

# МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Книга рассчитана на специалистов по прикладной математике, механике, физике, радио-, электро-, теплотехнике и других. Ее можно использовать также как учебное пособие при изучении анализа в университетах и высших технических учебных заведениях.

Наряду с кратким изложением теории, ориентированным на практические применения, она содержит большое число примеров и задач из разных областей математики и ее приложений.

В четвертом издании исправлены неточности и опечатки, а также по-новому изложены некоторые разделы.

## Содержание

Из предисловия к первому изданию	6
Из предисловия ко второму изданию	7
Предисловие к четвертому изданию	8
<b>Глава I. Основные понятия</b>	<b>9</b>
§ 1. Комплексные числа	10
1. Комплексные числа (10). 2. Геометрическая иллюстрация (12).	
§ 2. Функции комплексного переменного	16
3. Геометрические понятия (16). 4. Функции комплексного переменного (17). 5. Дифференцируемость и аналитичность (19).	
§ 3. Элементарные функции	24
6. Функции $w = z^n$ и $w = z^{1/n}$ (24). 7. Функция Жуковского $w = (z+1/z)/2$ (29). 8. Показательная функция и логарифм (32). 9. Тригонометрические и гиперболические функции (36). 10. Общая степенная функция $w = z^a$ (42).	
§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного	43
11. Интеграл от функции комплексного переменного (43). 12. Теорема Коши (45). 13. Распространение на многосвязные области (51). 14. Формула Коши и теорема о среднем (54). 15. Принцип максимума и лемма Шварца (56). 16. Равномерная сходимость (58). 17. Высшие производные (63).	
§ 5. Представление аналитических функций рядами	65
18. Ряды Тейлора (66). 19. Степенные ряды (68). 20. Теорема единственности (72). 21. Ряды Лорана (74). 22. Особые точки (78). 23. Теорема о вычетах. Принцип аргумента (84). 24. Бесконечно удаленная точка (90). 25. Аналитическое продолжение. Обобщение понятия аналитической функции (93). 26. Римановы поверхности (99).	
Литература к главе I	104
<b>Глава II. Конформные отображения</b>	<b>105</b>
§ 1. Общие положения. Примеры	105
27. Понятие конформного отображения (106). 28. Основная задача (112). 29. Соответствие границ (115). 30. Примеры (122).	

§ 2. Простейшие конформные отображения	128
31. Дробно-линейные отображения (128). 32. Частные случаи (135). 33. Примеры (140). 34. Отображения круговых луночек (148).	
§ 3. Принцип симметрии и отображение многоугольников	158
35. Принцип симметрии (158). 36. Примеры (164). 37. Отображение многоугольников (170). 38. Дополнительные замечания (176). 39. Примеры (183). 40. Скругление углов (192).	
Литература к главе II	197
<b>Глава III. Краевые задачи теории функций и их приложения</b>	<b>198</b>
§ 1. Гармонические функции	199
41. Свойства гармонических функций (200). 42. Свойства гармонических функций (продолжение) (209). 43. Задача Дирихле (215). 44. Примеры. Дополнения (223). 45. Метод сеток (232).	
§ 2. Физические представления. Постановка краевых задач	235
46. Плоское поле и комплексный потенциал (235). 47. Физические представления (245). 48. Краевые задачи (254). 49. Примеры. Приложения (261). 50. Плоская задача теории упругости (272). 51. Краевые задачи теории упругости (279).	
§ 3. Интеграл типа Коши и краевые задачи	286
52. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого (286). 53. Краевая задача Гильберта — Привалова (296). 54. Формула Келдыша — Седова (304). 55. Другие краевые задачи (310).	
§ 4. Приложения	315
56. Уравнения с частными производными (315). 57. Задачи гидродинамики и газовой динамики (330). 58. Теория кумулятивного заряда (339). 59. Задачи теории упругости (349).	
Литература к главе III	357
<b>Глава IV. Вариационные принципы конформных отображений</b>	<b>358</b>
§ 1. Основные вариационные принципы	358
60. Основной вариационный принцип (358). 61. Распространение принципа (365). 62. Граничные производные (370).	
§ 2. Отображения близких областей	375
63. Области, близкие к кругу (375). 64. Области, близкие к данной (382). 65. Распространение результатов (385).	
§ 3. Приложения	393
66. Пересчет подъемной силы (393). 67. Волны в тяжелой жидкости (398). 68. Обтекание со срывом струй (404). 69. Движение грунтовых вод (406).	
Литература к главе IV	414
<b>Глава V. Приложения теории функций к анализу</b>	<b>415</b>
§ 1. Разложение в ряды и бесконечные произведения	415
70. Ряды Тейлора и Лорана (415). 71. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (425). 72. Разложение целых функций	

в бесконечные произведения (431).	
§ 2. Приложения теории вычетов	438
73. Вычисление интегралов (438). 74. Вычисление интегралов (продолжение) (447). 75. Подсчет числа нулей. Вопросы устойчивости (454).	
§ 3. Методы асимптотических оценок	470
76. Асимптотические разложения (470). 77. Метод перевала (477). 78. Метод производящих функций (486).	
Литература к главе V	491
<b>Глава VI. Операционный метод и его приложения</b>	<b>492</b>
§ 1. Основные понятия и методы	494
79. Преобразование Лапласа (494). 80. Свойство преобразования Лапласа (504). 81. Теоремы умножения (509). 82. Теоремы разложения (515). 83. Примеры. Дополнения (520).	
§ 2. Приложения	541
84. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы (541). 85. Расчет электрических контуров (548). 86. Уравнения с частными производными (557). 87. Расчет длинных линий (568). 88. Другие интегральные преобразования (574).	
Литература к главе VI	587
<b>Глава VII. Специальные функции</b>	<b>588</b>
§ 1. Гамма-функция Эйлера	588
89. Определение и основные свойства (588). 90. Примеры. Дополнения (598).	
§ 2. Ортогональные многочлены	604
91. Ортогональные системы функций (604). 92. Ортогональные многочлены* (610). 93. Выражение через вес. Производящие функции (616). 94. Примеры. Приложения (624).	
§ 3. Цилиндрические функции	637
95. Цилиндрические функции первого рода (638). 96. Другие цилиндрические функции (648). 97. Асимптотические выражения для цилиндрических функций (657). 98. Графики цилиндрических функций. Распределение нулей (664). 99. Примеры. Приложения (670).	
§ 4. Эллиптические функции	682
100. Периодические функции (682). 101. Общие свойства эллиптических функций (688). 102. Эллиптические интегралы и функции Якоби (694). 103. Функции Вейерштрасса. Тэта-функции (703). 104. Примеры. Приложения (715).	
Литература к главе VII	727
<b>Предметный указатель</b>	<b>728</b>
Предметный указатель	
Абель Н. 70	Абеля теоремы 70, 684

- Автоморфизмы верхней полуплоскости 140
- единичного круга 139
- Адиабатности условие 334
- Амплитуда эллиптического интеграла 695
- Аналитическая дуга 162
- функция 38, 97
- — полная 97
- Аналитическое продолжение 93, 95, 163
- — гармонической функции 214
- — непосредственное 53, 94
- Аналитичность в  $\inf$  92
- Аргумент комплексного числа 13
- производной 111
- Аргумента принцип 88
- Арккосинус 41
- Арккотангенс 42
- Арксинус 42
- Арктангенс 42
- Асимптотическое выражение второй ханкелевой функции 659
- — гамма-функции 452, 598
- — многочленов Лежандра 488, 627
- — первой ханкелевой функции 659
- — функций Бесселя 486
- — Вебера 660
- разложение 471
- — обобщенное 475
- $\alpha$ -точка 90
- Ахиезера — Голузина формула 723
- Безциркулярное обтекание 256
- Берпулли Д. 676
- задача 676
- — интеграл 334
- теорема 399
- Берпулли — Эйлера формула 247
- Бесконечно удаленная точка 90
- Бесконечное произведение 432 и ел.
- Беселевы функции 548, 637—674
- Бесселя интеграл 419
- Бета-функция Эйлера 586, 598
- —, аналитическое продолжение 599
- Бигармоническая функция 276
- —, комплексное представление 277
- Биномиальный ряд 487
- Буняковского неравенство 605
- Бурмана — Лагранжа ряд 422
- Вариационный принцип 359
- Вариация граничной производной 385
- отображения 384
- подъемной силы 393—397
- Вебера функции 652
- Вейерштрасс К. 10
- Вейерштрасса теоремы 68, 69, 436, 437
- функции 703, 709
- Вектор потока тепла 249
- Векторное поле 235
- — безвихревое 238
- — потенциальное 238
- Векторное поле соленоидальное 237
- — стационарное, плоскопараллельное 235
- Ветвь 27, 31, 35
- Вихревая точка 238
- Вихреисточник 242
- Вихрь поля 238, 241
- Волна длинная 401
- малой амплитуды 401
- уединенная 403
- Волновое уравнение 634
- Волны период 401
- Вторая краевая задача 229
- Вычет функции 84
- — в полюсе 84
- — —  $\inf$  92
- — логарифмический 86
- Вышнеградского — Найквиста метод 464



- Гамма-функция 453, 591  
— —, аналитическое представление 453  
— —, асимптотическая формула 452, 598  
— —, интегральные представления 453, 454, 595, 598  
— —, свойства 591—598  
— —, формулы Эйлера 595, 604  
— —, функциональное уравнение 592  
— —, — — второе 593  
— —, — — третье 603  
Гармоническая функция 199  
— —.аналитическое продолжение 214  
— — многозначная 202  
— —, сопряженная 200  
Гаусс К. Ф. 105  
Гахова теоремы 300, 303  
Гёльдера условие 117, 288  
Гильберт Д. 296  
Гильберта — Привалова краевая задача 296  
Гиперболические функции 41  
Гипергеометрический ряд 634  
Гипергеометрическое уравнение 634  
Главное значение интеграла 289  
Годограф частотный 461  
Годографа плоскость 337  
— уравнение 338  
Голоморфная функция 23  
Граница области 16  
Граничная задача 255  
— теорема единственности 212  
— точка 16, 57  
— функция 115  
Граничное значение 211  
Грин Дж. 221  
Грина формула 221  
— функция 221  
Грунтовые воды 406  
Гука закон 274  
Гурвиц А. 457  
Гурвица критерий 457  
Даламбер Ж. 9  
Даламбера — Эйлера условия 16  
Дарбу метод 486  
Дарси закон 407  
Движение грунтовых вод 406  
— жидкости под действием силы тяжести 576  
Двойной слой 243  
Деление степенных рядов 420  
Деформация 273  
— контура 359  
Дзета-функция Вейерштрасса 709  
Дивергенция 236  
Диполь 242  
— точечный 242  
Дирихле Л. 215  
— задача 215  
— — для круга 219  
— — — полуплоскости 224  
— — обобщенная 215  
— —.формула для решения 221  
Дифференциальные уравнения смешанного типа 326  
Дифференцирование изображения 505  
— оригинала 504  
Длинная волна 401  
Дополнительный модуль 697  
Дробно-линейные отображения 128  
Дроссельный фильтр 555  
Дуга аналитическая 162  
— Ляпунова 116  
Дюамеля интеграл 510  
 $\delta$ -функция 529  
Единичная функция 495  
Естественная граница функции 97  
Жордаиа лемма 439  
Жуковский Н.Е. 24  
Жуковского профили 150, 264  
— теорема 261  
— формула 261  
— функция 24, 29, 30

- Задача Дирихле 215
- — обобщенная 215
- —, теорема единственности 216
- —, формула для решения 221
- наклонной производной 311, 312
- Неймана 229
- Трикоми 326
- о штампе 355
- Эйлера 678
- Закон Гука 274
- Дарси 407
- Извлечение корня из комплексных чисел 12
- Изображение дробных степеней 522
- интегралов Френеля 524т
- функции (по Лапласу) 495, 536
- Изолированная особая точка 78, 98
- Изотермическая линия 249
- Изотропное тело 274
- Иээнтропичн ости условие 334
- Импеданц 548
- Импульсные функции 529, 531, 532
- Инверсия 15, 131
- Интеграл Бернулли 334
- Бесселя 419
- вероятности ошибок 473
- , главное значение 289
- Дюамеля 510
- Лапласа 441, 496
- Лежандра 445
- Липшица 671
- несобственный 61
- особый 289
- от функции комплексного переменного 43
- псевдоэллиптический 694
- —, модулярный угол 695
- — полный 695\
- Пуассона 219, 224, 416, 444
- Раабе 602
- Сони́на 639, 640, 673, 674
- Сони́на — Шлефли 640
- , сходящийся равномерно 62
- типа Коши 287
- Френеля 447
- Шварца 223
- — для полосы 227
- — — полуплоскости 224
- Шварца — Кристоффеля 175, 226
- Шлефли 641
- Эйлера 417, 442, 443, 446
- эллиптический 184, 600, 694
- —, амплитуда 695
- —, модуль 695
- — полный 600
- Интегральная показательная функция 473
- Интегральное преобразование 489
- Интегральный косинус 417
- синус 417
- Интегрирование изображения 506
- оригинала 506
- Интенсивность вихря 241
- источника 240
- Источник поля 237
- Кабель 569
- Карлеман Т. 316
- Карлемана система 316
- Квадруполь 246
- Квазиконформное отображение 321
- Келдыша — Седова теорема 304
- — формула 306, 309
- Келлога теорема 117
- Колосов Г. В. 198
- Колосова формула 278
- Комплексная плоскость открытая 91
- — полная 91
- Комплексное представление напряжения 278
- — смещения 278
- Комплексные числа 10
- — в показательной форме 33
- —, геометрическое изображение 13
- Комплексный потенциал 239, 249, 252, 253

- Компоненты смещения 274
- Конденсатор Роговского 267
- Контур звездный 49
- кусочно-гладкий 17
- Конформное отображение 109
- — верхней полуплоскости на себя 140
- — — — — единичный круг 137
- — — — — прямоугольник 183
- — — — — с исключенными отрезками на верхнюю полуплоскость 166
- — — — — внешности дуги на внешность круга 148
- — — — — круга с исключенными отрезками па внешность круга 165
- — — — — креста на внешность круга 164
- — — — — второго рода 109
- — — — — единичного круга на внешность «звезды» 123, 124
- — — — — на себя 139
- — — — — круга на внешность пятиугольной звезды 191
- — — — — плоскость с исключенными лучами 123
- — — — — с выброшенной луночкой на круг 152
- — — — — с выброшенным отрезком радиуса на круг 143
- — — — —.круговое свойство 109
- — — — — многоугольников 170, 724
- — — — — областей, ограниченных кривыми второго порядка 168
- — — — —.основная задача 112
- — — — — плоскости с выброшенными лучами па полосу 144
- — — — — с исключенными отрезками на плоскость с исключенными отрезками 168
- — — — — полосы на единичный круг 140
- — — — — с выброшенной луночкой на полосу 153
- — — — — с вырезом на полосу 145
- — — — — с горизонтальным вырезом 185
- — — — — полуплоскости с выброшенным отрезком на полуплоскость 142
- Конформное отображение полуплоскости с выброшенным сегментом на полуплоскость 150
- — — — —, принцип соответствия границ 117
- — — — —, свойство сохранения углов 109
- — — — —, теорема единственности 160
- — — — — эксцентричного кругового кольца на концентрическое 147
- Конформность в  $\inf$  118
- Косинус амплитуды 699
- — — — — интегральный 417
- Коши О. 10
- Коши — Адамара формула 71
- — — — — неравенство 64, 77
- Коши — Римана условия 16, 21
- — — — — в полярных координатах 24
- — — — — обобщенные 23
- — — — — теорема 45, 49, 426
- — — — — для многосвязных областей 54
- — — — — о вычетах 85
- — — — — обобщенная 49
- — — — — формула 54, 294
- Коэффициент распространения волны 568
- — — — —, усиления 462
- — — — — фильтрации 407
- Краевая задача 255
- — — — — Гильберта — Привалова 296
- — — — — Римана — Гильберта 310
- — — — — смешанная 260
- — — — — теории упругости 279
- Краевые задачи на обтекание 255—265
- — — — — условия 215

- Кратность точки 17
- Кривая кусочно-гладкая 17
  - простая 52
- Кристоффель Э. 175
- Критерий (метод) Вышнеградского
  - Найквиста 464
- Гурвица 457
- Найквиста — Михайлова 463
- устойчивости 461
- Критические точки потока 247
- Кумулятивный эффект 339 и ел.
- Лагранжа формула 401
- Лаплас П. 494
- Лапласа интеграл 441, 496
  - метод 477
  - преобразование 494
  - — двустороннее 578
  - —, свойства 504—512
  - уравнение 199
  - формулы обращения 499
- Лежандра интеграл 445
  - многочлены 418, 613
  - формула 602
- Лемма Жордана 439
  - Шварца 57
- Линделёфа принцип 359
- Линейные эллиптические системы 319
  - эллиптические системы 319
- Линия изотермическая 249
  - наибольшего ската 484
  - тока 237
  - уровня 205, 359
- Липшица интеграл 671
- Лиувилль Ж. 64
- Лиувилля теорема 64, 92
- Логарифм комплексного числа 35
- Логарифмическая производная 87
  - функция 34
- Логарифмический вычет 86
- Локальная вариация 384
- Лоран П. 77
- Лорана ряд 74
  - теорема 77
- Магнитное поле в зазоре
  - электрической машины 267
- — тока 253
- Маклорен К. 67
- Массовые силы 273
- Меллина преобразование 489, 578
  - формула обращения 578
- Мероморфные функции 83, 425
- Метод аналогий 234
  - Вышнеградского — Найквиста 464
  - Дарбу 486
  - интегральных преобразований 489
  - итераций 233
  - Лапласа 477
  - операционный 492 и ел.
  - перевала 477 и ел.
  - последовательного отображения 412
  - производящих функций 486
  - сеток 232
  - фрагментов 409
  - Чаплыгина 337
  - Янсена — Рэлея 335
- Миттаг-Леффлер М. 429
- Миттаг-Леффлера теорема 429
  - — — обратная 429
- Мнимая единица 10
- Многочлены Лежандра 418, 613
  - —, асимптотические формулы 627
  - —, интегральные представления 626
  - —, рекуррентные формулы 625
  - ортогональные 610—636
- Многочлены Чебышева 418, 613
  - —, экстремальное свойство 633
  - Чебышева — Лагерра 614
  - Чебышева — Эрмита 614
  - Якоби 614
- Модуль дополнительный 697
  - комплексного числа 13
  - производной 111

- эллиптического интеграла 695
- Модулярный угол 695
- Момент диполя 242
- квадруполь 246
- Монтеля принцип 363
- Морера Г. 65
- Мореры теорема 65
- Мультиполь 247
- Напряжение 273
- касательное 273
- , комплексное представление 278
- нормальное 273
- операторное 548
- Нейман К. 229
- Неймана задача 229
- Неопределенный интеграл 48
- Непрерывность функции 20
- — равномерная 20
- Неравенство Буняковского 605
- Коши 64, 77
- Несобственный интеграл 61
- Норма 604
- Нормированная система функций 605
- Носитель обобщенной функции 533
- Нуль, порядок 73
- функции 73
- Область 16
- замкнутая 16
- звездная 359
- многосвязная 17
- ограниченная 17
- односвязная 17
- существования аналитической функции 97
- сходимости ряда 71, 77
- Обобщенная задача Дирихле 213
- теорема Коши 49
- функция класса  $A^*$  532
- — класса  $B^*$  536
- Обобщенный оригинал 536
- принцип экстремума 211
- ряд степенной 99
- — Фурье 604

- Обращение контурного интеграла 583
- степенных рядов 424
- Обтекание кругового цилиндра 261
- отрезка 269
- произвольного профиля 263
- профилей Жуковского 264
- со срывом струй 260
- тел газовыми потоками 333
- Общая показательная функция 43
- степенная функция 42
- Окрестность 16
- бесконечно удаленной точки 91
- Операторная система уравнений 545
- Операторное «напряжение» 548
- решение 541
- «сопротивление» 548
- уравнение 541
- Операторный «закон Ома» 548
- метод расчета электрических контуров 548
- — решения дифференциальных уравнений 557
- «ток» 548
- Операционный метод 492 и сл.
- —, предельные соотношения 521
- —, свойства 504—512
- —, теоремы разложения 515
- Оригинал-функция 494
- — особый 523
- Ортогональное преобразование 109
- Ортогональности условия 109
- Ортогональные многочлены 610
- системы функций 605
- — —, единственность 609
- — —, нормировка 605
- — — с весом 609
- Основная теорема алгебры 455
- Основной вариационный принцип 359
- Основные функции 532
- —, сходимость 532

- Особая точка 98
- — ветвления, алгебраическая 98
- — — конечного порядка 98
- — — трансцендентная 99
- — гармонической функции 205, 210
- — изолированная 78, 98
- — — в бесконечности 91
- — многозначного характера 98
- — однозначного характера 98
- — существенно особая 78, 210
- — устранимая 78, 210
- Остроградский М. В. 280
- Ось действительная 12
- мнимая 12
- Отображение 18,
- дробно-линейное 129
- квазиконформное 321
- Отображение конформное 109
- однолистное (взаимно однозначное) 18
- суперпозиция 18
- Отображения, главная линейная часть 105
- Палатини формула 227
- Параллелограмм периодов 688
- Первообразная 48
- Перевода метод 477
- Период волны 401
- интеграла 53, 201
- функции 683
- — основной 685
- Периодические функции 682
- —, полосы периодов 686
- Плоскость годографа 537
- Поверхность модуля 38
- Подъемная сила крыла самолета 248, 393
- Показатель роста 494
- Показательная форма комплексного числа 33
- функция 32
- Поле векторное 235
- — безвихревое 238
- —, вихрь или ротор 238
- —, дивергенция или расхождение 236
- — соленоидальное 237
- магнитное 253
- скоростей 245
- — стационарное
- — плоскопараллельное 235
- — течения жидкости 245
- тепловое 248
- электростатическое 251, 265
- Полная аналитическая функция 97
- Полный эллиптический интеграл 600
- Положительное направление обхода 17
- Полосной фильтр 556
- Полюс 78, 210
- Порядок нуля 73
- полюса 80
- $a$ -точки 90
- связности 17
- целой функции 437
- Постоянная Эйлера 592
- Потенциал 200
- двойного поля 244
- поля 239, 251
- — комплексный 239
- — плоского диска 584
- простого слоя 243
- Потенциальная функция поля 239
- Поток адиабатный 334
- векторного поля 236
- Правило дробных показателей 526
- Правильная система контуров 426
- Предельные соотношения
- преобразований Лапласа 521
- Преобразование Лапласа 489, 499
- — двустороннее 578
- Меллина 489, 578
- Фурье 574, 575
- Ханкеля 581
- Привалов И. И. 296

Принцип аналитического  
продолжения 163  
— — — для гармонической функции  
214  
— аргумента 88  
— Линделёфа 359  
— локализации 388  
— максимума модуля 56  
— Монтеля 363  
— непрерывного продолжения 93  
— отвердевания 251  
— симметрии 158, 213  
— соответствия границ 117  
— экстремума 204  
— — обобщенный 211  
Проблема Рауса — Гурвица 456  
Произведение комплексных чисел 11  
Производная обобщенной функции  
534  
— функции 21  
— —, геометрическая интерпретация  
111  
— — обратной 23  
Производные высших порядков 63  
Производящие функции 486, 614  
Профили Жуковского 150  
— —, обтекание 264  
Пуассон С. 219  
Пуассона интеграл 219, 224, 416, 444  
Раабе интеграл 602  
Равномерная непрерывность  
функции 20  
— сходимости 58  
— — интеграла 62  
— — последовательности функций  
58  
— — ряда 60  
Радиус сходимости степенного ряда  
71  
Распределение температур в канале  
369  
Рауса — Гурвица проблема 456  
Регулярная функция 23

Риман Б. 10  
Римана — Гильберта краевая задача  
310  
— теорема 113  
Риманова поверхность 100  
— — арксинуса 102  
— — корня 101  
— — логарифма 102  
— — функции, обратной к функции  
Жуковского 102  
Ротор поля 238  
Руше теорема 454  
Ряд биномиальный 487  
— Бурмана — Лагранжа 422  
— Лорана 74, 415  
— степенной 70  
— Тейлора 67, 415  
— тригонометрический 422  
— функциональный 58  
— — равномерно сходящийся 60  
— Фурье 420  
— Фурье — Бесселя 648  
Свертка 510  
Свертывание оригиналов 510  
Седловая точка 483  
Сигма-функция Вейерштрасса 710  
Силовая функция 252  
Силы массовые 273  
— поверхностные 273  
Симметрия относительно  
окружности 15, 131  
Синус 36  
— амплитуды 699  
— интегральный 417, 442  
— эллиптический 184, 694, 696  
Система Карлемана 316  
— с простой обратной связью 462  
Скругление углов 192  
Смешанные задачи для  
гармонических функций 313  
Сонина интеграл 639, 673  
— формула 673  
Сонина — Шлеффли интеграл 640

- Сопряженные гармонические функции 200
- комплексные числа 10
- Сохоцкий Ю. В. 81
- Сохоцкого теорема 81, 291
- формула 291
- Спектральная функция 576
- Степенная функция общая 42
- Степенной ряд 70
- — обобщенный 99
- —, обращение 424
- —, радиус сходимости 71
- Степенной ряд, теорема единственности 72
- Степень комплексного числа 12
- Стереографическая проекция 90
- Стерлинга формула 482, 598
- Стодолы условие 461
- Сток 237
- Суперпозиция отображений 18
- Существенно особая точка 78, 210
- Сферические функции 631
- Таблица оригиналов и их изображений 538—540
- Тейлора ряд 67, 415
- —, коэффициенты 415
- —, равномерная сходимость 67
- формула 67
- Тейлоровские разложения элементарных функций 68
- Теорема Абеля 70, 684
- Бернулли 399
- Вейерштрасса 68, 69, 436, 437
- Гахова 300, 303
- Гурвица 457
- единственности 73, 211
- — граничная 212
- — разложений в ряд 72, 78
- Жуковского 261
- запаздывания 507
- Каратеодори 116
- Келдыша — Седова 304
- Келлога 117
- Коши 45, 49, 420
- — для многосвязных областей 54
- — обобщенная 49, 323
- Коши — Лиувилля 64, 92
- — — обобщенная 115
- Лорана 77
- Миттаг-Леффлера 429
- — — обратная 429
- Мореры 65
- о вычетах 85, 92
- — соответствии границ 115
- — среднем 56, 204
- — — обратная 206
- об ортогонализации 607
- подобия 504
- разложения 515, 517
- Римана 113
- Римана—Шварца 158
- Руше 319, 454
- сложения для бесселевых функций 670
- — — показательной функции 32
- смещения 502
- Сохоцкого 81, 291
- Теорема умножения 509
- — двойственная 511
- — обобщенная 512
- Шварца 537
- Шварца — Кристоффеля 175
- Эфроса 512
- Тейлор Б. 67
- Тейлора ряд 67
- формула 67
- Теория пробивания 347
- Тепловое поле 248
- Тока линия 237
- трубка 237
- функция 237, 332
- Тонкое сопло 330
- Точка бесконечно удаленная 90
- ветвления 98
- — алгебраическая 98
- — конечного порядка 98



- — логарифмическая 99
- — трансцендентная 99
- граничная 16
- исключительная 468
- кратная 17, 206
- критическая 247
- наибольшей деформации 359, 368
- особая изолированная 78, 98
- — устранимая 78, 210
- перевала 483
- простая 17, 206
- разветвления потока 263
- седловая 483
- схода потока 263
- Точки, симметричные относительно окружности 130
- Тригонометрические функции 36, 39
- — обратные 41
- Трикоми Ф. 326
- задача 326
- Трубка тока 237
- Тэта-функция Якоби 712
- Угол в бесконечно удаленной точке 133
- модулярный 695
- Удар пластинки о воду 270
- Ударные задачи 259
- Уединенная волна 403
- Упругость, основные уравнения 273—279
- Уравнение Лапласа 199
- неразрывности 333
- цилиндрических функций 547
- Уравнения газовой динамики 334
- годографа 338
- Уравнения движения 334
- равновесия 273
- с частными производными 315
- Условия Гёльдера 117, 288
- Даламбера — Эйлера 21
- изэнтропичности 334
- Коши — Римана 16, 21
- ортогональности 109
- Стодолы 461
- Чаплыгина 263
- эллиптичности 320
- Установившийся режим 520
- Устойчивости критерий 461
- Устранимая особая точка 78, 210
- Фильтр 554
- дроссельный 555
- полосной 556
- Флютбет 407
- Формула Бернулли — Эйлера 247
- Ахиезера — Голузина 723
- Грина 221
- Дюамелп 511
- Жуковского 261
- Колосова 278
- Келдыша — Седова 306, 309
- Коши 54
- — для неограниченных областей 294
- — — производных 63
- —, обобщение 325
- Коши — Адамара 70
- обращения Лапласа 499
- — Меллина 578
- —
- Фурье 575
- — Ханкеля 582
- Остроградского 280
- Палатини 227
- представления 317
- Римана — Грина 238
- Сонины 673
- Сохоцкого 291
- Стирлинга 282, 598
- Тейлора 67
- Чаплыгина 248
- Чизотти 228
- Фока 663
- Фурье — Бесселя 582
- — — обобщенная 607
- Шварца — Кристоффеля 175, 178, 179

- Эйлера 33, 595
- Функции гиперболические 41
- — обратные 41
- тригонометрические 36, 39
- — обратные 41
- Функции ортогональные 605
- — с весом 609
- Функция аналитическая 23, 97
- — полная 97
- Бесселя 419, 637
- бета Эйлера 586, 598
- бигармоническая 276
- Вебера 652
- Вейерштрасса 703, 709
- вероятности ошибок 416, 473
- гамма Эйлера 453, 591
- гармоническая 199—215
- голоморфная 23, 83
- граничная 115
- Грина 221
- двоякопериодическая 685
- дифференцируемая 21
- дробная 83, 425
- единичная 495
- Жуковского 24, 29
- —, обратная 30
- изображение (по Лапласу) 495, 536
- импульсная 529
- — нулевого порядка 529
- — первого порядка 531
- конечного порядка 437
- Лежандра 629
- — второго рода 631
- — первого рода 630
- присоединенная 633
- линейная 18
- логарифмическая 34
- мероморфная 83, 425
- напряжения 275
- Неймана 652
- непрерывная 20
- — равномерно 20
- обратная 18
- общая степенная 42
- ограниченная 20
- периодическая 682
- показательная 32, 43
- потенциальная 239
- производящая 486
- просто периодическая 682
- регулярная 23
- силовая 252
- сложная 18
- спектральная 576
- сферическая 631
- тока 237
- Функция тока тепла 249
- тригонометрическая 36, 39
- целая 83
- цилиндрическая 419, 485, 637
- Чебышева — Эрмита 634
- — Ханкеля 650
- Функция эллиптическая 184, 688
- —, свойства 688—692
- Якоби 184, 712
- Фурье преобразование 574
- формула обращения 575
- Ханкеля преобразование 581
- формула обращения 582
- функция 650
- Характеристическое сопротивление
- линии 569
- Хевисайда метод 492, 495
- Циклическая постоянная 53, 201
- Цилиндрические функции 485, 637
- —, асимптотические формулы 486, 660
- —, интегральное представление 639
- —, разложение в ряд 641
- —, рекуррентные соотношения 643
- Циркуляция поля 238
- Чаплыгин С. А. 198
- Чаплыгина метод 337
- условие 263

- Чаплыгина формула 248
- Чебышев П. Л. 418
- Чебышева многочлены 418, 613
- Чебышева — Эрмита функция 634
- Чизотти формула 228
- Шварц Г. 57
- Шварца задача 223
  - интеграл 223
  - Кристоффеля интеграл 175, 179
  - лемма 57
- Шварц Л. 537
- Шварца теорема 537
- Эйлер Л. 9
- Эйлера задача 678
  - постоянная 592
  - формулы 33, 595
- Экстремум, обобщенный принцип 211
- Электростатическое поле 251
  - — у краев плоского конденсатора 265
- Эллиптические функции 688
  - — Вейерштрасса 703, 709, 710
  - — Якоби 184, 696, 699
- Эллиптический интеграл 184, 694
  - — полный 600
  - синус 184, 694, 696

# Оглавление

Из предисловия к первому изданию . . . . .	6
Из предисловия ко второму изданию . . . . .	7
Предисловие к четвертому изданию . . . . .	8
<b>Глава I. Основные понятия</b> . . . . .	9
§ 1. Комплексные числа . . . . .	10
1. Комплексные числа (10). 2. Геометрическая иллюстрация (12).	
§ 2. Функции комплексного переменного . . . . .	16
3. Геометрические понятия (16). 4. Функции комплексного переменного (17). 5. Дифференцируемость и аналитичность (19).	
§ 3. Элементарные функции . . . . .	24
6. Функции $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$ (24). 7. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ (29). 8. Показательная функция и логарифм (32).	
9. Тригонометрические и гиперболические функции (36). 10. Общая степенная функция $w = z^a$ (42).	
§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного . . . . .	43
11. Интеграл от функции комплексного переменного (43). 12. Теорема Коши (45). 13. Распространение на многосвязные области (51). 14. Формула Коши и теорема о среднем (54). 15. Принцип максимума и лемма Шварца (56). 16. Равномерная сходимость (58). 17. Высшие производные (63).	
§ 5. Представление аналитических функций рядами . . . . .	65
18. Ряды Тейлора (66). 19. Степенные ряды (68). 20. Теорема единственности (72). 21. Ряды Лорана (74). 22. Особые точки (78). 23. Теорема о вычетах. Принцип аргумента (84). 24. Бесконечно удаленная точка (90). 25. Аналитическое продолжение. Обобщение понятия аналитической функции (93). 26. Римановы поверхности (99).	
Литература к главе I . . . . .	104
<b>Глава II. Конформные отображения</b> . . . . .	105
§ 1. Общие положения. Примеры . . . . .	105
27. Понятие конформного отображения (106). 28. Основная задача (112). 29. Соответствие границ (115). 30. Примеры (122).	
§ 2. Простейшие конформные отображения . . . . .	128
31. Дробно-линейные отображения (128). 32. Частные случаи (135). 33. Примеры (140). 34. Отображения круговых луночек (148).	
§ 3. Принцип симметрии и отображение многоугольников . . . . .	158
35. Принцип симметрии (158). 36. Примеры (164). 37. Отображение многоугольников (170). 38. Дополнительные замечания (176). 39. Примеры (183). 40. Скругление углов (192).	
Литература к главе II . . . . .	197

<b>Глава III. Краевые задачи теории функций и их приложения . . . . .</b>	<b>198</b>
§ 1. Гармонические функции . . . . .	199
41. Свойства гармонических функций (200). 42. Свойства гармонических функций (продолжение) (209). 43. Задача Дирихле (215). 44. Примеры. Дополнения (223). 45. Метод сеток (232).	
§ 2. Физические представления. Постановка краевых задач . . . . .	235
46. Плоское поле и комплексный потенциал (235). 47. Физические представления (245). 48. Краевые задачи (254). 49. Примеры. Приложения (261). 50. Плоская задача теории упругости (272). 51. Краевые задачи теории упругости (279).	
§ 3. Интеграл типа Коши и краевые задачи . . . . .	286
52. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого (286). 53. Краевая задача Гильберта — Привалова (296). 54. Формула Келдыша — Седова (304). 55. Другие краевые задачи (310).	
§ 4. Приложения . . . . .	315
56. Уравнения с частными производными (315). 57. Задачи гидродинамики и газовой динамики (330). 58. Теория кумулятивного заряда (339). 59. Задачи теории упругости (349).	
Литература к главе III . . . . .	357
<b>Глава IV. Вариационные принципы конформных отображений . . . . .</b>	<b>358</b>
§ 1. Основные вариационные принципы . . . . .	358
60. Основной вариационный принцип (358). 61. Распространение принципа (365). 62. Граничные производные (370).	
§ 2. Отображения близких областей . . . . .	375
63. Области, близкие к кругу (375). 64. Области, близкие к данной (382). 65. Распространение результатов (385).	
§ 3. Приложения . . . . .	393
66. Пересчет подъемной силы (393). 67. Волны в тяжелой жидкости (398). 68. Обтекание со срывом струй (404). 69. Движение грунтовых вод (406).	
Литература к главе IV . . . . .	414
<b>Глава V. Приложения теории функций к анализу . . . . .</b>	<b>415</b>
§ 1. Разложение в ряды и бесконечные произведения . . . . .	415
70. Ряды Тейлора и Лорана (415). 71. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби (425). 72. Разложение целых функций в бесконечные произведения (431).	
§ 2. Приложения теории вычетов . . . . .	438
73. Вычисление интегралов (438). 74. Вычисление интегралов (продолжение) (447). 75. Подсчет числа нулей. Вопросы устойчивости (454).	
§ 3. Методы асимптотических оценок . . . . .	470
76. Асимптотические разложения (470). 77. Метод перевала (477). 78. Метод производящих функций (486).	
Литература к главе V . . . . .	491
<b>Глава VI. Операционный метод и его приложения . . . . .</b>	<b>492</b>
§ 1. Основные понятия и методы . . . . .	494
79. Преобразование Лапласа (494). 80. Свойство преобразования Лапласа (504). 81. Теоремы умножения (509). 82. Теоремы разложения (515). 83. Примеры. Дополнения (520).	
§ 2. Приложения . . . . .	541
84. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы (541). 85. Расчет электрических контуров (548). 86. Уравнения с ча-	

стными производными (557). 87. Расчет длинных линий (568). 88. Другие интегральные преобразования (574).	
Литература к главе VI . . . . .	587
<b>Глава VII. Специальные функции</b> . . . . .	<b>588</b>
§ 1. Гамма-функция Эйлера . . . . .	588
89. Определение и основные свойства (588). 90. Примеры. Дополнения (598).	
§ 2. Ортогональные многочлены . . . . .	604
91. Ортогональные системы функций (604). 92. Ортогональные многочлены (610). 93. Выражение через вес. Производящие функции (616). 94. Примеры. Приложения (624).	
§ 3. Цилиндрические функции . . . . .	637
95. Цилиндрические функции первого рода (638). 96. Другие цилиндрические функции (648). 97. Асимптотические выражения для цилиндрических функций (657). 98. Графики цилиндрических функций. Распределение нулей (664). 99. Примеры. Приложения (670).	
§ 4. Эллиптические функции . . . . .	682
100. Периодические функции (682). 101. Общие свойства эллиптических функций (688). 102. Эллиптические интегралы и функции Якоби (694). 103. Функции Вейерштрасса. Тэта-функции (703). 104. Примеры. Приложения (715).	
Литература к главе VII . . . . .	727
Предметный указатель . . . . .	728

## Из предисловия к первому изданию

Имеющиеся в нашей литературе полные курсы теории функций комплексного переменного рассчитаны на читателей, избравших математику своей специальностью, другие же курсы обычно излагают лишь элементы теории. Между тем за последнее время в физике и технике получают все более широкое распространение методы, требующие обстоятельного применения теории функций. Почерпнуть необходимые для этого сведения из математических курсов нематематику трудно, а сведения излагаемые в элементарных курсах, недостаточны.

Восполнение указанного пробела и является целью настоящей книги. Мы поставили своей задачей изложить в ней основные методы теории функций комплексного переменного для лиц, интересующихся этой теорией ради ее приложений к физическим и техническим задачам. Книга может быть использована в качестве учебного пособия студентами механических отделений, физических и физико-технических факультетов университетов и аспирантами технических вузов с достаточной математической подготовкой. Предполагается, что читатель знаком с основным курсом математического анализа в объеме двух первых томов книги В. И. Смирнова «Курс высшей математики» (Гостехиздат, 1949). Некоторые ссылки сделаны также на книгу Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления» (т. I—III, Гостехиздат, 1947—1949).

В первой главе излагаются все основные понятия теории функций, так что книгу можно читать независимо от других курсов по этой дисциплине. Однако по характеру изложения первая глава несколько отличается от остальных — она написана более конспективно и сжато. При этом мы имели в виду, что по материалу первой главы имеется большое количество доступной литературы.

Остальные главы посвящены отдельным методам теории функций комплексного переменного, имеющим наибольшее значение для приложений. Изложение сопровождается большим числом примеров. Если читатель овладел тем или иным методом, разобрав несколько примеров, то дальнейшие примеры

на этот метод можно не читать — лучше вернуться к ним по мере ссылок.

В книгу включено также большое число примеров приложения теории функций к различным физическим задачам. Не следует думать, что, скажем, электротехнические примеры интересны лишь электрикам, а гидромеханические — лишь механикам. На самом деле методы, иллюстрируемые на одной задаче, часто с успехом могут быть применены и к решению аналогичной задачи с другим физическим содержанием. Знакомство с основами приложения теории функций к различным областям физики поможет читателям в дальнейшей работе использовать для своей области методы, излагаемые в литературе по другим областям.

Мы всюду стремились избежать усложняющих доказательства деталей, иногда умышленно допуская нестрогости в угоду наглядности изложения. Для простоты некоторые предложения доказаны в более жестких условиях, чем это необходимо, а некоторые предложения приведены без доказательства.

Москва, 1951 г.

*М. А. Лаврентьев  
Б. В. Шабат*

## Из предисловия ко второму изданию

В предлагаемом издании книги мы сохранили ее общее содержание, распределение материала и характер изложения с упором на геометрическую наглядность и связи с проблемами теории уравнений математической физики и с приложениями.

В это издание мы внесли ряд изменений и дополнений; отметим наиболее существенные из них. В третьей главе добавлены новые технические и теоретические применения, особенно развившиеся за последние годы: теория кумулятивных зарядов, некоторые задачи газовой динамики, изучение решений уравнений с частными производными методами теории функций. В четвертой главе по-новому изложены выводы основных формул вариационного метода теории конформных отображений, к которому в последнее время усилился интерес как за рубежом, так и у нас в связи с новыми приложениями этого метода в задачах механики. В пятой главе упрощено и дополнено изложение применений теории функций к проблеме устойчивости и по-новому изложены методы асимптотических оценок. В главе шестой добавлен пункт об интегральных преобразованиях, отличных от преобразования Лапласа.

Москва, май 1957 г.

*Авторы*



## Предисловие к четвертому изданию

В четвертом издании исправлены замеченные опечатки и неточности. В этой работе большую помощь нам оказали коллеги из Германской Демократической Республики У. Пирл, Р. Кюнау и Л. фон Вольферсдорф, которые очень тщательно подготовили немецкое издание нашей книги, В. А. Зорич, просмотревший текст для ее французского издания, а также многочисленные читатели, сообщившие нам свои замечания. Всем им мы выражаем свою глубокую благодарность.

Кроме того, в ряде мест внесены некоторые изменения и дополнения. Наиболее существенным из них является дополнение в главе шестой, посвященное преобразованию Лапласа обобщенных функций.

Новосибирск —  
Москва, июль 1972 г.

*Авторы*

## Основные понятия

В этой главе вводятся все основные понятия теории функций комплексного переменного: понятие функции, ее производной, интеграла и др. Читатель увидит, что обычные, известные из анализа функций действительного переменного определения этих понятий остаются почти без изменений, но их содержание меняется весьма существенным образом. Так, отпадает обычная геометрическая иллюстрация функции с помощью кривой на плоскости и на ее место становится понятие о функции как об отображении плоских множеств (п. 4). Условие дифференцируемости функции комплексного переменного оказывается значительно более жестким, чем условие дифференцируемости функции действительного переменного (п. 5). Например, из условия дифференцируемости в комплексной области автоматически вытекает существование производных всех порядков (п. 17) и целый ряд свойств функций, совершенно необычных для действительного анализа (пп. 14, 15 и др.).

Комплексными числами и функциями комплексного переменного математики пользовались в своих исследованиях уже в XVIII в. Особенно велики заслуги крупнейшего математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707—1783), который по праву считается одним из творцов теории функций комплексного переменного. В замечательных работах Эйлера детально изучены элементарные функции комплексного переменного, включая логарифм, показательную, тригонометрические и обратные тригонометрические функции (1740—1749), даны условия дифференцируемости\*) (1755) и начала интегрального исчисления функций комплексного переменного (1777). Леонард Эйлер привел также многочисленные приложения функций комплексного переменного к различным математическим задачам

---

\*) К этим условиям пришел в 1752 г. также Жан Даламбер (1717—1783), который исходил из гидродинамических соображений. Однако именно в работах Эйлера впервые выясняется общий характер условий дифференцируемости.

и положил начало применению их в гидродинамике (1755—1757) и картографии (1777)..

После Эйлера открытые им результаты и методы развивались, совершенствовались и систематизировались, и в первой половине XIX в. теория функций комплексного переменного оформилась как важнейшая отрасль математического анализа. Основные заслуги здесь принадлежат Огюстену Коши (1789—1857) и Карлу Вейерштрассу (1815—1897), развившим интегральное исчисление и теорию представления функций рядами, а также Бернхарду Риману (1826—1866), обосновавшему геометрические вопросы теории функций и их приложения.

## § 1. Комплексные числа

Для удобства читателя мы изложим здесь основные определения и факты, относящиеся к понятию комплексных чисел, действиям с ними и их геометрической иллюстрации\*).

**1. Комплексные числа.** *Комплексным числом* называется выражение вида  $x + iy$ , где  $x$  и  $y$  — действительные числа, а  $i$  — символ, который называется мнимой единицей. Числа  $x$  и  $y$  называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа  $x + iy$  и обозначаются символами

$$x = \operatorname{Re}(x + iy), \quad y = \operatorname{Im}(x + iy). \quad (1)$$

Если, в частности,  $y = 0$ , то  $x + i0$  считается совпадающим с действительным числом  $x$ ; если  $x = 0$ , то  $0 + iy$  обозначается просто  $iy$  и называется *чисто мнимым*.

Определим на множестве комплексных чисел понятие равенства и простейшие операции. Будем говорить, что комплексные числа  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$  *равны*,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Отметим еще, что если  $x_2 = x_1$ , а  $y_2 = -y_1$ , то комплексное число  $x_2 + iy_2$  называется *сопряженным* с  $x_1 + iy_1$  и

---

\*) Первое упоминание о «мнимых» числах как о корнях квадратных из отрицательных чисел относится еще к XVI в. (Дж. Кардано, 1545). До середины XVIII в. комплексные числа появляются лишь эпизодически в трудах отдельных математиков (И. Ньютон, Н. Бернулли, А. Клеро). Первое изложение теории комплексных чисел на русском языке принадлежит Л. Эйлеру («Алгебра», Петербург, 1763, позднее книга была переведена на иностранные языки и многократно переиздавалась): символ « $i$ » также введен Л. Эйлером. Геометрическая интерпретация комплексных чисел относится к концу XVIII в. (датчанин Каспар Вессель, 1799 г.).

обозначается символом  $\overline{x_1 + iy_1}$ . Таким образом,

$$\overline{x + iy} = x - iy. \quad (3)$$

Перейдем к определению операций над комплексными числами.

1) Сложение. Суммой  $z_1 + z_2$  комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (4)$$

Из данного определения непосредственно вытекают следующие законы сложения:

а) *переместительный*:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,

б) *сочетательный*:  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ .

Если  $z_1$  и  $z_2$  действительные числа (т. е.  $y_1 = y_2 = 0$ ), то определение (4) совпадает с определением сложения для действительных чисел.

Сложение допускает обратную операцию: для любых двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  можно найти такое число  $z$ , что  $z_2 + z = z_1$ . Это число называется *разностью* чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначается символом  $z_1 - z_2$ . Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (5)$$

2) Умножение. Произведением  $z_1 z_2$  комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (6)$$

Из определения вытекают следующие законы умножения:

а) *переместительный*:  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ;

б) *сочетательный*:  $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ ;

в) *распределительный* (относительно сложения):

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Если  $z_1$  и  $z_2$  — действительные числа, то определение (6) совпадает с обычным. При  $z_1 = z_2 = i$  из определения произведения следует:

$$i \cdot i = -1. \quad (7)$$

Легко заметить, что формула (6) получается при перемножении  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$  по обычным правилам алгебры и замене произведения  $i \cdot i$  через  $-1$ . Отметим еще, что произведение комплексного числа  $z = x + iy$  на сопряженное с ним всегда неотрицательно. В самом деле, из равенства (6) имеем:

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0. \quad (8)$$

Умножение также допускает обратную операцию, если только данный множитель не равен нулю. Пусть  $z_2 \neq 0$ , тогда

можно найти такое число  $z$ , что  $z_2 z = z_1$ ; для этого, согласно (6), надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1, \\ y_2 x + x_2 y = y_1, \end{cases} \quad (9)$$

которая при  $z_2 \neq 0$  всегда однозначно разрешима, так как ее определитель  $x_2^2 + y_2^2 > 0$ . Это число  $z$  называется *частным* двух чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначается символом  $z_1/z_2$ . Решая систему (9), получим:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (10)$$

Легко заметить, что (10) может быть получено умножением числителя и знаменателя дроби  $z_1/z_2$  на  $\bar{z}_2$ .

