным условиям, заданным на концах интервала (a, b) . Примером таких условий могут быть условия

Примером таких условий могут быть условия

$$X|_{x \rightarrow a+0} = 0, \quad X|_{x \rightarrow b-0} = 0.$$

Различают задачи двух типов — *регулярную задачу* и *сингулярную задачу*. Задача Штурма—Лиувилля называется регулярной, если интервал (a, b) конечен, концы интервала (a, b) — обыкновенные точки рассматриваемого уравнения. Задача называется сингулярной, если хотя бы одно из этих условий не выполнено. Сингулярная задача может быть с одним или двумя сингулярными концами. Характер однородных граничных условий регулярной и сингулярной задач разный.

Сформулируем типовые граничные условия. В случае регулярной задачи различают: *граничные условия первого рода*

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0; \quad (I)$$

граничные условия второго рода

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) = 0; \quad (II)$$

граничные условия третьего рода

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \quad X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_a, h_b \geq 0; \quad (III)$$

граничные условия четвертого рода

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b), \quad p(a) = p(b). \quad (IV)$$

Граничные условия четвертого рода называются *условиями периодичности*. Точный смысл сформулированных условий таков:

$$X(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} X(x), \quad X(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} X(x), \quad X'(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} X'(x),$$

и т. д. Поэтому они иногда называются предельными условиями.

Все перечисленные условия — *однородные*.

В случае сингулярной задачи различают два варианта задач в зависимости от того, один или два конца сингулярны. Пусть $x = a$ — сингулярный конец, $x = b$ — регулярный конец. Тогда на сингулярном конце ставится условие ограниченности функции

$$X|_{x \rightarrow a+0} = O(1), \quad (V)$$

а на регулярном конце могут быть условия первого, второго или третьего рода, например,

$$X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_b \geq 0.$$

Если оба конца сингулярны, то ставятся условия ограниченности функции

$$X|_{x \rightarrow a+0} = O(1), \quad X|_{x \rightarrow b-0} = O(1). \quad (VI)$$

Перечисленные условия V и VI также однородны.

Задача Штурма—Лиувилля всегда имеет не представляющее интереса решение $X \equiv 0$, называемое *тривиальным*. Нас будут интересовать *нетривиальные* решения задачи. Однако нетривиальных решений при данном произвольном λ может и не быть. Поэтому содержанием задачи Штурма—Лиувилля является не только отыскание решений при данном λ , но и определение совокупности значений λ , при которых существуют нетривиальные решения. Всякое нетривиальное решение задачи Штурма—Лиувилля называется *собственной функцией* данной задачи. При этом параметр λ должен принимать некоторые определенные значения, которые называются *собственными значениями* (или *числами*) задачи. Собственные функции, по определению, находятся с точностью до произвольной константы. Иногда накладывается условие

$$\int_a^b r(x) |X(x)|^2 dx = 1,$$

тогда мы имеем дело с нормированными собственными функциями. Данному собственному значению могут соответствовать одна или две (не более) собственные функции. Множество всех собственных значений называется *спектром* данной задачи.

Некоторые свойства собственных значений регулярной задачи Штурма—Лиувилля

Рассмотрим регулярную задачу Штурма—Лиувилля с граничными условиями первого, второго, третьего или четвертого рода.

Уравнение Штурма—Лиувилля:

$$[p(x)X'(x)]' + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (3.38)$$

где $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ непрерывны в $[a, b]$; $p(x)$ и $r(x)$ — положительны в $[a, b]$. Граничные условия: либо

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0, \quad (I)$$

либо

$$X'(a) = 0, \quad X'(b) = 0, \quad (II)$$

либо

$$X'(a) - h_a X(a) = 0, \quad X'(b) + h_b X(b) = 0, \quad h_a, h_b \geq 0, \quad (III)$$

либо

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b), \quad p(a) = p(b). \quad (IV)$$

ТЕОРЕМА 1. Все собственные значения регулярной задачи Штурма—Лиувилля вещественны.