3) Возведение в целую степень. Произведение  $n$  равных чисел  $z$  называется  *$n$ -й степенью* числа  $z$  и обозначается символом  $z^n$ :

$$z^n = \underbrace{z \dots z}_{n \text{ раз}}. \quad (11)$$

Обратная операция — *извлечение корня* — определяется следующим образом: число  $w$  называется *корнем  $n$ -й степени* из числа  $z$ , если  $w^n = z$  (обозначается символом  $\sqrt[n]{z}$ , причем для  $n = 2$  пишут просто  $\sqrt{z}$ ). Ниже мы увидим, что для всякого  $z \neq 0$  корень  $\sqrt[n]{z}$  имеет  $n$  различных значений.

Равенство (7) мы можем теперь записать в виде  $i^2 = -1$ , и для мнимой единицы  $i$  имеем:

$$i = \sqrt{-1} \quad (12)$$

(здесь  $\sqrt{-1}$  означает одно из двух его возможных значений).

**2. Геометрическая иллюстрация.** Рассмотрим плоскость декартовых координат  $xOy$  и условимся изображать комплексное число  $z = x + iy$  точкой с координатами  $(x, y)$ . При этом действительные числа будут изображаться точками оси  $x$  (которую в дальнейшем мы будем называть *действительной осью*), чисто мнимые — точками оси  $y$  (называемой *мнимой осью*). В частности, изображением числа  $i$  будет служить точка  $(0, 1)$  мнимой оси.

Легко видеть, что и обратно, каждой точке плоскости  $xOy$  с координатами  $(x, y)$  будет таким способом поставлено в соответствие вполне определенное комплексное число  $z = x + iy$ , так что это соответствие между множеством всех комплексных чисел и всех точек плоскости взаимно однозначно. Поэтому

в дальнейшем мы не будем различать понятия комплексного числа и точки плоскости и будем говорить, например, «точка  $1 + i$ », «треугольник с вершинами  $z_1, z_2, z_3$ » и т. п.

Далее, каждой точке  $(x, y)$  соответствует вполне определенный вектор — радиус-вектор этой точки, а каждому радиусу-вектору, лежащему в плоскости, — вполне определенная точка — его конец (рис. 1). Поэтому мы будем в дальнейшем представлять комплексные числа также в виде радиусов векторов на плоскости.

Из рис. 1 ясен геометрический смысл операций сложения и вычитания комплексных чисел: сумма и разность комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  изображаются соответственно векторами, равными направленным диагоналям параллелограмма, построенного на векторах  $z_1$  и  $z_2$ .

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в полярных координатах. Для этого, как обычно, совмещаем полярную ось с положительной полуосью  $x$ , а полюс — с началом координат; тогда если обозначить через  $r$  полярный радиус и через  $\varphi$  полярный угол точки  $z$  (рис. 1), то будем иметь:

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1)$$

Полярный радиус  $r$  называется *модулем* комплексного числа  $z$  и обозначается символом  $|z|$ , угол  $\varphi$  — его *аргументом* и обозначается символом  $\text{Arg } z$ . В то время как модуль комплексного числа определяется однозначно:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \quad (2)$$

аргумент определен лишь с точностью до любого слагаемого, кратного  $2\pi$ :

$$\varphi = \text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} + 2k\pi & (\text{I и IV квадранты}), \\ \arctg \frac{y}{x} + (2k + 1)\pi & (\text{II и III } \gg); \end{cases} \quad (3)$$

здесь  $\arctg$  означает главное значение  $\text{Arctg}$ , т. е. значение, большее  $-\pi/2$  и не превосходящее  $\pi/2$ ,  $k$  — произвольное целое число. В дальнейшем наряду с символом  $\text{Arg}$ , обозначающим

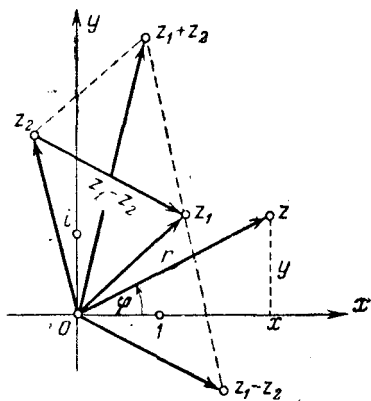


Рис. 1.

всю совокупность значений аргумента, мы будем употреблять символ  $\arg$ , обозначая им одно какое-либо из значений  $\text{Arg}$ , в случае надобности специально оговаривая, какое именно значение берется (ср. п. 6).

Очевидны следующие неравенства (см. рис. 1):

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (4)$$

Знаки равенства в (4) имеют место тогда и только тогда, когда  $\text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2$  или одно из чисел — нуль.

Из определения (6) предыдущего пункта следует, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. В самом деле, имеем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)\} = r_1 r_2 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что при умножении комплексного числа  $z_1$  на  $z_2$  вектор  $z_1$  растягивается в  $|z_2|$  раз \*) и, кроме того, поворачивается (против часовой стрелки) на угол  $\arg z_2$ . В частности, умножение комплексного числа  $z$  на  $i$  сводится к повороту (без растяжения) вектора  $z$  на прямой угол против часовой стрелки.

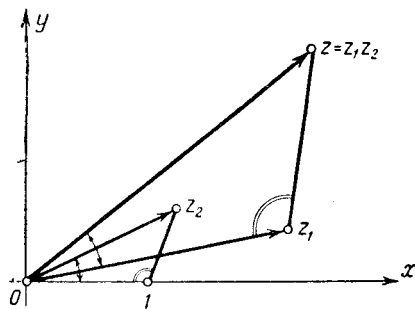


Рис. 2.

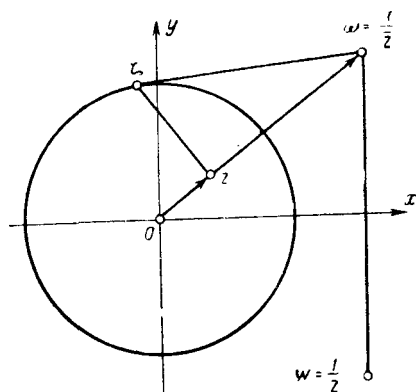


Рис. 3.

На рис. 2 изображено построение произведения  $z = z_1 z_2$ : чтобы получить  $z$ , достаточно на отрезке  $Oz_1$  как на основании построить треугольник  $Oz_1 z$ , подобный треугольнику  $O1z_2$ .

Далее, деление комплексного числа  $z_1$  на  $z_2$  сводится к умножению  $z_1$  на  $1/z_2$ , поэтому можно ограничиться выяснением геометрического смысла операции  $w = 1/z$ . Пусть сначала  $|z| < 1$  (рис. 3).

\*) Если  $|z_2| < 1$ , то  $z_1$  фактически сжимается в  $1/|z_2|$  раз.

Восставим из точки  $z$  перпендикуляр к лучу  $Oz$  и через точку  $\xi$  пересечения перпендикуляра с окружностью  $|z|=1$  проведем касательную к этой окружности. Для точки  $\omega$  пересечения построенной касательной с лучом  $Oz$  имеем, очевидно,

$$\operatorname{Arg} \omega = \operatorname{Arg} z,$$

а из подобия прямоугольных треугольников  $Oz\xi$  и  $O\xi\omega$  имеем  $\frac{|\omega|}{|\xi|} = \frac{|\xi|}{|z|}$ , откуда

$$|\omega| = \frac{1}{|z|},$$

ибо  $|\xi|=1$ . Таким образом, число  $\omega$  является сопряженным с  $1/z$ ,  $\omega = 1/\bar{z}$ , и для получения точки  $\omega = 1/z$  остается построить точку, симметричную с  $\omega$  относительно действительной оси.

Переход от точки  $z$  к точке

$$\omega = 1/\bar{z}$$

называется *инверсией*, или *симметрией относительно единичной окружности*  $|z|=1$ . Таким образом, операция  $\omega = 1/z$  геометрически сводится к выполнению двух последовательных симметрий — инверсии и симметрии относительно действительной оси.

Если  $|z| > 1$ , то описанные построения следует вести в обратном порядке; если  $|z| = 1$ , то точка  $\omega = 1/\bar{z}$  совпадает с  $z$  и построение  $\omega = 1/z$  сводится к симметрии относительно действительной оси.

Геометрический смысл возведения в степень ясен из предыдущего. Для построения корней  $n$ -й степени из  $z$  заметим, что из определения корня и формулы (5) для  $\omega = \sqrt[n]{z}$  имеем  $|\omega|^n = |z|$ ,  $n \arg \omega = \arg z$ , и поэтому

$$|\omega| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg \omega = \frac{\arg z}{n}. \quad (6)$$

Первое из соотношений (6) показывает, что модули всех корней одинаковы, второе, — что их аргументы отличаются на кратное  $2\pi/n$ , ибо к значению  $\arg z$  можно добавлять кратное  $2\pi$ . Отсюда следует, что корень  $n$ -й степени из любого комплексного

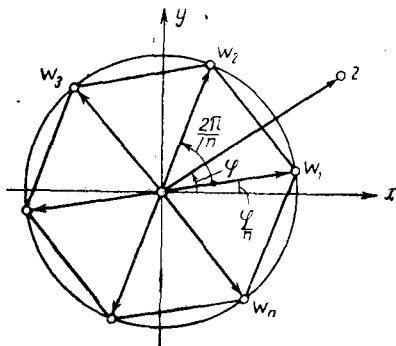


Рис. 4.



числа  $z \neq 0$  имеет  $n$  различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$  (см. рис. 4, где  $n = 6$ ).

## § 2. Функции комплексного переменного

В этом параграфе мы введем наиболее фундаментальные понятия теории функций комплексного переменного: понятие функции комплексного переменного, ее предела, производной и, наконец, понятие аналитической функции. Центральное место занимает здесь теорема п. 5, устанавливающая условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Эти условия обычно называются *условиями Коши — Римана*, однако задолго до Коши и Римана они весьма существенно использовались в работах Даламбера и Эйлера (см. введение к этой главе).

**3. Геометрические понятия.** Областью на комплексной плоскости называют множество  $D$  точек, обладающее следующими свойствами: 1) вместе с каждой точкой из  $D$  этому множеству принадлежит и достаточно малый круг с центром в этой точке (*свойство открытости*), 2) любые две точки  $D$  можно соединить ломаной, состоящей из точек  $D$  (*свойство связности*).

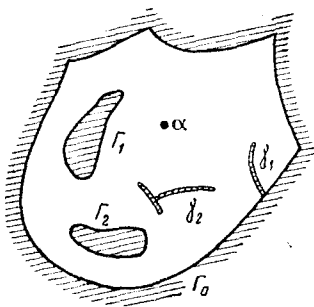


Рис. 5.

Простыми примерами областей могут служить окрестности точек на комплексной плоскости. Под  $\epsilon$ -окрестностью точки  $a$  понимают открытый круг радиуса  $\epsilon$  с центром в этой точке, т. е. совокупность точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству

$$|z - a| < \epsilon.$$

*Граничной точкой* области  $D$  называют такую точку, которая сама не принадлежит  $D$ , но в любой окрестности которой лежат точки этой области. Совокупность граничных точек области  $D$  называют *границей* этой области. Область  $D$  с присоединенной к ней границей обозначают символом  $\bar{D}$  и называют *замкнутой областью*.

Мы будем предполагать, что граница области состоит из конечного числа замкнутых линий, разрезов и точек (мы не даем определения этих понятий; см. рис. 5, где граница области состоит из трех замкнутых линий  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ , двух разрезов  $\gamma_1, \gamma_2$  и одной точки  $\alpha$ ). Линии и разрезы, входящие в со-

став границы, мы всегда будем предполагать *кусочно-гладкими*, т. е. состоящими из конечного числа гладких дуг (дуг с непрерывно изменяющейся касательной). В случае ограниченной области  $D$  число связных частей, на которые разбивается ее граница, называется *порядком связности*\*) этой области (на рис. 5 изображена пятисвязная область;  $\Gamma_0$  и  $\gamma_1$  образуют одну связную часть границы). В частности, если граница области  $D$  связна (состоит из одной связной части), то  $D$  называется *односвязной областью*.

Пусть  $D$  — односвязная область и  $\Gamma$  — ее граница. Выберем на  $\Gamma$  какую-либо точку и будем, отправляясь из этой точки, обходить  $\Gamma$  в положительном направлении. *Положительным направлением обхода* границы области считается такое, при котором область остается все время слева. При этом некоторые точки  $\Gamma$  будут проходиться лишь один раз (например,  $A$  на рис. 6), другие — несколько раз (например,  $B$  — два раза,  $C$  — три раза). Точки первого типа мы назовем *простыми*, а второго типа — *кратными точками* контура  $\Gamma$ , причем число раз, которое проходится точка, назовем ее *кратностью* ( $B$  — двойная точка,  $C$  — тройная). Понятие кратности граничной точки распространяется и на многосвязные области.

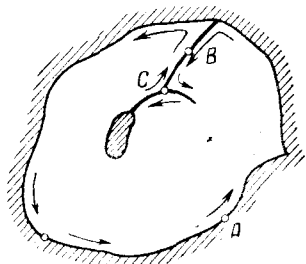


Рис. 6.

**4. Функции комплексного переменного.** Говорят, что на множестве  $M$  точек плоскости  $z$  задана *функция*

$$w = f(z), \quad (1)$$

если указан закон, по которому каждой точке  $z$  из  $M$  ставится в соответствие определенная точка или совокупность точек  $w$ . В первом случае функция  $f(z)$  называется *однозначной*, во втором — *многозначной*. Множество  $M$  называется *множеством определения* функции  $f(z)$ , а совокупность  $N$  всех значений  $w$ , которые  $f(z)$  принимает на  $M$ , — *множеством ее изменения*. В дальнейшем наиболее важную роль будет играть тот случай, когда множества  $M$  и  $N$  являются областями (см. теорему на стр. 21).

Если положить  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ , то задание функции комплексного переменного  $w = f(z)$  будет равносильным заданию двух функций двух действительных переменных:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (2)$$

\*) Распространение определения порядка связности на неограниченные области см. в п. 24. (Область  $D$  называется *ограниченной*, если она принадлежит некоторому кругу  $|z| < R$ .)

Условимся откладывать значения  $z$  на одной комплексной плоскости, а значения  $w$  — на другой. Тогда функцию комплексного переменного можно геометрически представлять как некоторое *отображение* множества  $M$  плоскости  $z$  на множество  $N$  плоскости  $w$ . Если функция  $w = f(z)$  однозначна на множестве  $M$  и при этом двум различным точкам  $M$  всегда соответствуют различные точки  $N$ , то такое отображение называется *взаимно однозначным* или *однолиственным* в  $M$ .

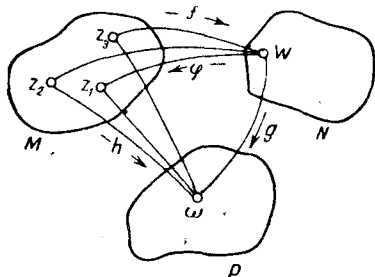


Рис. 7.

Пусть дана функция  $w = f(z)$ , осуществляющая отображение множества  $M$  на множество  $N$ . Функция  $z = \varphi(w)$ , ставящая в соответствие каждой точке  $w$  из  $N$  совокупность всех тех точек  $z$ , которые функцией  $w = f(z)$  отображаются в точку  $w$ , называется *обратной* к функции  $w = f(z)$  (рис. 7). Ясно, что

отображение  $w = f(z)$  будет взаимно однозначным тогда и только тогда, когда обе функции  $f$  и  $\varphi$  однозначны.

Пусть функция  $w = f(z)$  отображает множество  $M$  на  $N$ , а  $\omega = g(w)$  — множество  $N$  на  $P$ . Функция

$$\omega = h(z) = g[f(z)], \quad (3)$$

отображающая  $M$  на  $P$ , называется *сложной функцией*, составленной из  $f$  и  $g$ , а соответствующее отображение  $h$  — *суперпозицией* отображений  $f$  и  $g$  (рис. 7). Если, в частности, отображение  $w = f(z)$  взаимно однозначно и функция  $z = \varphi(w)$  — обратная к  $f$ , то

$$\varphi[f(z)] = z. \quad (4)$$

**Пример.** Линейная функция определяется во всей плоскости  $z$  соотношением

$$w = az + b, \quad (5)$$

$a \neq 0$  и  $b$  — произвольные комплексные постоянные. Положим  $k = |a|$ ,  $\alpha = \text{Arg } a$ , т. е.  $a = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , и представим функцию (5) как сложную функцию, составленную из функций:

$$\text{а) } z_1 = (\cos \alpha + i \sin \alpha) z;$$

$$\text{б) } z_2 = kz;$$

$$\text{в) } w = z_2 + b.$$

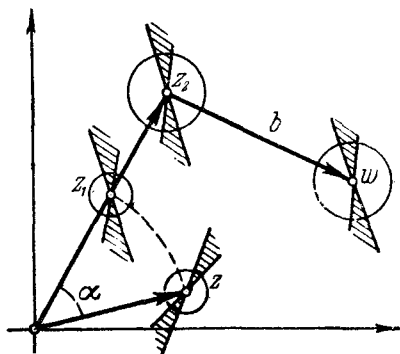


Рис. 8.

Вспоминая геометрический смысл умножения (п. 2), мы видим, что отображения а) и б) сводятся соответственно к повороту плоскости  $z$  на угол  $\alpha$  и подобному преобразованию плоскости  $z_1$  с коэффициентом подобия  $k$ . Отображение в) геометрически означает сдвиг всей плоскости  $z_2$  на постоянный вектор  $b$ .

Линейное отображение (5) представляет собой суперпозицию описанных отображений (рис. 8). Отсюда следует, что отображение (5) взаимно однозначно во всей плоскости и что оно преобразует прямые в прямые (причем углы между двумя прямыми сохраняются) и окружности — в окружности.

**5. Дифференцируемость и аналитичность.** Пусть функция  $f(z)$  определена и однозначна в некоторой окрестности точки  $z_0 = x_0 + iy_0$ , кроме, быть может, самой точки  $z_0$ .

Мы будем говорить, что существует *предел функции*  $f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$  (обозначение:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ): если существуют пределы

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0$  и  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0$ ; при этом мы будем полагать

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0. \quad (1)$$

Так как наше определение сводится к обычному определению предела действительных функций, то основные свойства предельного перехода сохраняются для функций комплексного переменного. В частности, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \lim (f \pm g) &= \lim f \pm g, & \lim (fg) &= \lim f \cdot \lim g, \\ \lim \frac{f}{g} &= \frac{\lim f}{\lim g} & (\lim g \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Определение предела можно сформулировать также с помощью понятия окрестности:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  тогда и только тогда, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что для всех точек из  $\delta$ -окрестности  $z_0$  (кроме, быть может, самой  $z_0$ ) соответствующие точки  $w$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности  $w_0$ ; иными словами, если из неравенств

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad (3)$$

вытекает

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \quad (4)$$

Подчеркнем, что согласно нашему определению функция  $f(z)$  стремится к своему пределу *независимо от способа приближения точки  $z$  к  $z_0$* . Иными словами, если предел существует, то при  $z$ , стремящемся к  $z_0$  по любому закону (например, по любой линии или любой последовательности),  $f(z)$  будет приближаться к этому пределу.

Функция  $f(z)$  называется *непрерывной в точке  $z_0$* , если она определена в некоторой окрестности  $z_0$  (включая саму точку  $z_0$ ) и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (5)$$

Очевидно, что для непрерывности  $f(z)$  в точке  $z_0$  необходимо и достаточно, чтобы функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были непрерывными в точке  $(x_0, y_0)$ . Функция  $f(z)$  называется *непрерывной в области  $D$* , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Полезно также понятие непрерывности функции на произвольном множестве. Пусть функция  $f(z)$  определена на множестве  $A$  и  $z_0$  является предельной точкой этого множества. Предел  $f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$  по множеству  $A$  определяется, как и выше, только в (3) надо добавить условие, что  $z$  принадлежит  $A$  ( $z \in A$ ). Функция  $f(z)$  называется *непрерывной на множестве  $A$* , если в каждой предельной точке  $z_0 \in A$  предел по множеству

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in A}} f(z) = f(z_0). \quad (6)$$

Отметим без доказательства, что для функций, непрерывных на замкнутых ограниченных множествах (в замкнутых ограниченных областях, на замкнутых линиях или на отрезках линий, содержащих свои концы), остаются справедливыми обычные свойства функций, непрерывных на замкнутых интервалах. Именно, каждая функция  $f(z)$ , непрерывная на замкнутом ограниченном множестве  $\bar{A}$ :

1) *ограничена на нем*, т. е. существует такая постоянная  $M$ , что для всех  $z$  из  $\bar{A}$

$$|f(z)| \leq M;$$

2) *достигает своего наибольшего и своего наименьшего по модулю значений*, т. е. в  $\bar{A}$  существуют такие точки  $z'$  и  $z''$ , что для всех  $z$  из  $\bar{A}$

$$|f(z')| \geq |f(z)|, \quad |f(z'')| \leq |f(z)|;$$

3) *равномерно непрерывна*, т. е. для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$ , зависящее лишь от  $\varepsilon$ , такое, что для любой пары точек  $z_1$  и  $z_2$  из  $\bar{A}$ , удовлетворяющих неравенству  $|z_1 - z_2| < \delta$ , справедливо неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Отметим еще также без доказательства \*) одно предложение, которым будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

\*) Доказательство этого предложения проводится топологическими методами.

4) Теорема. Если функция  $w = f(z)$  непрерывна в области  $D$  и реализует взаимно однозначное отображение этой области на некоторое множество  $\Delta$  в плоскости  $w$ , то  $\Delta$  также является областью и обратная функция  $z = \varphi(w)$  непрерывна в  $\Delta$ .

Пусть функция  $f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z$ . Будем говорить, что  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z$ , если существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z). \quad (7)$$

Этот предел будем называть производной функции  $f(z)$  в точке  $z$ .

Условия дифференцируемости функции  $f(z)$  в терминах действительных функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  выражает

Теорема. Пусть функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $z$ , причем в этой точке функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы. Тогда для дифференцируемости функции комплексного переменного  $f(z)$  в точке  $z$  необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (8)$$

(условия Коши — Римана)\*).

а) Необходимость. Пусть существует

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Воспользуемся замечанием о независимости предела от способа приближения к точке  $z$ . Предположим сначала, что точка  $z+h$  приближается к  $z$  по прямой, параллельной действительной оси, т. е. что  $h = s \rightarrow 0$ , оставаясь действительным. Тогда получим:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем теперь тот же предел в предположении, что точка  $z+h$  приближается к  $z$  по прямой, параллельной мнимой оси, т. е.

\*) Уравнения (8) получены в связи с гидродинамическими задачами Даламбера (1752) и Эйлера (1755); в 1777 г. Эйлер вновь получает эти уравнения в связи с рассмотрением интегралов от функции комплексного переменного. Однако их принято называть условиями Коши — Римана.

что  $h = it$  и  $t \rightarrow 0$ , оставаясь действительным. Получим:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = \\ = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (10)$$

Сравнивая выражения (9) и (10) для  $f'(z)$ , будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда и вытекают соотношения (8) (см. определение равенства комплексных чисел, п. 1).

б) Достаточность. По определению дифференциала функций двух действительных переменных имеют место равенства:

$$\left. \begin{aligned} u(x+s, y+t) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} s + \frac{\partial u}{\partial y} t + \alpha |h|, \\ v(x+s, y+t) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} s + \frac{\partial v}{\partial y} t + \beta |h|, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  стремятся к нулю вместе с  $h = s + it$ . Тогда приращение функции  $f(z)$  принимает вид:

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} s + \frac{\partial u}{\partial y} t + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} s + \frac{\partial v}{\partial y} t \right) + \eta |h|,$$

где  $\eta = \alpha + i\beta$ . Используя равенства (8), это приращение можно переписать в виде

$$f(z+h) - f(z) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (s + it) + \eta |h| = Ah + \eta |h|, \quad (12)$$

где  $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  — вполне определенное число, не зависящее от  $h$ , а  $\eta$  стремится к 0 вместе с  $h$ . Поделив соотношение (12) на  $h$ , мы видим, что  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$  существует и равен  $A$ .

Теорема доказана.

С учетом условий Коши — Римана производную функции  $f(z)$  можно представить в следующих равносильных формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (13)$$

Так как обычные свойства алгебраических действий и предельного перехода сохраняются при переходе к функциям комплексного переменного, то сохраняются и обычные правила

дифференцирования, вывод которых основан лишь на упомянутых свойствах:

$$\left. \begin{aligned} (f+g)' &= f' + g', & (fg)' &= f'g + g'f, & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - g'f}{g^2}, \\ f[g(z)]' &= f'[g(z)] g'(z), & f'(z) &= \frac{1}{\varphi'(w)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(в последней формуле  $f$  и  $\varphi$  обозначают взаимно обратные функции, причем предполагается, что они осуществляют однолистные отображения соответственно окрестностей точек  $z$  и  $w$ ).

Функция  $f(z)$ , дифференцируемая в каждой точке некоторой области  $D$ , называется *аналитической* (иначе, *регулярной* или *голоморфной*) в этой области. Подчеркнем, что наше определение аналитической функции предполагает ее однозначность в области  $D$ , ибо понятие предела и производной определены выше лишь для однозначных функций.

В п. 25 мы обобщим понятие аналитичности, распространив его и на многозначные функции, но до этого под аналитической мы всегда будем понимать однозначную функцию.

В заключение отметим одно обобщение условий Коши — Римана. Пусть дана дифференцируемая в точке  $z$  функция  $f(z)$ ; зададимся произвольными направлениями, характеризуемыми единичными векторами  $s^0$  и  $n^0$  (т. е. комплексными числами с модулем 1) и такими, что поворот от  $s^0$  к  $n^0$  совершается на прямой угол против часовой стрелки (т. е.  $n^0 = is^0$ ). Пользуясь тем, что вычисление производной не зависит от направления, получим, беря производные один раз в направлении  $s^0$ , а другой — в направлении  $n^0$ :

$$f'(z) = \frac{1}{s^0} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{\partial v}{\partial s} \right) = \frac{1}{n^0} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + i \frac{\partial v}{\partial n} \right) \quad (15)$$

$\left( \frac{\partial u}{\partial s}, \dots, \frac{\partial v}{\partial n} \right)$  — производные от функций двух действительных переменных по соответствующим направлениям); вывод равенства (15) аналогичен выводу формул (9) и (10). Подставляя  $n^0 = is^0$  и сравнивая в соотношении (15) действительные и мнимые части, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \quad (16)$$

Эти уравнения и есть обобщенные условия Коши — Римана, которые мы хотели отметить. Полагая в них, в частности,  $s^0 = 1$ ,  $n^0 = i$ , получим условия (8).

Укажем еще условия Коши — Римана в полярных координатах  $(r, \varphi)$ . Пусть  $s^0$  — единичный вектор касательной к окружности  $|z| = r$ , направленный против часовой стрелки, и  $n^0$  —



вектор внутренней нормали к окружности; тогда  $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{r \partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$  и условия (16) принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (17)$$

### § 3. Элементарные функции

Этот параграф посвящается элементарным функциям комплексного переменного и их геометрическим иллюстрациям — отображениям, ими осуществляемым. Эти функции являются естественным распространением в комплексную область обычных для анализа элементарных функций. Однако при таком распространении функции приобретают иногда новые свойства, например показательная функция комплексного переменного  $e^z$  оказывается периодической, функции  $\sin z$  и  $\cos z$  перестают быть ограниченными, приобретает смысл логарифм отрицательных чисел (и вообще любых комплексных чисел, отличных от нуля) и т. п.

Особый интерес представляет изучение в комплексной области многозначных функций, ибо только такое изучение позволяет выяснить природу их многозначности. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением отдельных примеров многозначных функций и на этих примерах показываем возможность выделения однозначных ветвей, которые оказываются голоморфными функциями. Лишь в п. 25 мы введем общее понятие многозначной аналитической функции и тогда сможем рассматривать не только ветви, но и сами эти функции как аналитические.

Теория элементарных функций комплексного переменного была в основном создана Леонардом Эйлером в его работах сороковых годов XVIII в. Следует отметить, что эти работы Эйлера намного опережали эпоху; например, его теория логарифма была признана лишь с большим трудом и далеко не сразу.

В п. 7 мы особо выделяем простую дробно-рациональную функцию  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  ввиду ее важной роли в практических задачах (см. следующие две главы). Весьма успешное применение этой функции связано с работами Николая Егоровича Жуковского (1847—1921), поэтому мы будем называть ее *функцией Жуковского*.

**6. Функции  $w = z^n$  и  $w = \sqrt[n]{z}$** , где  $n$  — любое целое положительное число, уже определены в п. 1 для всех комплексных  $z$ . Первая из этих функций

$$w = z^n \quad (1)$$

однозначна. Если в плоскостях  $z$  и  $w$  ввести полярные координаты, положив  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ , то соотношение (1) можно переписать в виде двух равенств:

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi, \quad (2)$$

связывающих действительные величины.

Из (2) видно, что отображение, осуществляемое функцией  $w = z^n$ , сводится к повороту каждого вектора  $z \neq 0$  на угол  $(n-1) \arg z$  и растяжению его в  $|z|^{n-1}$  раз. Далее очевидно, что точки  $z_1$  и  $z_2$  с равными модулями и аргументами, отличающимися на целое кратное  $2\pi/n$ , и только такие точки, переходят при отображении (1) в одну точку. Следовательно, для однолиственности отображения  $w = z^n$  в некоторой области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы  $D$  не содержала никаких двух точек  $z_1$  и  $z_2$ , связанных соотношениями

$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \neq 0 - \text{целое}). \quad (3)$$

Этому условию удовлетворяют, например, секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1) \frac{2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

каждый из которых при отображении  $w = z^n$  преобразуется в плоскость  $w$  с исключенной положительной полуосью. При

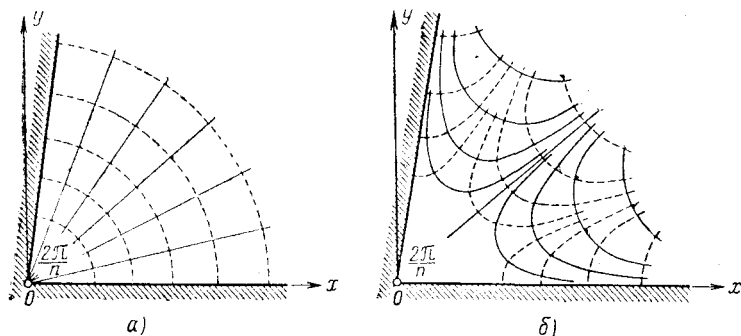


Рис. 9.

этом все лучи с вершиной в точке  $z = 0$  переходят в лучи с вершиной  $w = 0$  (лишь повернутые на некоторый угол), а все дуги окружностей с центром  $z = 0$  — в дуги окружностей с центром  $w = 0$  (только, вообще говоря, другого радиуса). На рис. 9, а изображен прообраз в одном таком секторе плоскости  $z$  сетки полярных координат плоскости  $w$ .

Из формулы

$$w = u + iv = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (5)$$

равносильной (1), следует, что прямым  $u = u_0$  и  $v = v_0$  в плоскости  $z$  соответствуют кривые с полярными уравнениями

$$r = \sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos n\varphi}}; \quad r = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}.$$

Они изображены на рис. 9, б (первые — пунктиром, вторые — сплошными линиями); при  $n = 2$  это — обычные гиперболы.

Наконец, отметим, что функция  $w = z^n$  аналитична во всей плоскости, ибо для любого  $z$  существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nz^{n-1}h + h^2(\dots)}{h} = nz^{n-1}. \quad (6)$$

Функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad (7)$$

обратная к функции  $z = w^n$ ,  $n$ -значна при  $z \neq 0$ . Как вытекает из п. 2, значение корня  $\sqrt[n]{z}$  определяется значением аргумента, выбранным для точки  $z$ . Обозначим через  $\arg z_0$  одно из значений аргумента в точке  $z_0 \neq 0$  и предположим, что точка  $z$  описывает, начиная с  $z_0$ , некоторую непрерывную линию  $C$ , не проходящую через начало координат. Через  $\arg z$  мы будем обозначать такое значение аргумента, которое изменяется при этом непрерывно, начиная со значения  $\arg z_0$  \*). В силу непрерывности  $\arg z$  и  $|z|$  значение  $w = \sqrt[n]{z}$ , которое вполне определяется сделанным выбором аргумента, также будет изменяться непрерывно.

Предположим, что кривая  $C$  замкнута и не содержит внутри себя точку  $z = 0$ . Тогда при полном обходе  $C$  точкой  $z$  точка  $w = \sqrt[n]{z}$ , где  $\sqrt[n]{z}$  — выбранное нами значение корня, описывает некоторую замкнутую кривую  $\Gamma$ , возвращаясь к своему первоначальному положению, ибо при этом  $\arg z$  возвращается к начальному значению  $\arg z_0$ . Значения корня, определяемые другим выбором начального значения  $\arg z_0$  (отличающимся от прежнего на целое кратное  $2\pi$ ) при полном обходе  $C$ , очевидно, также описывают замкнутые кривые  $\Gamma_k$ , отличающиеся от кри-

\*) Очевидно, это значение при фиксированных  $z_0$ ,  $C$  и  $\arg z_0$  определяется однозначно.

вой  $\Gamma$  лишь поворотом на угол  $2k\pi/n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$  (рис. 10, сплошные линии).

Пусть теперь  $\tilde{C}$  — замкнутая кривая без точек самопересечения, содержащая точку  $z = 0$  внутри себя, и  $z_0$  — некоторая точка кривой  $\tilde{C}$ . Тогда при полном обходе  $\tilde{C}$ , начиная от  $z_0$  в положительном направлении, соответствующая точка  $w = \sqrt[n]{z}$

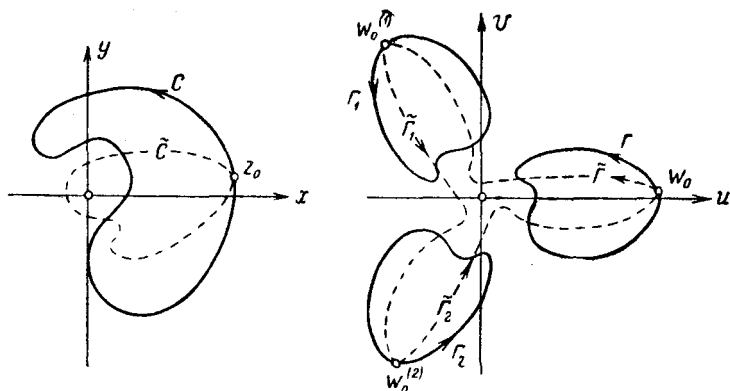


Рис. 10.

(значение корня определяется так же, как и выше) не возвращается в свое первоначальное положение, а занимает новое положение  $w_0^{(1)}$ , где  $w_0^{(1)} = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) w_0$  — значение  $\sqrt[n]{z_0}$ , отличное от  $w_0$ . Это объясняется тем, что  $\arg z$  при обходе кривой  $\tilde{C}$  получает приращение  $2\pi$ . К своему начальному

положению точка  $w = \sqrt[n]{z}$  возвращается лишь при  $n$ -кратном обходе кривой  $\tilde{C}$  (см. рис. 10, пунктирная линия; здесь  $n = 3$ ).

Отсюда следует, что в любой области  $D$ , которая не содержит ни одной замкнутой кривой, обходящей точку  $z = 0$ , можно выделить  $n$  непрерывных и однозначных функций, принимающих каждая одно из значений  $\sqrt[n]{z}$ . Эти  $n$  функций называются ветвями многозначной функции  $w = \sqrt[n]{z}$ ; их значения в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга множителем  $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ . Каждая такая ветвь будет, очевидно, осуществлять однолистное отображение области  $D$ , поэтому в каждой точке этой области применима теорема о производной обратной функции (п. 5), согласно которой существует вполне

определенное значение производной

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{z}}{z} *),$$

или, если условиться писать  $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ ,

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}. \quad (8)$$

Таким образом, любая из построенных ветвей является в области  $D$  аналитической функцией.

В области  $D$  рассматриваемого типа и бесконечнозначная функция  $\text{Arg } z$  распадается на бесчисленное множество непрерывных и однозначных ветвей. Каждую такую ветвь мы будем обозначать символом  $\text{arg } z$  и всякий раз указывать, как эта ветвь выделяется.

Если же область  $D$  содержит хотя бы одну замкнутую кривую, обходящую точку  $z = 0$ , то в такой области ветви функции  $\sqrt[n]{z}$  нельзя отделить друг от друга. Именно, если в окрестности некоторой точки  $z \neq 0$  из  $D$  мы и выделим какую-либо ветвь (для достаточно малой окрестности точки  $z \neq 0$  это возможно), то, двигаясь по кривой, обходящей  $z = 0$ , мы придем к другой ветви. Следовательно, в такой области  $D$  мы не можем подобно предыдущему случаю рассматривать функцию  $\sqrt[n]{z}$  как совокупность отдельных (однозначных) аналитических функций. Точка  $z = 0$ , в любой окрестности которой нельзя отделить  $n$  отдельных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$  (ветви  $\sqrt[n]{z}$  как бы соединяются в этой точке), называется *точкой ветвления* этой функции.

В качестве примера области  $D$  первого типа можно рассматривать плоскость  $z$  с вырезанной линией  $L$ , идущей от точки  $z = 0$  в бесконечность. Если  $L$  совпадает с положительной полуосью, то ветви функции  $w = \sqrt[n]{z}$  отображают область  $D$  на секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \arg w < (k+1) \frac{2\pi}{n}.$$

Эти отображения обратны к рассмотренному выше отображению с помощью функции  $w = z^n$ .

Область  $D$  заведомо является областью второго типа, если она содержит точку  $z = 0$  внутри себя.

\*) Для функции и производной берется одинаковая ветвь  $\sqrt[n]{z}$ .

**7. Функция Жуковского**  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  определена и однозначна для всех  $z \neq 0$ ; она, очевидно, аналитична для тех же  $z$ . Найдем область однолиственности отображения

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (1)$$

Для этого предположим, что  $z_1$  и  $z_2$  переходят в одну точку  $w$ ; тогда имеем  $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$ , откуда  $(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$  и, следовательно,

$$z_1 = z_2 \quad \text{или} \quad z_1 z_2 = 1. \quad (2)$$

Таким образом, для однолиственности отображения (1) в какой-либо области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы  $D$  не содержала никаких двух точек  $z_1$  и  $z_2$ , связанных соотношением  $z_1 z_2 = 1$ .

Этому условию удовлетворяет, например, внутренность единичного круга  $|z| < 1$  или его внешность  $|z| > 1$ . Для того чтобы изучить картину отображения (1), положим  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = u + iv$  и отделим действительные и мнимые части. Тогда отображение (1) перепишется в виде

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi, \quad (3)$$

и мы видим, что каждая окружность  $|z| = r_0 < 1$  преобразуется с его помощью в кривую

$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \cos \varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right) \sin \varphi, \quad (4)$$

т. е. в эллипс с полуосями  $a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$ ,  $b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)$ , проходящий в отрицательном направлении\*). При  $r_0 \rightarrow 1$  этот эллипс сжимается в отрезок  $[-1, 1]$  оси  $u$ , при  $r_0 \rightarrow 0$  уходит в бесконечность. Следовательно, функция (1) отображает внутренность круга  $|z| < 1$  на внешность отрезка  $[-1, +1]$  (рис. 11). Все внутренние точки этого отрезка — двойные (п. 3), и его можно считать как бы состоящим из двух берегов: функция (1) преобразует верхнюю полуокружность  $|z| = 1$  в нижний берег, а нижнюю — в верхний.

\*) На это указывает знак «—» во втором из уравнений (4).

Отметим еще, что радиусы  $\arg z = \varphi_0$ ,  $0 < r < 1$  переходят при отображении (1) в ветви гипербол

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1 \quad (5)$$

(рис. 11). Фокусы этих гипербол, так же как и эллипсов (4), расположены в концах отрезка  $[-1, +1]$ .

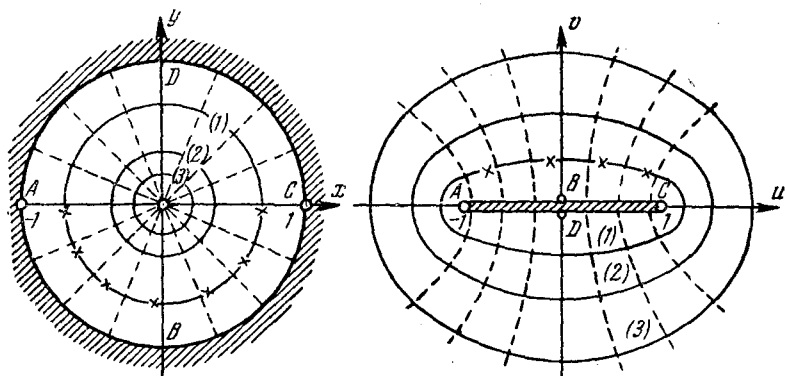


Рис. 11.

Из соотношений (3) вытекает также, что окружности  $|z| = r_0 > 1$  преобразуются в эллипсы с полуосями  $a = \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right)$ ,  $b = \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{1}{r_0} \right)$ . Эти эллипсы совпадают с теми, в которые преобразуются окружности  $|z| = r_0 < 1$ , только обходятся они в положительном направлении. Следовательно, функция (1) отображает и внешность круга  $|z| > 1$  также на внешность отрезка  $[-1, +1]$  оси  $u$ , причем верхняя полуокружность переходит в верхний берег отрезка, а нижняя — в нижний.

Обратная к (1) функция

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (6)$$

двузначна — каждой точке  $w$  она относит две точки  $z_1$  и  $z_2$ , связанные условием  $z_1 z_2 = 1$  (см. формулу (2)). Эта двузначность обусловлена наличием в формуле (6) квадратного корня. Если положить  $z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1}$ , то другим значением  $z$ , соответствующим  $w$ , будет  $z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1}$  и непосредственно видно, что  $z_1 z_2 = 1$ .

Обозначим через  $\rho_1$ ,  $\theta_1$  и, соответственно,  $\rho_2$ ,  $\theta_2$  модули и аргументы комплексных чисел  $w - 1$  и  $w + 1$  (рис. 12). Тогда модуль и аргумент корня в формуле (6) будут соответственно равны  $\sqrt{\rho_1 \rho_2}$  и  $(\theta_1 + \theta_2)/2$  (см. правило извлечения корня, п. 2). Отсюда следует, что при обходе точкой  $w$  замкнутой линии типа I или II (рис. 12), охватывающей лишь одну из точек  $+1$  и  $-1$ , значение корня меняется на противоположное по знаку. В самом деле, при таком обходе  $\theta_1$  (или  $\theta_2$ ) меняется на  $2\pi$ , а  $\theta_2$  (или  $\theta_1$ ) не изменяется; следовательно, аргумент корня меняется на  $\pi$ , модуль же корня при обходе любого замкнутого контура возвращается к начальному значению.

Если теперь точка  $w$  обходит замкнутую линию типа III (рис. 12), охватывающую обе точки  $\pm 1$ , то значение корня не изменяется, ибо при этом и  $\theta_1$  и  $\theta_2$  изменяются на  $2\pi$  и, следовательно, аргумент корня  $(\theta_1 + \theta_2)/2$  также изменяется на  $2\pi$ . Значение корня не изменяется и в том случае, когда  $w$  обходит замкнутую линию типа IV (рис. 12), не содержащую внутри себя ни одной из точек  $\pm 1$ , ибо при этом ни  $\theta_1$ , ни  $\theta_2$  не изменяются.

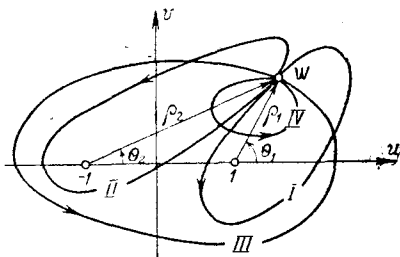


Рис. 12.

Таким образом, в любой области  $\Delta$ , в которой нельзя провести замкнутую линию, обходящую лишь одну из точек  $+1$  или  $-1$ , функция (6) допускает выделение двух однозначных ветвей. Эти ветви в каждой фиксированной точке  $w$  отличаются знаком корня в формуле (6) и приводят к двум значениям  $z$ , связанным условием  $z_1 z_2 = 1$ . Каждая из этих ветвей осуществляет однолистное отображение и по теореме о производной обратной функции аналитична.

Если же в области  $\Delta$  можно обойти точку  $+1$  (не обходя при этом  $-1$ ) или  $-1$  (не обходя  $+1$ ), например, если  $\Delta$  содержит внутри хотя бы одну из этих точек, то в такой области ветви функции (6) нельзя отделить друг от друга. Точки  $w = \pm 1$ , в которых обе ветви функции (6) как бы соединяются между собой, называются *точками ветвления* этой функции.

В качестве примера области  $\Delta$  первого типа можно рассматривать плоскость  $w$  с вырезанной линией  $\Lambda$ , соединяющей точки  $-1$  и  $+1$ . Если  $\Lambda$  есть отрезок  $[-1, 1]$  действительной оси, то две ветви функции (6) отображают  $\Delta$ , соответственно, на внутренность и внешность единичного круга. Эти отображения обратны к рассмотренным выше (рис. 11).



**8. Показательная функция и логарифм.** Показательную функцию  $e^z$  мы определим \*) для любого комплексного  $z = x + iy$  соотношением

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Покажем, что: 1) для действительных  $z = x$  наше определение совпадает с обычным; 2) определенная нами функция всюду аналитична; 3) сохраняется обычная формула дифференцирования

$$(e^z)' = e^z; \quad (2)$$

4) сохраняется основное свойство показательной функции (теорема сложения):

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (3)$$

Первое свойство следует непосредственно из формулы (1), если положить в ней  $y = 0$ , второе — из теоремы п. 5, ибо в любой точке плоскости справедливы условия Коши — Римана

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) &= \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y); \\ \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) &= - \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y). \end{aligned} \right\}$$

\*) Читателю, которому наше определение показательной функции кажется слишком формальным, мы рекомендуем определить ее по аналогии с такой же функцией действительного переменного соотношением

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n. \quad (*)$$

При этом необходимо доказать существование предела последовательности комплексных чисел  $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  при любом  $z$  и вычислить этот предел. Это проще всего сделать так: по правилам возведения в степень имеем:

$$|z_n| = \left|1 + \frac{x}{n} + i \frac{y}{n}\right|^n = \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right\}^{n/2}$$

и  $\arg z_n = n \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n}$ ; отбрасывая в первом выражении малую высшего порядка  $(x^2 + y^2)/n^2$  в основании степени и заменяя во втором малый угол его тангенсом  $\frac{y/n}{1 + x/n}$ , мы видим, что существуют  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{n/2} = e^x$

и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \frac{y}{n}}{1 + x/n} = y$ . Но из существования этих пределов следует существование предела (\*), причем мы получаем, что  $|e^z| = e^x$  и  $\arg e^z = y$ ; это совпадает с формулой (1).

Для доказательства свойства 3), используя независимость производной от направления, вычислим  $e^z$  по направлению оси  $x$ . Имеем:

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x} e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z,$$

что и дает формулу (2).

Наконец, для доказательства свойства 4) положим  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ ; тогда

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2} \{\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\} = e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

что и требуется (мы использовали, кроме определения (1), правило перемножения комплексных чисел и известные формулы тригонометрии).

Отметим, что показательная функция ни для какого комплексного  $z = x + iy$  не обращается в нуль. В самом деле,  $|e^z| = e^x > 0$ .

Полагая, в частности, в соотношении (1)  $x = 0$ ,  $y = \varphi$ , получим классическую формулу Эйлера \*)

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (4)$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число  $z$  с модулем  $r$  и аргументом  $\varphi$  можно записать в следующей показательной форме:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}. \quad (5)$$

Наряду со свойствами 1)–4), которые справедливы и в действительной и в комплексной областях, показательная функция комплексного переменного обладает и специфическим свойством: она оказывается *периодической* с чисто мнимым основным периодом  $2\pi i$ . В самом деле, для любого целого числа  $k$  имеем:

$$e^{z+2\pi ki} = e^z e^{2\pi ki} = e^z, \quad (6)$$

ибо по формуле Эйлера  $e^{2\pi ki} = 1$ .

С другой стороны, если  $e^{z_1} = e^{z_2}$ , и  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , то из определения (1) мы имеем  $e^{x_1} = e^{x_2}$ ,  $\cos y_1 = \cos y_2$ ,  $\sin y_1 = \sin y_2$ , откуда следует, что  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1 + 2k\pi$ , или

$$z_2 - z_1 = 2k\pi i, \quad (7)$$

где  $k$  — целое число.

---

\*) Л. Эйлер привел ее в своем «Введении в анализ бесконечно малых» (1748); формулы, равносильные (4), появляются в его работах, начиная с 1740 г.

Ввиду свойства периодичности изучение функции  $e^z$  на всей плоскости сводится к изучению ее в полосе  $0 \leq y < 2\pi$ . Из только что проведенного анализа видно, что отображение (1) однолистно в этой полосе: из равенства  $e^{z_1} = e^{z_2}$  следует соотношение (7), а полоса не содержит ни одной пары точек, связанных этим соотношением.

Введем в плоскости  $w$  полярные координаты, положив  $w = \rho e^{i\theta}$ ; тогда (1) запишется в виде двух равенств

$$\rho = e^x, \quad \theta = y. \quad (8)$$

Следовательно, отображение (1) преобразует прямые  $y = y_0$  в лучи  $\theta = y_0$ , а отрезки  $x = x_0$ ,  $0 \leq y < 2\pi$  — в окружности  $\rho = e^{x_0}$ . Полоса  $0 < y < 2\pi$  преобразуется при этом в плоскость  $w$  с разрезом вдоль положительной полуоси, половина этой полосы  $0 < y < \pi$  — в верхнюю полуплоскость. Вообще полосы  $0 < \operatorname{Im} z < h$  показательная функция преобразует в углы  $0 < \arg w < h$  (рис. 13).

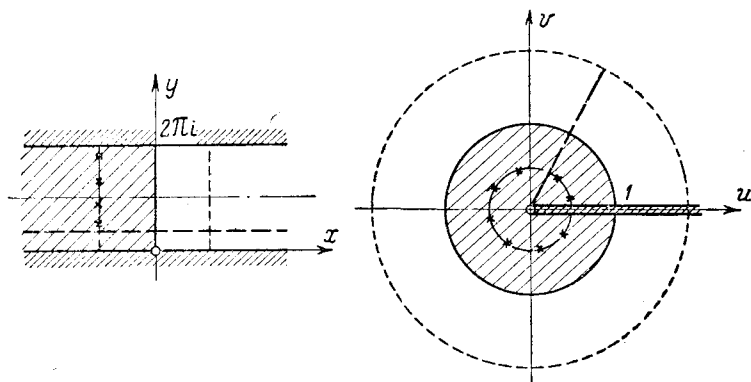


Рис. 13.

*Логарифмическая функция* определяется как функция, обратная показательной: число  $w$  называется логарифмом числа  $z$ , если  $e^w = z$ ; обозначение:

$$w = \ln z. \quad (9)$$

Из определения вытекает основное свойство логарифмов: если  $w_1 = \ln z_1$  и  $w_2 = \ln z_2$ , то  $\ln z_1 + \ln z_2$  является логарифмом числа  $z = z_1 z_2$ :

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln (z_1 z_2). \quad (10)$$

В самом деле, имеем  $z_1 = e^{w_1}$ ,  $z_2 = e^{w_2}$ ; следовательно,  $z_1 z_2 = e^{w_1 + w_2}$ .

В частности, полагая в (10)  $z_1 = |z|$ ,  $z_2 = e^{i \arg z}$ , получим:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (11)$$

В формуле (11) символ  $\arg z$  может обозначать любое значение аргумента  $z$ ; поэтому *каждое комплексное число,  $z \neq 0$  имеет бесчисленное множество логарифмов*. Иными словами, логарифм есть бесконечнозначная функция: ее действительная часть определяется однозначно, а мнимая — с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$  \*). Для четкости мы будем обозначать эту многозначную функцию специальным символом  $\text{Ln } z$ , так что

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi). \quad (12)$$

Символом  $\text{Ln } z$  мы будем обозначать одно из значений  $\text{Ln } z$ , в случае надобности специально оговаривая, какое именно значение выбирается, так что во всех предыдущих формулах, содержащих символ  $\ln$ , не требуется изменения обозначения.

Рассмотрим подробнее вопрос о выборе значений  $\text{Ln } z$ . Как и для рассмотренных выше многозначных функций, значение  $\text{Ln } z$  определяется значением аргумента, которое приписано точке  $z$ . Предположим, что точка  $z$ , начиная от положения  $z_0 \neq 0$ , описывает некоторую кривую  $C$ , не проходящую через начало координат. Как и выше, через  $\arg z$  мы обозначим однозначную и непрерывную вдоль  $C$  ветвь функции  $\text{Arg } z$ , определяемую каким-либо фиксированным начальным значением  $\arg z_0$ . Через  $\ln z$  будем обозначать значение  $\text{Ln } z$ , определяемое равенством (11) при выбранном значении  $\arg z$ ; очевидно, функция  $\ln z$  будет однозначной и непрерывной вдоль  $C$ .

Предположим, что кривая  $C$  замкнута и не содержит внутри себя точку  $z = 0$ . Когда  $z$  описывает  $C$ , точка  $w = \ln z$  пробегает некоторую замкнутую кривую  $\Gamma$ ; другие значения логарифма, определяемые другим начальным значением  $\arg z_0$ , опишут кривые  $\Gamma_k$ , отличающиеся от  $\Gamma$  лишь сдвигом на вектор  $2k\pi i$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , (рис. 14, сплошные линии). Если теперь  $\tilde{C}$  — замкнутая кривая без точек самопересечения, содержащая  $z = 0$  внутри себя, то при полном обходе ее точкой  $z$  в положительном направлении точка  $w = \ln z$  не вернется к своему первоначальному положению, а займет новое положение  $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$  (рис. 14, пунктирные линии).

Отсюда следует, что в любой области  $D$ , которая не содержит замкнутых кривых, обходящих точку  $z = 0$ , можно выделить бесчисленное множество непрерывных и однозначных *ветвей* многозначной функции  $w = \text{Ln } z$ , значения которых в

\*) К такому пониманию логарифма впервые пришел Л. Эйлер; свои идеи он изложил в работе 1749 г. «О споре между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел».

каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми  $2k\pi i$ . Каждая такая ветвь  $\ln z$  будет осуществлять взаимно однозначное отображение области  $D$  и, следовательно, по теореме о производной обратной функции будет обладать производной

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \quad (13)$$

(Заметим, что производная одна и та же для всех ветвей.) Таким образом, все такие ветви  $\ln z$  будут аналитическими функциями.

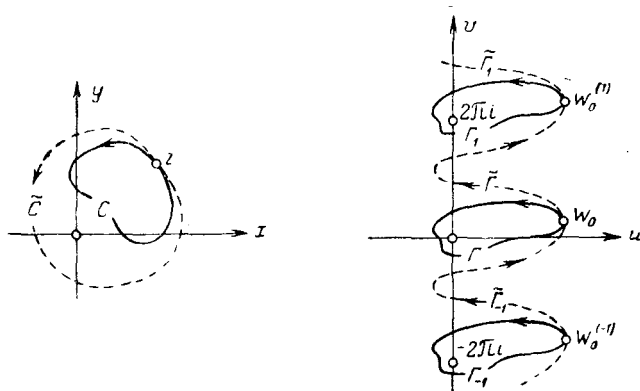


Рис. 14.

Если же область  $D$  содержит хотя бы одну замкнутую кривую, охватывающую точку  $z=0$  (например, если она содержит эту точку внутри себя), то в такой области ветви функции  $\ln z$  нельзя отделить друг от друга. Точка  $z=0$ , в которой как бы соединяются все ветви  $\ln z$ , называется *точкой ветвления* этой функции.

**9. Тригонометрические и гиперболические функции** в комплексной области просто выражаются через показательную функцию. Для действительного переменного  $x$  формула Эйлера (4) п. 8 дает:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

откуда

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Учитывая это, примем по определению и для любого комплексного  $z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1)$$

Так определенные функции: 1) для действительных  $z = x$  совпадают соответственно с обычными синусом и косинусом; 2) всюду аналитичны; 3) подчиняются обычным формулам дифференцирования:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z;$$

4) периодичны с действительным периодом  $2\pi$ ; 5)  $\sin z$  — нечетная функция,  $\cos z$  — четная; 6) подчиняются обычным тригонометрическим соотношениям:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z \text{ и т. п.}$$

Все эти утверждения вытекают из определения (1); читатель может убедиться в этом, проведя соответствующие вычисления.

Изучим отображение, осуществляемое первой из этих функций. Полагая

$$iz = z_1, \quad e^{z_1} = z_2, \quad z_3 = -iz_2 = \frac{e^{iz}}{i}, \quad (2)$$

получим:

$$w = \frac{1}{2} \left( z_3 + \frac{1}{z_3} \right) = \sin z. \quad (3)$$

Мы видим, что наше отображение можно рассматривать как суперпозицию уже изученных отображений. Найдем прежде всего условия его однолистности. Пусть область  $D$  при отображениях (2) переходит последовательно в  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ . Первое и третье из отображений (2) однолистно всюду; для однолистности второго необходимо и достаточно, чтобы  $D_1$  не содержала ни одной пары точек  $z'_1$  и  $z''_1$ , для которых

$$z'_1 - z''_1 = 2k\pi i,$$

где  $k \neq 0$  — целое число (см. условие (7) предыдущего пункта). Для однолистности отображения (3) необходимо и достаточно, чтобы  $D_3$  не содержала ни одной пары точек  $z'_3$  и  $z''_3$ , для которых

$$z'_3 z''_3 = 1$$

(см. условие (2) п. 7). Переходя с помощью формул (2) к плоскости  $z$ , получим, что для однолистности отображения  $w = \sin z$  в области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы  $D$  не содержала ни одной пары точек  $z'$ ,  $z''$ , для которых, с одной стороны,

$$z' - z'' = 2k\pi \quad (k \neq 0 - \text{целое}), \quad (4)$$

и, с другой,  $e^{i(z' + z'')} = -1$ , или

$$z' + z'' = (2k + 1)\pi \quad (k - \text{целое}). \quad (5)$$

Этим условиям удовлетворяет, например, полуполоса  $-\pi < x < \pi$ ,  $y > 0$ . Последовательные этапы ее отображения изображены на рис. 15. Семейства лучей  $x = x_0$  и отрезков  $y = y_0$  переходят соответственно в семейства софокусных гипербол и эллипсов; вдвое более узкая полоса  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$  преобразуется в верхнюю полуплоскость.

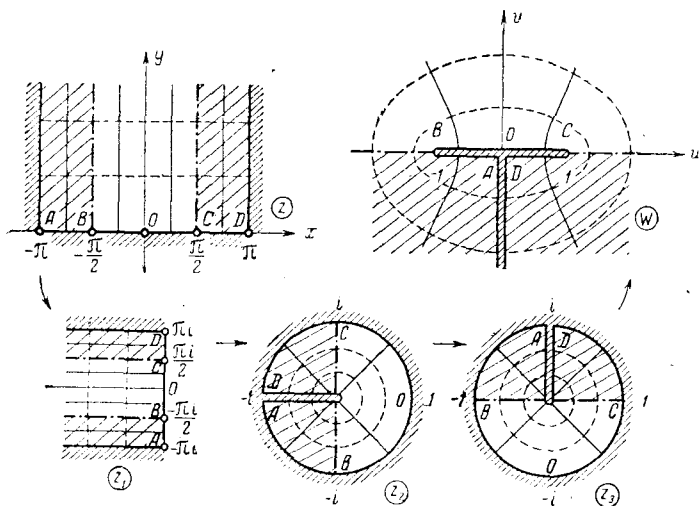


Рис. 15.

Мы видим, что  $\sin z$  в комплексной области *неограничен*; например, на лучах  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $y > 0$  он принимает действительные значения, по модулю большие единицы и, вообще, сколь угодно большие.

Отметим еще, что в (замкнутой) полуполосе  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $y \geq 0$  функция  $\sin z$  принимает значение 0 лишь в точках  $z=0$  и  $z = \pm\pi$ ; учитывая нечетность и периодичность этой функции, отсюда можно заключить, что она обращается в 0 лишь на действительной оси в точках

$$z = k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для полноты мы приводим на рис. 16 *поверхность модуля*, или «*рельеф*» функции  $\sin z$ , т. е. поверхность в пространстве  $(x, y, u)$  с уравнением  $u = |\sin z|$ ; это — поверхность периодическая с действительным периодом  $\pi$ . На ней нанесены две системы линий — это линии уровня  $|\sin z|$  и  $\operatorname{argsin} z$ . Сечение поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через ось  $x$ ,





всюду, кроме точек  $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); при приближении к этим точкам  $\operatorname{tg} z$  неограниченно возрастает. То же можно сказать о функции  $\operatorname{ctg} z$  и точках  $z_k = k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Из формул (6) следует, что эти функции периодические с периодом  $\pi$ . В самом деле, например,

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = -i \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = -i \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = \operatorname{tg} z.$$

Отображение, осуществляемое функцией  $w = \operatorname{tg} z$ , мы рассмотрим ниже, в п. 33. Здесь мы приведем лишь рельеф тангенса, т. е. поверхность  $u = |\operatorname{tg} z|$  (рис. 17); это — поверхность

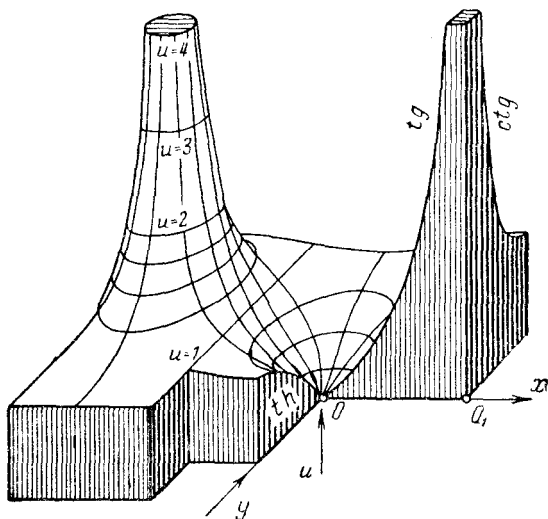


Рис. 17.

периодическая с действительным периодом  $\pi/2$ . Она имеет ярко выраженные пики над точками  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); ее сечение вертикальной плоскостью, проходящей через ось  $x$ , дает график  $|\operatorname{tg} x|$  (\*). По мере удаления от этой оси поверхность становится все более плоской и приближается

\*) Сечения поверхности плоскостями  $x = k\pi$  и  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) дают соответственно графики гиперболических функций  $|\operatorname{th} y|$  и  $|\operatorname{cth} y|$  (см. ниже).

к плоскости  $u = 1$ . На поверхности нанесены линии уровня  $|\operatorname{tg} z|$  и  $\operatorname{argtg} z$ .

*Гиперболические функции* в комплексной области определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (7)$$

и

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \quad (8)$$

Они весьма просто выражаются через тригонометрические функции

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и поэтому несущественно от них отличаются. На рис. 16 и 17 указаны сечения поверхностей модуля для  $\sin z$  и  $\operatorname{tg} z$ , дающие графики гиперболических функций.

Тригонометрические и гиперболические функции выражаются, как мы видели, через показательную функцию, поэтому обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции можно выразить через логарифмы. Получим такое выражение, например, для  $w = \arccos z$ . По определению имеем:

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

откуда  $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ , решая квадратное (относительно  $e^{iw}$ ) уравнение, находим  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  и

$$w = \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

(знаки  $\pm$  в формуле решения квадратного уравнения можно опустить, если понимать корень как двузначную функцию). В силу соотношения  $(z + \sqrt{z^2 - 1})(z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1$  изменение знака перед корнем сводится к изменению знака перед логарифмом, поэтому знак «—» в последней формуле можно не писать:

$$w = \arccos z = i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (10)$$

{по нашему условию корень все равно имеет два знака}.

Аналогичные формулы можно дать и для других функций:

$$\left. \begin{aligned} \arcsin z &= \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} - i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{arctg} z &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}, \\ \operatorname{arsh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z + 1}{z - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Все эти функции многозначны, ибо  $\ln$  в правой части формул (10) и (11) может обозначать любое значение логарифма. Способы выделения их однозначных ветвей аналогичны рассмотренным выше; все такие ветви будут аналитическими функциями.

**10. Общая степенная функция**  $w = z^a$ , где  $a = \alpha + i\beta$  — произвольное комплексное число, определяется соотношением

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}. \quad (1)$$

Полагая здесь  $z = re^{i\varphi}$ , получим  $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$  и, следовательно,

$$z^a = e^{a \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} e^{i[\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r]}, \quad (2)$$

где  $k$  — произвольное целое число. Отсюда видно, что при  $\beta \neq 0$  функция  $z^a$  всегда имеет бесконечно много значений, лежащих (при фиксированных  $z$  и  $a$ ) на окружностях  $|w| = \rho_k$  с радиусами

$$\rho_k = e^{a \ln r - \beta \varphi} e^{-2k\pi\beta} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3)$$

образующими геометрическую бесконечную в обе стороны прогрессию со знаменателем  $e^{-2\pi\beta}$ . Аргументы этих значений

$$\theta_k = a\varphi + \beta \ln r + 2k\pi\alpha \quad (4)$$

образуют также бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью  $2\pi\alpha$ .

При  $\beta = 0$ , т. е. при действительных  $a$ , значения  $z^a$  располагаются на окружности  $|w| = e^{a \ln r} = r^a$ , а их аргументы суть

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi\alpha. \quad (5)$$

Если  $a = p/q$  — рациональное число (мы считаем дробь  $p/q$  несократимой), то все значения  $\theta_k$  будут отличаться от  $\theta_0$  из этих значений (например,  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q-1}$ ) на целое кратное  $2\pi$ . Сле-

довательно, в этом случае функция  $w = z^a$  конечнозначна и совпадает с функцией  $\sqrt[q]{z^p}$ :

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}. \quad (6)$$

Если же  $a$  — иррациональное действительное число, то среди значений  $\theta_k$  в формуле (5) нет отличающихся на целое кратное  $2\pi$  и, следовательно, функция  $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$  бесконечнозначна.

Многозначность общей степенной функции, как и тех элементарных функций, которые мы рассматривали выше, обусловлена многозначностью аргумента. Способы выделения ее однозначных ветвей прежние; точкой ветвления служит  $z = 0$ .

Наряду с общей степенной функцией (1) можно рассматривать *общую показательную функцию*

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z \ln |a|} \cdot e^{zi \operatorname{Arg} a}. \quad (7)$$

В отличие от функции (1) функция (7) представляет собой совокупность отдельных, не связанных между собой однозначных функций, отличающихся множителями  $e^{2k\pi iz}$ , где  $k$  — целое число.

## § 4. Интегрирование функций комплексного переменного

Здесь мы рассмотрим понятие интеграла от функций комплексного переменного и важнейшие свойства аналитических функций, связанные с понятием интеграла или опирающиеся на него. В частности, будет, например, установлена равносильность понятий об аналитической функции, как о функции, дифференцируемой в каждой точке области определения, и как о функции, интеграл от которой не зависит от пути (см. теорему 1 п. 12 и теорему 3 п. 17). Это дает новую концепцию в построении теории аналитических функций. Приложения понятия интеграла и теорем, на нем основанных, мы рассмотрим в следующих главах.

**11. Интеграл от функции комплексного переменного.** Пусть задана некоторая ориентированная кривая  $C$  и на ней — функция комплексного переменного  $f(z)$ . По определению *интегралом* от  $f(z)$  вдоль  $C$  называют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (z_{k+1} - z_k) = \int_C f(z) dz, \quad (1)$$

где  $z_0 = a, z_1, \dots, z_{n+1} = b$  — последовательные точки, разбивающие  $C$  на  $n$  участков, через  $a$  и  $b$  обозначены концы  $C$ ,  $\xi_k$  — произвольная точка, лежащая на участке  $[z_k, z_{k+1}]$  кривой  $C$ , и предел берется в предположении, что  $\max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$ .

Если  $C$  — кусочно-гладкая кривая, а  $f(z)$  — кусочно-непрерывная и ограниченная функция, то интеграл (1) всегда существует. Доказательство сводится к известной из анализа теореме существования криволинейного интеграла от функций действительного переменного\*). В самом деле, положив

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y), \\ z_k &= x_k + iy_k, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k, \\ \zeta_k &= \xi_k + i\eta_k, \quad u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) &= \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k\} + i \sum_{k=0}^{n-1} \{u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Суммы в правой части формулы (3) являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов. В наших условиях эти интегралы существуют и, следовательно, существует

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx. \quad (4)$$

С помощью формулы (4) вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению действительных интегралов.

Применяя введенные определения, легко видеть, что производная и интеграл от комплексной функции действительного переменного  $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$  представляются следующими линейными комбинациями:

$$w'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t), \quad (5)$$

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt + i \int_a^b \psi(t) dt. \quad (6)$$

Пусть  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  дает параметрическое представление кривой  $C$ , причем  $z(\alpha) = a$ ,  $z(\beta) = b$ ; тогда, пользуясь формулой (4), мы сведем вычисление интеграла от  $f(z)$  вдоль  $C$  к вычислению интеграла от комплексной функции действительного переменного:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt. \quad (7)$$

\*) См. Фихтенгольц, т. III, стр. 27 или Смирнов, т. II, стр. 206 и сл. Здесь и в дальнейшем мы ссылаемся на курсы, указанные в предисловии.

Из формулы (4) вытекает также, что на интегралы от функций комплексного переменного распространяются обычные свойства криволинейных интегралов:

$$\int_C \{af(z) + bg(z)\} dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz, \quad (8)$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz, \quad (9)$$

$$\int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz \quad (10)$$

( $a$  и  $b$  — комплексные постоянные, через  $C_1 + C_2$  обозначена кривая, состоящая из  $C_1$  и  $C_2$ ; через  $C^-$  — кривая, совпадающая с  $C$ , но проходящая в противоположном направлении).

Докажем еще одно свойство интеграла:

Пусть  $M = \max |f(z)|$  на кривой  $C$  и  $l$  — длина  $C$ , тогда

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq Ml. \quad (11)$$

Доказательство вытекает непосредственно из определения интеграла. В самом деле, имеем:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|,$$

где  $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|$  — длина ломаной  $z_0 z_1 \dots z_n$ , вписанной в кривую  $C$ , и в пределе при  $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$  получаем (11).

**12. Теорема Коши.** В общем случае  $\int_C f(z) dz$  зависит как

от подынтегральной функции  $f(z)$ , так и от кривой  $C$ . Однако, если функция  $f(z)$  аналитична в некоторой односвязной области, содержащей кривую  $C$ , то интеграл полностью определяется положением концов  $C$  и не зависит от вида этой линии. Иными словами, имеет место

**Теорема 1** (О. Коши, 1825 г.). Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то для всех кривых  $C$ , лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл  $\int_C f(z) dz$  имеет одно и то же значение.

Мы докажем эту теорему в дополнительном предложении и \*) непрерывности производной  $f'(z)$  (в определении аналитичности п. 5 требуется лишь существование этой производной).

Пусть, как всегда,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ; в силу соотношения

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx \quad (1)$$

(см. формулу (4) предыдущего пункта) вопрос о независимости интеграла  $\int_C f(z) dz$  от пути сводится к вопросу о независимости от пути криволинейных интегралов

$$\int_C u dx - v dy, \quad \int_C u dy + v dx. \quad (2)$$

Но, как известно из анализа \*\*), в односвязной области для независимости от пути криволинейного интеграла  $\int_C P dx + Q dy$ , где  $P$  и  $Q$  — функции, обладающие непрерывными частными производными, необходимо и достаточно, чтобы выражение, стоящее под знаком этого интеграла было полным дифференциалом, т. е. чтобы в каждой точке области  $D$  имело место соотношение  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Для интегралов (2) эти соотношения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

непрерывность же частных производных вытекает из предположения о непрерывности  $f'(z)$ . Уравнения (3) совпадают с условиями Коши — Римана и удовлетворяются, так как  $f(z)$  аналитическая функция. Теорема доказана.

В силу этой теоремы для функций, аналитических в односвязных областях, вместо  $\int_C f(z) dz$  мы можем писать  $\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ , где через  $z_0$  и  $z$  обозначены концы кривой  $C$ .

Основываясь на теореме I, можно доказать ряд предложений, аналогичных обычным предложениям интегрального исчисления. Прежде всего имеет место

\*) Полное доказательство см. Маркушевич, [3], стр. 137—143, 154—162, или Шаба т [12], стр. 73—85.

\*\*) См. Фихтенгольц, т. III, стр. 68 или Смирнов, т. II, стр. 216.

**Теорема 2.** Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то интеграл

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = F(z), \quad (4)$$

рассматриваемый в зависимости от своего верхнего предела, также является аналитической в  $D$  функцией, причем

$$F'(z) = \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = f(z). \quad (5)$$

В самом деле, по определению производной и свойствам интеграла (9) и (10) из предыдущего пункта имеем:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{z_0}^{z+h} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу непрерывности \*)  $f(z)$  в точке  $z$  можно написать:

$$f(\xi) = f(z) + \eta(\xi),$$

где  $\eta(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow z$ ; подставляя это в (6), получим:

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z) d\xi + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(z) d\xi. \quad (7)$$

Так как  $f(z)$  — постоянная величина при интегрировании по  $\xi$ , то

$$\int_z^{z+h} f(z) d\xi = f(z) \int_z^{z+h} d\xi = f(z) \cdot h,$$

ибо из определения непосредственно следует, что  $\int_z^{z+h} d\xi = h$ .

Далее, из неравенства (11) предыдущего пункта имеем:

$$\left| \int_z^{z+h} \eta(\xi) d\xi \right| \leq \max |\eta(\xi)| \cdot h$$

\*) Непрерывность  $f(z)$  является следствием ее аналитичности.



(путь интегрирования от точки  $z$  до  $z+h$  по теореме 1 можно считать прямолинейным, поэтому его длина равна  $|h|$ ). Таким образом, в (7) первый предел равен  $f(z)$ , а второй — нулю, т. е.  $F'(z) = f(z)$ , что и требовалось доказать.

Функция, производная которой равна заданной функции  $f(z)$ , называется *первообразной* этой функции. Доказанная теорема утверждает, что интеграл от  $f(z)$ , рассматриваемый как функция своего верхнего предела, является одной из первообразных функции  $f(z)$ .

**Теорема 3.** *Любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга не более чем на постоянное слагаемое.*

Пусть  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  — эти первообразные и

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция  $\Phi(z)$  постоянна.

По формуле для производной (см. (13) п. 5) имеем:

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

ибо по нашему условию  $\Phi'(z) = F'_1(z) - F'_2(z) = f(z) - f(z) = 0$ . Отсюда следует, что  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ , следовательно,  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  постоянны. Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет вычислять интегралы с помощью первообразных.

**Теорема 4.** *Если  $F(z)$  — произвольная первообразная аналитической функции  $f(z)$ , то*

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0). \quad (8)$$

В самом деле, по теореме 2 функция  $F_1(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$  является одной из первообразных для  $f(z)$ , функция  $F(z)$  по условию также первообразная, следовательно, по теореме 3

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + C,$$

где  $C$  — некоторая постоянная. Полагая в этом равенстве  $z = z_0$ , найдем:  $F(z_0) + C = 0$ , откуда  $C = -F(z_0)$ , что и дает искомую формулу (8).

Отметим еще, что теореме Коши, доказанной в начале этого пункта, можно придать следующую форму:

**Теорема.** Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то ее интеграл вдоль любого замкнутого контура  $C$ , лежащего в  $D$ , равен нулю:

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (9)$$

Доказательство основывается на том, что замкнутый контур  $C$  можно разложить на два контура,  $C_1$  и  $C_2$ , с общими началом и концом (рис. 18). По свойствам интегралов

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz;$$

следовательно, равенство нулю интеграла вдоль  $C$  равносильно равенству между собой интегралов вдоль  $C_1$  и  $C_2$ .

В заключение докажем одно полезное для дальнейшего обобщение теоремы Коши. Именно, в теореме Коши (в последней формулировке) речь идет об интеграле по контуру, целиком лежащему внутри области аналитичности функции, между тем как иногда приходится рассматривать интегралы вдоль кривых, на которых функция, оставаясь непрерывной, перестает быть аналитической. Оказывается, теорема Коши остается в силе и для этого случая:

**Теорема 5.** Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ , то интеграл от  $f(z)$ , взятый вдоль границы  $C$  этой области, равен нулю:

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (9)$$

Мы предположим сначала, что  $C$  есть «звездный» контур, т. е. существует точка  $z_0$  такая, что любой луч с вершиной в этой точке пересекает  $C$  в одной и только одной точке. Без ограничения общности можно предполагать, что  $z_0 = 0$  (это достигается сдвигом плоскости  $z$ ), тогда кривую  $C$  можно задать уравнением  $z = r(\varphi)e^{i\varphi}$ , где  $r(\varphi)$  — однозначная функция. Через  $C_\lambda$  мы обозначим контур, определяемый уравнением  $\xi = \lambda z = \lambda r(\varphi)e^{i\varphi}$ ,  $0 < \lambda < 1$  (рис. 19). Так как  $C_\lambda$  лежит внутри  $D$ , то по теореме Коши

$$\int_{C_\lambda} f(\xi) d\xi = 0. \quad (10)$$

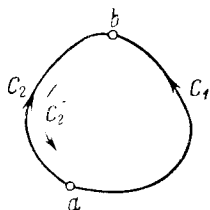


Рис. 18.

Но когда точка  $\zeta$  описывает  $C_\lambda$ , точка  $z = \frac{1}{\lambda} \zeta$  описывает  $C$ , поэтому равенство (10) можно переписать в виде

$$\int_C i(\lambda z) d(\lambda z) = \lambda \int_C i(\lambda z) dz = 0$$

и, следовательно,

$$\int_C f(z) dz = \int_C \{f(z) - f(\lambda z)\} dz. \quad (11)$$

Так как функция  $f(z)$  равномерно непрерывна в  $\bar{D}$  (см. п. 5), то для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\delta > 0$  так, что для любой пары точек  $z, \zeta$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - \zeta| < \delta$ , будет справедливо неравенство

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon. \quad (12)$$

Пусть  $l$  — длина контура  $C$  и  $R = \max r(\varphi)$ ; возьмем  $\lambda > 1 - \frac{\delta}{R}$ , тогда для любой пары точек  $z$  и  $\zeta = \lambda z$  будем иметь  $|z - \zeta| = (1 - \lambda)|z| \leq \frac{\delta}{R}|z| \leq \delta$ , следовательно, будет выполняться (12) и из (11) получим:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < l\varepsilon.$$

Так как здесь  $\varepsilon$  сколь угодно мало и интеграл не зависит от  $\varepsilon$ , то этот интеграл равен 0. Для звездных контуров теорема доказана.

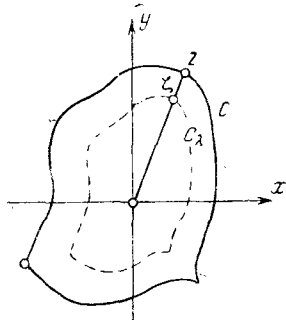


Рис. 19.

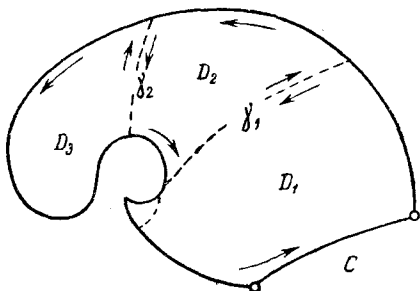


Рис. 20.

Пусть теперь  $C$  — произвольная кусочно-гладкая кривая. Если  $C$  имеет точки возврата, то мы выбросим из области  $D$  круги малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в этих точках, так, чтобы граница полученной области  $D_\varepsilon$  уже не имела таких точек (рис. 20). Проводя внутри  $D_\varepsilon$  конечное число линий  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), эту область можно, очевидно, разбить на части  $D_k$ , ограниченные звездными линиями  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )<sup>\*</sup>. По доказанному выше,

<sup>\*</sup> Легко видеть, что отрезок кусочно-гладкой кривой в достаточно малой окрестности ее точки, не являющейся точкой возврата, представляет собой звездную кривую. В окрестности же точки возврата кривая может и не быть звездной (например, кривая, составленная из ветвей парабол  $y = x^2$  и  $y = 2x^2$ , для которых  $x \geq 0$ , в окрестности точки  $z = 0$ ).

интеграл вдоль любой линии  $C_k$  равен нулю:

$$\int_{C_k} f(z) dz = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (13)$$

Предположим, что линии  $C_k$  проходятся в одном, например положительном, направлении, и сложим все уравнения (13). Так как у нас каждая линия  $\gamma_k$  проходится дважды и притом в противоположных направлениях, то все интегралы вдоль  $\gamma_k$  взаимно сокращаются (см. (9) и (10) из п. 11). Остальные части границ  $C_k$  составляют границу  $C_e$  области  $D_e$  и, следовательно, интеграл вдоль этой границы равен нулю:  $\int_{C_e} f(z) dz = 0$ .

Остается показать, что равен нулю интеграл вдоль границы  $C$  области  $D$ ; но это следует немедленно из того, что  $C$  и  $C_e$  отличаются лишь на конечное число малых дуг и так как функция  $f(z)$  ограничена, то ее интеграл вдоль этих дуг также мал. Таким образом, интеграл вдоль  $C$  сколь угодно мало отличается от интеграла вдоль  $C_e$ , который равен 0, и, следовательно, сам равен нулю. Теорема доказана полностью.

**13. Распространение на многосвязные области.** Для многосвязных областей теорема Коши, вообще говоря, не верна. В самом деле, функция  $f(z) = 1/z$  аналитична всюду в кольце  $\frac{1}{2} < |z| < 2$ , однако интегралы от  $-1$  до  $1$  вдоль верхней и нижней половин окружности  $|z| = 1$  отличаются друг от друга. Действительно, вдоль верхней полуокружности  $C_1$ , где  $z = e^{i\varphi}$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , имеем:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^0 \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = -i\pi,$$

а вдоль нижней полуокружности  $C_2$ , где  $z = e^{i\varphi}$ ,  $-\pi < \varphi < 0$ :

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^0 \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i\pi.$$

Для обозначения интеграла от  $a$  до  $b$  вдоль пути  $C$  в многосвязной области мы будем поэтому иногда употреблять символ

$$\int_{aC}^b f(z) dz. \quad (1)$$

Однако если и в многосвязной области кривые  $C_1$  и  $C_2$  с общими концами расположены так, что они ограничивают одну односвязную область, принадлежащую  $D$ , то интегралы вдоль таких кривых, очевидно, равны. Отсюда следует, что значение интеграла от аналитической функции в многосвязной области  $D$  не изменяется, если контур интегрирования непрерывно

деформируется так, что его концы остаются неподвижными и он все время остается внутри  $D$ .

Пусть в многосвязной области  $D$  даны точки  $a$  и  $b$  и простая\*) кривая  $C_0$ , их соединяющая. Пусть  $C$  — любая другая кривая, соединяющая эти точки (рис. 21, а). Согласно только что сделанному замечанию можно, не изменяя величины интеграла, деформировать кривую  $C$  в другую, лежащую в области  $D$  кривую  $\tilde{C}$ , состоящую из: 1) кривой  $\tilde{C}_0$ , которая вместе с  $C_0$

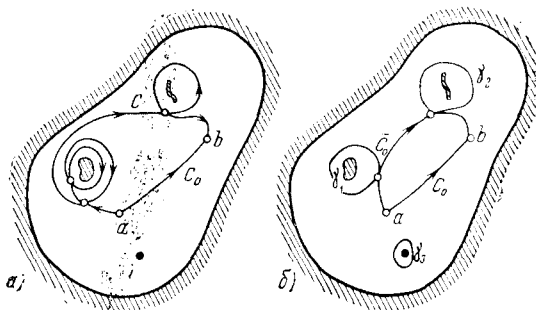


Рис. 21.

ограничивает односвязную область, принадлежащую  $D$ ; 2) совокупности простых замкнутых кривых  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), каждая из которых содержит внутри себя одну связную часть границы  $D$  (рис. 21, б). При этом кривые  $\gamma_k$  могут проходиться несколько раз и в различных направлениях (на рис. 21, б кривая  $\gamma_1$  проходит трижды по часовой стрелке, а  $\gamma_2$  — один раз против часовой стрелки). Для удобства мы условимся обозначать через  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) кривые, проходимые против часовой стрелки; кроме того, мы введем еще кривые  $\gamma_k$  ( $k = m + 1, \dots, n$ ), окружающие связные части границы области  $D$  и не входящие в состав  $\tilde{C}$  (как  $\gamma_3$  на рис. 21, б).

Введем обозначения

$$\Gamma_k = \int_{\gamma_k} f(z) dz \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (2)$$

при непрерывной деформации  $\gamma_k$ , при которой эти кривые остаются внутри  $D$ , интегралы (2) не изменяются, следовательно, величины  $\Gamma_k$  определяются лишь функцией  $f(z)$  и областью  $D$ . Пусть  $N_k$  — целые числа, указывающие, сколько раз и в каком направлении проходит  $\gamma_k$  в составе кривой  $\tilde{C}$ ; эти числа могут быть положительными, отрицательными или равными нулю

\*) То есть без точек самопересечения.

(например, на рис. 21  $N_1 = -3$ ,  $N_2 = 1$ ,  $N_3 = 0$ ). По предыдущему и свойствам интегралов (9) и (10) п. 11 имеем:

$$\int_{aC}^b f(z) dz = \int_{a\tilde{C}}^b f(z) dz = \int_{aC_0}^b f(z) dz + N_1 \Gamma_1 + N_2 \Gamma_2 + \dots + N_n \Gamma_n. \quad (3)$$

Величины  $\Gamma_k$  называются *периодами интеграла* от функции  $f(z)$  в многосвязной области  $D$  или *циклическими постоянными*.

**Пример.** Пусть  $f(z) = 1/z$  и  $D$  — «кольцо»  $0 < |z| < R$ , где  $R$  — сколько угодно большое число. Любой путь  $C$ , соединяющий точки 1 и  $z$ , можно, как выше, деформировать в путь  $\tilde{C}$ , состоящий из несколько раз проходимой единичной окружности  $|z| = 1$  и простой линии  $C_0$ , соединяющей точки 1 и  $z$  (рис. 22). Интеграл вдоль окружности, проходимой против часовой стрелки, когда  $z = e^{i\varphi}$  и  $\varphi$  растет от 0 до  $2\pi$ , равен

$$\Gamma = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} i d\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i. \quad (4)$$

По формуле (3)

$$\int_{1C}^z \frac{dz}{z} = \int_{1C_0}^z \frac{dz}{z} + 2k\pi i, \quad (5)$$

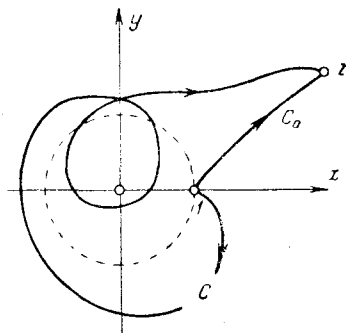


Рис. 22.

где  $k$  — целое число, показывающее, сколько раз и в каком направлении проходимся окружность  $|z| = 1$  в составе  $\tilde{C}$  (на рис. 22  $k = -2$ ). По теореме 4 предыдущего пункта

$$\int_{1C_0}^z \frac{dz}{z} = \ln z \Big|_{z=1}^z = \ln z, \quad (6)$$

где  $\ln$  означает то значение логарифма, которое равно 0 в точке  $z = 1$  и непрерывно изменяется вдоль  $C_0$ .

Считая, что  $C$  — произвольный путь, и обозначая значение интеграла от  $1/z$  вдоль него через  $\text{Ln } z$ , мы получим из (5):

$$\text{Ln } z = \int_{1C}^z \frac{dz}{z} = \ln z + 2k\pi i. \quad (7)$$

Таким образом, мы вновь пришли к многозначной функции  $\text{Ln } z$  и выяснили ее многозначность с новой точки зрения.

Заметим в заключение, что теореме Коши предыдущего пункта можно придать несколько иной смысл так, чтобы она оставалась справедливой и для многосвязных областей. Пусть

функция  $f(z)$  аналитична в многосвязной области  $D$ , ограниченной кривыми  $C_0, C_1, \dots, C_n$  (рис. 23), и непрерывна в  $\bar{D}$ . Проведем разрезы  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , обращающие  $D$  в односвязную область  $D^*$ , и обозначим через  $C^*$  границу этой области — кривую, состоящую из участков кривых  $C_k$  и кривых  $\gamma_k$ , причем последние проходятся дважды в противоположных направлениях (отмечены стрелками на рис. 23).



Рис. 23.

Функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D^*$  и непрерывна в  $\bar{D}^*$ ; следовательно, по теореме 5 предыдущего пункта и свойствам интегралов (9) и (10) п. 11.

$$\int_{C^*} f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0 \quad (8)$$

(интегралы вдоль  $\gamma_k$  взаимно сокращаются, а оставшая часть  $C^*$  совпадает с  $\sum_{k=0}^n C_k$ ). При этом мы должны считать, что кривые  $C_0$  и  $C_1, C_2, \dots, C_n$  проходятся так, чтобы область  $D$  оставалась все время с одной стороны (например, на рис. 23 — слева). Таким образом, для областей любой связности теорема Коши справедлива в следующей форме:

**Теорема.** Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$ , то ее интеграл вдоль границы этой области, проходимой так, что область  $D$  все время остается с одной стороны, равен нулю.

**14. Формула Коши и теорема о среднем.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в  $n$ -связной области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$ . Покажем, что для любой внутренней точки  $z$  этой области имеет место так называемая *формула Коши* (1831 г.):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (1)$$

где  $C$  — граница области  $D$ , проходимая так, что область  $D$  остается все время слева.

Отметим, что в правую часть формулы Коши входят лишь значения  $f(z)$  на границе  $C$  области  $D$ . Таким образом, в принятых условиях значения функции внутри области вполне определяются ее значениями на границе: формула Коши позволяет вычислить значение функции в любой точке области, коль скоро известны граничные значения этой функции.

Для вывода формулы Коши мы выбросим из области  $D$  кружок радиуса  $r$  с центром в точке  $z$  и заметим, что в полученной  $(n+1)$ -связной области  $D^*$  числитель и знаменатель подынтегральной функции аналитичны относительно переменной  $\zeta$ , причем знаменатель не обращается в нуль. Следовательно, подынтегральная функция аналитична относительно  $\zeta$  в  $D^*$ ; так как она непрерывна в  $\bar{D}^*$ , то по теореме Коши предыдущего пункта (формула (8)):

$$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\gamma_r^-} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

где окружность  $\gamma_r^-$  проходится по часовой стрелке. Отсюда следует, что

$$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2)$$

где  $\gamma_r$  проходится против часовой стрелки. На окружности  $\gamma_r$  имеем  $\zeta - z = re^{i\varphi}$ , поэтому, вынося за знак интеграла постоянный относительно  $\zeta$  множитель  $f(z)$ , найдем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = f(z). \quad (3)$$

На основании формул (2) и (3) имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta; \quad (4)$$

оценим эту разность. Согласно неравенству (11) п. 11

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{\gamma_r} |f(\zeta) - f(z)| \frac{2\pi r}{r} = \\ &= \max_{\gamma_r} |f(\zeta) - f(z)|, \end{aligned}$$

откуда видно, что наша разность при уменьшении  $r$  может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, как видно из левой части (4), эта разность не зависит от  $r$ . Следовательно, рассматриваемая разность равна нулю и формула Коши доказана.



Если, в частности, кривая  $C$  представляет собой окружность  $|\xi - z| = R$ , то, полагая  $\xi - z = Re^{i\varphi}$  мы получим из формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (5)$$

Последняя формула выражает так называемую *теорему о среднем* для аналитических функций:

**Теорема.** Если функция  $f(z)$  непрерывна в замкнутом круге и аналитична внутри этого круга, то ее значение в центре круга равно среднему арифметическому значений на окружности.

**15. Принцип максимума и лемма Шварца.** Сначала докажем одну простую лемму.

**Лемма.** Если в некоторой области  $D$ : 1) постоянна действительная часть аналитической функции  $f(z)$  или 2) постоянен ее модуль, то и сама эта функция постоянна.

При условии 1) утверждение вытекает непосредственно из уравнений Коши — Римана: у нас  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ , следовательно, в силу этих уравнений и  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$ . Отсюда заключаем, что  $v$ , а значит и функция  $f(z)$ , постоянна в области  $D$ .

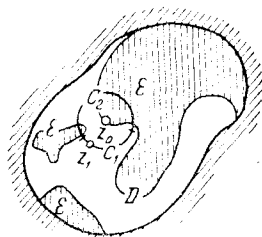


Рис. 24.

Перейдем к доказательству леммы при условии 2). Пусть  $|f(z)| \equiv M$ , где  $M$  — постоянная; для  $M = 0$  утверждение леммы очевидно. Если же  $M \neq 0$ , то мы рассмотрим функцию  $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ , которая в этом случае аналитична. Ее действительная часть постоянна ( $= \ln M$ ); следовательно, по уже доказанному, постоянна сама функция  $\ln f(z)$ , а значит, и  $f(z)$ . Лемма доказана.

Докажем теперь *принцип максимума модуля* для аналитических функций.

**Теорема.** Если функция  $f(z)$ , не равная тождественно постоянной, аналитична в области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$ , то ее модуль не может достигать наибольшего значения во внутренней точке области  $D$ .

В силу свойств непрерывных функций (см. п. 5)  $|f(z)|$  достигает своего максимума  $M$  внутри или на границе  $D$  (рис. 24). Предположим от противного, что  $|f(z)|$  достигает значения  $M$  внутри  $D$ , и обозначим через  $\mathcal{E}$  множество всех точек  $D$ , для которых  $|f(z)| = M$ . Если  $\mathcal{E} = \bar{D}$ , то всюду в  $D$  имеем:  $|f(z)| =$

$= M$ , т. е.  $|f(z)|$  постоянен. Отсюда по лемме следует, что и  $f(z)$  постоянна в  $D$ , а это противоречит условиям теоремы.

Если  $\mathcal{E}$  не совпадает с  $D$ , то существует граничная\*) точка  $z_0$  этого множества, которая является внутренней точкой  $D$ . В силу непрерывности  $f(z)$  имеем  $|f(z_0)| = M$ , ибо в любой окрестности  $z_0$  есть точки  $\mathcal{E}$ . Построим окружность  $C$ :  $|z - z_0| = r$ , принадлежащую области  $D$ , так чтобы на ней имелась хотя бы одна точка  $z_1$ , не принадлежащая множеству  $\mathcal{E}$  (это всегда можно сделать, ибо  $z_0$  — граничная точка  $\mathcal{E}$ ). Тогда  $|f(z_1)| < M$ , и для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$ , в силу непрерывности  $f(z)$ , всегда можно указать такую содержащую точку  $z_1$  часть  $C_1$  окружности  $C$ , на которой

$$|f(z)| < M - \varepsilon. \quad (1)$$

Обозначим через  $C_2$  оставшуюся часть окружности; на ней, очевидно,

$$|f(z)| \leq M. \quad (2)$$

По теореме о среднем имеем:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left\{ \int_{C_1} f(z) ds + \int_{C_2} f(z) ds \right\}, \quad (3)$$

где  $ds = r d\varphi$  — элемент длины окружности  $C$ .