ТЕОРЕМА 2. Все собственные значения регулярной задачи Штурма—Лиувилля ограничены снизу.

ТЕОРЕМА 3. Спектр регулярной задачи Штурма - Лиувилля для краевых условий I - III состоит из множества собственных значений, отделенных друг от друга, и не имеет точек сгущения. Каждому собственному значению соответствует одна собственная функция, определенная с точностью до произвольного постоянного множителя.

Такой спектр называется *дискретным*: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ — последовательность собственных значений. Таким образом, спектр регулярной задачи Штурма—Лиувилля — счетное множество вещественных чисел без точек сгущения. Таким образом, можно построить бесконечную последовательность собственных функций $X_1(x), X_2(x), X_3(x), \dots, X_n(x), \dots$

ТЕОРЕМА 4. Система собственных функций регулярной задачи Штурма—Лиувилля для краевых условий I - III ортогональна на $[a, b]$ с весом $r(x)$, то есть

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n\|^2, & m = n. \end{cases} \quad (3.63)$$

Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Будем предполагать, что эта функция удовлетворяет некоторым условиям, которые мы уточним в дальнейшем. Поставим задачу: представить функцию $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x). \quad (3.64)$$

Если предположить, что такое разложение существует и ряд (3.64) сходится так, что он допускает почленное интегрирование, то можно найти коэффициенты разложения C_n . Действительно, умножим (3.64) на $r(x) X_m(x)$ и проинтегрируем по $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) r(x) X_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx.$$

В силу (3.63) будем иметь

$$\int_a^b f(x) r(x) X_m(x) dx = C_m \|X_m(x)\|^2 \Rightarrow$$

$$C_m = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_m(x)dx}{\|X_m(x)\|^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Таким образом, окончательно получаем

$$C_n = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_n(x)dx}{\|X_n(x)\|^2}.$$

Итак, мы формально получили следующее разложение:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x), \quad C_n = \frac{\int_a^b f(x)r(x)X_n(x)dx}{\|X_n(x)\|^2}. \quad (3.65)$$

Для обоснования этого разложения наложим на функцию $f(x)$ определенные условия. Справедлива следующая теорема разложения

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и удовлетворяет там условиям Дирихле:

- 1) $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$;
- 2) $f(x)$ имеет конечное число максимумов и минимумов на $[a, b]$.

Тогда ряд (3.65) сходится к значению функции $f(x)$ во всех точках $x \in [a, b]$, где функция непрерывна. В точке разрыва ряд (3.65) сходится и его сумма равна

$$\frac{f(c+0) + f(c-0)}{2},$$

где $x = c$ — точка разрыва первого рода.

Домашнее задание № 2 Задача Шт.-Л.

- 5) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad x \in [0, l];$
- 6) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad x \in [0, l];$
- 8) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(l) = 0, \quad -y'(0) + hy(0) = 0, \quad x \in [0, l], \quad h > 0;$
- 9) $y'' + \lambda y = 0, \quad -y'(0) + hy(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0, \quad x \in [0, l], \quad h > 0;$

Разложить функцию $f(x)$ по собственным функциям задачи Шт.-Лиувилля

$$f(x)=1-x, \quad l=1, h=1;$$

Примеры

1. Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма-Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

задачи (1.1).

5. Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка $[0, l]$ и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0, \end{cases} \quad h > 0. \quad (5.1)$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) && \text{при } \lambda > 0; \\ X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} && \text{при } \lambda < 0; \\ X(x) &= c_1 x + c_2 && \text{при } \lambda = 0; \end{aligned}$$

- При $\lambda > 0$ из краевого условия $X(0) = 0$ следует, что

$$c_2 = 0, \Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) + h \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1) , и равенство не было бы выполнено)

$$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l)$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма-Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow X(x) = c_1 x \Rightarrow X'(x) = c_1$, и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_1 + c_1 h l = 0$, откуда $c_1 = 0$, и у данной задачи нет нетривиальных решений при $\lambda = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda} l), \quad X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

задачи (5.1).