Переходя в соотношении (3) к абсолютным величинам и учитывая неравенства (1) и (2), получим:

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r} \{(M - \varepsilon) l_1 + M l_2\} = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r},$$

где соответственно  $l_1$  и  $l_2$  — длины  $C_1$  и  $C_2$  ( $l_1 + l_2 = 2\pi r$ ). Но последнее неравенство невозможно, чем и доказывается наш принцип.

*З а м е ч а н и е.* Если функция  $f(z)$  не постоянна, аналитична в  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$  и, кроме того, не обращается в 0, то и минимум  $|f(z)|$  не может достигаться внутри  $D$ . Для доказательства этого достаточно применить принцип максимума к функции  $g(z) = 1/f(z)$ .

Из принципа максимума модуля вытекает полезная для дальнейших приложений

*Л е м м а* (Г. Шварц\*\*)). Если функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z| < 1$  и непрерывна в замкнутом круге, причем  $f(0) = 0$ , и если всюду в круге  $|f(z)| \leq 1$ , то в том же круге

$$|f(z)| \leq |z|. \quad (4)$$

\*) Граничные и внутренние точки для множества определяются так же, как для области (см. п. 3).

\*\*) Герман Амантус Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

При этом если хотя бы в одной внутренней точке круга  $|f(z)| = |z|$ , то последнее равенство имеет место во всем круге и

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — действительная постоянная.

Для доказательства рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{при } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Из условий леммы следует, что  $\varphi(z)$  аналитична в кольце  $0 < |z| < 1$  и непрерывна в замкнутом круге  $|z| \leq 1$  (непрерывность в точке  $z = 0$  следует из того, что

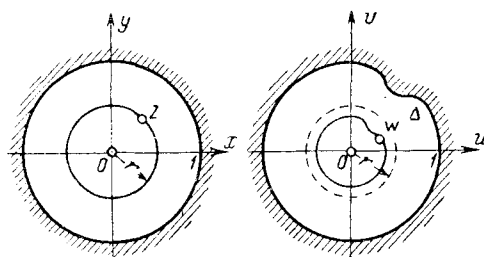
$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)).$$

В п. 22 будет доказано, что отсюда вытекает аналитичность  $\varphi(z)$  в точке  $z = 0$ ; таким образом, к  $\varphi(z)$  применим принцип максимума модуля. Так как на окружности  $|z| = 1$  имеем  $|\varphi(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$ , то по этому принципу и всюду в круге  $|\varphi(z)| \leq 1$ , т. е.  $|f(z)| \leq |z|$ . Первая часть леммы доказана.

Если теперь в какой-либо внутренней точке  $|f(z_0)| = |z_0|$ , то в этой точке  $|\varphi(z_0)| = 1$ , но тогда по принципу максимума

$|\varphi(z)| \equiv 1$  во всех точках круга и по лемме из начала пункта  $\varphi(z)$  постоянна. Так как  $|\varphi(z)| \equiv 1$ , то эту постоянную можно представить в виде  $e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — действительное число, следовательно,  $f(z) = e^{i\alpha} z$ . Лемма Шварца доказана.

Рис. 25.



Геометрически лемма Шварца означает, что при любом отображении единичного круга на область  $\Delta$ , лежащую внутри единичного круга, с помощью аналитической функции  $w = f(z)$ ,  $f(0) = 0$ , образ произвольной точки  $z$  лежит ближе к началу координат, чем сама точка  $z$  (рис. 25); если же образ хотя бы одной точки  $z$  лежит на том же расстоянии, что и сама точка, то  $\Delta$  совпадает с единичным кругом и отображение сводится к повороту.

**16. Равномерная сходимость.** Этот пункт имеет вспомогательный характер. Мы рассмотрим в нем важные для дальней-

шего вопросы, связанные с равномерной сходимостью последовательностей и рядов аналитических функций.

Последовательность функций  $f_1(z), f_2(z), \dots$  называется *равномерно сходящейся* к функции  $f(z)$  в области  $D$  (или на кривой  $C$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $n_0$ , зависящее лишь от  $\varepsilon$ , такое, что при  $n \geq n_0$  для всех  $z$  из  $D$  (или на  $C$ ) имеет место неравенство

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Докажем две теоремы, аналогичные соответствующим теоремам анализа.

**Теорема 1.** *Предел  $f(z)$  последовательности непрерывных функций  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$  равномерно сходящейся в некоторой области  $D$  (или на кривой  $C$ ), также является непрерывной функцией.*

Зададимся числом  $\varepsilon > 0$  и обозначим через  $z_0$  произвольную точку области  $D$  (или  $C$ ). В силу равномерной сходимости найдется номер  $n$  такой, что для всех  $z$  из  $D$  (на  $C$ )

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

В силу непрерывности  $f_n(z)$  в точке  $z_0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $z$  из  $D$  (на  $C$ ), удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| < \delta$ ,

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Для таких  $z$  и выбранного выше  $n$  из неравенств (2) и (3) имеем:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + \\ &\quad + |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

а это и означает непрерывность  $f(z)$ .

**Теорема 2.** *Если последовательность непрерывных функций  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$  на кривой  $C$  равномерно сходится к  $f(z)$ , то справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz. \quad (4)$$

Зададимся числом  $\varepsilon > 0$ . В силу равномерной сходимости найдется такое  $n_0$ , что для всех  $n \geq n_0$  и для всех  $z$  на  $C$

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{l},$$

где  $l$  — длина  $C$ . Для таких  $n$

$$\left| \int_C f(z) dz - \int_C f_n(z) dz \right| = \left| \int_C \{f(z) - f_n(z)\} dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon,$$

а это и означает справедливость соотношения (4).

Доказанная теорема дает возможность переходить к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости последовательности функций.

С понятием равномерно сходящейся последовательности тесно связано понятие равномерно сходящегося ряда. Функциональный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  называется *равномерно сходящимся* в области  $D$  (или на кривой  $C$ ), если последовательность его частичных сумм  $s_0(z) = f_0(z)$ ,  $s_1(z) = f_0(z) + f_1(z)$ , ...,  $s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)$ , ... сходится в этой области (на этой кривой) равномерно.

Так же, как в анализе, доказывается удобный для применения достаточный признак равномерной сходимости функциональных рядов.

**Теорема 3.** Если функциональный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  в области  $D$  мажорируется некоторым сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , т. е. если для любой точки  $z$  из  $D$

$$|f_n(z)| \leq a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

то данный функциональный ряд сходится в  $D$  равномерно.

В самом деле, по известной теореме сравнения данный ряд сходится в любой точке  $z$  из  $D$ . Обозначим его сумму через  $s(z)$ . Для любого  $n$  остаток  $r_n(z) = s(z) - s_n(z)$  этого ряда в силу соотношения (5) удовлетворяет неравенству

$$|r_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (6)$$

Справа здесь стоит остаток  $r_n$  сходящегося числового ряда, стремящийся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти номер  $n_0$ , зависящий лишь от  $\varepsilon$ , начиная с которого будет  $r_n < \varepsilon$ , и тогда в силу (6) для любого  $z$  из  $D$  и  $n \geq n_0$  имеет место неравенство

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon.$$

Это и означает равномерную сходимость данного ряда.

Из теорем 1 и 2 следует, что сумма равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций, непрерывна, и

что такой ряд можно почленно интегрировать, т. е. что справедливо предельное соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) dz. \quad (7)$$

Вопрос о возможности почленного дифференцирования функциональных рядов будет рассмотрен в п. 19 (теорема Вейерштрасса).

Рассмотрим теперь семейство функций  $f(z, \alpha)$ , зависящих от (действительного или комплексного) параметра  $\alpha$ . Говорят, что  $f(z, \alpha)$  стремится при  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  к функции  $f(z)$  *равномерно относительно  $z$*  в области  $D$  (или на кривой  $C$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такое, что при  $|\alpha - \alpha_0| < \delta$  для всех  $z$  из  $D$  (или на  $C$ ) имеет место неравенство

$$|f(z, \alpha) - f(z)| < \varepsilon. \quad (8)$$

Точно так же как для последовательностей, можно показать, что предел равномерно сходящегося семейства непрерывных функций является функцией непрерывной и что для такого семейства справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_C f(z, \alpha) dz = \int_C \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(z, \alpha) dz. \quad (9)$$

В дальнейшем нам придется иметь дело с интегралами вдоль неограниченных кривых — *несобственными интегралами*. При этом мы всегда будем рассматривать лишь такие кривые  $C$ , отрезки которых, принадлежащие произвольному кругу, являются кусочно-гладкими. Функции  $f(z)$ , заданные на  $C$ , будем считать кусочно-непрерывными и ограниченными.

Определим теперь интеграл от функции  $f(z)$  вдоль неограниченной кривой  $C$ . Пусть сначала  $C$  не ограничена лишь в одну сторону и  $a$  — ее конец. Тогда мы обозначим через  $C_l$  часть  $C$  с концом  $a$  и длиной  $l$  и положим по определению

$$\int_C f(z) dz = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{C_l} f(z) dz, \quad (10)$$

причем, если этот предел существует, мы будем говорить, что (несобственный) интеграл (10) *сходится*. Если  $C$  не ограничена в обе стороны, то мы определим интеграл как сумму интегралов вдоль двух частей, на которые  $C$  делится произвольной точкой  $a$ .

Пусть функция  $f(z, \zeta)$  определена для всех  $z$  из области  $D$  и для всех  $\zeta$  на линии  $C$ . Будем говорить, что интеграл

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

сходится равномерно в области  $D$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $l_0$  такое, что для всех  $z$  из  $D$  при любом  $l > l_0$

$$\left| \int_C f(z, \zeta) d\zeta - \int_{C_l} f(z, \zeta) d\zeta \right| < \varepsilon \quad (11)$$

(мы предполагаем, что  $C$  не ограничена в одну сторону; распространение на общий случай делается, как и выше).

**Теорема 4.** Если функция  $f(z, \zeta)$  аналитична по  $z$  и кусочно-непрерывна по  $\zeta$  для всех  $z$  из односвязной области  $D$  и для всех  $\zeta$  на линии  $C$  и интеграл

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta \quad (12)$$

сходится равномерно в области  $D$ , то он является аналитической в этой области функцией \*).

Для доказательства мы воспользуемся теоремой, обратной к теореме Коши, согласно которой функция  $F(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , если она непрерывна в этой области и ее интеграл вдоль любой замкнутой кривой, принадлежащей области, равен нулю (доказательство этой теоремы см. в следующем пункте).

В условиях доказываемой теоремы непрерывность функции  $F(z)$  устанавливается обычным образом (как теорема 2 или соотношение (9)). Остается показать, что равен нулю интеграл от  $F(z)$  вдоль произвольного замкнутого контура  $\Gamma$ , принадлежащего области  $D$ . Имеем:

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \int_{\Gamma} \left\{ \int_C f(z, \zeta) d\zeta \right\} dz. \quad (13)$$

В силу равномерной сходимости интеграла (12) по известной из анализа теореме\*\*) справа можно изменить порядок интегрирования, и мы получим:

$$\int_{\Gamma} F(z) dz = \int_C \left\{ \int_{\Gamma} f(z, \zeta) dz \right\} d\zeta = 0,$$

\*) Ср. теорему I из п. 19.

\*\*) См. Фихтенгольц, т. II, стр. 733; сказанное там относится к действительным определенным интегралам, но после введения параметра и отделения действительных и мнимых частей интегралы (13) сводятся к таким интегралам.

так как внутренний интеграл равен нулю по теореме Коши. Теорема 4 доказана.

Заметим, что в случае ограниченной кривой  $C$  для аналитичности функции  $F(z)$  не требуется никаких дополнительных предположений о сходимости интеграла (12), — это вытекает из возможности перемены порядка интегрирования в соотношении (13) без дополнительных предположений.

**17. Высшие производные.** По определению, аналитическая функция — это функция комплексного переменного, обладающая производной в каждой точке некоторой области  $D$  (см. п. 5). Покажем, что из аналитичности функции автоматически вытекает существование и аналитичность всех ее последовательных производных.

**Теорема 1** (О. Коши, 1842 г.). *Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$ , то она обладает в каждой точке  $D$  производными всех порядков, причем  $n$ -я производная представляется формулой*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad (1)$$

где  $C$  — граница области  $D$ .

Пусть  $z$  — произвольная внутренняя точка области  $D$ . По определению производной и формуле Коши из п. 14, которую мы применяем для точек  $z$  и  $z + h$ , имеем:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_C f(\xi) \left\{ \frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z} \right\} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)}. \end{aligned}$$

Но, очевидно, при  $h \rightarrow 0$  функция  $\frac{1}{\xi - z - h}$  равномерно для всех  $\xi$  на  $C$  стремится к  $\frac{1}{\xi - z}$  и, следовательно, по теореме 2 предыдущего пункта (для случая семейства функций, зависящих от параметра  $h$ ) предел существует, причем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}. \quad (2)$$

Для  $n = 1$  теорема доказана. Предполагая ее верной для какого-либо  $n - 1$ , точно так же можно доказать ее справедливость для  $n$  и тем самым полностью доказать теорему.



Замечание 1. Как видно из доказательства, теорему можно еще формулировать следующим образом: *если функция  $\varphi(\xi)$  непрерывна на границе  $C$  области  $D$ , то функция*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (3)$$

*представленная формулой Коши, аналитична в этой области.*

Замечание 2. Формулы (1) для производных получаются формальным дифференцированием формулы Коши по  $z$ ; доказанная теорема утверждает законность этого дифференцирования.

Из формулы (1) вытекают важные *неравенства Коши*. Обозначим через  $M$  максимум модуля функции  $f(z)$  в области  $D$ , через  $R$  — расстояние точки  $z$  до границы  $D$  и через  $l$  — длину этой границы. Имеем из (1):

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n! M l}{2\pi R^{n+1}}. \quad (4)$$

Если, в частности,  $f(z)$  аналитична в круге  $|z - z_0| < R$ , то, принимая в качестве  $D$  этот круг, получим:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Это и есть неравенства Коши, которые мы хотели доказать.

Мы воспользуемся полученными результатами для доказательства двух важных теорем теории аналитических функций.

**Теорема 2 (Ж. Лиувилль)\*.** *Если функция  $f(z)$  аналитична во всей плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Пусть всюду  $|f(z)| \leq M$ . Для произвольной точки  $z$  плоскости и для любого  $R$  неравенство (5) при  $n = 1$  дает:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Так как здесь левая часть не зависит от  $R$ , а правая при увеличении  $R$  может быть сделана сколь угодно малой, то  $|f'(z)| = 0$ . Таким образом, во всей плоскости  $f'(z) \equiv 0$ . Отсюда, по теореме 4 п. 12, заключаем, что

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^z f'(z) dz \equiv 0,$$

т. е. что функция  $f(z)$  постоянна. Теорема доказана.

\*) Теорема впервые доказана Коши (1844 г.), но существенно использовалась в работах французского математика Жозефа Лиувилля (1809—1882).

**З а м е ч а н и е.** Теорема 2 допускает следующее обобщение.

Если функция  $f(z)$  аналитична во всей плоскости и ее модуль возрастает не быстрее чем  $M|z|^n$ , где  $n$  — целое число, а  $M$  — постоянная, то эта функция является многочленом степени не выше  $n$  \*).

Доказательство аналогично предыдущему: пусть  $z_0$  — произвольная точка плоскости; из неравенства (5) имеем:

$$|f^{(n+1)}(z_0)| \leq \frac{M|z_0|^n}{R^{n+1}}(n+1)!$$

и, замечая, что у нас  $|z| \leq |z_0| + R$ , после перехода к пределу при  $R \rightarrow \infty$  получаем, что  $f^{(n+1)}(z_0) = 0$ . Так как  $z_0$  — произвольная точка плоскости, то  $f^{(n+1)}(z) \equiv 0$ , а отсюда тем же методом, что и выше, нетрудно прийти к нужному результату.

Следующая теорема обратна основной теореме Коши п. 12.

**Теорема 3** (Г. Морера\*\*), 1886 г.). Если функция  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $D$  и интеграл  $\int_C f(z) dz$  по любому замкнутому контуру, лежащему в  $D$ , равен 0, то  $f(z)$  аналитична в этой области.

Из условий теоремы следует, что в области  $D$  интеграл  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  не зависит от пути интегрирования, т. е. при фиксированном  $z_0$  определяет некоторую функцию  $z$ :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Повторяя дословно доказательство теоремы 2 п. 12, мы увидим, что эта функция имеет производную  $F'(z) = f(z)$ , т. е. аналитична (в цитированной теореме мы пользовались лишь непрерывностью  $f(z)$  и независимостью интеграла от пути). Но тогда по теореме 1 настоящего пункта  $f(z)$  как производная аналитической функции в свою очередь является функцией аналитической. Теорема Мореры доказана.

## § 5. Представление аналитических функций рядами

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о представлении аналитических функций с помощью степенных рядов и их обобщения — рядов по положительным и отрицательным степеням  $z - a$ . Разложение функций в ряды представляет не только теоретический, но и практический интерес. Укажем,

\*) При  $n = 0$  мы получаем, в частности, теорему 2.

\*\*) Гиацинто Морера — итальянский математик (1856—1909).

например, что с помощью рядов можно вычислять приближенно значения функций, во многих задачах прикладного характера (решение дифференциальных уравнений и др.) решение сразу получается в виде ряда и т. д.

Здесь мы ограничимся основными теоретическими положениями, связанными с разложениями функций в ряды; большинство из них будет играть весьма важную роль в дальнейшем изложении теории функций комплексного переменного и ее приложений (см. особенно гл. V и след.). В частности, будет установлена равносильность понятий об аналитической функции (в смысле § 2) как о функции, дифференцируемой в каждой точке области определения и как о функции, представимой в окрестности каждой такой точки в виде суммы степенного ряда (см. теорему Тейлора п. 18 и теорему 3 п. 19); это даст еще одну концепцию в построении теории аналитических функций. В пункте 25 мы обобщим понятие аналитичности, распространив его на многозначные функции.

**18. Ряды Тейлора.** Мы начнем с обобщения на функции комплексного переменного известной из анализа формулы Тейлора и на его основе докажем, что всякая аналитическая в точке функция представляется в окрестности этой точки в виде суммы степенного ряда.

Воспользуемся формулой для суммы членов геометрической прогрессии  $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ , переписав ее в виде

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} \quad (1)$$

(формула справедлива и для комплексных  $q$ ). Зафиксируем некоторую точку  $a$  из области  $D$  аналитичности функции  $f(z)$  и, воспользовавшись формулой (1), напомним:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \\ &= \frac{1}{\xi - a} \left\{ 1 + \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right) + \dots + \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^n + \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} \left( \frac{z-a}{\xi-a} \right)^{n+1} \right\}. \end{aligned}$$

Умножим теперь обе части этого равенства на  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$  и проинтегрируем его по  $\xi$  вдоль некоторого замкнутого контура  $C$ , лежащего в  $D$  и содержащего точки  $z$  и  $a$ . Пользуясь формулой Коши п. 14 и формулами для высших производных п. 17,

получим классическую формулу Тейлора \*)

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_n, \quad (2)$$

где остаточный член имеет вид:

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z)(\xi-a)^{n+1}}. \quad (3)$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях  $R_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  или, что то же самое, при каких условиях функция  $f(z)$  представима своим рядом Тейлора с центром в точке  $a$ , т. е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n. \quad (4)$$

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема (О. Коши, 1831 г.). Функция  $f(z)$  представима своим рядом Тейлора (4) в любом открытом круге с центром в точке  $a$ , в котором она аналитична. Во всякой замкнутой области, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.

Обозначим через  $R$  радиус круга аналитичности функции  $f(z)$  (с центром в точке  $a$ ) и рассмотрим произвольное число  $R'$ ,  $0 < R' < R$  и круг  $|z-a| \leq kR'$ , где  $k < 1$  — произвольное положительное число. Пусть  $z$  — любая точка последнего круга и  $C$  — окружность  $|\xi-a| = R'$ . Имеем  $|z-a| \leq kR'$ ,  $|\xi-a| = R'$ . Следовательно,

$$|\xi-z| \geq |\xi-a| - |z-a| \geq R' - kR' = (1-k)R'$$

и формула (3) дает:

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z)(\xi-a)^{n+1}} \right| \leq \\ &\leq \frac{k^{n+1}R'^{n+1}}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R'}{(1-k)R'^{n+2}} = \frac{Mk^{n+1}}{1-k}, \end{aligned}$$

где  $M$  — максимум модуля  $f(z)$  в круге  $|z-a| \leq R'$  (функция  $f(z)$  аналитична в этом круге, следовательно, ограничена). Так как  $k < 1$ , то отсюда видно, что  $R_n \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ , причем оценка  $R_n$  не зависит от  $z$ ; таким образом, в любом круге

\*) Разложение такого вида (для действительных  $z$ ) впервые встречается в работе 1715 г. Брука Тейлора (1685—1731), но систематическое применение оно нашло лишь в 1742 г. в работе Колина Маклорена (1698—1746).

$|z - a| < kR'$ , где  $0 < k < 1$ , ряд Тейлора сходится равномерно.

Произвольную замкнутую область, лежащую в круге аналитичности функции  $f(z)$ , можно погрузить в некоторый круг  $|z - a| < kR'$ , где  $0 < k < 1$ ,  $0 < R' < R$ , следовательно, и в такой области ряд сходится равномерно. Теорема доказана.

Таким образом, всякая аналитическая в круге функция представляется в нем степенным рядом. Возникает вопрос о том, будет ли, обратно, аналитической функцией сумма произвольного сходящегося степенного ряда? Чтобы ответить на него, следует рассмотреть некоторые свойства степенных рядов. Это мы сделаем в следующем пункте, а сейчас приведем тейлоровские разложения некоторых элементарных функций:

$$\left. \begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots; \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots; \\ \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots, \quad \operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(сходятся для любого  $z$ ),

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots; \\ (1+z)^a &= 1 + az + \frac{a(a-1)}{2} z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} z^3 + \dots * \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(сходятся для  $|z| < 1$ ; написаны для тех однозначных ветвей, которые равны соответственно 0 и 1 при  $z = 0$ ). Способы получения этих разложений такие же, как в обычном анализе, и мы на них не останавливаемся.

**19. Степенные ряды.** Начнем с двух общих теорем относительно равномерно сходящихся рядов, составленных из аналитических функций; эти теоремы были впервые доказаны К. Вейерштрассом в 1859 г. Первая из них показывает, что равномерный переход к пределу сохраняет свойство аналитичности:

**Теорема 1.** Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad (1)$$

составленный из функций, аналитических в односвязной области  $D$ , равномерно сходится в этой области, то его сумма также является функцией, аналитической в  $D$ .

\*) В этой формуле  $a$  — произвольное комплексное число; в частном случае натурального  $a = n$  ряд обрывается на  $n$ -м члене и, следовательно, сходится во всей плоскости.

В самом деле, согласно п. 16 сумма  $s(z)$  ряда (1) непрерывна в  $D$ . Пусть  $C$  будет произвольный замкнутый контур, лежащий в  $D$ ; в силу равномерной сходимости ряда (1) его можно почленно проинтегрировать вдоль  $C$  и мы получим, что

$$\int_C s(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z) dz = 0,$$

ибо по теореме Коши п. 12 интеграл от аналитических функций  $f_n(z)$  по замкнутому контуру в односвязной области равен нулю. Теперь по теореме Мореры п. 17 мы можем утверждать, что функция  $s(z)$  аналитична в области  $D$ , и теорема доказана.

Вторая теорема показывает, что для аналитических функций вопрос о возможности почленного дифференцирования рядов решается проще, чем в обычном анализе:

**Теорема 2.** *Произвольный ряд (1), составленный из функций, аналитических в области  $D$  и непрерывных в  $\bar{D}$ , равномерно сходящийся в  $\bar{D}$ , можно почленно дифференцировать в  $D$  любое число раз.*

Пусть  $\xi$  будет произвольная точка границы  $C$  области  $D$ , а  $z$  — произвольная внутренняя точка этой области. Так как разность  $\xi - z$  при фиксированном  $z$  ограничена снизу по мо-

дулю положительным числом, то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$ , где  $k$  —

произвольное натуральное число, сходится равномерно относительно  $\xi$  на  $C$ . Следовательно, его можно почленно интегрировать вдоль  $C$ , и значит, сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad (2)$$

(для каждого члена ряда мы воспользовались формулой Коши для производных из п. 17). Остается доказать, что сумма ряда (2) является  $k$ -й производной суммы  $s(z)$  ряда (1). Но в силу равномерной сходимости левую часть формулы (2) можно записать в виде

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{s(z)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = s^{(k)}(z)$$

(мы снова воспользовались той же формулой Коши), что и требуется.

**Замечание 1.** Для того чтобы утверждать равномерную сходимость ряда из аналитических функций в замкнутой области

$\bar{D}$ , достаточно потребовать его равномерной сходимости на границе этой области. Это непосредственно вытекает из принципа максимума п. 15, согласно которому

$$\max_{(\bar{D})} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots| = \max_{(C)} |f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \dots|.$$

Замечание 2. Простой пример показывает, что в теореме 2 можно утверждать сходимость ряда из производных лишь в области  $D$ , а не в  $\bar{D}$ .

В самом деле, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ , очевидно, равномерно сходится в замкнутом

круге  $|z| \leq 1$ , ибо он мажорируется там сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Однако производный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$  (сходящийся по теореме 2 при  $|z| < 1$ ) расходится в точке  $z = 1$  границы круга.

В дальнейшем основную роль будут играть степенные ряды. Характер их сходимости выясняет следующая

Теорема 3 (Н. Абель\*), 1826 г.). Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  сходится в точке  $z_0$ , то он сходится и в любой точке  $z$ , расположенной ближе к центру  $a$ , чем  $z_0$ , причем в любом круге  $|z-a| \leq k|z_0-a|$ , где  $0 < k < 1$ , сходимость ряда равномерна.

Предположим, что  $z$  — произвольная точка последнего круга, и представим  $n$ -й член ряда в виде

$$c_n(z-a)^n = c_n(z_0-a)^n \left( \frac{z-a}{z_0-a} \right)^n.$$

В силу сходимости ряда в точке  $z_0$  его общий член стремится к нулю и, следовательно, ограничен в этой точке, т. е.  $|c_n(z_0-a)^n| \leq M$  для всех  $n$ . Кроме того, у нас по условию  $\left| \frac{z-a}{z_0-a} \right| \leq k$ ; следовательно, для всех  $n$

$$|c_n(z-a)^n| \leq Mk^n, \quad 0 < k < 1. \quad (3)$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда в круге  $|z-a| \leq k|z_0-a|$ . Так как число  $k$  может быть взято сколько угодно близким к 1, то тем самым доказана сходимость ряда в любой точке круга  $|z-a| < |z_0-a|$  и доказательство теоремы Абеля закончено.

\*) Нильс Абель (1802—1829) — норвежский математик.

Из теоремы Абеля вытекает, что областью сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  является открытый круг с центром в точке  $a$  (который может также вырождаться в точку или заполнять всю плоскость) и еще, быть может, некоторые точки на границе круга. Радиус этого круга называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Укажем формулу для определения радиуса сходимости  $R$ :

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (4)$$

где  $\overline{\lim}$  означает верхний предел\*). Эта формула была получена О. Коши в 1821 г. и существенно использовалась Ж. Адамаром (уже в нашем веке). Она называется *формулой Коши — Адамара*.

Для вывода ее нужно показать, что при любом  $z$ , для которого  $|z-a| \leq kR$ ,  $0 < k < 1$ , степенной ряд сходится, а при любом  $z$ , для которого  $|z-a| > R$ , этот ряд расходится. По определению верхнего предела для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $n_0$ , начиная с которого

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon.$$

Выберем  $\varepsilon$  так, чтобы было

$$\frac{1}{R} + \varepsilon < \frac{1}{R \frac{k+1}{2}},$$

тогда при  $n \geq n_0$  и  $|z-a| \leq kR$  будем иметь:

$$|c_n (z-a)^n| < \frac{k^n R^n}{R^n \left(\frac{k+1}{2}\right)^n} = \left(\frac{2k}{k+1}\right)^n.$$

Так как  $\frac{2k}{k+1} < 1$ , то по известной теореме сравнения ряд, составленный из членов левой части, сходится.

Далее, из определения верхнего предела имеем, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется бесконечная последовательность  $n = n_k$ , для которых  $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon$ , т. е.

$$|c_{n_k} (z-a)^{n_k}| > \left\{ \left( \frac{1}{R} - \varepsilon \right) |z-a| \right\}^{n_k}.$$

Но при  $|z-a| > R$  всегда можно подобрать  $\varepsilon$  так, чтобы было  $\left( \frac{1}{R} - \varepsilon \right) |z-a| > 1$ , тогда для нашей последовательности  $n = n_k$ , соответствующий этому  $\varepsilon$  член  $c_{n_k} (z-a)^{n_k}$  будет неограниченно возрастать и, следовательно, степенной ряд будет расходиться (его общий член не стремится к нулю).

\*) См. Фихтенгольц, т. I, стр. 107.



Теоремы Вейерштрасса и Абеля дают утвердительный ответ на вопрос, поставленный в предыдущем пункте:

**Теорема 4.** *Сумма любого степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией.*

Действительно, пусть  $|z - a| < R$  будет круг сходимости нашего степенного ряда. В любом круге  $|z - a| \leq kR$ , где  $0 < k < 1$ , по теореме Абеля сходимость равномерна, а так как члены ряда  $c_n(z - a)^n$  — аналитические функции, то по теореме Вейерштрасса его сумма аналитична в этом круге. Но так как любая внутренняя точка  $z$  круга сходимости может быть погружена в некоторый круг  $|z - a| < kR$ , где  $0 < k < 1$ , то тем самым доказана аналитичность суммы ряда во всем круге его сходимости.

Докажем, наконец, что справедлива

**Теорема 5.** *Любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.*

В самом деле, пусть в некотором круге

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n. \quad (5)$$

Полагая здесь  $z = a$ , получим  $f(a) = c_0$ . Дифференцируя ряд (5) почленно и затем полагая  $z = a$ , найдем  $f'(a) = c_1$ . Последовательно дифференцируя ряд (5) и полагая затем  $z = a$ , найдем:

$$f''(a) = 2c_2, \quad f'''(a) = 3! c_3, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n! c_n.$$

Таким образом,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (6)$$

и ряд (5) действительно является рядом Тейлора функции  $f(z)$ .

Теорему 5 называют *теоремой единственности* разложения в ряд Тейлора, ибо из нее следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции  $f(z)$  в степенной ряд является тейлоровским разложением этой функции.

Кроме того, из этой теоремы и из теоремы п. 18 можно заключить, что радиус сходимости степенного ряда (5) совпадает с расстоянием от центра  $a$  до ближайшей точки, в которой нарушается аналитичность суммы  $f(z)$  этого ряда. Например, радиус сходимости рядов (6) п. 18 равен 1, ибо при  $z = -1$  их суммы теряют аналитичность (второй ряд мы, конечно, рассматриваем для  $a$  ненатурального).

**20. Теорема единственности.** В п. 14 мы видели, что аналитическая функция полностью определяется своими значениями на границе области аналитичности. Здесь, в дополнение к это-

му, мы покажем, что аналитическая функция полностью определяется своими значениями на произвольной последовательности точек, сходящейся к некоторой внутренней точке области аналитичности.

Начнем с одной теоремы относительно нулей аналитической функции. *Нулем* функции  $f(z)$  называют любую точку  $z = a$ , в которой  $f(z)$  принимает значение 0:  $f(a) = 0$ . Если аналитическая функция не равна тождественно 0 в окрестности своего нуля  $a$ , то в ее тейлоровском ряде с центром в  $a$  все коэффициенты не могут равняться нулю (иначе сумма ряда была бы тождественно равна нулю). Номер младшего отличного от нуля коэффициента этого разложения называется *порядком* нуля  $a$ . Таким образом, в окрестности нуля порядка  $n$  тейлоровское разложение функции имеет вид:

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots, \quad (1)$$

где  $c_n \neq 0$  и  $n \geq 1$ .

Очевидно, *порядок нуля  $a$  можно определить также как порядок младшей отличной от нуля производной  $f^{(n)}(a)$ .*

Очевидно также, что в окрестности нуля порядка  $n$  аналитическая функция  $f(z)$  допускает представление вида

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad (2)$$

где функция

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \quad (3)$$

также аналитична в окрестности точки  $a$  (ибо она представляется сходящимся степенным рядом).

В силу непрерывности  $\varphi(z)$  эта функция отлична от нуля и всюду в некоторой окрестности точки  $a$ . Отсюда следует

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в окрестности своего нуля  $a$  и не равна тождественно 0 ни в какой его окрестности. Тогда существует окрестность точки  $a$ , в которой  $f(z)$  не имеет других нулей, кроме  $a$ .

Из доказанной теоремы и вытекает теорема единственности теории аналитических функций, о которой мы говорили в начале пункта.

**Теорема 2.** Если функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  аналитичны в области  $D$  и их значения совпадают на некоторой последовательности точек  $a_n$ , сходящейся к внутренней точке  $a$  области  $D$ , то всюду в  $D$

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Для доказательства мы рассмотрим функцию

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Она аналитична в  $D$  и имеет своими нулями точки  $a_n$ , а в силу непрерывности и точку  $a$ , ибо  $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ . Отсюда следует, что  $f(z)$  тождественно равна 0 в некоторой окрестности  $a$ , ибо в противном случае нарушалась бы только что доказанная теорема 1. Таким образом, множество всех нулей функции  $f(z)$  имеет хотя бы одну внутреннюю точку.

Обозначим через  $\mathcal{E}$  совокупность всех внутренних точек множества нулей функции  $f(z)$ . Если  $\mathcal{E}$  совпадает с  $D$ , то наша теорема доказана. Если же  $\mathcal{E}$  составляет лишь часть области  $D$ , то найдется граничная точка  $b$  множества  $\mathcal{E}$ , являющаяся внутренней точкой  $D$ . Существует последовательность точек  $b_n$  множества  $\mathcal{E}$ , сходящаяся к  $b$ ; точка  $b$  в силу непрерывности  $f(z)$  является нулем  $f(z)$ . С другой стороны,  $f(z)$  не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки  $b$ , ибо точка  $b$  была бы внутренней, а не граничной точкой множества  $\mathcal{E}$ . По теореме 1 отсюда вытекает, что в некоторой окрестности точки  $b$  нет ни одного нуля  $f(z)$ , но это противоречит тому, что  $b$  является граничной точкой  $\mathcal{E}$ . Полученное противоречие и доказывает теорему единственности.

Из теоремы единственности вытекает, что аналитическая в некоторой области и не равная тождественно нулю функция  $f(z)$  не может обращаться в нуль ни в какой подобласти из  $D$ , ни на какой дуге, лежащей в  $D$ , ни даже на последовательности точек  $D$ , сходящейся к ее внутренней точке.

Легко, однако, привести пример, когда бесконечная последовательность нулей функции сходится к граничной точке ее области аналитичности: функция  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  обращается в нуль на последовательности точек  $z_n = \frac{1}{n\pi}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), сходящейся к точке  $z = 0$ .

**21. Ряды Лорана.** Ряды Тейлора — аппарат, удобный для представления функций, аналитических в круговых областях. Весьма важно, однако, иметь аппарат для представления функций в областях иного вида. Например, при изучении функций, аналитических в некоторой окрестности точки  $a$  всюду, кроме самой точки  $a$ , приходится рассматривать кольцевые области вида  $0 < |z - a| < R$ . Оказывается, что для функций, аналитических в кольцевых областях  $r < |z - a| < R$ , где  $r \geq 0$ ,  $R \leq \infty$ , можно построить разложения по положительным и отрицательным степеням  $(z - a)$  вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (1)$$

являющиеся обобщением тейлоровских разложений. Такие разложения мы и рассмотрим в этом пункте.

Итак, пусть функция  $f(z)$  аналитична в некотором кольце  $K$ :  $r < |z - a| < R$ , где  $r \geq 0$ ,  $R \leq \infty$ . Выберем произвольно числа  $r'$  и  $R'$  так, что  $r < r' < R' < R$ , а также число  $k$ ,  $0 < k < 1$ , и рассмотрим кольцо  $\frac{r'}{k} < |z - a| < kR'$ . В произвольной внутренней точке  $z$  этого кольца мы можем представить  $f(z)$  по формуле Коши (п. 14), которая для нашего случая принимает вид:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (2)$$

где обе окружности  $C$ :  $|\xi - a| = R'$  и  $c$ :  $|\xi - a| = r'$  проходятся против часовой стрелки.

Для первого интеграла имеем  $\left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| < \frac{kR'}{R'} = k < 1$ , следовательно, дробь, в него входящую, можно разложить в сходящуюся на  $C$  равномерно относительно  $\xi$  геометрическую прогрессию:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - a} \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\xi - a}} = \\ &= \frac{1}{\xi - a} + \frac{z - a}{(\xi - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(\xi - a)^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Умножая это разложение на  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$  и интегрируя его почленно по  $\xi$  (что возможно в силу равномерной сходимости), мы получим разложение первого члена формулы (2) в степенной ряд:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (3)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Заметим, что выражение (4) нельзя представить, как в п. 18, в виде  $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ , так как  $f(z)$ , вообще говоря, не аналитична в точке  $a$ .

Для второго интеграла имеем:

$$\left| \frac{\xi - a}{z - a} \right| < \frac{kr'}{r'} = k < 1,$$

следовательно, равномерно на  $s$  сходится прогрессия

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z - a}} = \\ &= -\frac{1}{z - a} - \frac{\xi - a}{(z - a)^2} - \frac{(\xi - a)^2}{(z - a)^3} - \dots - \frac{(\xi - a)^{n-1}}{(z - a)^n} - \dots \end{aligned}$$

Как и выше, получим разложение второго члена формулы (2) в ряд, но теперь по отрицательным степеням  $(z - a)$ :

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - a)^{-n}, \quad (5)$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(\xi) (\xi - a)^{n-1} d\xi \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Заменим в формулах (5) и (6) индекс  $-n$ , пробегающий значения  $1, 2, \dots$ , индексом  $n$ , пробегающим значения  $-1, -2, \dots$ ; тогда, объединяя оба разложения (3) и (5) в одно, получим:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (7)$$

Далее, согласно п. 13, в формулах (4) и (6) окружности  $S$  и  $s$  можно заменить любой окружностью  $\gamma$ :  $|z - a| = \rho$ , где  $r' < \rho < R'$ . Поэтому обе эти формулы можно объединить в одну:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (8)$$

Полученное здесь разложение (7) функции  $f(z)$  по положительным и отрицательным степеням  $(z - a)$  с коэффициентами, определяемыми по формулам (8), называется *лорановским разложением* функции  $f(z)$  с центром в точке  $a$ ; ряд (3) называется *правильной*, ряд (5) — *главной частью* этого разложения.

Так как  $r'$  и  $R'$  в нашем рассуждении могут быть взяты сколь угодно близкими к  $r$  и  $R$ , а  $k$  может сколь угодно мало отличаться от 1, то разложение (7) можно считать установленным для всех точек  $z$  кольца аналитичности функции  $f(z)$ .

Правильная часть ряда Лорана по теореме Абеля сходится всюду в круге  $|z - a| < R$ , причем в любом круге  $|z - a| < kR$  ( $0 < k < 1$ ) его сходимость равномерна. Главная часть представляет степенной ряд относительно переменной  $Z = 1/(z - a)$ , следовательно, по той же теореме он сходится при  $|Z| < 1/r$ , т. е. всюду вне круга  $|z - a| > r$ , причем при  $|z - a| \geq r/k$ ,  $0 < k < 1$ , его сходимость также равномерна.

Таким образом, доказана

**Теорема 1** (П. Лоран\*), 1843 г.). В любом кольце  $K$ :  $r < |z - a| < R$ , в котором аналитична функция  $f(z)$ , эта функция может быть представлена своим рядом Лорана (7), равномерно сходящимся в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу  $K$ .

Из формул (8) для коэффициентов ряда Лорана точно так же, как в п. 17, получаем следующие неравенства Коши: если функция  $f(z)$  ограничена на окружности  $|z - a| = \rho$ , пусть  $|f(z)| \leq M$ , то

$$|c_n| < \frac{M}{\rho^n} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9)$$

Заметим, наконец, что областью сходимости произвольного ряда вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

всегда служит некоторое круговое кольцо \*\*)  $r < |z - a| < R$ , где  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $0 \leq R \leq \infty$ .

В этом очень легко убедиться с помощью теоремы Абеля, разбивая ряд на правильную и главную части. Для случая  $r < R$  справедлива

**Теорема 2.** Если ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (10)$$

сходится в кольце  $r < |z - a| < R$ , то его сумма  $f(z)$  аналитична в этом кольце и разложение (10) является рядом Лорана для функции  $f(z)$ .

В самом деле, аналитичность  $f(z)$  доказывается на основании теорем Абеля и Вейерштрасса так же, как в теореме 4 предыдущего пункта. Далее, на любой окружности  $\gamma$ :  $|z - a| = \rho$ , где  $r < \rho < R$ , ряд (10) сходится равномерно и остается таким после умножения на  $(z - a)^{-n+1}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Если проинтегрировать разложение

$$\frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n-1}$$

\*) Пьер Лоран (1813—1854) — французский математик. Теорема была получена также в 1841 г. К. Вейерштрассом, однако он опубликовал свой результат лишь в 1894 г. Ряды вида (7) встречались еще в работе Л. Эйлера (1748 г.).

\*\*) Это кольцо может оказаться пустым, если  $r \geq R$ , а в случае  $r = R$  множеством сходимости может служить любое множество на окружности  $|z - a| = r$ .

по окружности  $\gamma$  и воспользоваться легко доказываемыми для любого целого  $n$  соотношениями:

$$\int_{\gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad (11)$$

(ср. вывод формулы (4) из п. 13), то мы получим выражения коэффициентов ряда (10):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}},$$

совпадающие с выражениями (8). Следовательно, ряд (10) является рядом Лорана функции  $f(z)$ , и теорема 2 доказана.

Теорема 2 является теоремой единственности разложения в ряд Лорана, ибо из нее следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции в ряд по положительным и отрицательным степеням  $(z-a)$  является лорановским разложением этой функции.

**22. Особые точки.** Развитый в предыдущем пункте аппарат разложений Лорана позволит нам полностью изучить поведение аналитических функций в окрестности простейшего типа точек, в которых нарушается аналитичность этих функций — так называемых изолированных особых точек. Точка  $a$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ , если существует окрестность  $0 < |z-a| < R$  этой точки (с исключенной точкой  $a$ ), в которой  $f(z)$  аналитична. Подчеркнем, что здесь речь идет о точках, в окрестности которых функция однозначна (условие однозначности включается в условие аналитичности функции, см. п. 5). Об особых точках многозначного характера мы будем говорить в п. 25.

Различают три типа изолированных особых точек в зависимости от поведения функции  $f(z)$  в их окрестности:

1) Точка  $a$  называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ ,

2) точка  $a$  называется *полюсом*, если  $f(z)$  является бесконечно большой при приближении к  $a$ , т. е. если существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$  (это означает, что  $|f(z)| \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow a$ ) и, наконец,

3) точка  $a$  называется *существенно особой точкой*, если  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  не существует.

Изложим основные свойства функций, относящиеся к их особым точкам. Если  $a$  является изолированной особой точкой функции  $f(z)$ , то по теореме 1 предыдущего пункта эту функ-

цию можно разложить в ряд Лорана в кольце ее аналитичности  $0 < |z - a| < R$ :

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots \\ \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (1)$$

Это разложение имеет различный вид в зависимости от характера особой точки. Приведем три относящиеся сюда теоремы.

**Теорема I.** *Для того чтобы  $a$  была устранимой особой точкой функции  $f(z)$  необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  не содержало главной части.*

Ясно, что если лорановское разложение  $f(z)$  не содержит главной части, т. е.  $f(z)$  представляется степенным рядом

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad (2)$$

то существует конечный  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0^*$  и  $a$  является устранимой особой точкой.

Пусть, обратно,  $a$  является устранимой особой точкой функции  $f(z)$ . Тогда в силу того, что  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  существует и конечен,

функция  $f(z)$  ограничена в окрестности  $a$ ; пусть  $|f(z)| \leq M$ .

Воспользуемся неравенствами Коши из п. 21

$$|c_n| \leq M\rho^{-n};$$

так как в них число  $\rho$  можно выбирать сколь угодно малым, то ясно, что все коэффициенты  $c_n$  с отрицательными индексами равны нулю и лорановское разложение  $f(z)$  не содержит главной части. Теорема доказана.

**Замечание.** По существу мы доказали более сильное утверждение: *если функция  $f(z)$  ограничена в окрестности изолированной особой точки  $a$ , то  $a$  является устранимой особой точкой этой функции.*

Название «устраняемая особая точка», как теперь стало очевидно, оправдывается тем, что такую особую точку можно «устранить», полагая  $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ ; после этого функция

$f(z)$  будет аналитической и в точке  $a$ , ибо во всем круге  $|z-a| < R$  она будет представляться сходящимся степенным рядом (2) (см. теорему 4 п. 19).

Перейдем к случаю полюса. Из определения полюса  $a$  следует, что  $f(z)$  отлична от нуля в некоторой окрестности этого

\*) По теореме 4 п. 19 правая часть (2) аналитична в точке  $z = a$ , следовательно, она непрерывна и ее предел при  $z \rightarrow a$  равен сумме ряда в точке  $a$ , т. е.  $c_0$ .



полюса:  $0 < |z - a| < R'$ , где  $R' \leq R$ . В такой окрестности аналитична функция  $g(z) = 1/f(z)$ , для которой, очевидно,  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$ . Следовательно, по предыдущей теореме,  $a$  является

устранимой особой точкой  $g(z)$  и, положив  $g(a) = 0$ , мы получим, что  $a$  является нулем функции  $g(z)$ . Обратно, если  $g(z)$  имеет в точке  $a$  нуль (и не равна тождественно нулю), то функция  $f(z) = 1/g(z)$  по теореме 1 п. 20 аналитична в некоторой окрестности  $0 < |z - a| < R$  точки  $a$ ; очевидно,  $f(z)$  имеет в точке  $a$  полюс.

Таким образом, нули и полюсы аналитических функций весьма просто связаны друг с другом. Условимся еще называть *порядком полюса  $a$  функции  $f(z)$*  порядок нуля  $a$  функции  $g(z) = 1/f(z)$ .

*Теорема 2. Для того чтобы точка  $a$  была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения  $f(z)$  в окрестности  $a$  содержала лишь конечное число членов:*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k. \quad (3)$$

*При этом номер старшего отрицательного члена разложения совпадает с порядком полюса.*

Пусть  $a$  является полюсом порядка  $n$  функции  $f(z)$ . Тогда функция  $g(z) = 1/f(z)$ ,  $g(a) = 0$ , имеет в точке  $a$  нуль порядка  $n$  и согласно п. 20 в окрестности точки  $a$  представляется в виде

$$g(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

где  $\varphi(z)$  аналитична и  $\varphi(a) \neq 0$ . В этой окрестности

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \quad (4)$$

Но функция  $1/\varphi(z)$  аналитична в некоторой окрестности  $|z-a| < R$  точки  $a$ , следовательно, она разлагается там в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots + c_0(z-a)^n + \dots,$$

где  $c_{-n} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$ . Подставляя это разложение в формулу (4), получим искомое разложение (3), справедливое в окрестности  $0 < |z-a| < R$ .

Пусть теперь, обратно, в некоторой окрестности  $0 < |z-a| < R$  точки  $a$  имеет место разложение (3), причем  $c_{-n} \neq 0$ .

Тогда функция  $\varphi(z) = (z-a)^n f(z)$ ,  $\varphi(a) = c_{-n}$ , в круге  $|z-a| < R$  представляется рядом Тейлора

$$\varphi(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \dots, \quad (5)$$

т. е. аналитична. Так как  $\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = c_{-n} \neq 0$ , то

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = \infty$$

и точка  $a$  является полюсом функции  $f(z)$ . Функция  $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{\varphi(z)}$  имеет, очевидно, в точке  $a$  нуль порядка  $n$ , следовательно, порядок полюса  $a$  равен  $n$ . Теорема доказана.

Из доказанных теорем непосредственно вытекает

**Теорема 3.** *Точка  $a$  тогда и только тогда является существенно особой для функции  $f(z)$ , когда главная часть лорановского разложения последней в окрестности точки  $a$  содержит бесконечно много членов.*

Поведение функции в окрестности существенно особой точки выясняет следующая

**Теорема 4** (Ю. В. Сохоцкий\*), 1868 г.). *Если  $a$  — существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для любого комплексного числа  $A$  существует последовательность точек  $z_k \rightarrow a$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$ .*

Прежде всего, существует последовательность  $z_k \rightarrow a$ , для которой  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \infty$ , ибо в противном случае  $f(z)$  была бы ограниченной в окрестности  $a$  и точка  $a$  была бы устранимой особой точкой (см. замечание к теореме 1). Пусть теперь задано произвольное комплексное число  $A$ . Имеет место один из двух случаев: 1) в любой окрестности точки  $a$  найдется точка  $z$ , в которой  $f(z) = A$ , тогда теорема Сохоцкого доказана, ибо из таких точек  $z$  можно построить последовательность  $z_k \rightarrow a$ , так что  $f(z_k) = A$ , а значит, и  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$ , и 2) в некоторой окрестности точки  $a$  функция  $f(z)$  не принимает значения  $A$ .

Во втором случае в упомянутой окрестности аналитична функция  $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ . Точка  $a$  не может быть для нее ни полюсом, ни устранимой особой точкой, ибо в этих случаях существовал бы конечный или бесконечный предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) =$

\*) Эта теорема обычно приписывается Вейерштрассу, однако она была доказана в диссертации русского математика Юлиана Васильевича Сохоцкого (1842—1929) и опубликована за 8 лет до появления работы Вейерштрасса. Одновременно с Сохоцким теорему получил итальянский математик Ф. Казорати.

$= \lim_{z \rightarrow a} \left( A + \frac{1}{g(z)} \right)$ . Следовательно,  $a$  является существенно особой точкой функции  $g(z)$  и по доказанному существует последовательность  $z_k \rightarrow a$ , для которой  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(z_k) = \infty$ . Для этой последовательности, очевидно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( A + \frac{1}{g(z_k)} \right) = A,$$

и теорема Сохоцкого доказана.

Теорема Сохоцкого и предыдущие теоремы этого пункта позволяют утверждать, что в окрестности изолированной особой точки аналитическая функция либо стремится к определенному (конечному или бесконечному) пределу, либо вполне неопределенна, т. е. стремится (по различным последовательностям) к любому наперед заданному пределу. Никаких промежуточных случаев быть не может.

Приведем ряд примеров элементарных функций с особыми точками различных типов:

### 1) Функции

$$\frac{\sin z}{z}, \frac{1 - e^z}{z}, \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

имеют в начале координат устранимую особую точку. В этом проще всего убедиться, используя известные тейлоровские разложения (5) из п. 18 и теорему 1 этого пункта. Например, имеем при любом  $z \neq 0$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

### 2) Функция

$$f(z) = \frac{1}{e^{z^2} + 1}$$

имеет бесчисленное множество полюсов в точках  $z = \pm \sqrt{\pi(2k+1)i}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , в которых знаменатель обращается в нуль (эти точки расположены на двух биссектрисах координатных углов). Все полюсы — первого порядка, так как функция  $\frac{1}{f(z)} = e^{z^2} + 1$  имеет в них нули первого порядка (ее производная  $2ze^{z^2}$  отлична от нуля в этих точках).

### 3) Функции

$$e^{1/z}, \sin \frac{1}{z}, \cos \frac{1}{z}$$

имеют в начале координат существенно особую точку. В этом проще всего убедиться, подставляя  $1/z$  вместо  $z$  в тейлоровские разложения (5) из п. 18 и пользуясь теоремой 3 этого пункта (например, при любом  $z \neq 0$  имеем  $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots$ ).

Проверим для примера справедливость теоремы Сохоцкого для первой из этих функций. Для  $A = \infty$  последовательностью  $z_k$  этой теоремы может

служить  $z_k = 1/k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , ибо, очевидно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^k = \infty$ ; для  $A = 0$  можно принять  $z_k = -1/k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  ибо тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} = 0$ ; наконец, для конечного  $A \neq 0$  берем  $z_k = \frac{1}{(\ln A + 2k\pi i)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln A + 2k\pi i} = A$  ( $\ln$  означает какое-нибудь значение логарифма).

#### 4) Функция

$$f(z) = \frac{1}{e^{1/z^2} + 1}$$

имеет в начале координат неизолированную особую точку, ибо ее полюсы  $z_k = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)i}}$  накапливаются к началу координат (ср. пример 2).

По характеру особых точек выделяют следующие два простейших класса однозначных аналитических функций:

1) **Целые функции.** Функция  $f(z)$  называется *целой* (или *голоморфной*), если она вовсе не имеет особых\*) точек. По теореме п. 18 можно утверждать, что всякая целая функция представляется степенным рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , сходящимся во всей плоскости (и, обратно, всякая функция, представимая всюду сходящимся степенным рядом, является целой функцией). Примерами целых функций являются все многочлены, показательная функция,  $\sin z$ ,  $\cos z$  и др. Очевидно, сумма, разность и произведение целых функций суть снова целые функции.

2) **Дробные функции.** Функция  $f(z)$  называется *дробной* (или *мероморфной*), если она не имеет других особенностей, кроме полюсов. Из этого определения вытекает, что в любой ограниченной области мероморфная функция может иметь лишь конечное число полюсов. В самом деле, если бы в такой области было бесконечно много полюсов, то существовала бы их последовательность, сходящаяся к некоторой точке  $a$ , которая была бы неизолированной особой точкой, а не полюсом. Во всей плоскости полюсов может быть и бесконечно много. Примерами мероморфных функций являются все целые функции, дробно-рациональные функции, тригонометрические функции и др. Очевидно, сумма, разность, произведение и частное двух мероморфных функций и вообще любая дробно-рациональная функция  $R(f_1, f_2, \dots, f_n)$  от мероморфных функций снова является функцией мероморфной.

Подробнее о целых и мероморфных функциях см. гл. V.

\*) Здесь и в следующем определении речь идет о конечных точках плоскости; мы не подчеркиваем это в основном тексте, ибо понятие бесконечно удаленной точки мы вводим позже, в п. 24.

**23. Теорема о вычетах. Принцип аргумента.** Здесь мы введем весьма важное для дальнейших приложений понятие вычета\*) функции и докажем некоторые связанные с ним теоремы общего характера; примеры вычисления вычетов и различные приложения мы рассмотрим ниже (главным образом в гл. V и VI).

*Вычетом* функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $a$  (обозначение  $\text{res } f(a)$ ) называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (1)$$

где  $\gamma$  — достаточно малая окружность  $|z - a| = \rho$ , проходимая в положительном направлении. Согласно п. 13 величина вычета не зависит от величины  $\rho$  для достаточно малых  $\rho$ .

Из формул (8) п. 21 для коэффициентов ряда Лорана при  $n = -1$  непосредственно вытекает, что

$$\text{res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = c_{-1}, \quad (2)$$

т. е. что *вычет функции  $f(z)$  в особой точке  $a$  равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении  $f(z)$  в окрестности  $a$ .*

Отсюда следует, что в устранимой особой точке вычет функции всегда равен нулю. Нахождение вычета в полюсе порядка  $n$  облегчает следующая формула:

$$\text{res } f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}. \quad (3)$$

Для ее вывода достаточно умножить лорановское разложение

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \dots$$

на  $(z-a)^n$ , продифференцировать полученное равенство  $n-1$  раз и затем перейти к пределу при  $z \rightarrow a$  (непосредственная подстановка  $z = a$  в выражение производной невозможна, ибо  $a$  — особая точка  $f(z)$ ).

Для полюсов первого порядка формула (3) принимает особенно простой вид:

$$\text{res } f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \{(z-a) f(z)\}. \quad (4)$$

\*) Понятие вычета было введено О. Коши в «Мемуаре об определенных интегралах» (1814); в своих «Упражнениях по математике» (1826—1829) он дал также многочисленные приложения этого понятия к анализу. В своих работах Коши указывает, что он пришел к понятию вычета, развивая идеи Эйлера.

Если при этом в окрестности точки  $a$  функция  $f(z)$  определена как частное двух аналитических в этой точке функций:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем  $\varphi(a) \neq 0$ , а  $\psi(z)$  имеет в  $a$  нуль первого порядка (т. е.  $\psi(a) = 0$ , а  $\psi'(a) \neq 0$ ), то формулу (4) можно заменить следующей:

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} (z - a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (5)$$

Пример. Мероморфная функция  $\operatorname{ctg} z^2$  имеет полюсы первого порядка в точках  $z = \pm \sqrt{\pm k\pi}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), и полюс второго порядка в точке  $z = 0$  (в этом проще всего убедиться, рассматривая нули функции  $\operatorname{tg} z^2$ ). Вычет в точке  $z = 0$  по формуле (3) равен

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 \operatorname{ctg} z^2) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin 2z^2 - 2z^3}{\sin^2 z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}z^7 + \dots}{z^4 - \dots} = 0^*)$$

(это видно также из того, что лорановское разложение  $\operatorname{ctg} z^2$  с центром в точке  $z = 0$  может содержать лишь четные степени  $z$ ). Вычет в точке  $z = \pm \sqrt{\pm k\pi}$  по формуле (5), где принято  $\varphi = \cos z^2$ ,  $\psi = \sin z^2$ , равен

$$\frac{\cos z^2}{2z \cos z^2} = \frac{1}{2z} = \pm \frac{1}{2\sqrt{\pm k\pi}}.$$

Применение теории вычетов основывается главным образом на следующей важной теореме о вычетах:

Теорема 1 (О. Коши, 1825 г.). Пусть функция  $f(z)$  непрерывна на границе \*\*) С области  $D$  и аналитична внутри этой области всюду, кроме конечного числа особых точек  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Тогда, если  $C$  обходится в положительном направлении, то

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k). \quad (6)$$

\*) Мы заменили числитель и знаменатель первыми членами их тейлоровских разложений в окрестности точки  $z = 0$ .

\*\*) Здесь и далее непрерывность  $f(z)$  на границе области понимается в смысле непрерывности по области, т. е. в том смысле, что в любой точке  $z_0$  границы существует  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , причем  $z \rightarrow z_0$  по точкам

области  $D$ . Если  $C$  имеет кратные точки, например содержит двубережный разрез, то условие можно ослабить, потребовав существования предельных значений  $f(z)$  лишь при  $z \rightarrow z_0$  с каждой из сторон разреза (при этом пределы с одной и с другой стороны не обязаны совпадать).

Доказательство вытекает из теоремы Коши для многосвязных областей (п. 13). Заключим каждую точку  $a_k$  в кружок  $\gamma_k$ :  $|z - a_k| = \rho_k$  столь малый, что все такие кружки лежат в области  $D$  и не пересекаются друг с другом (рис. 26). Так как  $f(z)$  аналитична в области  $D^*$ , ограниченной кривой  $C$  и совокупностью окружностей  $\gamma_k$ , и непрерывна в  $\bar{D}^*$ , то по цитированной теореме

$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k^-} f(z) dz = 0,$$

где все  $\gamma_k^-$  проходятся по часовой стрелке. Меняя направление обхода окружностей  $\gamma_k$  и пользуясь определением вычета (1), согласно которому

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res} f(a_k),$$

мы получаем нужный результат (6).

Принципиальная важность теоремы о вычетах заключается в том, что она позволяет свести вычисление величины «в целом»,

какой является интеграл по замкнутому контуру конечной величины, к вычислению величин «в малом», дифференциальных величин, какими являются вычеты. Действительно, вычеты вычисляются с помощью интегралов по бесконечно малым контурам или даже с помощью простого предельного перехода (формулы (3), (4) и (5)). Метод сведения вычисления величин «в целом» к вычислению дифференциальных величин является обычным в математическом

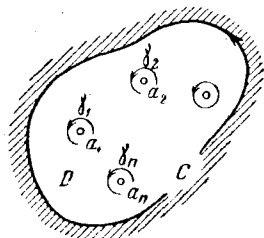


Рис. 26.

анализе (сравни вычисление интегралов с помощью первообразных, которые определяются на основании известных производных). Применение теории вычетов посвящена специальная глава V.

Остановимся еще на понятии логарифмического вычета. Под логарифмическим вычетом аналитической функции  $f(z)$  в точке  $a$  понимают вычет ее логарифмической производной

$$\{\ln f(z)\}' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Ясно, что имеет смысл говорить о логарифмических вычетах не только в особых точках, но и в нулях  $f(z)$ . Если точка  $a$

является нулем  $f(z)$  порядка  $n$ , то в окрестности этой точки

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots, c_n \neq 0,$$

следовательно,

$$f'(z) = nc_n(z-a)^{n-1} + (n+1)c_{n+1}(z-a)^n + \dots$$

и логарифмическая производная

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{nc_n + (n+1)c_{n+1}(z-a) + \dots}{c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots}.$$

Здесь второй множитель является функцией, аналитической в точке  $a$ , ибо  $c_n \neq 0$ , следовательно, он разлагается в ряд Тейлора с центром  $a$  (свободный член этого ряда равен  $n$ ) и

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z-a} \{n + d_0(z-a) + d_1(z-a)^2 + \dots\} = \\ &= \frac{n}{z-a} + d_0 + d_1(z-a) + \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Мы получили лорановское разложение логарифмической производной  $\{\ln f(z)\}'$  в окрестности точки  $z=a$ , из которого видно, что точка  $a$  является ее полюсом первого порядка с вычетом, равным  $n$ .

Пусть теперь  $a$  является полюсом  $f(z)$  порядка  $n$ . Так как функция  $g(z) = 1/f(z)$  имеет в точке  $a$  нуль порядка  $n$  и так как  $\{\ln f(z)\}' = -\{\ln g(z)\}'$ , то по только что доказанному, для логарифмической производной  $\{\ln f(z)\}'$  точка  $a$  является полюсом первого порядка с вычетом, равным  $-n$ . Таким образом, доказана

**Теорема 2.** В нулях и полюсах функции  $f(z)$  ее логарифмическая производная  $f'(z)/f(z)$  имеет полюсы первого порядка, причем в нуле функции логарифмический вычет равен порядку нуля, а в полюсе — порядку полюса со знаком минус.

Теорема 2 и теорема о вычетах дают возможность применить логарифмические вычеты для подсчета числа нулей и полюсов аналитических функций в заданных областях.

Пусть функция  $f(z)$  аналитична внутри ограниченной области  $D$  всюду, кроме конечного числа полюсов  $b_1, b_2, \dots, b_m$  кратностей, соответственно  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , непрерывна на границе  $C$  этой области и не обращается на  $C$  в 0; пусть еще  $f'(z)$  непрерывна на  $C$ . Тогда функция  $f(z)$  имеет в  $D$  лишь конечное число нулей, ибо в противном случае существовала бы бесконечная последовательность нулей, сходящаяся к внутренней или граничной точке области  $D$ , но эта последовательность не может сходиться ни к внутренней точке (по теореме единственности п. 20), ни к граничной точке (потому что  $f(z) \neq 0$  и непрерывна на  $C$ ). Нули  $f(z)$  в области  $D$  мы обозначим через



$a_1, a_2, \dots, a_l$ , а их кратности — соответственно через  $n_1, n_2, \dots, n_l$ . Применяя к логарифмической производной  $f(z)$  теорему о вычетах и теорему 2, мы получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (n_1 + n_2 + \dots + n_l) - (p_1 + p_2 + \dots + p_m) = N - P, \quad (8)$$

где  $N$  и  $P$  обозначают соответственно полное число нулей и полюсов этой функции, причем каждый нуль и полюс считается столько раз, каков его порядок.

Выясним геометрический смысл левой части последнего равенства. Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln |f(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(z), \quad (9)$$

где  $\ln$  и  $\arg$  обозначают какие-нибудь ветви этих функций, непрерывные вдоль  $C$ . Так как при обходе замкнутого контура  $C$  функция  $\ln |f(z)|$  возвращается к своему первоначальному значению, то первый интеграл в правой части (9) равен нулю. С другой стороны, если точка  $w = 0$  лежит внутри контура, описываемого точкой  $w = f(z)$ , когда  $z$  обходит  $C$ , то конечное значение

$\arg f(z)$  может отличаться от начального (рис. 27) и тогда второе слагаемое будет отличным от нуля. Величина

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

— полное изменение аргумента функции  $f(z)$  при обходе  $C$ , деленное на  $2\pi$ , — геометрически представляет собой число оборотов вокруг начала  $w = 0$  вектора  $f(z)$  при полном обходе  $C$ , или, что то же самое, вектора  $w$  при обходе кривой  $\Gamma$ , соответствующей  $C$  при отображении  $w = f(z)$  (на рис. 27 это число равно 1). Соотношения (8) и (9) выражают так называемый принцип аргумента:

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична внутри области  $D$  всюду, кроме конечного числа полюсов, непрерывна на границе  $C$  этой области и не обращается на  $C$  в нуль; пусть еще  $f'(z)$  непрерывна на  $C$ . Тогда разность между полным чис-

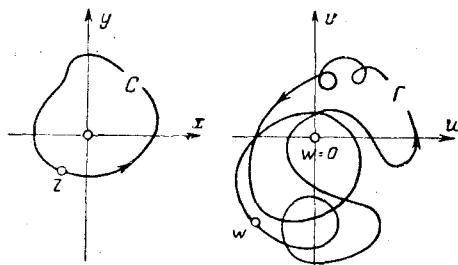


Рис. 27.

лом нулей и полюсов этой функции внутри  $D$  разна числу оборотов вектора  $w$  при обходе кривой  $\Gamma$ , соответствующей  $C$  при отображении  $w = f(z)$ , или, что то же самое, сумме логарифмических вычетов  $\dot{f}(z)$  в области  $D$ :

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (10)$$

Дальнейшие результаты, относящиеся к подсчету числа нулей и полюсов функций, и их важные применения мы изложим в п. 75. Здесь мы приведем лишь одно видоизменение формулы (8), учитывающее не только число нулей и полюсов, но и их положение.

Рассмотрим наряду с функцией  $f(z)$ , удовлетворяющей условиям принципа аргумента, еще функцию  $\varphi(z)$ , аналитическую в  $D$  и непрерывную в  $\bar{D}$ . Особыми точками функции  $g(z) = \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$  могут, очевидно, служить лишь нули и полюсы  $f(z)$ , причем в окрестности каждой такой точки  $c$  она допускает разложение вида

$$g(z) = \{\varphi(c) + \dots\} \left\{ \pm \frac{n}{z-c} + \dots \right\} = \pm \frac{n\varphi(c)}{z-c} + \dots$$

(см. теорему 2), где знак « $+$ » относится к случаю, когда точка  $c$  является нулем  $f(z)$ , а знак « $-$ » к случаю полюса. Отсюда видно, что вычет  $g(z)$  в точке  $c$  равен  $\pm \varphi(c)n$  и, заменяя в соотношении (8) функцию  $f'(z)/f(z)$  функцией  $g(z)$ , получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n_1 \varphi(a_1) + \dots + n_l \varphi(a_l) - \\ - p_1 \varphi(b_1) - \dots - p_m \varphi(b_m). \quad (11)$$

Полагая, в частности,  $\varphi(z) \equiv z$ , будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^l n_k a_k - \sum_{k=1}^m p_k b_k. \quad (12)$$

Правая часть здесь представляет разность между суммой всех нулей и суммой всех полюсов функции  $f(z)$  в области  $D$ , причем каждый нуль или полюс входит в сумму столько раз, какой его порядок.

Рассмотрим теперь вместо функции  $f(z)$  функцию  $g(z) = f(z) - a$ , где  $a$  — фиксированное комплексное число; полюсы  $g(z)$  совпадают с полюсами  $f(z)$ , а нули являются  $a$ -точками функции  $f(z)$ , т. е. точками, в которых  $f(z)$  принимает значение  $a$ . Если  $f(z)$  аналитична в области  $D$  всюду, кроме конечного числа полюсов, а на границе  $C$  этой области непрерывна и не

принимает значения  $a$ , причем  $f'(z)$  непрерывна на  $C$ , то к функции  $g(z) = f(z) - a$  применимы формулы (10) и (12).

Мы получаем тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - a\} = \sum_{k=1}^l n_k - \sum_{k=1}^m p_k, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \sum_{k=1}^l n_k a_k - \sum_{k=1}^m p_k b_k, \quad (14)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_l$  —  $a$ -точки функции  $f(z)$  в области  $D$  порядков\*) соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_l$ , а  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — ее полюсы порядков соответственно  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

Мы воспользуемся этими формулами в гл. VII.

**24. Бесконечно удаленная точка.** До сих пор мы рассматривали лишь конечные точки плоскости комплексного переменного, однако для изучения некоторых вопросов полезно ввести и бесконечно удаленную точку. Это нагляднее всего сделать

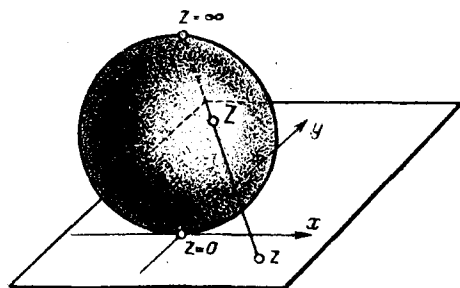


Рис. 28.

с помощью так называемой *стереографической проекции* плоскости  $z$  на сферу, касающуюся плоскости своим южным полюсом. Такая проекция ставит в соответствие каждой точке  $z$  комплексной плоскости точку  $Z$  сферы, которая получается при пересечении сферы лучом, соединяющим  $z$  с северным полюсом сферы (рис. 28). Стереографическая проекция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между комплексной плоскостью и сферой с выколотым северным полюсом. Точки  $Z$  считают сферическими изображениями комплексных чисел  $z$  и саму сферу называют *числовой*.

Чтобы распространить соответствие на всю сферу, на плоскости вводят условную *бесконечно удаленную точку* (комплексное число  $z = \infty$ ) и считают ее соответствующей северному полюсу сферы. Число  $z = \infty$  не участвует в арифметических операциях, как обычные комплексные числа. Однако говорят, например, что последовательность  $\{z_n\}$  сходится к бесконечно удаленной точке,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , если для любого  $M > 0$  най-

\*) Порядком  $a$ -точки  $f(z)$  называется порядок соответствующего нуля функции  $f(z) - a$ .

дется номер  $n_0$ , начиная с которого  $|z_n| > M$  (выше мы так и делали в подобных случаях). Эта терминология оправдывается тем, что стереографические проекции  $Z_n$  точек  $z_n$  нашей последовательности в самом деле образуют последовательность, сходящуюся к северному полюсу сферы.

Плоскость комплексного переменного с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой называют *полной комплексной плоскостью* (плоскость без такой точки называют тогда *открытой*). Как мы видели, полная комплексная плоскость эквивалентна сфере, и для геометрических представлений понятий, связанных с бесконечно удаленной точкой, очень удобно прибегать к сферическому изображению комплексных чисел.

Под *окрестностью* бесконечно удаленной точки понимают круг на сфере с центром в ее северном полюсе, или, другими словами, совокупность точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z| > R$  (с присоединением бесконечно удаленной точки). После введения этого понятия мы можем рассматривать области, содержащие бесконечно удаленную точку внутри или на границе, т. е. неограниченные области. Определение порядка связности, данное в п. 3 для ограниченных областей, без всяких изменений переносится на неограниченные области (например, окрестность точки  $z = \infty$  с включением последней оказывается односвязной областью, а та же окрестность с исключением  $z = \infty$  — двусвязной).

Также без всяких изменений распространяется на бесконечные  $z_0$  и  $w_0$  определение п. 5 предела функции с помощью окрестностей. При этом функция, стремящаяся к пределу  $w_0 = \infty$ , называется бесконечно большой (см. п. 22, определение полюса).

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки  $z = \infty$ ; понятие аналитичности в этой точке пока еще не определено). На такую функцию без всяких изменений распространяется определение особых точек из п. 22: говорят, что  $z = \infty$  является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции  $f(z)$  в зависимости от того, конечен, бесконечен, или вовсе не существует  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ .

Однако критерии типа особой точки, связанные с разложением Лорана (теоремы 1—3 п. 22), изменятся, что видно из следующего рассуждения. Положим  $z = 1/\xi$  и

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \varphi(\xi),$$

тогда  $\varphi(\xi)$  будет аналитической в некоторой окрестности точки  $\xi = 0$ . Последняя будет для  $\varphi(\xi)$  особой точкой того же типа,

что и  $z = \infty$  для  $f(z)$ , ибо  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi(\xi)$ . Лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности  $z = \infty$  можно, очевидно, получить простой заменой  $\xi = 1/z$  в лорановском разложении  $\varphi(\xi)$  в окрестности  $\xi = 0$ . Но при такой замене правильная часть заменяется главной, и обратно.

Таким образом, справедлива

**Теорема 1.** *В случае устранимой особенности в бесконечно удаленной точке лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности этой точки вовсе не содержит положительных степеней  $z$ , в случае полюса содержит конечное их число, а в случае существенной особенности — бесконечное.*

Если  $f(z)$  имеет в точке  $z = \infty$  устранимую особенность, то обычно говорят, что она *аналитична в бесконечности*, и принимают  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ . В этом случае функция, очевидно, ограничена в некоторой окрестности точки  $z = \infty$ .

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в полной плоскости. Из аналитичности функции в бесконечности следует ее ограниченность в окрестности этой точки; пусть  $|f(z)| < M_1$  при  $|z| > R$ . С другой стороны, из аналитичности (а следовательно, непрерывности)  $f(z)$  в замкнутом круге  $|z| \leq R$  следует ее ограниченность в этом круге; пусть в нем  $|f(z)| \leq M_2$ . Но тогда функция  $f(z)$  ограничена во всей плоскости: для всех  $z$  имеем  $|f(z)| < M = \max(M_1, M_2)$ .

Таким образом, теореме Лиувилля (п. 17) можно придать следующую форму.

**Теорема 2.** *Если функция  $f(z)$  аналитична в полной плоскости  $z$ , то она постоянна.*

В заключение остановимся на понятии вычета в бесконечно удаленной точке. Пусть функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности точки  $z = \infty$  (кроме, быть может, самой этой точки); под *вычетом функции в бесконечности* понимают:

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz,$$

где  $\gamma^-$  — достаточно большая окружность  $|z| = \rho$ , проходимая по часовой стрелке (так что окрестность точки  $z = \infty$  остается слева так же, как и в случае конечной точки). Из этого определения непосредственно следует, что *вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при  $z^{-1}$  в лорановском ее разложении в окрестности точки  $z = \infty$ , взятому с обратным знаком.*

Наконец, легко получается

**Теорема 3.** *Если функция  $f(z)$  имеет в полной плоскости конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю.*

В самом деле, пусть  $a_1, \dots, a_n$  будут конечные особые точки функции  $f(z)$  и  $\gamma$  — окружность  $|z| = \rho$ , содержащая их все внутри. По свойству интегралов, теореме о вычетах и определению вычета в бесконечности имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz = \\ &= \operatorname{res} f(a_1) + \dots + \operatorname{res} f(a_n) + \operatorname{res} f(\infty), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**25. Аналитическое продолжение. Обобщение понятия аналитической функции.** Здесь мы рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении функций и введем понятие многозначной аналитической функции, обобщающее понятие аналитичности п. 5.

Пусть две области  $D_0$  и  $D_1$  без общих точек имеют общий участок границы  $\gamma$  (рис. 29) и в этих областях заданы (однозначные) аналитические функции  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  соответственно. Будем говорить, что функция  $f_1(z)$  является *непосредственным аналитическим продолжением* функции  $f_0(z)$  в область  $D_1$ , если существует аналитическая в области  $D_0 + \gamma + D_1$  функция  $f(z)$ , равная  $f_0(z)$  во всех точках  $D_0$  и равная  $f_1(z)$  во всех точках  $D_1$ :

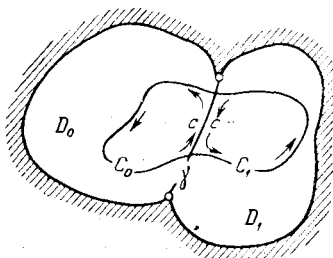


Рис. 29.

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{в } D_0, \\ f_1(z) & \text{в } D_1. \end{cases} \quad (1)$$

По теореме единственности (п. 20) при заданных областях  $D_0$  и  $D_1$  и участке границы  $\gamma$  аналитическое продолжение данной функции  $f_0(z)$  (если оно возможно) определяется однозначно.

Приведем одно простое достаточное условие для аналитического продолжения, так называемый *принцип непрерывного продолжения*:

**Теорема 1.** Пусть даны две односвязные области  $D_0$  и  $D_1$  без общих точек, такие, что их границы имеют один общий кусок  $\gamma$ , и в этих областях соответственно заданы аналитические функции  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$ . Если, кроме того, эти функции непрерывны в  $D_0 + \gamma$  и  $D_1 + \gamma$  и совпадают во всех точках кривой  $\gamma$ , то функция  $f_1(z)$  является непосредственным аналитическим продолжением функции  $f_0(z)$  в область  $D_1$ .

Доказательство основано на теоремах Мореры (п. 17) и Коши (п. 12). Действительно, в силу наших условий функция

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{в } D_0, \\ f_0(z) = f_1(z) & \text{на } \gamma, \\ f_1(z) & \text{в } D_1 \end{cases} \quad (2)$$

непрерывна в области  $D = D_0 + \gamma + D_1$ ; покажем, что ее интеграл по любому замкнутому контуру  $C$ , лежащему в  $D$ , равен нулю. Если  $C$  полностью принадлежит одной из областей  $D_0$  или  $D_1$ , это является непосредственным следствием теоремы Коши. Если же  $C$  принадлежит  $D_0$  и  $D_1$ , то, обозначив через  $C_0$  и  $C_1$  части контура  $C$ , лежащие соответственно в  $D_0$  и  $D_1$ , через  $c$  — часть кривой  $\gamma$ , лежащую внутри  $C$  (рис. 29), по теореме Коши (в обобщенной форме, см. теорему 5 п. 12) будем иметь:

$$\int_{C_0+c} f(z) dz = 0, \quad \int_{C_1+c^-} f(z) dz = 0.$$

Складывая эти равенства, мы получим:

$$\int_{C_0+c} f(z) dz + \int_{C_1+c^-} f(z) dz = \int_C f(z) dz = 0.$$

Отсюда по теореме Мореры заключаем, что функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$ , а это и означает, что  $f_1(z)$  является аналитическим продолжением  $f_0(z)$ . Теорема доказана.

Коротко говоря, доказанная теорема означает, что если аналитическая функция является непрерывным продолжением аналитической же функции  $f_0(z)$  через дугу  $\gamma$ , то она является и аналитическим продолжением этой функции \*).

Основываясь на теореме 1, мы несколько обобщим введенное выше понятие непосредственного аналитического продолжения. Именно, допустим, что области  $D_0$  и  $D_1$  имеют наряду с общим участком границы  $\gamma$  еще общие внутренние точки (рис. 30) и что в этих областях по-прежнему заданы аналитические функции  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$ . Мы будем тогда говорить, что  $f_1(z)$  является *непосредственным аналитическим продолжением*  $f_0(z)$  через дугу  $\gamma$ , если  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  непрерывны в  $D_0 + \gamma$  и  $D_1 + \gamma$  и их значения на  $\gamma$  совпадают.

Если  $D_0$  и  $D_1$  не имеют общих внутренних точек, то это определение совпадает со старым. Если же  $D_0$  и  $D_1$  имеют общие

\*) Аналогичная теорема в действительной области неверна: если две функции  $f_0(x)$  и  $f_1(x)$ , дифференцируемые в смежных интервалах  $(a, b)$  и  $(b, c)$ , непрерывны и совпадают в общей точке  $b$  этих интервалов, то функция  $f(x)$ , получаемая их объединением, может и не быть дифференцируемой на интервале  $(a, c)$  — ее график может иметь в  $b$  угловую точку.

точки (например, общую часть  $\delta'$  на рис. 30), то функция  $f(z)$ , определяемая по формуле (2), может быть двузначной в точках  $\delta'$ , ибо ниоткуда не следует, что в точке  $z$  из  $\delta'$  значения  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  должны совпадать. Таким образом, второе определение продолжения более общее, чем первое.

Еще несколько обобщим наше определение. Пусть дана цепочка односвязных областей  $D_0, D_1, \dots, D_n$ , таких, что каждая пара соседних областей  $D_k$  и  $D_{k+1}$  имеет общий участок границы

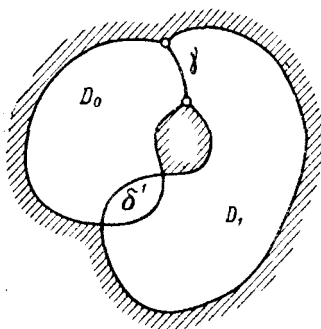


Рис. 30.

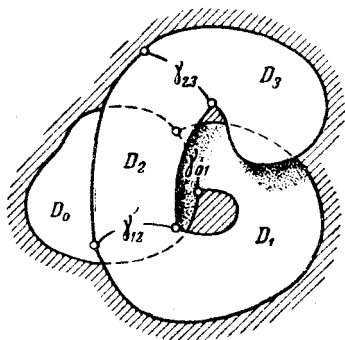


Рис. 31.

$\gamma_{k, k+1}$  (рис. 31), и пусть в каждой области  $D_k$  задана однозначная аналитическая функция  $f_k(z)$ . Будем говорить, что  $f_n(z)$  является *аналитическим продолжением\** функции  $f_0(z)$  в область  $D_n$  через данную цепочку областей, если для любого  $k = 0, 1, \dots, n-1$  функции  $f_k(z)$  и  $f_{k+1}(z)$  соответственно непрерывны в  $D_k + \gamma_{k, k+1}$  и  $D_{k+1} + \gamma_{k, k+1}$  и их значения на  $\gamma_{k, k+1}$  совпадают. При  $n = 1$  мы получаем предыдущее определение.

Заметим, что и здесь при фиксированных  $D_0, D_1, \dots, D_n$  и  $\gamma_{01}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{n-1, n}$  аналитическое продолжение функции  $f_0(z)$  в область  $D_n$  (если оно возможно) определяется однозначно. При изменении же промежуточных звеньев цепочки  $D_k$ , или даже при замене какой-либо дуги  $\gamma_{k, k+1}$  другой общей дугой  $\tilde{\gamma}_{k, k+1}$  границ областей  $D_k$  и  $D_{k+1}$ , значение аналитического продолжения может измениться.

Поясним сказанное простым примером. Пусть  $D_0$  и  $D_1$  представляют собой верхнюю и нижнюю половины кольца  $1 < |z| < 2$ , для которых соответственно  $\text{Im } z > 0$  и  $\text{Im } z < 0$ , и  $f_0(z)$  — ветвь  $\sqrt{z}$ , характеризуемая условием  $0 < \arg z < \pi$ . Если принять в качестве  $\gamma_{01}$  отрезок  $(-2, -1)$ , то аналитическое продолжение  $f_0(z)$  в  $D_1$  вполне определится как ветвь  $\sqrt{z}$ , для которой  $\pi < \arg z < 2\pi$  (на  $\gamma_{01}$  значение аргумента должно меняться непрерывно). Если теперь, оставив без изменений  $f_0(z)$  и области  $D_0$  и  $D_1$ ,

\* Уже без слова «непосредственное».



заменить отрезок  $\gamma_{01}$  отрезком  $\tilde{\gamma}_{01}:(1, 2)$ , то аналитическое продолжение  $f_0(z)$  в  $D_1$  определится как ветвь  $\sqrt{z}$ , для которой  $-\pi < \arg z < \pi$  (теперь значения аргумента должны меняться непрерывно на отрезке  $\tilde{\gamma}_{01}$ ). Эти продолжения  $f_1(z)$  и  $\tilde{f}_1(z)$  различны, например,

$$f_1(-i) = \sqrt{e^{\frac{3\pi}{2}i}} = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \tilde{f}_1(-i) = \sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}i}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

(они отличаются лишь знаком). Таким образом, значение аналитического продолжения действительно может измениться даже лишь при изменении связывающих цепочку дуг.

Пусть теперь  $f_0(z)$ ,  $D_0$ ,  $D_1$  и  $\gamma_{01}$  имеют прежний смысл; возьмем еще одно звено цепочки  $D_2 = D_0$ , связанное с  $D_1$  отрезком  $\gamma_{12}:(1, 2)$ ; тогда аналитическое продолжение  $f_2(z)$  определится как ветвь  $\sqrt{z}$ , для которой  $2\pi < \arg z < 3\pi$ , и в любой точке  $z$  верхнего полукольца значения  $f_0(z)$  и  $f_2(z)$  будут различными (отличаться знаком). Мы видим, что когда области  $D_0$  и  $D_k$  налегают друг на друга, то в их общих точках значения функции и ее аналитического продолжения могут быть различными.

Введенное понятие аналитического продолжения позволяет ввести понятие полной аналитической функции (вообще говоря, многозначной). Пусть в некоторой области  $D_0$  задана однозначная аналитическая функция  $f_0(z)$ . Может случиться, что  $f_0(z)$  не продолжается ни через одну дугу границы  $S$  области  $D_0$ . Например, пусть  $D_0$  — круг  $|z| < 1$  и

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k}. \quad (3)$$

Функция  $f_0(z)$  имеет особенность в точке  $z=1$ , ибо для действительных  $z=x$ , как легко видеть,  $\lim_{x \rightarrow 1} f_0(x) = \infty$ . В самом

деле,  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n x^{2k} = n$ , следовательно, для любого  $n$  найдется  $\delta > 0$

такое, что при  $x > 1 - \delta$  имеем  $\sum_{k=1}^n x^{2k} > n - 1$ , а значит, и по-

давню,  $f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} > n - 1$ . Далее имеем;

$$f_0(z) = z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^2)^{2k} = z^2 + f_0(z^2),$$

откуда видно, что и в точках  $z = \sqrt{1}$  (т. е.  $z = \pm 1$ ) имеются особенности. Аналогично, для любого натурального  $n$

$$f_0(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + f_0(z^{2^n}),$$

следовательно, и в точках  $z = \sqrt[n]{1}$ , которые лежат в вершинах правильного  $2^n$ -угольника, вписанного в окружность  $|z| = 1$ ,

функция  $f_0(z)$  имеет особенности. Таким образом, множество особых точек функции  $f_0(z)$  всюду плотно на окружности  $|z|=1$  и  $f_0(z)$  действительно непродолжаема ни через какую дугу этой окружности.

В таких случаях мы будем говорить, что контур  $C$  является *естественной границей функции*  $f_0(z)$ ,  $D_0$  будем называть *областью существования* этой функции, а саму функцию — *полной аналитической функцией*.

Пусть теперь  $f_0(z)$  продолжаема за пределы  $D_0$ . Рассмотрим всевозможные ее аналитические продолжения по всевозможным цепочкам областей. Будем смотреть на значения всех таких продолжений как на значения одной функции  $f(z)$ . Таковую функцию мы будем называть *полной аналитической функцией*, а однозначные аналитические функции, из которых она составлена (продолжения функции  $f_0(z)$ ) — ее *ветвями*. Область  $D$ , получаемую объединением всех областей, составляющих цепочки, по которым совершаются аналитические продолжения, и дуг, вдоль которых смыкаются эти области, мы будем называть *областью существования*  $f(z)$ .

Функцию  $f(z)$  можно рассматривать и не во всей области существования, а лишь в ее части; тогда мы будем называть  $f(z)$  просто *аналитической функцией*. Такое определение аналитической функции является обобщением определения п. 5, ибо оно допускает, очевидно, и многозначные функции. В дальнейшем, говоря об аналитической функции, мы будем понимать аналитичность в этом более общем смысле. Если же нужно будет подчеркнуть, что речь идет об аналитичности в смысле п. 5, мы будем говорить об *однозначной аналитической функции*.

Мы закончим изложение общего понятия аналитической функции описанием точек, в которых нарушается ее аналитичность — особых точек функции. Не нужно думать, что такие точки представляют собой нечто исключительное, патологическое, и потому мало интересное для приложений. Напротив, особые точки представляют наибольший интерес при изучении аналитической функции, ибо в них, говоря описательно, заложена вся основная информация о функции. Читатель лучше оценит справедливость этого утверждения, когда он ознакомится, например, с главой V и увидит особые точки, так сказать, «в работе». Пока же мы советуем вспомнить, что по теореме Лиувилля (в формулировке п. 24) все аналитические функции, за исключением постоянных, имеют особые точки, а также вспомнить те уже довольно многочисленные места данной книги, где на основе изучения особых точек делались важные заключения о свойствах функции (теоремы п. 23, замечание в конце п. 19 и т. п.). Перейдем к точным определениям.

Точку  $a$ , принадлежащую области существования аналитической функции или ее границе, мы будем называть *особой точкой* функции  $f(z)$ , если в ней нарушается аналитичность хотя бы одной ветви функции  $f(z)$ .\*).

Как и в п. 22, мы ограничимся рассмотрением особых точек простейшего вида — так называемых изолированных. Точка  $a$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ , если существует такая окрестность  $0 < |z - a| < R$ , что  $f(z)$  продолжаема вдоль любой цепочки областей, принадлежащих этой окрестности.

Рассмотрим цепочку, составленную из областей  $D_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), представляющих собой кольца  $0 < |z - a| < R$ , разрезанные вдоль некоторого радиуса, например  $\arg(z - a) = 0$ . Пусть  $f_0(z)$  — ветвь  $f(z)$ , однозначная и аналитическая в каком-либо кольце  $D_0$  с разрезом  $\gamma_0$ . Если значения  $f_0(z)$  на обоих берегах разреза  $\gamma_0$  совпадают, то мы будем говорить, что  $a$  — особая точка *однозначного характера* для данной ветви (в этом случае по теореме единственности п. 20 аналитические продолжения ветви  $f_0(z)$  в другие кольца  $D_k$  совпадают с  $f_0(z)$ ). Такие особые точки мы рассмотрели в п. 22.

Если же значения  $f_0(z)$  на берегах разреза не совпадают, то  $a$  называется особой точкой *многозначного характера* или *точкой ветвления*. Здесь возможны два случая:

1. Существует цепочка  $D_0, D_1, \dots, D_{n-1}$  колец, соединенных последовательно, например против часовой стрелки (т. е. нижний берег разреза на  $D_0$  соединяется с верхним берегом разреза на  $D_1$ , нижний на  $D_1$  — с верхним на  $D_2$  и т. д.), такая, что на оставшихся свободными берегах разрезов  $D_0$  и  $D_{n-1}$  (верхний берег на  $D_0$  и нижний на  $D_{n-1}$ ) значения  $f_0(z)$  и  $f_{n-1}(z)$  совпадают. Тогда по теореме единственности п. 20  $f_n(z) \equiv f_0(z)$ ,  $f_{n+1}(z) \equiv f_1(z)$ ,  $\dots$ ,  $f_{2n-1}(z) \equiv f_{n-1}(z)$ , и вообще значения  $f_k(z)$  при  $k$ , изменяющемся от  $-\infty$  до  $\infty$ , периодически повторяют значения  $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{n-1}(z)$ . В этом случае мы будем говорить, что  $a$  — *точка ветвления конечного порядка*  $n$ .

Если в рассматриваемом случае все ветви  $f_k(z)$  при  $z \rightarrow a$  стремятся к одному конечному или бесконечному пределу, то говорят, что  $a$  является *алгебраической точкой* ветвления. Та-

---

\*) Особая точка  $a$  может принадлежать области существования лишь в том случае, когда наряду с ветвью функции, имеющей в этой точке особенность, существует ветвь, правильная в точке  $a$ . Такова, например, точка  $z = 1$  для функции  $w = 1/(Vz + 1)$  — она является особой для той ветви функции, для которой  $V\bar{1} = -1$  и правильной для другой ее ветви (для которой  $V\bar{1} = 1$ ).

ковы, например, точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  для функции  $f(z) = \sqrt[n]{z}$  или  $f(z) = 1/\sqrt[n]{z}$ . Если же предел  $f_h(z)$  при  $z \rightarrow a$  не существует, то  $a$  называют *трансцендентной* точкой ветвления. Такова, например, точка  $z = 0$  для функции  $f(z) = e^{1/\sqrt[n]{z}}$  ( $z = \infty$  является для нее алгебраической точкой ветвления).

2. Во всех кольцах  $D_h$  цепочки значения функций различны. В этом случае  $a$  называют *логарифмической точкой ветвления*. Таковы, например, точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  для многозначной функции  $w = \text{Ln } z$ . Логарифмические точки ветвления относят к числу трансцендентных.

В окрестности точки ветвления  $a$  конечного порядка  $n$  функция  $f(z)$  допускает разложение в *обобщенный степенной ряд*:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k/n}. \quad (4)$$

В самом деле, положим  $z-a = \zeta^n$ ; тогда цепочке областей  $D_\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ) в плоскости  $\zeta$  будет соответствовать це-

почка смежных секторов  $\Delta_\nu$  кольца  $0 < |\zeta| < \rho = \sqrt[n]{R}$  с центральными углами  $2\pi/n$ . Рассмотрим сложную функцию  $\varphi(\zeta) = f(a + \zeta^n)$ , причем в каждом секторе  $\Delta_\nu$  мы выбираем соответствующую ветвь  $f_\nu$  функции  $f$ . Функция  $\varphi(\zeta)$ , очевидно, непрерывно продолжается из  $\Delta_0$  в  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ , и значения ее на свободных берегах разрезов  $\Delta_0$  и  $\Delta_{n-1}$  совпадают. Поэтому точка  $\zeta = 0$  является для этой функции изолированной особой точкой однозначного характера и, следовательно,  $\varphi(\zeta)$  представляется в окрестности  $\zeta = 0$  рядом Лорана

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k.$$

Подставляя сюда  $\zeta = (z-a)^{1/n}$ , получим искомое разложение (4).

В случае алгебраической точки  $a$  разложение (4) содержит конечное число членов с отрицательными  $k$  (быть может, эти члены и вовсе отсутствуют), а в случае трансцендентной точки — бесконечное.

**26. Римановы поверхности.** В заключение этой главы остановимся на понятии поверхностей Римана для многозначных функций. Эти поверхности делают геометрически наглядным описанный выше процесс аналитического продолжения и само понятие многозначной аналитической функции. Пусть дана (многозначная) аналитическая функция  $f(z)$ , определенная

в области  $D$  плоскости комплексного переменного  $z$ . Условимся рассматривать области  $D_k$ , из которых в процессе аналитического продолжения строится область  $D$ , как отдельные листы, изготовленные в таком количестве экземпляров, сколько значений имеет функция в данной области  $D$ .

Рассмотрим в плоскости  $z$  некоторую цепочку областей  $D_0, D_1, \dots, D_n$  с общими участками границ  $\gamma_{01}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{n-1, n}$ . Пусть области  $D_0$  и  $D_1$  имеют общие части, причем в одних из этих частей значения  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  совпадают, а других — различны. Мы возьмем листы, соответствующие  $D_0$  и  $D_1$ , и склеим их по линии, соответствующей  $\gamma_{01}$ . Расположим эти листы над

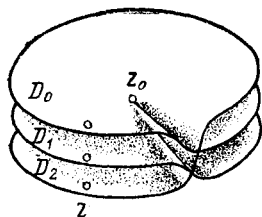


Рис. 32.

$D_0 + \gamma_{01} + D_1$  так, чтобы каждый лист лежал над соответствующей областью, и склеим их части, расположенные над теми общими частями  $D_0$  и  $D_1$ , в которых  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  совпадают; склеенные части будем рассматривать как один слой. Над теми же общими частями областей  $D_0$  и  $D_1$ , в которых значения  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  различаются, мы расположим соответствующие части листов друг над другом, так что над такими частями бу-

дет лежать по два слоя. Мы условимся относить значение  $f_0(z)$  к точке первого листа, расположенной над  $z$ , а значение  $f_1(z)$  — к такой же точке второго листа; тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{в } D_0, \\ f_0(z) = f_1(z) & \text{на } \gamma_{01}, \\ f_1(z) & \text{в } D_1 \end{cases}$$

будет однозначной на совокупности склеенных нами листов.

Точно такие же операции сделаем над листом, соответствующим области  $D_2$  \*), и т. д. При этом может случиться так, что надлежащая склейка листов невозможна без их пересечения; мы условимся такие пересечения не принимать во внимание (см. рис. 32, где изображена окрестность точки ветвления третьего порядка, склеенная из трех колец  $0 < |z - a| < R$  с разрезами; мы не принимаем во внимание пересечения, возникающие при склейке колец  $D_0$  и  $D_2$ ). В результате мы получим кусок, вообще говоря, многолистной поверхности, расположенный над областью  $D_0 + \gamma_{01} + D_1 + \dots + \gamma_{n-1, n} + D_n$ . Если

\*) При этом могут появиться точки  $z$ , над которыми расположено три слоя листов, — это будет в том случае, если  $D_2$  налегает на ту общую часть  $D_0$  и  $D_1$ , в которой значения  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  различны, и если там значения  $f_2(z)$  отличны и от  $f_0(z)$  и от  $f_1(z)$ .

мы проделаем описанные операции для всевозможных цепочек областей, определяющих аналитическую функцию  $f(z)$ , то получим, вообще говоря, многолистную поверхность  $R$ , расположенную над областью  $D$ . Эту поверхность мы и будем называть *римановой поверхностью* функции  $f(z)$ .

Существенно отметить, что *любую аналитическую функцию можно рассматривать как однозначную на ее римановой поверхности*. Для этого достаточно относить различные значения, принимаемые функцией в какой-либо точке  $z$ , к различным листам римановой поверхности, расположенным над этой точкой.

Например, три значения корня  $\sqrt[n]{z - z_0}$  в точке  $z \neq z_0$  из окрестности  $z_0$  мы условимся относить к трем точкам поверхности на рис. 32, лежащим над точкой  $z$ .

Если функция  $w = f(z)$  обратна к однозначной функции  $z = \varphi(w)$  (как во всех примерах, которые мы рассматривали в § 3), то она, очевидно, реализует взаимно однозначное отображение своей римановой поверхности на полную плоскость  $w$  или некоторую ее часть. В общем же случае  $w = f(z)$  отображает одну риманову поверхность на другую.

Приведем несколько примеров простейших римановых поверхностей \*):

1) *Риманова поверхность корня  $w = \sqrt[n]{z}$* . В качестве областей  $D_k$  возьмем плоскости с вырезанной положительной полуосью:  $D_k$  характеризуется неравенствами  $2k\pi < \arg z < 2(k+1)\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В начальной области  $D_0$  возьмем ветвь  $f_0(z)$ , определяемую условием  $0 < \arg z < 2\pi$ , и будем продолжать ее в области  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ . В соответствии с этим заготовим  $n$  экземпляров листов, имеющих тот же вид, что и  $D_k$ , и будем склеивать нижний берег разреза области  $D_0$  с верхним берегом разреза области  $D_1$ , нижний берег разреза области  $D_1$  с верхним берегом разреза области  $D_2$  и т. д. Значения  $f_0(z)$  и  $f_n(z)$  на положительной полуоси (и во всей области  $D_n = D_0$ ) совпадают. Следовательно, мы должны склеить между собой (не учитывая пересечений, которые при этом возникают) оставшиеся свободными верхний берег разреза

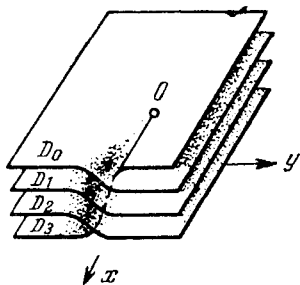


Рис. 33.

на листе  $D_0$  с нижним берегом разреза на  $D_{n-1}$ . Значения  $\sqrt[n]{z}$  в остальных областях  $D_k$  лишь повторяют выделенные значения  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ , следовательно, построенная нами  $n$ -листная поверхность и является римановой поверхностью функции  $w = \sqrt[n]{z}$ . Над точками  $z = 0$  и  $z = \infty$  она имеет алгебраические точки ветвления порядка  $n$  (см. рис. 33, где  $n = 4$ ).

\*) Мы рекомендуем склеить модели рассмотренных здесь римановых поверхностей из бумаги и на этих моделях проследить проводимые рассуждения.

2) Риманова поверхность логарифма  $w = \operatorname{Ln} z$ . Области  $D_k$  те же, что и в предыдущем примере. В  $D_0$  выбирается ветвь  $w = \ln|z| + i \arg z$ , где  $0 < \arg < 2\pi$ , и эта ветвь неограниченно продолжается в области  $D_k$  для  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Это соответствует тому, что бесчисленное множество экземпляров листов, имеющих тот же вид, что и  $D_k$ , соединяются между собой по следующему закону: нижний берег разреза каждого листа  $D_k$  склеивается с верхним берегом разреза листа  $D_{k+1}$ . Полученная риманова поверхность логарифма имеет вид, изображенный на рис. 34. Над  $z = 0$  и  $z = \infty$  она имеет точки ветвления логарифмического типа.

3) Риманова поверхность функции  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ , обратной к функции Жуковского. В качестве  $D_k$  возьмем плоскости с выброшенным отрезком  $[-1, 1]$ , обозначим через  $f_0(z)$  и  $f_1(z)$  те ветви функции, которые отображают  $D_0$  и  $D_1$  соответственно на внутренность и на внешность единичного

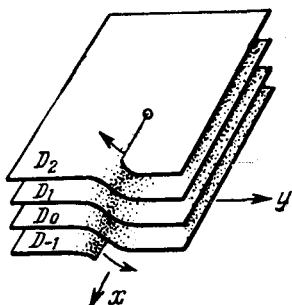


Рис. 34.

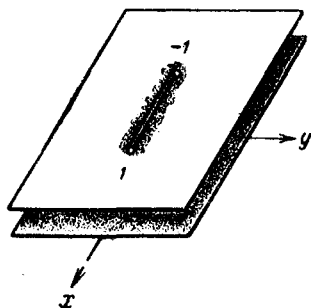


Рис. 35.

круга (см. п. 7). Так как  $f_0(z)$  отображает на верхнюю полуокружность нижний берег отрезка  $[-1, 1]$ , а  $f_1(z)$  — верхний, то мы должны склеить между собой нижний берег разреза на листе  $D_0$  и верхний берег разреза на листе  $D_1$ . То же самое нужно сделать с верхним берегом разреза на  $D_0$  и нижним на  $D_1$ , которые отображаются на нижнюю полуокружность. Полученная двулистная поверхность и есть риманова поверхность нашей функции; она имеет точки ветвления второго порядка над точками  $z = \pm 1$  (рис. 35) \*). Поверхность отличается от поверхности  $\sqrt{z}$  лишь дополнительными дробно-линейными отображениями; действительно, преобразования  $z = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}$  и  $w = \frac{w + 1}{w - 1}$  переводят функцию  $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$  в функцию  $w = \sqrt{\xi}$  (см. п. 31).

4) Риманова поверхность арксинуса  $w = \operatorname{Arcsin} z$ . В п. 9 мы видели, что функция  $z = \sin w$  отображает полуполосу  $\operatorname{Im} w > 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$  на верхнюю полуплоскость \*\*), причем лучи (1) и (4) на нижнем рис. 36 переходят в лучи  $x < -1$  и  $x > 1$ ; из нечетности  $\sin w$  следует, что полуполоса  $\operatorname{Im} w < 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$  переходит при этом в нижнюю полуплоскость, причем лучам (2) и (3) соответствуют те же лучи  $x < -1$  и  $x > 1$  (рис. 36). Таким образом, одна из ветвей функции  $w = \operatorname{Arcsin} z$  (мы обозначим ее

\*) Над  $z = \infty$  поверхность имеет два неразветвленных листа.

\*\*) Мы переменили роли  $z$  и  $w$ .

через  $f_0(z)$ ) отображает плоскость  $z$  с разрезами вдоль отрезков  $(-\infty -1)$  и  $(1, \infty)$  (мы обозначим ее  $D_0$ ) на полосу  $\Delta_0$ :  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2}$  с соответствием границ, указанным на рис. 36. Так как  $\sin(w + \pi) = -\sin w$ , то полоса  $\Delta_1$ :  $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{3\pi}{2}$  переходит при отображении  $z = \sin w$  в ту же область плоскости  $z$ ; эту область мы обозначим  $D_1$  и через  $f_1(z)$  обозначим функцию, реализующую обратное отображение. Соответствие границ  $\Delta_1$  и  $D_1$  указано на рис. 36.

Очевидно, ветвь  $f_1(z)$  является аналитическим продолжением  $f_0(z)$  в  $D_1$  и при таком продолжении функция  $z = \sin w$  остается непрерывной на прямой  $\operatorname{Re} w = \pi/2$ . В соответствии с этим мы должны склеить крест-накрест берега разрывов листов  $D_0$  и  $D_1$ : (4) с (1) и (3) с (2). Получается двулистная поверхность с точкой ветвления второго порядка над  $z = 1$  и с разрезом над лучом  $(-\infty, -1)$ , над которым расположено четыре берега разрывов: (1), (2), (3) и (4). В силу периодичности функции  $z = \sin w$  совокупность полос  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  отображается на такую же двулистную поверхность, состоящую из листов  $D_2$  и  $D_3$  и имеющую четыре свободных берега разрывов: (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>), (3<sub>2</sub>) и (4<sub>2</sub>). Две построенные поверхности мы должны соединить, склеивая крест-накрест свободные берега разрывов на листах  $D_1$  и  $D_2$ : (4<sub>1</sub>) с (1<sub>2</sub>) и (3<sub>1</sub>) с (2<sub>2</sub>) — это соответствует непрерывному продолжению функции  $z = \sin w$  через прямую  $\operatorname{Re} w = 3\pi/2$  (рис. 36). При этом над точкой  $z = -1$  появится точка ветвления, соединяющая листы  $D_1$  и  $D_2$ . Продолжая такое построение неограниченно вправо и влево от основной полосы  $\Delta_0$ , мы получим бесконечнолистную риманову поверхность арксинуса. Она имеет бесчисленное множество точек ветвления второго порядка над  $z = \pm 1$  и логарифмическую точку ветвления\*) над  $z = \infty$  (рис. 37).

Рис. 37.

Как показывает наше построение, функция  $z = \sin w$  осуществляет взаимнооднозначное и непрерывное отображение всей конечной плоскости  $w$  на нашу риманову поверхность. Обратная функция  $w = \operatorname{Arcsin} z$  однозначна на этой поверхности.

\*) Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть движение точки по поверхности над окружностью  $|z| = 2$ . Пусть мы отправляемся из точки листа  $D_0$ , лежащей над  $z = 2$ , и движемся против часовой стрелки. Как показывает рис. 36, мы сразу попадаем на лист  $D_1$ ; далее, проходя над  $z = -2$ , попадаем на лист  $D_2$ , затем проходя над  $z = 2$  попадаем на лист  $D_3$  и т. д. Отсюда и ясен логарифмический характер особенности над  $z = \infty$ .

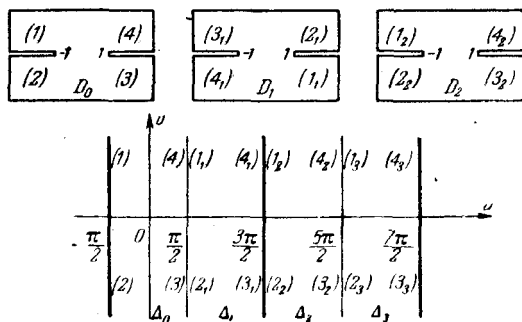
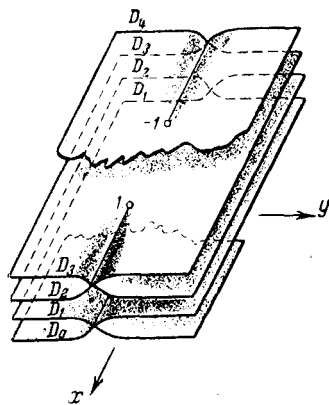


Рис. 36.





## Литература к главе I

- [1] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960.
- [2] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т.т. 1, 2, «Наука», 1968.
- [3] А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, Физматгиз, 1961.
- [4] Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, «Наука», 1969.
- [5] С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, т. 1, 2, пер. с румынского, ИЛ, 1962.
- [6] А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функций, «Наука», 1968.
- [7] А. В. Бицадзе, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, «Наука», 1972.
- [8] М. А. Евграфов, Аналитические функции, «Наука», 1968.
- [9] А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, «Наука», 1970.
- [10] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1957.
- [11] Б. А. Фукс и Б. В. Шабат, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, «Наука», 1964.
- [12] Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., ИЛ, 1960.
- [13] А. И. Маркушевич, Очерки по истории теории аналитических функций, Гостехиздат, 1951.

## Конформные отображения

Эта глава посвящена отображениям, осуществляемым аналитическими функциями, так называемым конформным отображениям.

Понятие конформного отображения относится к числу важнейших понятий математики. Возникшее из физических представлений, оно находит многочисленные и существенные приложения к различным областям физики — метод конформных отображений с успехом решает практические задачи гидро- и аэродинамики, теории упругости, теории электростатического, магнитного и теплового полей и др.

Отдельные задачи, связанные с конформными отображениями, решались Даламбером, Эйлером и Гауссом\*). Опираясь на их работы, Бернхард Риман в своей диссертации «Основы общей теории функций комплексного переменного» (1851 г.) положил начало геометрической теории функций и, в частности, доказал (хотя и неправильно) основную теорему о возможности конформного отображения произвольных односвязных областей друг на друга. В своих исследованиях Риман, следуя Эйлеру, пользовался физическими представлениями, связанными с конформными отображениями.

Начиная с середины 19 века, конформные отображения широко применяются в качестве математического аппарата при изучении механики сплошной среды. Среди инициаторов такого применения видное место принадлежит Н. Е. Жуковскому и С. А. Чаплыгину (гидро- и аэродинамика), Г. В. Колосову и Н. И. Мусхелишвили (теория упругости).

### § 1. Общие положения. Примеры

В этом параграфе излагается понятие конформного отображения и общие принципы теории конформных отображений. Не имея возможности доказать многие из них (доказательство

---

\*) Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

требует привлечения материала, выходящего за рамки книги), мы ограничиваемся тем, что разъясняем существо этих принципов и иллюстрируем их на ряде примеров.

**27. Понятие конформного отображения.** Предположим, что задано непрерывное и взаимно-однозначное отображение области  $D$  на некоторую область  $D^*$ :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (1)$$

Предположим еще, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в этой области. Фиксируем произвольную точку  $z_0$  из  $D$  и в окрестности этой точки заменим приращения функций  $u$  и  $v$  дифференциалами. По определению дифференциала приращения можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \eta_1 \Delta r, \\ v - v_0 &= \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0) + \eta_2 \Delta r, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где частные производные берутся в точке  $z_0$ ,  $\Delta r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , а  $\eta_1, \eta_2$  стремятся к нулю при  $\Delta r \rightarrow 0$ . Замена приращений дифференциалами сводится к отбрасыванию в соотношениях (2) членов  $\eta_1 \Delta r$  и  $\eta_2 \Delta r$ , которые являются малыми более высокого порядка, чем остальные члены этих формул (мы предполагаем, что  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$  и  $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$  отличны от нуля).

Геометрически эта замена равносильна замене отображения  $w = f(z)$  отображением

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0), \\ v - v_0 &= \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которое называется *главной линейной частью* отображения (1). Отображение (3) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} u &= ax + by + l, \\ v &= cx + dy + m, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ l &= u_0 - \frac{\partial u}{\partial x} x_0 - \frac{\partial u}{\partial y} y_0, \quad m = v_0 - \frac{\partial v}{\partial x} x_0 - \frac{\partial v}{\partial y} y_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

не зависят от  $x$  и  $y$ . Оно представляет собой так называемое *линейное преобразование* плоскости  $(x, y)$ .

Отметим основные свойства линейных преобразований. Каждое линейное преобразование (4) однозначно определено во всей плоскости  $z$ ; предположим, что определитель

$$\Delta = ad - bc$$

отличен от нуля\*); тогда обратное к (4) преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\Delta} (du - bv - dl + bm), \\ y &= \frac{1}{\Delta} (-cu + av + lc - am) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

также однозначно определено во всей плоскости  $w$ . Таким образом, при  $\Delta \neq 0$  не только каждому  $z$  соответствует одно значение  $w$ , но и каждому  $w$  — одно значение  $z$ , т. е. преобразование (4) *осуществляет взаимно-однозначное отображение всей плоскости  $z$  на всю плоскость  $w$* .

Рассмотрим пучок параллельных прямых с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \varphi$ , т. е. прямых  $y = kx + C$ . Заменяя здесь  $x$  и  $y$  по формулам (6), мы видим, что этому пучку соответствует пучок также параллельных прямых  $-cu + av + lc - am = = k(du - bv - dl + bm) + C\Delta$  с угловым коэффициентом

$$k^* = \operatorname{tg} \theta = \frac{c + kd}{a + kb}.$$

Отсюда следует, что отображение (4) *преобразует квадраты на плоскости  $z$  в параллелограммы на плоскости  $w$* .

Пусть  $z_0 = x_0 + iy_0$  и  $w_0 = u_0 + iv_0$  — пара точек, соответствующих друг другу при отображении (4). Тогда это отображение можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ v - v_0 &= c(x - x_0) + d(y - y_0), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а обратное отображение в виде

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \frac{d}{\Delta} (u - u_0) - \frac{b}{\Delta} (v - v_0), \\ y - y_0 &= -\frac{c}{\Delta} (u - u_0) + \frac{a}{\Delta} (v - v_0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(для вывода формул (7) и (8) достаточно подставить в соотношения (4) и (6)  $x = x_0, \dots, v = v_0$  и вычесть из (4) и (6)

\*) В случае  $\Delta = 0$  говорят, что отображение (4) вырождается.

полученные уравнения). Учитывая формулы (8), мы можем утверждать, что окружности с центром в точке  $z_0$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

при отображении (4) переходят в эллипсы с центром в точке  $w_0$ :

$$(d^2 + c^2)(u - u_0)^2 - 2(bd + ac)(u - u_0)(v - v_0) + (b^2 + a^2)(v - v_0)^2 = \Delta^2 r^2. \quad (9)$$

Поставим вопрос: каким условиям должны удовлетворять коэффициенты преобразования (4) для того, чтобы оно переводило окружности снова в окружности? Из (9) следует, что для этого необходимо и достаточно выполнение соотношений:

$$bd + ac = 0, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \quad (10)$$

Первое из них дает  $\frac{a}{d} = -\frac{b}{c} = \lambda$ , откуда  $a = \lambda d$ ,  $b = -\lambda c$ . Подставляя это во второе уравнение (10), получим  $\lambda^2 = 1$ , или  $\lambda = \pm 1$ .

Случай  $\lambda = 1$  приводит к соотношениям

$$a = d, \quad b = -c. \quad (11)$$

В этом случае  $\Delta = ad - bc = a^2 + b^2 > 0$ . Положим

$$a = d = \sqrt{\Delta} \cos \alpha, \quad c = -b = \sqrt{\Delta} \sin \alpha,$$

это можно сделать, ибо у нас  $\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{\Delta} = 1$ . Тогда преобразование (4) переписывается в виде:

$$u = \sqrt{\Delta}(\cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y) + l, \quad v = \sqrt{\Delta}(\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y) + m.$$

Эти соотношения можно записать в комплексной форме так:

$$u + iv = \sqrt{\Delta}(\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) + l + im,$$

и они приводятся к линейной функции комплексного переменного:

$$w = Az + B, \quad (12)$$

где

$$A = \sqrt{\Delta} e^{i\alpha}, \quad B = l + im. \quad (13)$$

Отсюда видно, что при условиях (11) линейное преобразование (4) сводится к сдвигу плоскости  $z$  на вектор  $B = l + im$ , повороту на угол  $\alpha = \text{Arg } A$  и подобному растяжению с коэффициентом  $\sqrt{\Delta} = |A|$  (см. п. 4).

В случае  $\lambda = -1$  мы имеем:

$$a = -d, \quad b = c \quad (14)$$

и  $\Delta = -a^2 - b^2 < 0$ . Повторяя только что проведенные выкладки, увидим, что преобразование (4) можно записать так:

$$w = \sqrt{-\Delta} e^{i\alpha} \bar{z} + B. \quad (15)$$

Следовательно, при условиях (14) к перечисленным выше преобразованиям добавляется еще переход от  $z$  к  $\bar{z}$ , т. е. симметрия относительно действительной оси (см. п. 1).

Из геометрического смысла преобразований (12) и (15) ясно, что они сохраняют подобие фигур, в частности, сохраняют углы между двумя прямыми, преобразуют квадраты на плоскости  $z$  в квадраты на плоскости  $w$  и т. п. Линейные преобразования, обладающие этим свойством, называются *ортогональными*. Таким образом, условия (10) есть условия ортогональности\*) преобразования (4). Далее ясно, что преобразование (12) сохраняет направление обхода замкнутых контуров (короче, сохраняет ориентацию), а (15) — меняет их на противоположные (меняет ориентацию). Таким образом, условия (11) выделяют ортогональные преобразования, сохраняющие ориентацию, а условия (14) — ортогональные преобразования, меняющие ее.

Вернемся к произвольным отображениям. Взаимно-однозначное отображение

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

области  $D$  на область  $D^*$  называется *конформным*, если в окрестности любой точки  $D$  главная линейная часть этого отображения есть ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию\*\*). Из этого определения вытекают два основных свойства конформных отображений:

1) *Конформное отображение преобразует бесконечно малые окружности в окружности с точностью до малых высших порядков* (круговое свойство).

2) *Конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения* (свойство сохранения углов).

Первое свойство означает, что при малых  $r$  окружность  $C: |z - z_0| = r$  переходит в кривую  $C^*$  такую, что расстояние любой ее точки от окружности  $|w - w_0| = r$ , проведенной через любую точку кривой  $C^*$  — образа  $C$  при рассматриваемом отображении, является малой высшего порядка относительно  $r$ .

\*) Заметим, что к тем же самым условиям ортогональности мы придем, если потребуем, чтобы угол поворота  $\theta - \varphi$  любого луча  $\arg z = \varphi$  не зависел от угла  $\varphi$ .

\*\*) Отображение  $w = f(z)$  называют *конформным отображением второго рода*, если его главная линейная часть является ортогональным преобразованием, меняющим ориентацию.

Второе свойство означает, что угол в точке  $z_0$  между любыми кривыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равен углу в точке  $w_0$  между образами  $\Gamma_1^*$  и  $\Gamma_2^*$  этих кривых\*) (рис. 38).

Учитывая формулы (5) и (11), мы можем записать условия конформности отображения (1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (16)$$

причем должно быть

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0, \quad (17)$$

ибо при  $\Delta = 0$  главная линейная часть отображения  $w = f(z)$  вырождается, что противоречит условию конформности. Таким

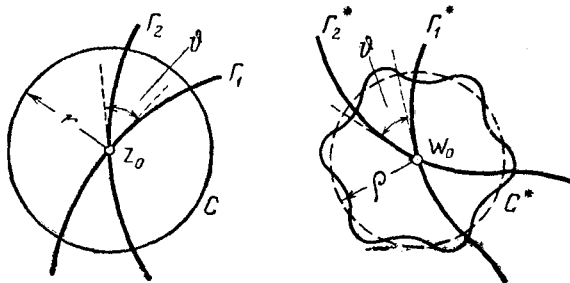


Рис. 38.

образом, условия конформности совпадают с условиями Коши — Римана (п. 5) дифференцируемости (аналитичности) функции  $f(z)$  в области  $D$ , причем неравенство (17) показывает, что производная  $f'(z)$  должна быть всюду отличной от нуля.

Далее, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{\Delta} \cos \alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\Delta} \sin \alpha,$$

откуда легко получить геометрическую интерпретацию производной от функции комплексного переменного. Мы имеем:

$$|f'(z)| = \sqrt{\Delta}; \quad \arg f'(z) = \alpha, \quad (18)$$

\*) Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что под углом между кривыми понимается угол между их касательными и что главная линейная часть дифференцируемого отображения переводит касательную к кривой  $\Gamma_k$  в касательную к  $\Gamma_k^*$ .

т. е. модуль и аргумент производной  $f'(z)$  означают соответственно коэффициент растяжения и угол поворота главной линейной части отображения  $w = f(z)$  в точке  $z$  или, иначе говоря, коэффициент растяжения и угол поворота самого отображения  $w = f(z)$  в точке  $z$ .

Рассуждения, которые мы провели в этом пункте, приводят к следующему заключению:

Для того чтобы функция  $w = f(z)$  реализовала конформное отображение области  $D$ , необходимо и достаточно, чтобы в этой области она была 1) однолистной, 2) аналитической и 3) чтобы всюду в  $D$  производная  $f'(z)$  была отличной от нуля.

Заметим, что если  $f'(z_0) = 0$ , то в окрестности точки  $z_0$  тейлоровское разложение разности  $f(z) - w_0$  имеет вид

$$f(z) - w_0 = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots, \quad (19)$$

где  $n \geq 2$  и  $c_n \neq 0$  (см. п. 20). Отсюда следует, что при малых  $|z - z_0| = r$  отображение, осуществляемое функцией  $f(z)$ , отличается на малые высшего порядка от отображения

$$w - w_0 = c_n(z - z_0)^n. \quad (20)$$

Но отображение, обратное к (20), имеет в  $w_0$  точку ветвления  $n$ -го порядка, т. е. отображение (20) неоднолистно в окрестности точки  $z_0$ . Следовательно, и отображение  $w = f(z)$  неоднолистно в окрестности  $z_0$ . Таким образом, условие 3) в только что приведенной формулировке можно отбросить, ибо оно следует из условия 1) (однолистности отображения).

Отметим также, что, обратно, условие  $f'(z_0) \neq 0$  обеспечивает однолистность отображения в достаточно малой окрестности точки  $z_0$  — это доказывается так же, как предыдущее утверждение. Однако если условие  $f'(z) \neq 0$  выполняется в каждой точке области  $D$ , то отсюда еще не следует однолистности отображения во всей этой области даже при условии ее односвязности. Например, в полукольце  $1 < |z| < 2$ ,  $0 < \arg z < \pi$  отображение  $w = z^4$ , очевидно, неоднолистно, но в любой точке полукольца  $\frac{dw}{dz} = 4z^3 \neq 0$ .

В заключение скажем несколько слов об отображениях, осуществляемых функциями однозначными, но неоднолистными в области  $D$ . В п. 26 мы видели, что каждая такая функция  $w = f(z)$  реализует взаимно-однозначное отображение области  $D$  на риманову поверхность  $R$  обратной функции  $z = \varphi(w)$ . Пусть точка  $P$  поверхности  $R$ , лежащая над точкой  $w_0$ , отлична от точки ветвления, и пусть точке  $P$  соответствует некоторая точка  $z_0$  области  $D$ . Это означает, что существует ветвь  $\varphi_0(z)$  многозначной функции  $\varphi(z)$  такая, что  $\varphi(w_0) = z_0$ . В точке  $z_0$



производная  $f'(z_0) \neq 0$ , ибо в противном случае, как видно из разложения (19),  $P$  была бы точкой ветвления поверхности  $R$ . Таким образом, функция  $f(z)$  реализует взаимно-однозначное отображение достаточно малой окрестности точки  $z_0$  на окрестность точки  $w_0$ . Это отображение будет, очевидно, конформным.

Итак функция  $w = f(z)$ , однозначная, но не однолистная в области  $D$ , реализует отображение, конформное в достаточно малой окрестности каждой точки  $z_0$ , для которой  $f'(z_0) \neq 0$ . Точки, где  $f'(z) = 0$ , а также их образы на римановых поверхностях мы будем называть точками ветвления (например, функция Жуковского  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  имеет точки ветвления в  $z = \pm 1$ ,  $w = \sin z$  — в точках  $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ ).

**28. Основная задача.** Имея произвольную аналитическую функцию, мы можем рассматривать различные конформные отображения, ею осуществляемые. Любая область  $D$ , в которой эта функция однолистка, с помощью этой функции конформно отображается на некоторую область  $D^*$ . Таким образом, мы можем получать различные примеры конформных отображений, геометрически иллюстрирующих данную функцию. Этой задачей мы, собственно говоря, уже занимались в § 3 предыдущей главы, где все рассмотренные отображения были однолистными в соответствующих областях и осуществлялись аналитическими функциями, и были, следовательно, конформными.

Однако для практических целей больший интерес представляет значительно более трудная обратная задача, так называемая

*Основная задача теории конформных отображений. Заданы области  $D$  и  $D^*$ ; требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую.*

Так как для решения этой задачи не существует достаточно простого алгоритма, то развитие теории конформных отображений идет в следующих направлениях:

1) выясняются общие условия существования конформного отображения и его единственности;

2) определяются различные частные классы областей, отображения которых можно осуществить при помощи комбинации элементарных функций;

3) с помощью общих свойств аналитических функций изучаются различные свойства конформных отображений в зависимости от вида отображаемых областей;

4) разрабатываются приближенные методы конформных отображений.

Остановимся на первой из перечисленных проблем. Прежде всего ясно, что в том общем виде, в каком сформулирована выше основная задача конформного отображения, эта задача неразрешима. Так, многосвязную область нельзя взаимно-однозначно и непрерывно отобразить на односвязную. Не останавливаясь на полном доказательстве, мы укажем на причины невозможности такого отображения. Предположим, что такое отображение многосвязной области  $D$  на односвязную область  $D^*$  существует. Возьмем в  $D$  замкнутую кривую  $C$ , содержащую внутри внешние или граничные точки  $D$  (такая кривая всегда существует). Рассматриваемое отображение переведет  $C$  в замкнутую кривую  $C^*$ , лежащую в  $D^*$ . Если внутри области  $D^*$  непрерывным образом стягивать кривую  $C^*$  в какую-либо точку  $w_0$  из  $D^*$ , что в силу непрерывности отображения кривая  $C$  должна, оставаясь внутри области  $D$ , стягиваться непрерывным образом в некоторую точку  $D$ , что, очевидно, невозможно, так как внутри контура  $C$  лежат точки, не принадлежащие к  $D$ .

Далее, нельзя, например, конформно отобразить полную или открытую плоскость  $z$  на ограниченную область  $D^*$  плоскости  $w$ . В самом деле, если бы существовало такое отображение, то функция  $w = f(z)$ , его реализующая, была бы аналитической во всей открытой плоскости и в то же время ограниченной, ибо все значения этой функции лежали бы в области  $D^*$ , но тогда по теореме Лиувилля (п. 17)  $f(z)$  должна быть постоянной, что невозможно.

Тем не менее, две произвольные односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки, оказывается возможным конформно отобразить друг на друга и притом бесчисленным множеством способов, а именно, можно добиться соответствия любых двух фиксированных точек и любых двух направлений в этих точках. Иными словами, имеет место следующая, так называемая основная теорема теории конформных отображений:

*Теорема (Б. Риман, 1851 г.). Каковы бы ни были односвязные области  $D$  и  $D^*$  (с границами, состоящими более чем из одной точки) и как бы ни были заданы точки  $z_0$  из  $D$  и  $w_0$  из  $D^*$  и действительное число  $\alpha_0$ , существует одно и только одно конформное отображение*

$$w = f(z) \quad (1)$$

*области  $D$  на область  $D^*$  такое, что*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0. \quad (2)$$

Доказательство существования конформных отображений требует привлечения специального аппарата, выходящего за рамки этой книги, и мы его опускаем (см., например, Ш а б а т

[3], стр. 199—206). Опираясь лишь на существование, докажем единственность конформного отображения при заданных условиях нормировки (2).

Рассмотрим сначала частный случай, когда области  $D$  и  $D^*$  — единичные круги  $|z| < 1$ ,  $|\omega| < 1$ , а  $z_0 = \omega_0 = \alpha_0 = 0$ . В этом случае мы должны показать, что если  $\omega = f(z)$  осуществляет конформное отображение круга  $|z| < 1$  на круг  $|\omega| < 1$ , причем  $f(0) = 0$  и  $f'(0) > 0$ , то

$$f(z) \equiv z.$$

Доказательство основано на лемме Шварца (п. 15). Так как при  $|z| < 1$  имеем  $|f(z)| < 1$ , ибо  $\omega = f(z)$  отображает круг  $|z| < 1$  на круг  $|\omega| < 1$ , то по этой лемме

$$|f(z)| \leq |z|.$$

Применяя то же рассуждение к функции, обратной к  $f(z)$ , получим:

$$|z| \leq |f(z)|.$$

Следовательно,  $|f(z)| \equiv |z|$ , и по той же лемме

$$f(z) = e^{i\alpha} z.$$

Так как по условию  $f'(0) > 0$ , то  $\alpha = 0$  и  $f(z) \equiv z$ .

Перейдем к общему случаю. Допустим, что существуют два конформных отображения  $D$  на  $D^*$ :

$$\omega = f_1(z), \quad \omega = f_2(z),$$

удовлетворяющих условиям

$$f_1(z_0) = f_2(z_0) = \omega_0, \quad \arg f_1'(z_0) = \arg f_2'(z_0) = \alpha_0.$$

Отобразим конформно круг  $|\xi| < 1$  на область  $D$  с помощью функции

$$z = \varphi(\xi); \quad \varphi(0) = z_0, \quad \varphi'(0) > 0,$$

а область  $D^*$  на круг  $|\omega| < 1$  с помощью функции

$$\omega = \psi(\omega); \quad \psi(\omega_0) = 0, \quad \arg \psi'(\omega_0) = -\alpha_0.$$

Очевидно, функции

$$\omega = F_1(\xi) = \psi[f_1(\varphi(\xi))], \quad \omega = F_2(\xi) = \psi[f_2(\varphi(\xi))]$$

осуществляют конформные отображения круга  $|\xi| < 1$  на круг  $|\omega| < 1$  с нормировкой

$$F_1(0) = F_2(0) = 0, \quad \arg F_1'(0) = \arg F_2'(0) = 0.$$

По доказанному выше,  $F_1(\xi) \equiv F_2(\xi)$ , но тогда и  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ , и единственность отображения доказана.

В заключение отметим обобщение теоремы Лиувилля (п. 17), которое является непосредственным следствием теоремы Римана.

*Если функция  $w = f(z)$  аналитична в открытой плоскости и не принимает значений, лежащих на некоторой дуге  $\gamma$ , то она постоянна.*

В самом деле, пусть  $\omega = \varphi(w)$  будет функция, реализующая конформное отображение внешности кривой  $\gamma$  на внутренность единичного круга (она существует по теореме Римана и, конечно, не постоянна). Рассмотрим сложную функцию  $\omega = \varphi[f(z)] = g(z)$ ; она аналитична в открытой плоскости и все ее значения лежат внутри единичного круга, следовательно, по теореме Лиувилля (п. 17) эта функция постоянна. Но если  $g(z)$  постоянна, то постоянна и функция  $f(z)$ , что и требуется.

В частности, например,  $f(z)$  постоянна, если она аналитична в открытой плоскости и все ее значения лежат в некоторой полуплоскости (тогда она не принимает значений, лежащих на любой дуге в дополнительной полуплоскости).

**29. Соответствие границ.** Рассмотрим основные факты, относящиеся к соответствию границ, которое устанавливается при конформном отображении областей. Для удобства введем на границе  $C$  области  $D$  действительный параметр  $s$  — длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки кривой  $C$ , так что на  $C$  будем иметь  $\xi = \xi(s)$ . Если какая-либо функция  $f(z)$  непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ , то мы положим на границе  $C$  этой области

$$f(\xi) = f\{\xi(s)\} = \varphi(s)$$

и будем называть  $\varphi(s)$  *граничной функцией* для функции  $f(z)$ .

Приведем без доказательства теорему о соответствии границ (см. Голузин [6]).

**Теорема 1.** Пусть функция  $w = f(z)$  осуществляет конформное отображение областей  $D$  и  $D^*$ . Тогда

1) если граница  $D^*$  не имеет бесконечных ветвей, то  $f(z)$  непрерывна на границе области  $D$  и граничная функция  $w = f(\xi) = \varphi(s)$  осуществляет непрерывное и взаимно однозначное соответствие границ областей  $D$  и  $D^*$ ;

2) если границы  $D$  и  $D^*$  не содержат бесконечных ветвей и обладают в каждой точке непрерывной (следовательно, и ограниченной) кривизной, то граничная функция  $\varphi(s)$  непрерывно дифференцируема.

При этом всюду предполагается, что кратные точки границы считаются столько раз, какова их кратность; так, на рис. 39 точки двух берегов разреза  $cd$  и  $de$  считаются различными (и этим берегам соответствуют различные отрезки  $c^*d^*$  и  $d^*e^*$ ), точки  $b^*$  и  $f^*$  — также (им тоже соответствуют различные точки

$b$  и  $f$ ). Если отбросить в первой части теоремы условие об отсутствии бесконечных ветвей границы  $D^*$ , то функция  $\varphi(s)$  останется непрерывной во всех точках границы  $D$ , которые соответствуют конечным точкам. В точках же, которые соответствуют бесконечно удаленной точке границы  $D^*$  (их может быть несколько, если эта точка кратная), непрерывна функция  $1/\varphi(s)$ .

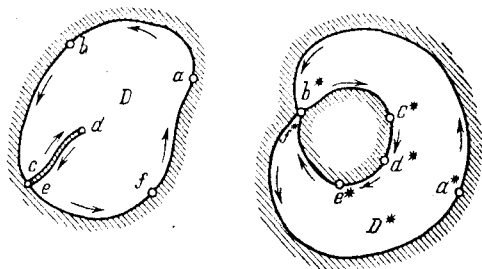


Рис. 39.

Приведем еще, также без доказательства, несколько более точных результатов, относящихся к существованию производной конформного отображения на границе области. Первый из них был получен К. Каратеодори в 1929 г.:

1) Если функция  $w = f(z)$ ,  $f(0) = 0$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости на область  $D$ , граница которой  $C$  в окрестности точки  $w = 0$  представляет собой непрерывную кривую, причем существуют окружности, проходящие через  $w = 0$ , одна из которых лежит целиком в  $D$ , а другая — целиком вне  $D$ , то при  $z \rightarrow 0$  по точкам верхней полуплоскости существует

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} f'(z) = \gamma, \quad 0 < |\gamma| < \infty.$$

Этот результат в 1931 г. был усилен М. А. Лаврентьевым и П. А. Бессоновым:

2) Если в окрестности точки  $w = 0$  граница  $C$  спрямляема\*), лежит между кривыми  $v = \pm |u|^{1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  и  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(s)}{s} = 1$ , где  $u(s)$  — абсцисса точки кривой  $C$ , расстояние которой вдоль  $C$  до точки  $w = 0$  равно  $s$ , то существует

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \frac{f(z)}{z} = \gamma, \quad 0 < \gamma < \infty.$$

Для практических целей достаточен результат О. Келлога. Чтобы его сформулировать, условимся называть некоторую дугу *дугой Ляпунова*, если она спрямляема, имеет в каждой точке касательную и угол  $\theta$  наклона этой касательной с осью  $x$

\*) То есть каждый ее отрезок имеет определенную длину.

как функция длины дуги  $s$  удовлетворяет условию Гёльдера:

$$|\vartheta(s_2) - \vartheta(s_1)| < K |s_2 - s_1|^\alpha,$$

где  $K$  — некоторая постоянная и  $0 < \alpha \leq 1$ . Имеет место

**Теорема.** Если функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение области  $D$ , граница которой содержит дугу Ляпунова  $s$ , на область  $D^*$ , причем  $s$  преобразуется также в дугу Ляпунова  $s^*$ , то на  $s$  производная  $f'(z)$  существует, не обращается в 0 и удовлетворяет условию Гёльдера.

Доказательство теоремы Келлога читатель может найти в книге Г. М. Голузина [6], стр. 468.

Заметим еще, что условия нормировки (2) в основной теореме предыдущего пункта, содержащие три действительных параметра  $x_0$ ,  $y_0$  ( $x_0 + iy_0 = z_0$ ) и  $\alpha_0$ , можно заменить условием соответствия трех пар граничных точек областей  $D$  и  $D^*$ :

$$f(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

взятых произвольно, но с соблюдением порядка следования при обходе границ \*). Это утверждение мы докажем в п. 35.

Для практики важен следующий в известном смысле обратный теореме 1 принцип соответствия границ:

**Теорема 2.** Пусть даны две односвязные области  $D$  и  $D^*$  с границами  $C$  и  $C^*$ , причем область  $D^*$  ограничена. Если функция  $w = f(z)$

1) аналитична в  $D$ , непрерывна в  $\bar{D}$  и

2) осуществляет взаимно-однозначное отображение  $C$  на  $C^*$  с сохранением направления обхода,

то она осуществляет и (однолистное) конформное отображение области  $D$  на  $D^*$ .

Для доказательства воспользуемся принципом аргумента из п. 23. Для любого комплексного значения  $w_0$ , которое  $f(z)$  не принимает на границе  $C$  области  $D$ , число  $w_0$ -точек функции  $f(z)$  внутри  $D$  равно

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\},$$

где  $\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\}$  есть полное изменение  $\arg \{f(z) - w_0\}$ , когда  $z$  обходит контур  $C$  (см. формулу (13) п. 23; число полюсов  $f(z)$  в области  $D$  равно 0, ибо  $f(z)$  непрерывна).

В силу взаимной однозначности и непрерывности соответствия между точками контуров  $C$  и  $C^*$  имеем:

$$\Delta_C \arg \{f(z) - w_0\} = \Delta_{C^*} \arg (w - w_0).$$

\*) Условия (1) так же, как и условия (2) предыдущего пункта, содержат три действительных параметра, ибо положение точки на границе области определяется одним параметром.

Но, очевидно,  $\Delta_{C^*} \arg(w - w_0)$  равно  $2\pi$  для всех точек  $w_0$ , лежащих внутри  $C^*$ , и равно 0 для всех точек, лежащих вне  $C^*$ . Следовательно, для всех точек  $w_0$ , которые лежат внутри  $C^*$ ,  $N(w_0) = 1$ , а для всех точек, лежащих вне  $C^*$ ,  $N(w_0) = 0$ . Таким образом, функция  $w = f(z)$  принимает в  $D$  один и только один раз любое значение из  $D^*$  и не принимает никаких других значений, т. е. осуществляет однолистное отображение  $D$  на  $D^*$ . Теорема доказана.

В доказательстве нигде не используется ограниченность области  $D$ . Однако если область  $D^*$  не ограничена, т. е. содержит внутри себя\*) или на границе бесконечно удаленную точку, то принцип нуждается в уточнении. Прежде всего, при его формулировке мы должны отказаться от требования непрерывности  $f(z)$  в  $D$ , ибо  $f(z)$  перестает быть непрерывной в той точке, которая соответствует  $w = \infty$ . Но тогда без дополнительных ограничений этот принцип перестает быть справедливым. Например, функция  $w = z^3$  осуществляет непрерывное (кроме точки  $z = \infty$ ) и взаимно-однозначное соответствие точек оси  $x$  и оси  $u$  с сохранением направления обхода и, однако, не является однолистной в верхней полуплоскости. Действительно, при этом отображении верхняя полуплоскость, т. е. угол раствора  $\pi$ , переходит в угол раствора  $3\pi$ , который дважды покрывает верхнюю полуплоскость (и еще один раз — нижнюю).

Случай, когда область  $D^*$  неограниченная, важен для практики; мы сейчас подробно его рассмотрим. Имеют место две теоремы (мы сохраняем принятые выше обозначения и условие 2), наложенное на функцию  $f(z)$ ).

**Теорема 3.** Пусть область  $D^*$  содержит бесконечно удаленную точку внутри, тогда принцип соответствия границ сохраняет силу, если заменить условие 1) условием

1')  $f(z)$  непрерывна в  $\bar{D}$  и аналитична в  $D$  всюду, кроме некоторой внутренней точки  $z_0$ , в которой она имеет полюс первого порядка.

Для доказательства мы снова воспользуемся принципом аргумента. Согласно этому принципу для всякой точки  $w_0$ , не лежащей на  $C^*$ , число  $w_0$ -точек функции  $f(z)$  удовлетворяет соотношению

$$N(w_0) - 1 = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \{f(z) - w_0\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C^*} \arg (w - w_0)$$

(внутри контура  $C^*$  имеется в точности один полюс первого порядка).

\*) Если область  $D$  содержит внутри точку  $z = \infty$ , то следует определить понятие конформности в этой точке. Такое определение можно получить, переходя с помощью стереографической проекции на сферу комплексных чисел. См. также п. 31, где этот вопрос подробно разбирается.

Так как область  $D^*$  содержит бесконечно удаленную точку, то  $C^*$  обходится по часовой стрелке, т. е.  $\Delta_{C^*} \arg(w - w_0)$  равно  $-2\pi$ , если  $w_0$  лежит внутри  $C^*$ , и 0, если  $w_0$  лежит вне  $C^*$ . Таким образом,  $N(w_0) = 1$  для всех внутренних точек области  $D^*$  и  $N(w_0) = 0$  для всех внешних точек, что и требовалось доказать.

Следующая теорема относится к случаю областей, содержащих бесконечно удаленную точку на границе. Как показывает приведенный выше пример функции  $w = z^3$ , для сохранения принципа соответствия границ в этом случае требуются дополнительные ограничения.

Предположим сначала, что область  $D^*$  имеет лишь одну такую точку, т. е. что  $w = \infty$  является простой точкой границы  $C^*$ ; предположим еще, что ветви  $C^*$ , идущие в бесконечность, обладают асимптотами\*). Через  $\beta\pi$  ( $0 \leq \beta \leq 2$ ) обозначим угол между этими асимптотами, измеряемый, как показано на рис. 40 (на этом рисунке отдельно изображены случаи  $\beta = 0$  и  $\beta = 2$ ; заштриховано, как всегда, дополнение к области). Пусть точке  $w = \infty$  соответствует точка  $\zeta_0$  контура  $C$ ; мы обозначим через  $\alpha\pi$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) угол между касательными к контуру  $C$  в этой точке. Предположим, далее, что в окрестности  $\zeta_0$  функция  $f(z)$  является бесконечно большой порядка  $\mu$ , т. е. существует постоянная  $A \neq 0, \neq \infty$  такая, что при  $z$ , стремящемся к точке  $\zeta_0$ , по точкам области  $D$  существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \{f(z)(z_0 - \zeta_0)^\mu\} = A \quad (\mu > 0). \quad (2)$$

В рассматриваемом случае принцип соответствия границ непосредственно неприменим, ибо  $f(z)$  обращается в бесконечность на контуре  $C$ . Оказывается, что для сохранения принципа нужно ввести ограничение на порядок  $\mu$  роста отображающей функции. Именно, в принятых выше условиях и обозначениях имеет место

**Теорема 4.** *Принцип соответствия границ сохраняет силу, если заменить условие 1) условием*

\*) Это условие является для бесконечно удаленной точки аналогом условия кусочной гладкости.

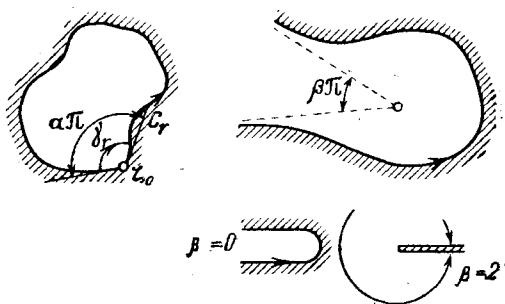


Рис. 40.



1'') Функция  $f(z)$  аналитична в  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$  всюду, кроме точки  $\xi_0$ , а в принадлежащей  $D$  части окрестности этой точки является бесконечно большой порядка  $\mu$ , причем

$$\mu < \frac{\beta + 2}{\alpha}. \quad (3)$$

Для доказательства вырежем из области  $D$  круг  $|z - \xi_0| < r$  малого радиуса с центром в точке  $\xi_0$ ; дугу окружности этого круга, принадлежащую  $D$ , мы обозначим через  $\gamma_r$ , а часть контура  $C$ , оставшуюся после удаления круга — через  $C_r$ ; через  $\tilde{C}$  обозначим контур  $C_r + \gamma_r$ . К области  $\tilde{D}$ , ограниченной кривой  $\tilde{C}$ , принцип соответствия границ уже применим.

Пусть  $w_0$  — произвольная точка области  $D^*$ . Так как  $w_0$  конечно, а  $f(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \xi_0$ , то радиус круга  $r$  можно выбрать столь малым, чтобы в выброшенной части области  $D$  не было ни одной  $w_0$ -точки функции  $f(z)$ . Тогда  $N(w_0)$  — число  $w_0$ -точек функции  $f(z)$  в области  $D$  — будет равно числу таких точек в области  $\tilde{D}$  и по принципу аргумента получаем:

$$N(w_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\tilde{C}} \arg \{f(z) - w_0\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_r} + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_r}. \quad (4)$$

Для подсчета первого слагаемого заметим, что когда точка  $z$  пробегает  $C_r$ , соответствующая точка  $w$  пробегает в положительном направлении всю кривую  $C^*$ , за исключением некоторой ее дуги, лежащей в малой окрестности точки  $w = \infty$ . Поэтому

$$\Delta_{C_r} = \Delta_{C_r^*} \arg(w - w_0) = (2 - \beta)\pi + O(r), \quad (5)$$

где  $C_r^*$  — образ дуги  $C_r$ , а  $O(r)$  обозначает величину, стремящуюся к нулю вместе с  $r$  (в дальнейшем, когда потребуются, будем употреблять этот символ, причем он может обозначать как действительные, так и комплексные величины).

Для подсчета второго слагаемого воспользуемся условием (2), представив  $f(z)$  в окрестности точки  $\xi_0$  в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z - \xi_0)^\mu} \{A + O(r)\}.$$

Тогда можно утверждать, что

$$\Delta_{\gamma_r} = \Delta_{\gamma_r} \arg \frac{A + O(r) - w_0(z - \xi_0)^\mu}{(z - \xi_0)^\mu} = \Delta_{\gamma_r} \arg \{A + O(r)\} - \mu \Delta_{\gamma_r} \arg(z - \xi_0),$$

ибо величину  $w_0(z - \xi_0)^\mu$ , бесконечно малую при  $r \rightarrow 0$ , можно включить в символ  $O(r)$ . Так как  $A \neq 0$  и постоянно, то здесь первое слагаемое стремится к 0 при  $r \rightarrow 0$ ; далее, из рис. 40 ясно, что  $\Delta_{\gamma_r} \arg(z - \xi_0) = -\alpha\pi + O(r)$ , следовательно,

$$\Delta_{\gamma_r} = \alpha\pi + O(r). \quad (6)$$

Подставив выражения (5) и (6) в формулу (4), найдем  $N(w_0) = 1 + \frac{\alpha\mu - \beta}{2} + O(r)$ , откуда при  $r \rightarrow 0$  следует:

$$N(w_0) = 1 + \frac{\alpha\mu - \beta}{2}. \quad (7)$$

Согласно принятому ограничению (3) на рост  $f(z)$  имеем  $\alpha\mu - \beta < 2$  и из формулы (7) получаем  $N(w_0) < 2$ ; с другой стороны,  $N(w_0) = \frac{1}{2}(2 - \beta + \alpha\mu) > 0$ , так как у нас  $\alpha\mu > 0$  и  $\beta \leq 2$ . Но в открытом интервале  $(0, 2)$  лежит единственное целое число 1, следовательно,  $N(w_0) = 1$ .

Мы доказали, что любое значение  $w_0$  из области  $D^*$  функция  $f(z)$  принимает в  $D$  один и только один раз. Если точка  $w_0$  лежит вне области  $D^*$ , то наши рассуждения полностью сохраняются, если в формулу (5) вместо  $(2 - \beta)\lambda$  подставить  $-\beta\lambda$ , и тогда вместо формулы (7) мы получим:

$$N(w_0) = \frac{\alpha\mu - \beta}{2}. \quad (8)$$

Поэтому в этом случае  $-1 < N(w_0) < 1$  и, следовательно,  $N(w_0) = 0$ , т. е. функция  $f(z)$  в области  $D$  не принимает ни одного значения, не принадлежащего  $D^*$ . Таким образом, функция  $w = f(z)$  реализует однолистное отображение  $D$  на  $D^*$ , и теорема доказана.

Заметим, что при условиях доказанной теоремы имеем  $\mu = \alpha/\beta$  (это видно из формулы (7) или (8)), т. е. в окрестности точки  $\zeta_0$

$$f(z) = \frac{A}{(z - \zeta_0)^{\beta/\alpha}} \{1 + O(r)\}. \quad (9)$$

Пусть, в частности,  $\alpha = \beta = 1$ , т. е.  $\zeta_0$  и  $w = \infty$  не являются угловыми точками. Тогда неравенство (3) примет вид  $\mu < 3$ . Таким образом, функция  $f(z)$  должна быть в окрестности точки  $\zeta_0$  бесконечно большого порядка ниже третьего. Пример с функцией  $w = z^3$ , который мы приводили выше, показывает, что в рассматриваемом случае теорема точна, т. е. бесконечность порядка 3 уже не обеспечивает однолистности отображения.

Отметим, наконец, такой факт.

Если  $w = \infty$  является кратной точкой контура  $C^*$ , то для сохранения справедливости принципа соответствия границ достаточно потребовать, чтобы условие (3) выполнялось хотя бы для одной \*) точки  $\zeta_0$  контура  $C$ , соответствующей точке  $w = \infty$ .

Действительно, исключим окрестности всех точек  $\zeta_k$ , соответствующих точке  $w = \infty$ , кружками  $|z - \zeta_k| < r_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ , где  $n$  — кратность точки  $w = \infty$ ), а оставшуюся область обозначим через  $\tilde{D}$ . Для любого значения  $w_0$ , не лежащего на  $C^*$  (и, следовательно, конечного), выбираем  $r_k$  столь малыми, что число  $w_0$ -точек функции  $f(z)$  в областях  $D$  и  $\tilde{D}$  одинаково. Устремим теперь  $r_0$  к нулю, оставляя  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$  фиксированными. Здесь полностью применимо доказательство предыдущей теоремы, следовательно,  $N(w_0) = 1$  для всех точек из  $D^*$  и  $N(w_0) = 0$  для  $w_0$ , не принадлежащих к  $D^*$ , а это и требуется доказать.

\*) Таких точек столько, какова кратность граничной точки  $w = \infty$  для области  $D^*$ .

В следующем пункте мы приведем ряд примеров применения принципа соответствия границ.

### 30. Примеры. 1) Функция

$$w = \frac{4z}{(1+z)^2} \quad (1)$$

на границе единичного круга принимает значения  $w = \frac{4e^{i\varphi}}{(1+e^{i\varphi})^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ .

Следовательно, она устанавливает взаимно однозначное соответствие между единичной окружностью и точками луча  $u > 1$ ,  $v = 0$ . Это соответствие непрерывно всюду, кроме точки  $\zeta_0 = -1$ , в окрестности которой

$$w \approx \frac{-4}{(1+z)^2}.$$

Здесь применима теорема 4 предыдущего пункта, ибо  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  и условие (3) выполнено. Следовательно, функция (1) реализует однолистное

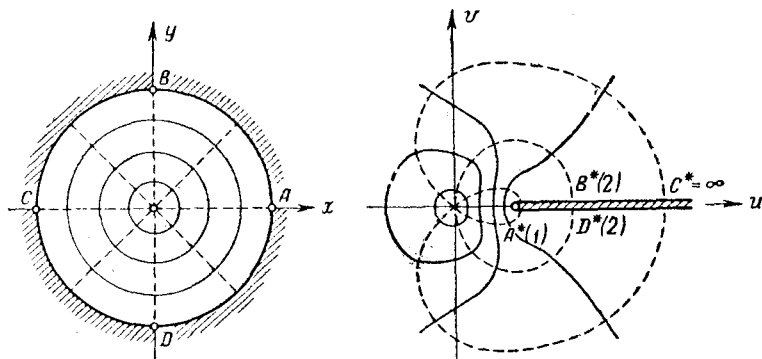


Рис. 41.

конформное отображение круга  $|z| < 1$  на область, полученную из плоскости  $w$  удалением луча  $u > 1$ ,  $v = 0$ . На рис. 41 изображены сетки кривых, соответствующие друг другу при рассматриваемом отображении; сетка кривых в плоскости  $w$  ортогональна, ибо она является конформным образом ортогональной сетки плоскости  $z$  (образованной окружностями  $|z| = \text{const}$  и их радиусами).

2) Рассмотрим более общий случай — функция

$$w = \sqrt[n]{4} \frac{z}{(z^n + 1)^{2/n}} \quad (2)$$

при  $n=1$  совпадает с функцией предыдущего примера. На единичной окружности она принимает значения  $w = \sqrt[n]{4} \frac{e^{i\varphi}}{(e^{in\varphi} + 1)^{2/n}} = \frac{1}{\left(\cos \frac{n\varphi}{2}\right)^{2/n}}$ .

Отметим на единичной окружности вершины правильного  $n$ -угольника:

$A_k = e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}$  и середины образованных ими дуг:  $B_k = e^{i(2k-1)\frac{\pi}{n}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. 42). Величина  $\omega = \cos \frac{n\varphi}{2}$  убывает от 1 до 0 на дуге  $A_1B_1$  (условимся считать на этой дуге  $\arg \omega = 0$ ); на дуге  $B_1A_2$  она изменяется от 0 до  $-1$  (на этой дуге условимся считать  $\arg \omega = -\pi$ ); на дуге  $A_2B_2$  от  $-1$  до 0 (по-прежнему считаем  $\arg \omega = -\pi$ ); на дуге  $B_2A_3$  от 0 до 1 (считаем  $\arg \omega = -2\pi$ ) и т. д. (рис. 42, б). В соответствии с этим на

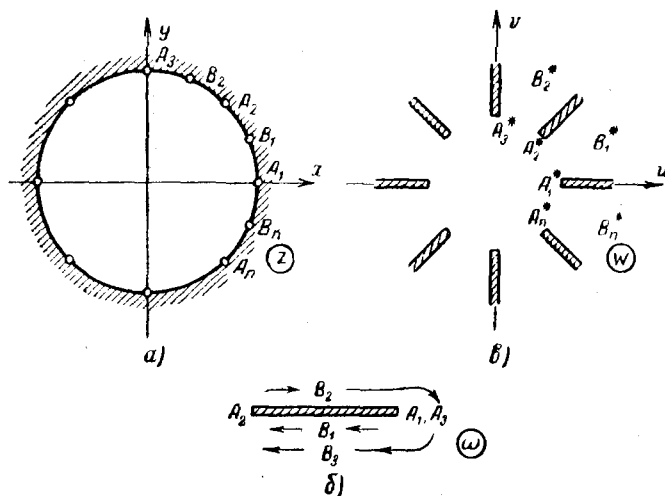


Рис. 42.

участке  $A_1B_1$  модуль соответствующей точки  $\omega$  растет от 1 до  $\infty$ , а аргумент равен нулю; на участке  $B_1A_2$  модуль  $\omega$  убывает от  $\infty$  до 1, а аргумент равен  $2\pi/n$ ; на участке  $A_2B_2$  модуль  $\omega$  растет от 1 до  $\infty$  (по-прежнему  $\arg \omega = 2\pi/n$ ); на  $B_2A_3$  модуль  $\omega$  убывает от  $\infty$  до 1,  $\arg \omega = 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$ , и т. д. Таким образом, точка  $\omega$  пробегает последовательно  $n$  лучей:

$$\arg \omega = (k-1) \frac{2\pi}{n}, \quad |\omega| \geq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

причем каждый луч два раза в противоположных направлениях (рис. 42, в). Образ окружности  $|z| = 1$  при нашем отображении имеет  $\omega = \infty$  своей  $n$ -кратной точкой, которой соответствуют точки окружности  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Так как каждая точка  $B_k$  является простым нулем для  $z^n + 1$ , то в ее окрестности  $\omega \approx \frac{C_k}{(z - B_k)^{2/n}}$ , где  $C_k$  — некоторая постоянная. По принципу соответствия границ (теорема 4, в которой сейчас  $\alpha_k = 1$ ,  $\beta_k = 2/n$ ) функция (2) реализует однолистное конформное отображение круга  $|z| < 1$  на плоскость  $w$  с  $n$  исключенными лучами (3).

3) Совершая дополнительное преобразование  $w = 1/w_1$  плоскости  $w$ , получим отображение

$$w = \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \frac{(z^n + 1)^{2/n}}{z}. \quad (4)$$

единичного круга на внешность «звезды», состоящей из  $n$  лучей

$$|w| < 1, \quad \arg w = (k-1) \frac{2\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

(рис. 43, вместо  $w_1$  мы снова пишем  $w$ ). При  $n=2$  получаем  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , т. е. отображение Жуковского (см. п. 7).

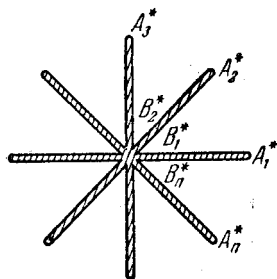


Рис. 43.

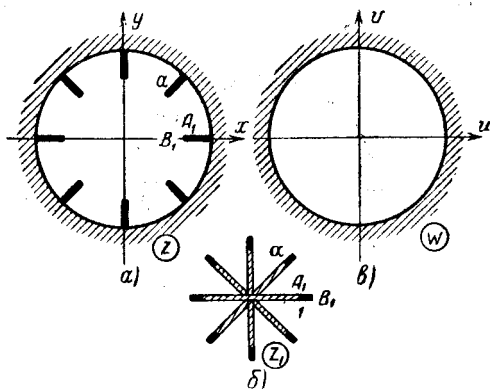


Рис. 44.

4) Рассмотрим теперь единичный круг  $|z| < 1$  с выброшенными отрезками длины  $a$ :

$$1-a \leq |z| \leq 1, \quad \arg z = (k-1) \frac{2\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

(рис. 44, а). Тем же методом, что и выше, легко проверить, что функция

$$z_1 = f(z) = \frac{1}{n\sqrt[n]{4}} \frac{(z^n + 1)^{2/n}}{z}$$

предыдущего примера отображает эту область на внешность «звезды» с лучами длины

$$1+a = \frac{1}{n\sqrt[n]{4}} \frac{[(1-a)^n + 1]^{2/n}}{1-a}, \quad (7)$$

которая подобна звезде (5) (рис. 44, б). Преобразование подобия  $z_2 = \frac{z_1}{1+a}$  мы сделаем лучи звезды равными единице, и тогда функция

$$w = g(z_2) = [z_2^{n/2} + \sqrt{z_2^n - 1}]^{2/n}, \quad (8)$$

обратная к функции (4), преобразует внешность этой звезды на внутренность единичного круга. Таким образом, функция

$$w = g\left(\frac{1}{1+a} f(z)\right) \quad (9)$$

осуществляет конформное отображение единичного круга с выброшенными  $n$  отрезками (б) на внутренность единичного круга.

Формула (9) в развернутом виде довольно громоздка, поэтому представляет интерес получение приближенной формулы, удобной для расчетов. Будем считать величину  $a$  малой; тогда из (7), пренебрегая малыми порядка выше  $a^2$ , находим по формуле Тейлора

$$\alpha \approx \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \left[ 2 - na + \frac{n(n-1)}{2} a^2 \right]^{2/n} (1 + a + a^2) - 1 \approx \frac{na^2}{4}.$$

Аналогично находим, пренебрегая малыми порядка выше  $\alpha$ ,

$$z_2 = \frac{1}{1 + \alpha} f(z) \approx (1 - \alpha) \left( \frac{z^n + 1}{2z^{n/2}} \right)^{2/n}$$

и по формуле (8)

$$w \approx \left[ \left( 1 - \frac{n\alpha}{2} \right) \frac{z^n + 1}{2z^{n/2}} + \sqrt{(1 - n\alpha) \frac{(z^n + 1)^2}{4z^n} - 1} \right]^{2/n} \approx z \left( 1 + \alpha \frac{1 + z^n}{1 - z^n} \right).$$

Подставляя найденное выше значение  $\alpha$ , получаем окончательно:

$$w \approx z \left( 1 + \frac{na^2}{4} \frac{1 + z^n}{1 - z^n} \right). \quad (10)$$

Эта формула пригодна для точек, не слишком близких к точкам  $A_k = e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}$ . При  $a = 0$  имеем  $w \equiv z$ , что и должно быть.

5) Рассмотрим функцию

$$w = z + e^z. \quad (11)$$

Полагая  $z = x + iy$ ;  $w = u + iv$ , имеем:

$$u = x + e^x \cos y,$$

$$v = y + e^x \sin y,$$

откуда следует, что на прямых  $y = \pm\pi$ , ограничивающих полосу  $-\pi < y < \pi$ , имеют место соотношения  $u = x - e^x$ ,  $v = \pm\pi$ , т. е. что эти прямые преобразуются в дважды проходимые лучи  $-\infty < u < -1$ ,  $v = \pm\pi$  (функция  $u = x - e^x$  достигает максимума  $u = -1$  при  $x = 0$ ). Принцип соответствия границ неприменим, но непосредственный анализ функции показывает, что она осуществляет конформное отображение полосы  $-\pi < y < \pi$  на область, получаемую из плоскости  $w$  исключением двух лучей  $-\infty < u < -1$ ,  $v = \pm\pi$ . На рис. 45 изображено соответствие линий при этом отображении (приведены верхние половины областей, отображение нижних половин симметрично).

6) Показательная функция

$$w = e^z \quad (12)$$

отображает параллельные наклонные прямые  $y = k(x - a_1)$ ,  $y = k(x - a_2)$  ( $k \neq 0, \neq \infty$ ) в кривые  $w = e^x \cdot e^{ik(x-a_v)}$  ( $v = 1, 2$ ). Вводя в плоскости  $w$  полярные координаты,  $w = \rho e^{i\theta}$ , получим  $\rho = e^x$ ,  $\theta = k(x - a_v)$ , или

$$\rho = \rho_v e^{\theta/k}, \quad (13)$$

где  $\rho_v = e^{a_v}$  ( $v = 1, 2$ ). Это — две подобные логарифмические спирали. Если  $k(a_2 - a_1) < 2\pi$ , то длина вертикального отрезка между прямыми в плоскости  $z$  меньше  $2\pi$  и отображение однолистно в полосе между ними (см. п. 8). Меняя  $a$  от  $a_1$  до  $a_2$ , убедимся в том, что показательная функция осуществляет

отображение этой полосы на полосу, заключенную между логарифмическими спиралями (рис. 46). Если  $k(a_2 - a_1) = 2\pi$ , то обе спирали совпадают и мы получаем отображение на плоскость с выброшенной спиралью.

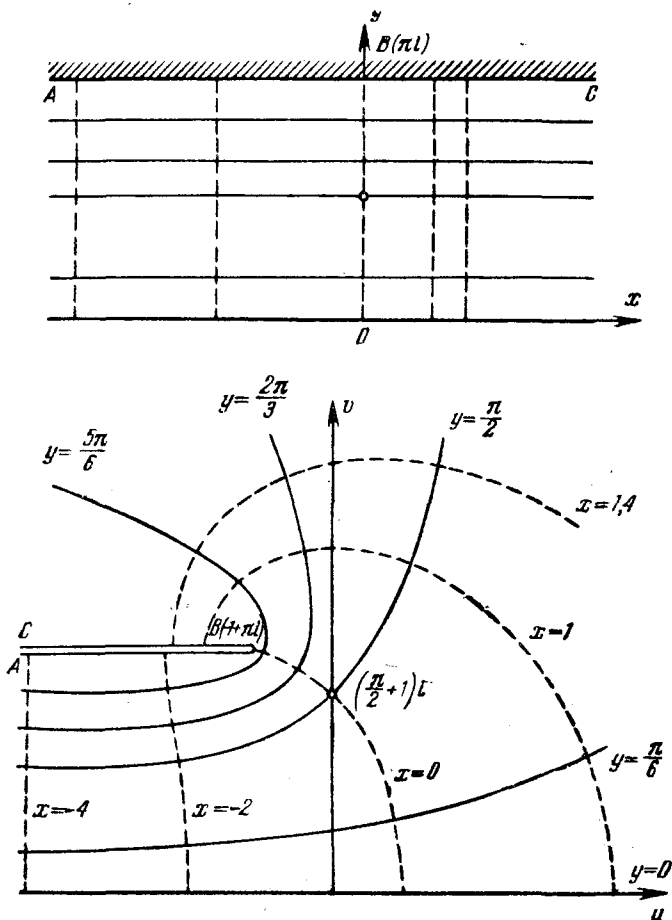


Рис. 45.

При  $k(a_2 - a_1) > 2\pi$  отображение неоднолистно.

7) Функция

$$w = \ln \frac{1}{1-z} \quad (14)$$

на границе единичного круга принимает значения

$$w = \ln \frac{1}{1-e^{i\varphi}} = \ln \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} + i \frac{\pi - \varphi}{2};$$

положив  $w = u + iv$  и исключив параметр  $\varphi$ , получим уравнение образа единичной окружности:

$$u = \ln \frac{1}{2 \cos v}. \quad (15)$$

Это — цепная линия равного сопротивления (рис. 47). По принципу соответ-

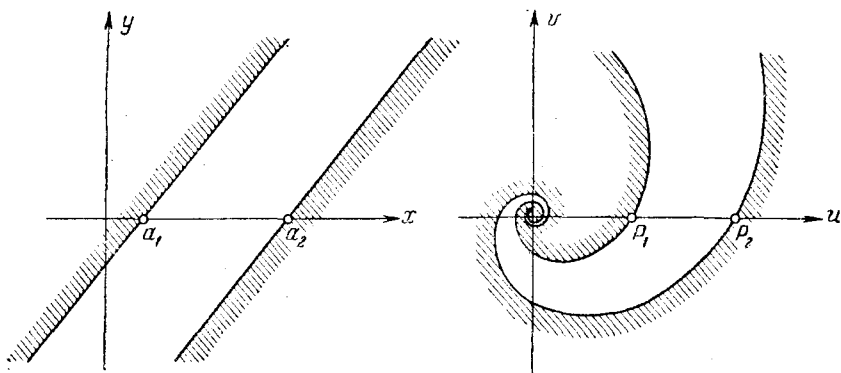


Рис. 46.

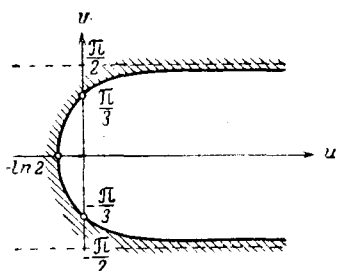


Рис. 47.

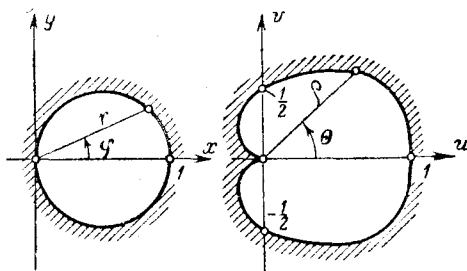


Рис. 48.

ствия границ получим, что функция (14) осуществляет конформное отображение единичного круга на внутренность этой кривой.

8) Функция

$$w = z^2, \quad (16)$$

или в полярных координатах  $\rho = r^2$ ,  $\theta = 2\varphi$ , переводит окружность  $r = \cos \varphi$  в кардионду

$$\rho = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (17)$$

(рис. 48). По принципу соответствия границ функция (16) осуществляет конформное отображение внутренности этой окружности на внутренность кардионды.

9) Функция

$$w = \sqrt{z}, \quad (18)$$



или  $\rho = \sqrt{r}$ ,  $\theta = \frac{\varphi}{2}$ , где  $\varphi = \arg z$  меняется от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ , переводит ту же окружность в ветвь лемнискаты  $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$  (рис. 49). По принципу

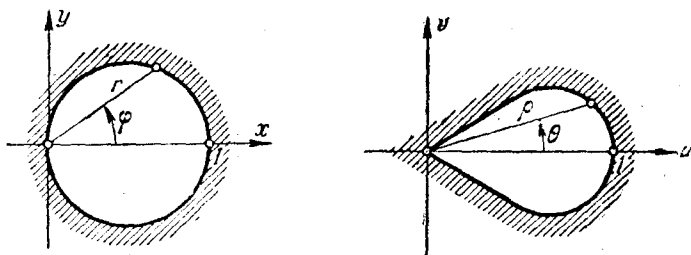


Рис. 49.

соответствия границ функция (18) осуществляет отображение внутренности этой окружности на внутренность правой ветви лемнискаты.

## § 2. Простейшие конформные отображения

Этот параграф посвящен простейшим методам решения основной задачи теории конформных отображений — задачи отыскания функции, осуществляющей конформное отображение одной заданной области на другую. Здесь будет приведено достаточное число примеров, на которых читатель ознакомится с тем, как можно решать эту задачу, подбирая надлежащие комбинации элементарных функций (если это удастся сделать). Такой подбор предполагает свободное владение геометрией элементарных функций, поэтому перед чтением пп. 33 и 34 мы рекомендуем еще раз просмотреть § 3 гл. I, где приводятся отображения, которые могут осуществлять эти функции. В нашем изложении большое место уделяется также методам получения приближенных формул конформных отображений, особенно важным для практики.

При работе с простейшими конформными отображениями весьма часто приходится пользоваться дробно-линейными функциями, — к изучению их геометрических свойств мы сейчас и приступаем. Отметим, что отображения, осуществляемые дробно-линейными функциями, весьма тесно связаны с геометрией Н. И. Лобачевского; однако на выяснении этой связи мы не можем здесь останавливаться \*).

**31. Дробно-линейные отображения.** Так мы будем называть отображения, осуществляемые дробно-линейными функциями

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

\*) См. Маркушевич [2], т. I, стр. 145—155.

где  $a, b, c$  и  $d$  — комплексные постоянные, причем  $ad - bc \neq 0^*$ ). Функция (1) определена на полной плоскости  $z$  (ее значение в точке  $z = -d/c$  считается равным  $\infty$ , а в точке  $z = \infty$  — равным  $\lim_{z \rightarrow \infty} w = a/c$ ).

Так как производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad (2)$$

существует всюду при  $z \neq -d/c$ , то функция (1) аналитична всюду на полной плоскости  $z$ , кроме точки  $z = -d/c$ , в которой она имеет полюс первого порядка. Уравнение (1) однозначно разрешимо относительно  $z$ :

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (3)$$

причем функция (3) также определена на полной плоскости  $w$  (ее значение в точке  $w = a/c$  считается равным  $\infty$ , а в точке  $w = \infty$  — равным  $-d/c$ ). Поэтому дробно-линейная функция осуществляет однолистное отображение полной плоскости  $z$  на полную плоскость  $w$ .

Легко видеть, что дробно-линейная функция — единственная функция, обладающая таким свойством. Именно, справедлива

**Теорема 1.** *Если функция  $f(z)$  всюду однолистна и аналитична всюду в полной плоскости  $z$ , кроме точки  $C$ , то она дробно-линейна.*

В самом деле,  $C$  не может быть существенно особой точкой функции  $f(z)$ , ибо тогда по теореме Сохоцкого (п. 22)  $f(z)$  была бы заведомо неоднолистной. По теореме Лиувилля (в форме п. 24)  $C$  не может быть устранимой особой точкой. Следовательно, точка  $C$  есть полюс, причем первого порядка, ибо в окрестности полюса высшего порядка функция опять-таки неоднолистна. Если  $C \neq \infty$ , то главная часть функции  $f(z)$  в окрестности точки  $C$  имеет вид  $\frac{B}{z - C}$ ; вычитая эту часть из

$f(z)$ , мы получим функцию  $\varphi(z) = f(z) - \frac{B}{z - C}$ , не имеющую особенностей в полной плоскости (единственной особой точкой для  $\varphi(z)$  могла бы служить точка  $C$ , но она является устранимой особой точкой, ибо мы вычли из  $\varphi(z)$  главную часть). Следовательно,  $\varphi(z) \equiv A$  — постоянна, и функция

$$f(z) = A + \frac{B}{z - C}$$

---

\* При  $ad - bc = 0$  имеем  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ , и функция (1) сводится к постоянной.

дробно-линейна. Если  $C = \infty$ , то главная часть функции  $f(z)$  имеет вид  $Az$ , и точно таким же образом доказывается, что  $f(z) = Az + B$ , т. е. является целой линейной функцией. Теорема доказана.

Формула (3) показывает, что функция, обратная к дробно-линейной, снова дробно-линейна. Легко показать, что сложная функция, составленная из дробно-линейных функций, также является дробно-линейной.

Выясним геометрические свойства дробно-линейной функции.

Если  $c = 0$ , то функция (1) приводится к целой линейной функции, геометрические свойства которой уже рассмотрены в п. 4. Для изучения геометрических свойств функции (1) при  $c \neq 0$  мы представим ее в виде

$$w = A + \frac{B}{z - C}. \quad (4)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — некоторые постоянные\*), и будем рассматривать это отображение как сложное, составленное из отображений:

$$(a) \ z_1 = z - C; \quad (б) \ z_2 = \frac{1}{z_1}; \quad (в) \ w = A + Bz_2. \quad (5)$$

Отображение (а) сводится к сдвигу, (в) — к сдвигу и повороту с растяжением. Остается изучить отображение (б), которое, изменив обозначения, мы запишем в виде

$$w = \frac{1}{z}. \quad (6)$$

В полярных координатах  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$  отображение (6) перепишется в виде

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi. \quad (7)$$

Удобно рассматривать отображение (7) как составленное из двух геометрически более наглядных отображений:

$$(a) \ \rho_1 = \frac{1}{r}, \quad \theta_1 = \varphi; \quad (б) \ \rho = \rho_1, \quad \theta = -\theta_1.$$

Отображение (б) есть преобразование симметрии относительно действительной оси. Отображение (а) — инверсия, преобразование симметрии относительно единичной окружности (см. п. 2).

Будем вообще называть точки  $z$  и  $z^*$  *симметричными относительно окружности*  $C_0$ :  $|z - z_0| = R_0$ , если

- 1) они лежат на одном луче, проходящем через  $z_0$ ;
- 2)  $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R_0^2$ .

\*) Чтобы представить функцию (1) в виде (4), достаточно поделить в выражении (1) числитель на знаменатель по правилам деления многочленов.

(Способ построения симметричных точек, изложенный в п. 2, остается справедливым и в общем случае.)

Преобразование, переводящее каждую точку  $z$  плоскости в точку  $z^*$ , симметричную относительно окружности  $C_0$ , называется *симметрией* относительно этой окружности или *инверсией*.

Докажем основное свойство симметричных точек: *точки  $z$  и  $z^*$  тогда и только тогда являются симметричными относительно окружности  $C_0$ , когда они являются вершинами пучка окружностей, ортогональных к окружности  $C_0$ .*

В самом деле, пусть точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно  $C_0$  и  $\Gamma$  — производная окружность, проходящая через  $z$  и  $z^*$  (рис. 50). Проведем через точку  $z_0$  касательную к окружности  $\Gamma$ . По известной теореме квадрат длины этой касательной  $|z' - z_0|^2$  равен произведению секущей  $|z^* - z_0|$  на ее внешнюю часть  $|z - z_0|$ , т. е.

$$|z' - z_0|^2 = |z - z_0| \cdot |z^* - z_0|.$$

Так как  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно  $C_0$ , то это произведение равно  $R_0^2$  и, следовательно,  $|z' - z_0| = R_0$ . Таким образом, касательная к  $\Gamma$  является радиусом окружности  $C_0$ , т. е.  $\Gamma$  ортогональна к  $C_0$ .

Обратно, если  $z$  и  $z^*$  являются вершинами пучка окружностей  $\{\Gamma\}$ , ортогональных к окружности  $C_0$ , то они лежат на одном луче, проходящем через  $z_0$ , ибо этот луч принадлежит пучку \*). Далее, касательная  $z_0z'$  к любой окружности  $\Gamma$  является радиусом окружности  $C_0$  и по той же теореме  $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R_0^2$ , т. е.  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно  $C_0$ . Свойство доказано полностью.

Из этого свойства, между прочим, вытекает, что в случае, когда окружность  $C_0$  вырождается в прямую линию, симметрия относительно окружности превращается в обычную симметрию.

Инверсия относительно произвольной окружности  $C_0$  является конформным отображением второго рода (меняющим ориентацию). В самом деле, пусть  $z_0$  и  $R_0$  — центр и радиус

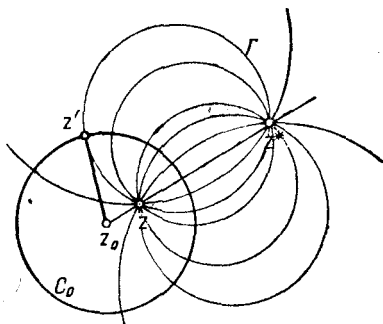


Рис. 50.

\*) В полной плоскости мы рассматриваем прямые как частный случай окружностей — это окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку.

окружности  $C_0$ , тогда точку  $z^*$ , симметричную с точкой  $z$  относительно  $C_0$ , можно записать формулой

$$z^* = z_0 + \frac{R_0^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}, \quad (8)$$

ибо отсюда следует, что  $|z^* - z_0| |z - z_0| = R_0^2$  и  $\arg(z^* - z_0) = -\arg(z - z_0)$ . Следовательно, инверсия отличается от конформного отображения

$$w = \bar{z}_0 + \frac{R_0^2}{z - z_0}$$

лишь дополнительной симметрией относительно действительной оси плоскости  $w$ , т. е. является конформным отображением второго рода.

Покажем, далее, что инверсия преобразует любую окружность  $C$  полной плоскости снова в окружность (круговое свойство).

В самом деле, пусть сначала окружность  $C$  проходит через центр  $z_0$  окружности  $C_0$ , относительно которой производится инверсия (рис. 51). Построим прямую  $C^*$ , перпендикулярную к линии центров ок-

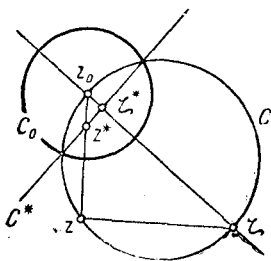


Рис. 51.

ружностей  $C_0$  и  $C$ , на расстоянии  $\frac{R_0^2}{2R}$  от  $z_0$  ( $R_0$  и  $R$  — радиусы  $C_0$  и  $C$ ). Из подобия треугольников  $z_0z^*z$  и  $z_0z\zeta$  (рис. 51) имеем:  $\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z^* - z_0|}$ , или  $|z - z_0| \cdot$

$$\begin{aligned} & \cdot |z^* - z_0| = |\zeta - z_0| |\zeta^* - z_0| = 2R \cdot \frac{R_0^2}{2R} = \\ & = R_0^2. \end{aligned}$$

Следовательно, точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно  $C_0$ . Мы доказали, что точка, симметричная к произвольной точке  $z$  окружности  $C$ , лежит на прямой  $C^*$ , т. е. что  $C^*$  является инверсией окружности  $C$ . Если, в частности,  $C$  есть прямая, проходящая через  $z_0$ , то инверсия этой прямой, очевидно, совпадает с ней самой.

Пусть теперь окружность (или прямая)  $C$  не проходит через  $z_0$ . Построим точку  $z_1$ , симметричную с  $z_0$  относительно  $C$ , и рассмотрим пучок окружностей  $\{\Gamma\}$  с вершинами в  $z_0$  и  $z_1$ . Так как все окружности  $\Gamma$  проходят через  $z_0$ , то по доказанному выше при инверсии относительно  $C_0$  пучок  $\{\Gamma\}$  перейдет в пучок прямых  $\{\Gamma^*\}$ . Вершина этого пучка будет, очевидно, лежать в точке  $z_1^*$ , симметричной точке  $z_1$  относительно  $C_0$ . По свойству симметричных точек все окружности  $\{\Gamma\}$  ортогональны к  $C$ ,

и так как инверсия сохраняет углы (мы доказали выше, что она является конформным отображением второго рода), то образ  $C^*$  окружности  $C$  будет ортогонален пучку прямых  $\{\Gamma^*\}$ . Отсюда следует, что  $C^*$  является окружностью. Свойство доказано.

Точно так же доказывается еще одно важное свойство инверсии: *инверсия преобразует любую пару точек  $z_1$  и  $z_2$ , симметричных относительно произвольной окружности  $C$ , в пару точек  $z_1^*$  и  $z_2^*$ , симметричных относительно окружности  $C^*$  — образа окружности  $C$  (свойство сохранения симметричных точек).*

В самом деле, построим пучок окружностей  $\{\Gamma\}$  с вершинами в  $z_1$  и  $z_2$ . При инверсии он перейдет в пучок окружностей  $\{\Gamma^*\}$  с вершинами в  $z_1^*$  и  $z_2^*$ . Так как окружности  $\Gamma$  ортогональны к  $C$ , то и окружности  $\Gamma^*$  ортогональны к  $C^*$ . Отсюда следует, что  $z_1^*$  и  $z_2^*$  симметричны относительно  $C^*$ . Свойство доказано.

Так как отображение  $w = 1/z$  составляется из двух симметрий (симметрии  $(\alpha)$  относительно единичной окружности и симметрии  $(\beta)$  относительно прямой), то оно обладает и круговым свойством и свойством сохранения симметричных точек. Так как остальные преобразования, составляющие произвольное дробно-линейное отображение (преобразования (а) и (в) из формулы (5), т. е. сдвиг и поворот с растяжением), очевидно, также обладают этими свойствами, то эти свойства остаются справедливыми и для произвольного дробно-линейного отображения.

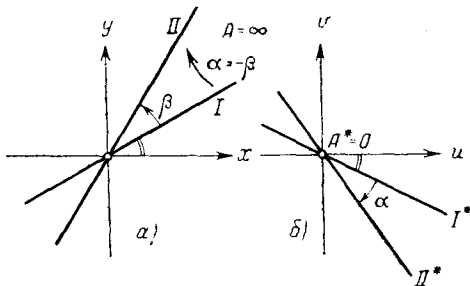


Рис. 52.

Докажем, что произвольное дробно-линейное отображение (1) сохраняет углы в полной плоскости  $z$ .

Это очевидно для всех точек  $z$ , кроме  $z = -d/c$  и  $z = \infty$ , ибо для таких точек существует  $dw/dz \neq 0$  (см. (2)). Чтобы говорить о сохранении углов в точках  $z = -d/c$  и  $z = \infty$ , нужно ввести понятие угла в бесконечно удаленной точке, причем можно, очевидно, ограничиться определением угла между двумя прямыми. Под *углом в бесконечно удаленной точке* между двумя прямыми понимают взятый с противоположным знаком угол во второй (конечной) точке пересечения этих прямых (на рис. 52,  $\alpha$  угол в бесконечности между прямыми  $I$  и  $II$  отрицателен). Ясно, что отображения (а) и (в) сохраняют углы всюду.

Остается показать, что отображение (б) или, что тоже самое, отображение  $w = 1/z$  сохраняет углы в точках  $z = 0$ ,  $z = \infty$ . Но это непосредственно видно из рис. 52 и принятого нами определения (при отображении  $w = 1/z$  прямая  $\arg z = \varphi$  переходит в прямую  $\arg w = -\varphi$ ).

Основные свойства дробно-линейного отображения, доказанные в этом пункте, мы формулируем в виде следующей теоремы:

**Теорема 2.** Произвольная дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

осуществляет однолистное конформное отображение полной  $z$ -плоскости на полную  $w$ -плоскость. Это отображение

1) преобразует любую окружность полной  $z$ -плоскости в окружность полной  $w$ -плоскости (круговое свойство);

2) любую пару точек, симметричных относительно окружности  $S$ , преобразует в пару точек, симметричных относительно образа окружности  $S$  (свойство сохранения симметричных точек).

В заключение приведем без вывода формулы, по которым можно вычислять образы прямых и окружностей при произвольном дробно-линейном отображении (1):

а) Прямым  $\operatorname{Re}(\lambda z) = \alpha$ , не проходящим через точку  $z = -d/c$  ( $\alpha \neq -\operatorname{Re}(\lambda \frac{d}{c})$ ), соответствуют окружности  $|w - w_0| = \rho$ , где

$$w_0 = \frac{2a\alpha\bar{c} + a\bar{d}\bar{\lambda} + b\bar{c}\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})}, \quad \rho = \left| \frac{a}{c} - w_0 \right| = \left| \frac{(ad - bc)\lambda}{2\alpha|c|^2 + 2\operatorname{Re}(c\bar{d}\bar{\lambda})} \right|. \quad (9)$$

б) Прямым  $\operatorname{Re}(\lambda z) = -\operatorname{Re}(\lambda \frac{d}{c})$ , проходящим через точку  $z = -d/c$ , — прямые

$$\operatorname{Re}\left(\frac{ad - bc}{c^2} \lambda \bar{w}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{ad - bc}{c^2} \frac{\lambda \bar{a}}{\bar{c}}\right). \quad (10)$$

в) Окружностям  $|z - z_0| = r$ , не проходящим через точку  $z = -d/c$  ( $r \neq \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|$ ), — окружности  $|w - w_0| = \rho$ , где

$$w_0 = \frac{(az_0 + b)(\bar{c}\bar{z}_0 + \bar{d}) - a\bar{c}r^2}{|cz_0 + d|^2 - |c|^2 r^2}, \quad \rho = \frac{r|ad - bc|}{||cz_0 + d|^2 - |c|^2 r^2|}. \quad (11)$$

г) Окружностям  $|z - z_0| = \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|$  — прямые

$$\operatorname{Re}\left(\frac{ad - bc}{c(cz_0 + d)} \bar{w}\right) = \frac{|ad - bc|^2 + 2\operatorname{Re}\{c(az_0 + b)(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})\}}{2|c(cz_0 + d)|^2}. \quad (12)$$

Эти формулы можно получить непосредственным подсчетом.

**Пример.** Найдем образ прямой  $y = x + 2$  при отображении  $w = \frac{z+1}{z-1}$ ; так как прямая не проходит через точку  $z = 1$ , то она преобразуется в окружность, центр и радиус которой находятся по формулам (9):

$$w_0 = \frac{2-i}{3}, \quad \rho = \frac{|i+1|}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(у нас  $a = b = c = 1$ ,  $d = -1$  и так как уравнение прямой записывается в виде  $\operatorname{Re}\{(-i-1)(x+iy)\} = 2$ , то  $\lambda = -i-1$  и  $\alpha = 2$ ).

**32. Частные случаи.** Выясним сначала вопрос об условиях, определяющих дробно-линейное отображение. Как показывает определение (1) п. 31, такие отображения задаются четырьмя коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Так как хотя бы один из этих коэффициентов отличен от нуля и его можно считать равным 1, деля на этот коэффициент числитель и знаменатель дроби, то дробно-линейное преобразование фактически зависит от трех комплексных или шести действительных параметров.

Отсюда ясно, что дробно-линейное отображение определяется условиями, приводящими к шести независимым соотношениям между действительными и мнимыми частями коэффициентов. Простейший вид таких условий сводится к заданию в плоскостях  $z$  и  $w$  произвольных троек точек  $z_1, z_2, z_3$  и  $w_1, w_2, w_3$ , соответствующих друг другу при рассматриваемом отображении.

Для построения отображения, удовлетворяющего этому условию, рассмотрим вспомогательную плоскость  $\xi$  и построим дробно-линейные отображения плоскости  $z$  и  $w$  на эту плоскость, переводящие заданные тройки точек в 0, 1 и  $\infty$ . Такие отображения легко указать:

$$\xi = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}, \quad \xi = \frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}. \quad (1)$$

Исключая  $\xi$  из этой системы, мы получим дробно-линейное отображение плоскости  $z$  на плоскость  $w$ , переводящее точки  $z_1, z_2$  и  $z_3$  в точки  $w_1, w_2$  и  $w_3$  соответственно; это отображение запишется так:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \quad (2)$$

Докажем, что отображение, определяемое формулой (2), есть единственное дробно-линейное отображение, удовлетворяющее поставленному условию. В самом деле, если существуют два различных таких отображения  $w = l_1(z)$  и  $w = l_2(z)$ , то, применяя еще второе из отображений (1), которое мы обозначим  $\xi = l(w)$ , получим два различных дробно-линейных отображения

$$\xi' = l[l_1(z)] = L_1(z), \quad \xi'' = l[l_2(z)] = L_2(z),$$



переводящих точки  $z_h$  в 0, 1 и  $\infty$ . Рассмотрим теперь отображение

$$\xi'' = L_2[L_1^{-1}(\xi')],$$

где  $L_1^{-1}$  — отображение, обратное к  $L_1$ . Оно дробно-линейно, следовательно, его можно представить в виде

$$\xi'' = \frac{a\xi' + b}{c\xi' + d}. \quad (3)$$

Отображение (3), очевидно, оставляет на месте точки 0, 1 и  $\infty$ . Из соответствия бесконечно удаленных точек мы получим, что  $c = 0$  и, следовательно,  $\xi'' = \frac{a}{d}\xi' + \frac{b}{d}$ .

Соответствие двух других точек дает условия  $b/d = 0$ ,  $a/d = 1$ . Таким образом,  $\xi'' = L_2[L_1^{-1}(\xi')] \equiv \xi'$ , т. е.  $L_1^{-1}$  обратнo к  $L_2$  и  $L_1 \equiv L_2$ . Но тогда и  $l_1 \equiv l_2$ , а это и доказывает наше утверждение о единственности отображения (2).

Нетрудно убедиться в том, что формула (2) сохраняет смысл и в том случае, когда одна из точек  $z_h$  или  $w_h$  есть бесконечно удаленная, если только в этой формуле заменить единицей числитель и знаменатель отношения, в котором участвует эта точка (в формуле (2) каждая точка участвует один раз в числителе и один раз в знаменателе). В самом деле, пусть, например,  $w_3 = \infty$ ,  $z_2 = \infty$ , тогда формула (2) принимает вид

$$\frac{w - w_1}{1} \cdot \frac{1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{1}{1},$$

или  $w = w_1 + (w_2 - w_1) \frac{z - z_1}{z - z_3}$  и непосредственно видно, что полученное отображение решает задачу. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *Существует одно и только одно дробно-линейное отображение полной плоскости  $z$  на полную плоскость  $w$ , переводящее три произвольные различные точки  $z_h$  в три произвольные различные точки  $w_h$ .*

Из этой теоремы вытекает

**Теорема 2.** *Любой круг полной плоскости  $z$  с помощью дробно-линейной функции можно преобразовать в любой круг полной плоскости  $w$ .*

В самом деле, возьмем на границе  $S$  круга в плоскости  $z$  три точки  $z_h$ , занумерованные в порядке положительного обхода этого круга. Если на границе  $S^*$  круга в плоскости  $w$  взять три произвольные точки  $w_h$  и по формуле (2) построить дробно-линейное отображение, то это отображение, согласно круговому свойству, будет переводить окружность  $S$  в  $S^*$ . Тогда по принципу соответствия границ она переводит круг  $K$ , ограниченный

окружностью  $C$ , в один из двух кругов, ограниченных окружностью  $C^*$ .

Действительно, пусть  $K$  и  $K^*$  будут заданные круги соответственно в плоскостях  $z$  и  $w$ , а  $C$  и  $C^*$  — их границы. Выберем на  $C$  три точки  $z_h$ , занумерованные в порядке положительного обхода  $K$ , и такие же три точки  $w_h$  на  $C^*$ . Если теперь по формуле (2) построить дробно-линейное отображение, то это отображение согласно круговому свойству будет переводить окружность  $C$  в  $C^*$  и согласно принципу соответствия границ круг  $K$  — в один из двух кругов, ограниченных  $C^*$ . Но так как конформные отображения сохраняют ориентацию (см. п. 27) и точки  $w_h$  расположены относительно  $K^*$  так же, как точки  $z_h$  относительно  $K$ , то  $K$  преобразуется именно в  $K^*$ . Теорема доказана.

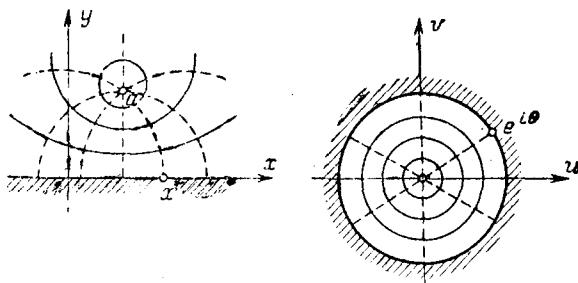


Рис. 53.

Отметим один предельный случай формулы (2). Поставим своей задачей построение дробно-линейного отображения по двум парам соответствующих точек  $z_1, z_2$  и  $w_1, w_2$  и по заданной производной  $a = \left[ \frac{dw}{dz} \right]_{z_2}$  в точке  $z_2$ . Для решения этой задачи заменим последнее условие условием соответствия точек  $z_3 = z_2 + h$  и  $w_3 = w_2 + ah$ ; тогда отображение найдется по формуле (2)

$$\frac{w - w_1}{w - w_2 - ah} \cdot \frac{-ah}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2 - h} \cdot \frac{-h}{z_2 - z_1}.$$

Сокращая обе части на  $-h$  и переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим искомое отображение

$$a \frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь несколько важных примеров дробно-линейных отображений.

1) Отображение верхней полуплоскости на единичный круг. Задаемся точкой  $a$  верхней полуплоскости, переходящей в центр круга  $w = 0$  (рис. 53). По свойству

сохранения сопряженных точек точка  $\bar{a}$ , симметричная точке  $a$  относительно действительной оси, должна перейти в точку  $w = \infty$ , симметричную точке  $w = 0$  относительно единичной окружности. Поэтому искомое отображение должно иметь вид

$$w = k \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad (5)$$

где  $k$  — постоянный множитель. При любом  $k$  эта функция отображает верхнюю полуплоскость на некоторый круг с центром в  $w = 0$ , ибо точка  $w = \infty$  должна быть симметричной точке  $w = 0$  относительно окружности этого круга. Подберем  $k$  так, чтобы круг был единичным. Для этого достаточно потребовать, чтобы точка  $z = 0$  перешла в точку единичной окружности:  $\left| k \frac{a}{\bar{a}} \right| = |k| = 1$ . Таким образом, можно положить  $k = e^{i\alpha}$  и нашу задачу решает функция

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad (6)$$

где  $\alpha$  — любое действительное число (изменение  $\alpha$  означает поворот круга относительно центра  $w = 0$ ).

По свойствам дробно-линейных отображений пучку радиусов круга  $|w| < 1$  (т. е. дуг окружностей, проходящих через точки  $w = 0$  и  $w = \infty$ ) соответствуют (принадлежащие верхней полуплоскости) дуги окружностей, проходящих через точки  $a$  и  $\bar{a}$ . Семейству окружностей с центром в точке  $w = 0$  соответствуют окружности, имеющие  $a$  и  $\bar{a}$  своими симметричными точками (см. рис. 53).

Отметим еще обратное к (6) отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость. Полагая для упрощения  $a = ih$  чисто мнимым, получим из формулы (6)

$$z = ih \frac{e^{i\alpha} + w}{e^{i\alpha} - w}. \quad (7)$$

Полагая здесь  $w = e^{i\theta}$  и умножая числитель и знаменатель на  $e^{-i\frac{\alpha+\theta}{2}}$ , находим соответствие между точками единичной окружности и оси  $x$ , которое устанавливает отображение (7):

$$x = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \theta}{2}. \quad (8)$$

Граничная производная

$$\left[ \frac{dz}{dw} \right]_{w=e^{i\theta}} = \frac{dx}{d\theta} = \frac{h}{2 \sin^2 \frac{\alpha - \theta}{2}} = \frac{h}{1 - \cos(\theta - \alpha)} \quad (9)$$

непрерывна всюду на окружности, кроме точки  $w = e^{i\alpha}$ , которая соответствует точке  $z = \infty$  (ср. теорему 1 п. 29).

2) Отображение единичного круга на единичный круг. Зададимся точкой круга  $|z| < 1$ , переходящей в центр круга  $|w| < 1$ . Точка  $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$ , симметричная с  $a$  относительно единичной окружности, должна переходить в точку  $w = \infty$ ; следовательно, искомое отображение должно иметь вид

$$w = k \frac{z - a}{z - a^*} = k_1 \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

где  $k$  и  $k_1$  — некоторые постоянные. Подберем  $k_1$  так, чтобы круг в плоскости  $w$  был единичным. Для этого достаточно потребовать, чтобы точка  $z = 1$  перешла в точку единичной окружности:  $\left| k_1 \frac{1 - a}{1 - \bar{a}} \right| = |k_1| = 1$ .

Следовательно, можно принять  $k_1 = e^{i\alpha}$ , и нашу задачу решает функция

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (10)$$

где  $\alpha$  — любое действительное число. Так как

$$\left[ \frac{dw}{dz} \right]_{z=a} = e^{i\alpha} \frac{1}{1 - |a|^2}$$

и  $|a| < 1$ , то  $\alpha$  геометрически означает угол поворота отображения (10) в точке  $a$ :

$$\alpha = \left[ \arg \frac{dw}{dz} \right]_{z=a}. \quad (11)$$

Заметим, что растяжение отображения (10) в точке  $a$

$$\left[ \left| \frac{dw}{dz} \right| \right]_{z=a} = \frac{1}{1 - |a|^2} \quad (12)$$

стремится к бесконечности, если точка  $a$  приближается к границе единичного круга.

На рис. 54 указаны линии, соответствующие друг другу при этом отображении. Сетка в плоскости  $z$  является частью сетки на рис. 53.

Отметим еще соотношение, связывающее аргументы соответствующих точек единичных окружностей  $z = e^{i\varphi}$  и  $w = e^{i\theta}$  (мы считаем для упрощения, что  $\alpha = 0$  и полагаем  $a = re^{i\varphi_0}$ ):

$$\cos(\theta - \varphi_0) = \frac{(1 + r^2) \cos(\varphi - \varphi_0) - 2r}{1 - 2r \cos(\varphi - \varphi_0) + r^2} *). \quad (13)$$

\*) Для получения соотношения (13) достаточно подставить в формулу (10) выражения для  $z$ ,  $w$  и  $a$ , помножить обе части на  $e^{-i\theta}$  и отделить действительные части.

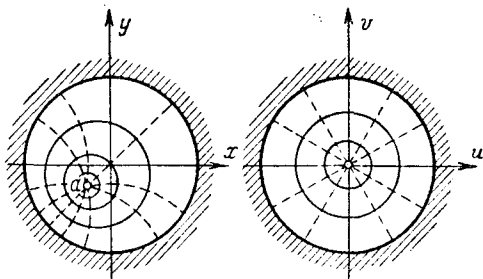


Рис. 54.

Переходя к более общему случаю, заметим, что если радиус круга в плоскости  $z$  равен  $R$ , то функция  $w = f(z)$ , отображающая этот круг на круг  $|w| < 1$  при условиях  $f(a) = 0$ ,  $\arg f'(a) = \alpha$ , имеет вид

$$w = e^{i\alpha} \frac{R(z-a)}{R^2 - \bar{a}z}. \quad (14)$$

Эта формула получается из формулы (10) заменой  $z$  на  $z/R$  и соответственно  $a$  на  $a/R$ .

3) Отображение верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость. Найдём общий вид таких отображений. Всякую дробно-линейную функцию  $w = l(z)$ , осуществляющую отображение верхней полуплоскости  $z$  на верхнюю полуплоскость  $w$ , можно получить из формулы (2), задавая две тройки соответствующих точек  $z_h = x_h$ ,  $w_h = u_h$  действительных осей  $x$  и  $u$ . Так как числа  $z_h$  и  $w_h$  действительны, то после преобразования формула (2) примет вид

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (15)$$

где  $a, b, c, d$  — действительные числа. Наоборот, любая функция (15) с действительными коэффициентами преобразует ось  $x$  в ось  $u$  и, следовательно, верхнюю полуплоскость  $z$  в одну из полуплоскостей  $w$ , верхнюю или нижнюю. Мы получим верхнюю полуплоскость, если потребуем, чтобы производная  $\frac{dw}{dz}$  на действительной оси была положительной:

$$\left[ \frac{dw}{dz} \right]_{z=x} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0,$$

откуда  $ad - bc > 0$ . Таким образом, формула (15) при действительных коэффициентах, удовлетворяющих условию  $ad - bc > 0$ , даёт общий вид линейных отображений верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

**33. Примеры.** Рассмотрим примеры конформных отображений, которые осуществляются комбинациями элементарных функций.

1) Отображение полосы на единичный круг. Пусть в плоскости  $z$  задана полоса  $D: -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ , которую требуется конформно отобразить на круг  $|w| < 1$  с соответствием трех граничных точек:  $f\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$ ,  $f(i\infty) = i$  ( $i\infty$  обозначает верхнюю бесконечно удаленную точку полосы). Прежде всего мы повернем на прямой угол и расширим вдвое нашу полосу:

$$z_1 = 2iz, \quad (1)$$

затем воспользуемся тем, что показательная функция

$$z_2 = e^{z_1} \quad (2)$$

преобразует полосу  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z_1 < \frac{\pi}{2}$ , на которую функция (1) отображает  $D$ , в правую полуплоскость  $\operatorname{Re} z_2 > 0$  (действительно,  $z_2 = e^{x_1} \cdot e^{iy_1}$ , следовательно,  $|z_2| = e^{x_1}$  меняется от нуля до  $\infty$ , а  $\arg z_2 = y_1$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ ). Остается отобразить эту полуплоскость на единичный круг так, чтобы точки  $z_2 = i, -i, 0$ , соответствующие точкам  $z = \pi/4, -\pi/4, i\infty$ , перешли в точки  $w = 1, -1, i$ . Такая задача решается с помощью формулы (2) предыдущего пункта (мы меняем принятые там обозначения):

$$\frac{w-1}{w-i}(1+i) = \frac{z_2-i}{z_2},$$

или

$$w = \frac{1}{i} \frac{z_2 - i}{z_2 + i}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (1) в (3), получим окончательное решение задачи

$$w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \operatorname{tg} z \quad (4)$$

(см. п. 9). Выясним еще соответствие линий при этом отображении. Семейство вертикальных прямых  $\operatorname{Re} z = \operatorname{const}$  при отображении (1) переходит в семейство горизонтальных прямых, которое отображение (2) преобразует в семейство лучей  $\arg z_2 = \operatorname{const}$ , т. е. в семейство «окружностей», проходящих

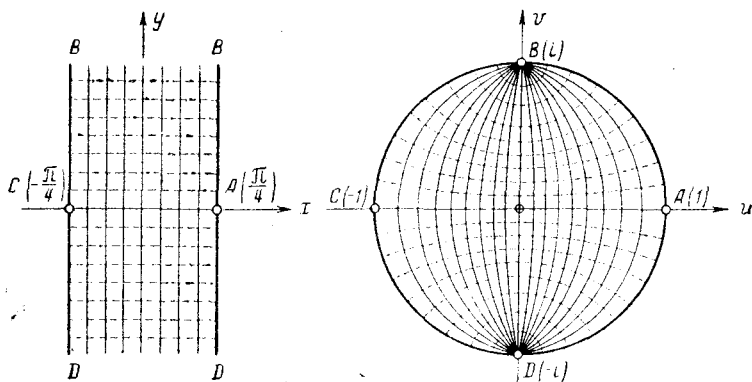


Рис. 55.

через точки  $z_2 = 0$  и  $z_2 = \infty$ . Дробно-линейное отображение (3) преобразует эти точки в точки  $w = i$  и  $w = -i$ , следовательно, рассматриваемые нами лучи оно переводит в семейство окружностей, проходящих через точки  $w = \pm i$ . Ортогональное семейство отрезков  $\operatorname{Im} z = \operatorname{const}$  переходит в семейство окружностей, имеющих  $w = \pm i$  своими симметричными точками (рис. 55).

Обратная функция

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$$

реализует обратное отображение круга на полосу. Заменяя здесь  $iz$  на  $z_1$  и  $i\omega$  на  $\frac{\pi}{2H} \omega_1$ , получим отображение круга  $|z| < 1$  на полосу ширины  $H$ :  $-\frac{H}{2} < \text{Im } \omega < \frac{H}{2}$ . Оно имеет вид

$$\omega = \frac{H}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{2H}{\pi} \text{arth } z \quad (5)$$

мы опускаем индексы у  $z$  и  $\omega$ ). Отображение (5) переводит точки  $z = \pm 1$  в точки  $\omega = \pm \infty$  и точку  $z = i$  в точку  $\omega = i \frac{H}{2}$ . Его производная

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{2H}{\pi} \frac{1}{1-z^2}$$

обращается в бесконечность в точках  $z = \pm 1$ .

2) Отображение полуплоскости с выброшенным отрезком на полуплоскость. Пусть из полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  исключен отрезок  $(a, a + ih)$ . Для получения искомого отображения мы воспользуемся тем, что отображение  $w = z^2$  удваивает углы в начале координат и, следовательно, может «распрямить» угол между исключенным отрезком и осью  $x$ .

В соответствии с этим мы сдвигаем полуплоскость  $z$  на отрезок  $a$  влево:  $z_1 = z - a$  и, применяя отображение  $z_2 = z_1^2$ , получаем плоскость с выброшенным лучом  $-h^2 < \text{Re } z_2 < \infty$ ,  $\text{Im } z_2 = 0$ . Затем мы снова сдвигаем плоскость  $z_2$  на величину  $h^2$  вправо:  $z_3 = z_2 + h^2$ . Применяя, наконец, отображение  $z_4 = \sqrt{z_3}$ , получаем верхнюю полуплоскость. Таким образом, искомое отображение имеет вид

$$z_4 = \sqrt{(z-a)^2 + h^2}. \quad (6)$$

Сдвигая еще плоскость  $z_4$  на отрезок  $a$  вправо, чтобы точка  $z = a + ih$  перешла в точку  $a$ , получим окончательно

$$\omega = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a. \quad (7)$$

Производная отображения (7)

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{z-a}{\sqrt{(z-a)^2 + h^2}} \quad (8)$$

обращается в нуль в точках  $B$  и  $D$  (где  $z = a$ ) и в бесконечность в точке  $C$  (где  $z = a + ih$ ). Прямым  $v = v_0 = \text{const}$  соответствуют линии четвертого порядка

$$y = v_0 \sqrt{1 + \frac{h}{(x-a)^2 + v_0^2}}, \quad (9)$$

симметричные относительно прямой  $x = a$ , на которой их ординаты достигают своего максимума. При больших  $v_0$  кривые (9) мало отличаются от прямых (рис. 56).

При  $h = 0$  отображение (7) обращается в тождественное преобразование  $\omega = z$ . Найдем главную часть отображения (7) при малых  $h$ . Для этого мы преобразуем формулу (7), пренебрегая степенями  $h$  выше второй. Применяя известную приближенную формулу для корня, получим:

$$\omega = (z-a) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(z-a)^2}} + a \approx z + \frac{h^2}{2(z-a)}. \quad (10)$$

Приближенная формула (10) перестает быть справедливой для точек  $z$  близких к точке  $a$ , ибо для них величина  $\frac{h^2}{z-a}$  перестает быть малой.

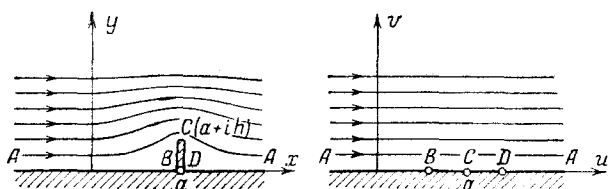


Рис. 56.

3) Отображение круга с выброшенным отрезком радиуса на единичный круг (рис. 57). Пусть из круга  $|z| < 1$  исключен прямолинейный отрезок  $[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$ . Отображение полученной области на единичный круг с помощью дополнительных дробно-линейных отображений можно свести к предыдущему отображению (7). Однако проще воспользоваться свойствами функции Жуковского (п. 7). Повернув область в

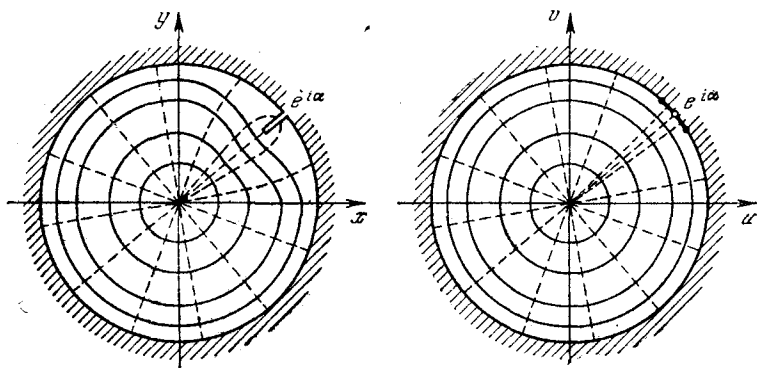


Рис. 57.

плоскости  $z$  на угол  $-\alpha$  и применив функцию Жуковского  $\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right)$ , мы преобразуем эту область во внешность отрезка  $[-1, 1+2h_1]$ , где  $h_1 = \frac{h^2}{4(1-h)}$  \*). Аналогичное преобразование  $\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{w}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{w} \right)$  переведет круг в плоскости  $w$  во внешность отрезка  $[-1, 1]$ . Легко видеть, что линейное отображение  $\omega = \frac{\zeta}{1+h_1} - \frac{h_1}{1+h_1}$  преобразует друг в друга

\*) В самом деле, образом точки  $z = (1-h)e^{i\alpha}$  при рассматриваемом отображении является точка  $\zeta_0 = \frac{1}{2} \left( 1-h + \frac{1}{1-h} \right) = 1 + \frac{h^2}{2(1-h)}$ .



полученные области в плоскостях  $\xi$  и  $\omega$ ; подставляя вместо  $\omega$  и  $\xi$  их выражения, мы получаем искомое отображение:

$$(1 + h_1) \left( \frac{w}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{w} \right) = \left( \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right) - 2h_1. \quad (11)$$

При  $h = 0$  имеем  $h_1 = 0$  и  $w \equiv z$ . Найдем главную часть отображения (11) для малых  $h$ . Для этого подставим в (11)  $w = z + \omega$  и отбросим малые второго порядка относительно  $h_1$ , замечая при этом, что  $\omega$  и  $h_1$  — одного порядка (так что величинами порядка  $\omega^2$  можно пренебречь). Мы получим:

$$(1 + h_1) \left[ \frac{z + \omega}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} \left( 1 - \frac{\omega}{z} \right) \right] \approx \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} - 2h_1,$$

или

$$\frac{\omega}{e^{i\alpha}} - \frac{e^{i\alpha}\omega}{z^2} + h_1 \left( \frac{z}{e^{i\alpha}} + \frac{e^{i\alpha}}{z} + 2 \right) \approx 0,$$

откуда

$$\omega \approx h_1 z \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z}.$$

Таким образом, для малых  $h_1$  и точек  $z$ , не слишком близких к точке  $e^{i\alpha}$ , наше конформное отображение можно представить следующей приближенной формулой:

$$w \approx z + h_1 z \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z}. \quad (12)$$

Дифференцируя соотношение (12), получим главную часть производной

$$\frac{dw}{dz} \approx 1 + h_1 \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} + \frac{2h_1 z e^{i\alpha}}{(e^{i\alpha} - z)^2}. \quad (13)$$

Отметим еще связь между аргументами точек  $z = e^{i\varphi}$  и  $w = e^{i\theta}$  окружностей, соответствующих друг другу при отображении (11). Отделяя в (12) после подстановки  $z = e^{i\varphi}$  и  $w = e^{i\theta}$  действительные части и полагая  $\theta = \varphi + \Delta\varphi$ ,  $\cos \theta \approx \cos \varphi - \Delta\varphi \cdot \sin \varphi$ , получим \*):

$$-\sin \varphi \cdot \Delta\varphi \approx h_1 \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{i\varphi} \frac{e^{i\alpha} + e^{i\varphi}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi}} \right\} = -h_1 \sin \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \alpha}{2},$$

откуда

$$\theta = \varphi + \Delta\varphi \approx \varphi + h_1 \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \alpha}{2}. \quad (14)$$

4) Отображение плоскости с выброшенными лучами на полосу  $0 < v < H$  (рис. 58). Для определенности потребуем, чтобы левый луч переходил в нижний берег полосы, а правый — в верхний \*\*).

Дробно-линейным преобразованием  $z_1 = \frac{z + a}{z - a}$  переводим наши лучи в один

\*) Мы берем первые два члена формулы Тейлора для  $\cos \theta$  в точке  $\theta = \varphi$ .

\*\*) Эти условия определяют лишь два действительных параметра отображения (они сводятся к заданию соответствия двух пар граничных точек), третий остается произвольным (ср. формулу (15)).

луч  $(0, \infty)$ , а затем в действительную ось, используя отображение

$$z_2 = \sqrt{z_1} = \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}.$$

Рассматриваемая область переходит при этом в верхнюю полуплоскость. Для получения нужного соответствия точек подвергнем эту полуплоскость дробно-линейному преобразованию на себя, так чтобы образы бесконечно удаленных

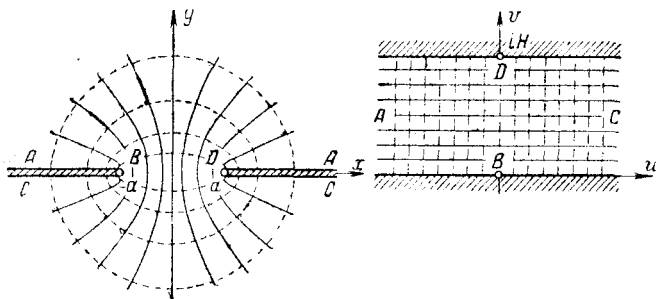


Рис. 58.

точек  $A$  и  $C$  первоначальной области на плоскости  $z$  (т. е. точки  $z_2 = \pm 1$ ) попали в  $0$  и  $\infty$ :

$$z_3 = k \frac{1+z_2}{1-z_2} = -\frac{k}{a} (z + \sqrt{z^2 - a^2})$$

( $k$  — произвольная положительная постоянная). Остается применить логарифмическую функцию,  $w = \frac{H}{\pi} \ln z_3$ , чтобы получить отображение на полосу с нужным соответствием границ:

$$w = \frac{H}{\pi} \ln (z + \sqrt{z^2 - a^2}) + Hi + c = \frac{H}{\pi} \operatorname{arsh} \frac{z}{a} + \frac{H}{\pi} \ln a + Hi + c, \quad (15)$$

здесь  $c = \frac{H}{\pi} \ln \frac{k}{a}$  — произвольная действительная постоянная. Двум семействам прямых  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  при отображении (15) в плоскости  $z$  соответствуют семейства эллипсов и гипербол с фокусами  $\pm a$ .

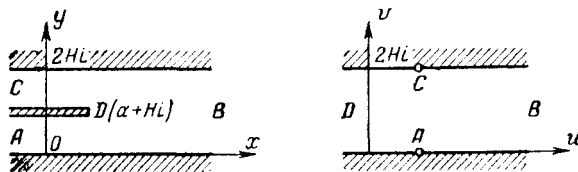


Рис. 59.

5) Отображение полосы  $0 < y < 2H$  с вырезом  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $y = H$  на полосу  $0 < v < 2H$  (рис. 59). Функция

$$z_1 = e^{\pi z / 2H}$$

отображает полосу с вырезом на верхнюю полуплоскость с выброшенным отрезком  $(0, bi)$  мнимой оси, где  $a = e^{a\pi/2H}$ . Функция (7) примера 2):

$$z_2 = \sqrt{z_1^2 + b^2} = \sqrt{e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}}$$

(в формуле (7) надо положить  $a = 0$ ,  $h = b$ ) отображает эту последнюю область на полуплоскость. Применив логарифм, получим искомое отображение

$$w = \frac{2H}{\pi} \ln z_2 = \frac{H}{\pi} \ln (e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}). \quad (16)$$

6) Отображение полосы  $0 < y < 1$  с вырезом  $0 \leq y \leq h$ ,  $x = a$  на полосу  $0 < v < 1$  (рис. 60). Функция  $z_1 = e^{\pi(z-a)}$  отображает

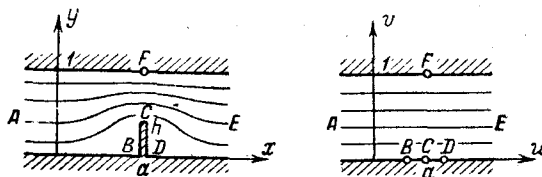


Рис. 60.

полосу с вырезом на верхнюю полуплоскость с вырезанной дугой единичной окружности. Отображение

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} = \operatorname{th} \frac{\pi(z-a)}{2}$$

переводит эту дугу в отрезок мнимой оси  $(0, bi)$ , где  $b = \frac{1}{i} \operatorname{th} \frac{\pi h i}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi h}{2}$ .

Используя опять функцию (7) примера 2), мы получим отображение заданной области на верхнюю полуплоскость:

$$z_3 = \sqrt{z_2^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}}.$$

Точки A и E при этом отображении перейдут в точки  $\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}} = \pm \frac{1}{\cos \frac{\pi h}{2}}$ ; дробно-линейным отображением

$$z_4 = \frac{1 + z_3 \cos \frac{\pi h}{2}}{1 - z_3 \cos \frac{\pi h}{2}}$$

мы переведем их в 0 и  $\infty$  и затем применим логарифм

$$z_5 = \frac{1}{\pi} \ln z_4.$$

В итоге мы получим отображение на нужную полосу. Однако точке C соответствует, очевидно, точка  $z_5 = 0$ ; чтобы перевести ее в точку a действитель-

ной оси, нужно еще сдвинуть эту полосу на  $a$ . Таким образом, искомое отображение имеет вид:

$$w = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + z_3 \cos \frac{\pi h}{2}}{1 - z_3 \cos \frac{\pi h}{2}} + a = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth} \left( \cos \frac{\pi h}{2} \cdot z_3 \right) + a,$$

или окончательно

$$w = \frac{2}{\pi} \operatorname{arth} \left\{ \cos \frac{\pi h}{2} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}} \right\} + a. \quad (17)$$

Для малых  $h$  выражение, стоящее под знаком  $\operatorname{arth}$ , которое мы обозначим через  $\xi$ , преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &\approx \left(1 - \frac{\pi^2 h^2}{8}\right) \operatorname{th} \frac{\pi(z-a)}{2} \left\{1 + \frac{\pi^2 h^2}{8} \operatorname{cth}^2 \frac{\pi(z-a)}{2}\right\} \approx \\ &\approx \operatorname{th} \frac{\pi(z-a)}{2} \left\{1 + \frac{\pi^2 h^2}{8} \left(\operatorname{cth}^2 \frac{\pi(z-a)}{2} - 1\right)\right\} \end{aligned}$$

(мы заменяем  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$  и  $\sqrt{\quad}$  их приближенными выражениями и пренебрегаем при умножении малыми порядка выше  $h^2$ ). Используя элементарные формулы для гиперболических функций, получаем:

$$\xi \approx \operatorname{th} \frac{\pi(z-a)}{2} + \frac{\pi^2 h^2}{4} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \pi(z-a)}.$$

Получим теперь приближенную формулу для конформного отображения (17). Для этого в правой части формулы (17) заменим  $\operatorname{arth} \xi$  первыми двумя членами его тейлоровского разложения с центром в точке  $\xi_0 = \operatorname{th} \frac{\pi(z-a)}{2}$ :

$$\operatorname{arth} \xi \approx \operatorname{arth} \xi_0 + \frac{1}{1 - \xi_0^2} (\xi - \xi_0).$$

Подставляя в правую часть значения  $\xi$  и  $\xi_0$ , мы найдем окончательно

$$w \approx z + \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2}} \cdot \frac{\pi^2 h^2}{4 \operatorname{sh} \pi(z-a)} = z + \frac{\pi h^2}{4} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-a)}{2}. \quad (18)$$

7) Отображение эксцентрического кругового кольца на концентрическое. Рассмотрим сначала случай, когда каждая окружность кольца лежит во внешности другой (рис. 61). Построим на общей касательной к этим окружностям, как на диаметре, полуокружность  $\Gamma$ ; она пересечет линию центров окружностей кольца в двух точках  $a$  и  $b$ , которые симметричны одновременно относительно обеих окружностей  $C_1$  и  $C_2$ , ибо через  $a$  и  $b$  проходят линия центров и линия  $\Gamma$ , ортогональные к обеим окружностям. По свойствам дробно-линейных отображений функция

$$w = \frac{z-a}{z-b} \quad (19)$$

переводит окружности  $C_1$  и  $C_2$  в две окружности  $C_1^*$  и  $C_2^*$ , относительно которых точки  $w=0$  и  $w=\infty$ , соответствующие точкам  $z=a$  и  $z=b$ , являются симметричными. Следовательно, точка  $w=0$  есть общий центр

$C_1^*$  и  $C_2^*$ . Эксцентрическое кольцо между  $C_1$  и  $C_2$  при этом переходит в концентрическое круговое кольцо между  $C_1^*$  и  $C_2^*$ . На рис. 61 указано также соответствие линий при этом отображении; сетка в плоскости  $z$  является частью сетки рис. 53.

Дополнительное отображение

$$w_1 = \ln w = \ln \rho + i\theta, \quad (20)$$

где  $\theta$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , переводит полученное кольцо на полосу. Этот факт не противоречит сказанному в п. 28 относительно невозможности

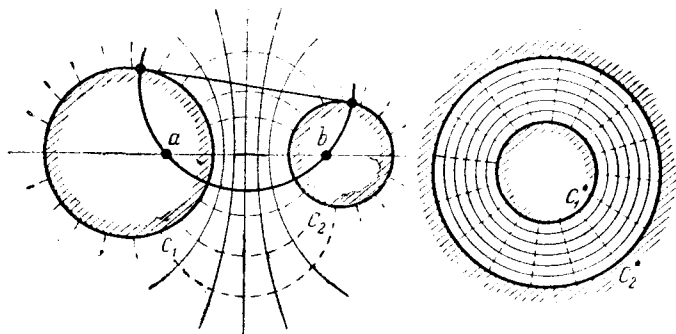


Рис. 61.

отображения двусвязных областей на односвязные, ибо отображающая функция (20) многозначна. Более того, функция (20) осуществляет однолистное отображение на полосу области на своей римановой поверхности, лежащей над кольцом, а эта область, очевидно, односвязна.

Случай, когда одна окружность кольца лежит внутри другой, приводится к рассмотренному с помощью дополнительного линейного преобразования

$$z_1 = \frac{1}{z - c}, \quad \text{где } c \text{ — произвольная точка, лежащая между окружностями.}$$

**34. Отображения круговых луночек.** Круговой луночкой мы будем называть область, ограниченную двумя дугами окружностей полной плоскости (т. е., в частности, и отрезками прямых). Примеры, которые мы здесь рассмотрим, играют важную роль как в приложениях, так и в дальнейшем развитии теории.

1) Отображение внешности дуги на внешность круга. (Это — вырожденный случай, когда две дуги, ограничивающие луночку, совпадают.) Предположим, что концы дуги  $AB$  на плоскости  $z$  лежат в точках  $\pm a$  и что круг в плоскости  $w$  проходит через те же точки. Кроме того, предположим, что середина дуги лежит в точке  $z = hi$ , а центр круга — в точке  $w = hi$ , так что касательная к дуге в точке  $z = a$  составляет с отрицательной осью  $x$  угол  $\alpha = 2 \arctg \frac{h}{a}$ , а касательная к окружности в точке  $w = a$  — угол  $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  с положительной

осью  $u$  (рис. 62). С помощью дробно-линейной функции

$$z_1 = \frac{z - a}{z + a} \quad (1)$$

мы отображаем внешность дуги  $AB$  на внешность некоторого луча. Так как  $\left[\frac{dz_1}{dz}\right]_{z=a} > 0$ , то угол наклона этого луча к отрицательной оси также равен  $\alpha$ . Далее будем искать отображение

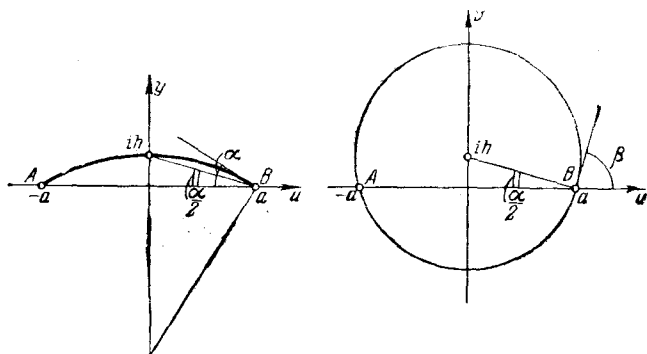


Рис. 62.

на внешность полученного луча внешности заданного круга в плоскости  $w$ . Для этого снова воспользуемся дробно-линейной функцией

$$w_1 = \frac{w - a}{w + a},$$

которая переводит круг в полуплоскость, а его окружность в некоторую прямую. Так как  $\left[\frac{dw_1}{dw}\right]_{w=a} > 0$ , то угол наклона этой прямой к положительной оси равен  $\beta$ . Отображение

$$z_1 = w_1^2 = \left(\frac{w - a}{w + a}\right)^2 \quad (2)$$

переводит, следовательно, наш круг во внешность луча, образующего с положительной осью угол  $2\beta = \pi - \alpha$ . Таким образом, этот луч совпадает с полученным при отображении (1); исключая  $z_1$  из соотношений (1) и (2), мы получаем искомое отображение

$$\left(\frac{w - a}{w + a}\right)^2 = \frac{z - a}{z + a}.$$

Из последнего уравнения находим:

$$z = \frac{1}{2} \left( w + \frac{a^2}{w} \right), \quad w = z + \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (3)$$

При рассматриваемом отображении любая окружность  $C'$ , касающаяся окружности  $C$  в точке  $w = a$ , переходит в замкнутую кривую, охватывающую дугу  $AB$  и имеющую в точке  $B(z = a)$  точку возврата; эта кривая напоминает профиль крыла самолета (рис. 63).

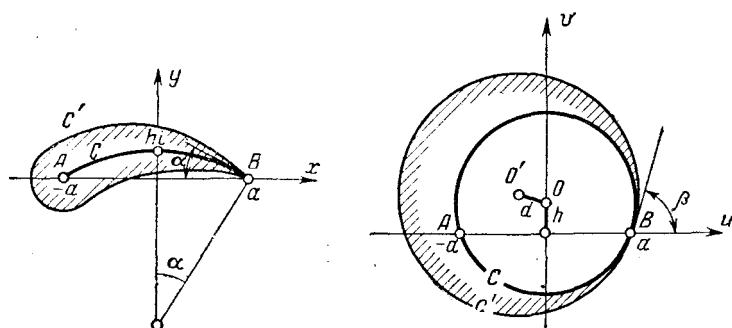


Рис. 63.

Функция (3) осуществляет конформное отображение внешности этой кривой на внешность круга, ограниченного окружностью  $C'$ .

На этом замечании основывается предложенный Н. Е. Жуковским метод получения классов профилей крыльев самолета, особенно простых для расчетов (*профили Жуковского*).

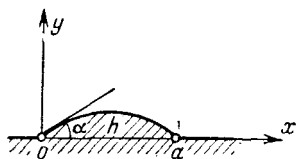


Рис. 64.

Форма профилей Жуковского зависит от трех параметров:  $a$ , характеризующего ширину крыла,  $h$ , характеризующего его искривление, и  $d$  — расстояния между центрами окружностей  $C$  и  $C'$ , характеризующего толщину крыла (рис. 63).

2) Отображение полуплоскости с выброшенным сегментом на полуплоскость. Функция  $z_1 = \frac{z}{a-z}$  отображает заданную область (рис. 64) на сектор  $\alpha < \arg z_1 < \pi$ . Следовательно, функция

$$z_2 = (e^{-ia} z_1)^{\pi/(\pi-\alpha)} = -\left(\frac{z}{z-a}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)}$$

отображает эту область на верхнюю полуплоскость. Зададимся еще нормировкой:  $w(\infty) = \infty$ ,  $w'(\infty) = 1$ ; так как при предыдущем отображении точка  $z = \infty$  переходит в точку  $z_2 = -1$ ,

то придется совершить дополнительное линейное преобразование

$$w = \frac{kz_2}{1+z^2} = \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)}},$$

где постоянная  $k$  находится из второго условия нормировки. Действительно,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{k\pi}{\pi-\alpha} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)} \right\}^{-2} \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\alpha/(\pi-\alpha)} \frac{a}{z^2},$$

откуда, разложив степень внутри фигурной скобки по формуле бинома, для больших  $|z|$  найдем:

$$\frac{dw}{dz} \approx \frac{k\pi}{\pi-\alpha} \left(\frac{\pi}{\pi-\alpha} \frac{a}{z}\right)^{-2} \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\alpha/(\pi-\alpha)} \frac{a}{z^2}.$$

Следовательно,

$$w'(\infty) = k \left(\frac{a\pi}{\pi-\alpha}\right)^{-1} \text{ и } k = \frac{a\pi}{\pi-\alpha}.$$

Окончательно имеем:

$$w = \frac{a\pi}{\pi-\alpha} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)} \right\}^{-1} + C, \quad (4)$$

где  $C$  — произвольная действительная постоянная. Для получения главной части отображения (4) при малых  $a$  и  $\alpha$  воспользуемся первыми членами тейлоровских разложений. Имеем:

$$\left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)} = 1 - \frac{a}{\pi} \left(1 + \frac{a}{\pi} - \frac{aa}{2\pi z} + \frac{a^2}{\pi^2} - \frac{a^2 a}{6\pi z^2} - \frac{aa^2}{\pi^2 z} + \frac{a^3}{\pi^3} + \dots\right)^*,$$

откуда

$$\left\{ 1 - \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)} \right\}^{-1} = \frac{z}{a} \left(1 - \frac{a}{\pi} + \frac{aa}{2\pi z} + \frac{a^2 a}{6\pi z^2} + \dots\right),$$

и, умножая это на

$$\frac{a\pi}{\pi-\alpha} = a \left(1 + \frac{a}{\pi} + \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{a^3}{\pi^3} + \dots\right),$$

получаем:

$$w = z \left(1 + \frac{aa}{2\pi z} + \frac{a^2 a}{2\pi^2 z} + \frac{a^3 a}{6\pi z^2} + \dots\right) + C \approx z + \frac{a^2 a}{6\pi z} + \text{const.} \quad (5)$$

Подсчитаем площадь  $\sigma$  выброшенного сегмента. Имеем:  $\sigma = ar^2 - \frac{a}{2} r \cos \alpha$ , где  $r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$  — радиус круга. Пренебрегая малыми

\*) Здесь и далее многоточие означает члены 4-го порядка малости.



высшего порядка, получим:  $\sigma = \frac{a^2}{4} \left( \frac{a}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \approx \frac{a^2 \alpha}{6}$ . Таким образом, формулу (5) окончательно можно записать в виде

$$w \approx z + \frac{\sigma}{\pi z} + \operatorname{const}. \quad (6)$$

Прибегая к параллельному сдвигу, получим несколько более общий результат: функция

$$w \approx z + \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{z-b} + \operatorname{const} \quad (w(\infty) = \infty, w'(\infty) = 1) \quad (7)$$

осуществляет конформное отображение на полуплоскость  $v > 0$  полуплоскости  $y > 0$  с выброшенной площадкой  $\sigma$ , ограниченной отрезком  $(b, b+a)$  и дугой круга малой кривизны.

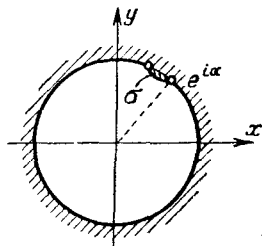


Рис. 65.

3) Отображение круга с выброшенной луночкой на круг. Пусть угловые точки луночки близки к  $e^{i\alpha}$  и площадь выброшенной луночки  $\sigma$  мала (рис. 65). Совершим дополнительные дробно-линейные отображения

$$\zeta = i \frac{1 - ze^{-i\alpha}}{1 + ze^{-i\alpha}}, \quad \omega = i \frac{1 - we^{-i\alpha}}{1 + we^{-i\alpha}}$$

единичных кругов плоскостей  $z$  и  $w$  на верхние полуплоскости  $\zeta$  и  $\omega$ .

Луночка  $\sigma$  перейдет в луночку  $\sigma^* = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=e^{i\alpha}}^2 \cdot \sigma = \frac{\sigma}{4}$ , замыкающую к точке  $\zeta = 0$ . По формуле (6) предыдущего примера получим тогда:

$$\omega \approx \zeta + \frac{\sigma^*}{\pi \zeta} \approx \zeta + \frac{\sigma}{4\pi \zeta},$$

или, возвращаясь к переменным  $z$  и  $w$ ,

$$w = e^{i\alpha} \frac{i - \omega}{i + \omega} \approx e^{i\alpha} \frac{i - \zeta - \frac{\sigma}{4\pi \zeta}}{i + \zeta + \frac{\sigma}{4\pi \zeta}} \approx z + \frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi} \frac{(1 + ze^{-i\alpha})^3}{1 - ze^{-i\alpha}} \quad (8)$$

(мы всюду пренебрегаем малыми порядка выше  $\sigma$ ). При этом отображении точка  $z = 0$  переходит в точку  $w_0 = \frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}$ ; совершая дополнительное дробно-линейное преобразование  $w_1 =$

$= \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}$  круга на себя, так чтобы  $w_0$  перешла в 0, получаем:

$$w_1 = \frac{w - \frac{\sigma e^{i\alpha}}{8\pi}}{1 - \frac{\sigma e^{-i\alpha}}{8\pi} w} \approx w + \frac{\sigma}{8\pi} (w^2 e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}).$$

После подстановки вместо  $w$  его приближенного значения (8) и простых преобразований (в которых мы опять пренебрегаем малыми порядка выше  $\sigma$ ) получаем окончательно:

$$w = f(z) \approx z \left\{ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}} \right\}, \quad f(0) = 0 \quad (9)$$

(вместо  $w_1$  мы снова пишем  $w$ ). Отображение (9) устанавливает следующее соответствие точек окружностей  $z = e^{i\varphi}$  и  $w = e^{i\theta}$ :

$$e^{i(\theta - \varphi)} \approx 1 + \frac{\sigma i}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \alpha}{2},$$

или (если взять мнимые части и пренебречь малыми высшего порядка)

$$\theta \approx \varphi + \frac{\sigma}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \alpha}{2}. \quad (10)$$

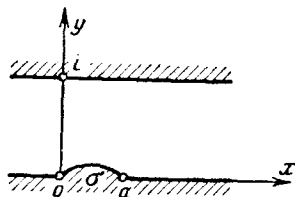


Рис. 66.

Для модуля производной отображения на границе имеем:

$$|f'(e^{i\theta})| = \left| \frac{d\theta}{d\varphi} \right| \approx 1 - \frac{\sigma}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi - \alpha}{2}}, \quad (11)$$

и для производной в начале координат:

$$f'(0) \approx 1 + \frac{\sigma}{2\pi}. \quad (12)$$

4) Отображение полосы с выброшенной луночкой на полосу. Пусть из полосы  $0 < y < 1$  выброшен сегмент  $\sigma$ , ограниченный отрезком  $(0, a)$  действительной оси и дугой круга малой кривизны (рис. 66). Совершая дополнительные отображения  $\xi = e^{\pi z}$ , и  $\omega = e^{\pi w}$  полос на верхние полуплоскости и применяя формулу (7):

$$\omega \approx \xi + \frac{\sigma^*}{\pi} \frac{1}{\xi - 1} + \frac{\sigma^*}{\pi},$$

где  $\sigma^* = \left| \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=0} \cdot \sigma = \pi^2 \sigma$  — площадь образа сегмента \*), получаем искомое отображение

$$w = \frac{1}{\pi} \ln \omega \approx z + \frac{\sigma}{e^{\pi z} - 1}$$

\*) В формуле (7) мы считаем  $b = 1$  и  $\text{const} = \sigma^*/\pi$ .

(мы всюду пренебрегаем малыми порядка выше  $\sigma$ ). Сдвигая еще плоскость  $w$  на отрезок  $\sigma/2$ , будем иметь окончательно:

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2} \frac{e^{\pi z} + 1}{e^{\pi z} - 1} = z + \frac{\sigma}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2}. \quad (13)$$

Дополнительным сдвигом плоскости  $z$  получим более общий результат: функция

$$w \approx z + \frac{\sigma}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-b)}{2} + \operatorname{const} \quad (14)$$

осуществляет конформное отображение полосы  $0 < y < 1$  с выброшенным круговым сегментом  $\sigma$ , опирающимся на отрезок  $(b, b+a)$ , на полосу  $0 < v < 1$ . Она устанавливает следующее соответствие точек прямых  $y=0$ ,  $y=1$  и прямых  $v=0$ ,  $v=1$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= x + \frac{\sigma}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-b)}{2} + \operatorname{const}, \\ u &= x + \frac{\sigma}{2} \operatorname{th} \frac{\pi(x-b)}{2} + \operatorname{const}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

5) Формула для растяжения при отображении круговой луночки на полосу. Пусть луночка  $D$  ограничена дугами  $C_1$  и  $C_2$  окружностей, пересекающихся в точках  $\pm a$ , и пусть  $-ih_1$  и  $-ih_2$  — точки пересечения этих дуг с мнимой осью (рис. 67). Используя функцию (5) из примера 1) предыдущего пункта, легко построить конформное отображение луночки  $D$  на полосу  $0 < v < h$ :

$$w = f(z) = \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \ln \frac{a+z}{a-z} + i\lambda_1 \right\}, \quad (16)$$

где  $\lambda_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{h_k}{a}$ ,  $k=1, 2^*$ ). Дифференцируя выражение (16), получаем:

$$f'(z) = \frac{2ah}{(\lambda_1 - \lambda_2)(a^2 - z^2)}. \quad (17)$$

\*) Для получения формулы (16) достаточно заметить, что функция (5) п. 33, в которой  $z$  заменено на  $z/a$ , осуществляет отображение заданной луночки на горизонтальную полосу, граница которой проходит через точки  $\frac{H}{\pi} \ln \frac{a - ih_k}{a + ih_k} = -2i \frac{H}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h_k}{a} = -i \frac{H}{\pi} \lambda_k$  (ср. формулы (11) п. 9). Ширина этой полосы  $h = \frac{H}{\pi} (\lambda_1 - \lambda_2)$ ; отсюда находится  $H$ . Остается сдвинуть полосу так, чтобы ее нижний берег совпал с действительной осью, и мы придем к формуле (16).

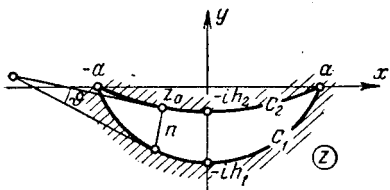


Рис. 67.

Из формулы (17) можно получить одну приближенную формулу, важную для приложений. Пусть  $z_0$  — точка  $C_2$ ,  $n$  — отрезок нормали к окружности  $C_2$  в этой точке, заключенный в луночке  $D$ ,  $\vartheta$  — угол между касательными к  $C_1$  и  $C_2$  в концах отрезка  $n$  и  $k_1$ ,  $k_2$  — кривизны  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 67). Предположим, что  $h$  и вместе с ним  $k_1 - k_2$  и  $n$  — бесконечно малые первого порядка, а кривизны  $k_1$  и  $k_2$  ограничены. Тогда можно утверждать, что

$$|f'(z_0)| = \frac{h}{n} \left\{ 1 + \frac{k_1 n}{6} + \frac{k_2 n}{3} + \frac{k_2^2 n^2}{12} + \frac{\vartheta^2}{3} \right\} + \eta, \quad (18)$$

где  $\eta$  можно представить в виде однородного многочлена третьей степени относительно  $n$ ,  $\vartheta$ ,  $k_1 - k_2$  с ограниченными коэффициентами.

Для вывода формулы (18) из формулы (17) в последней надо выразить параметры  $a$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $z_0$  через  $n$ ,  $\vartheta$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  и затем разложить  $|f'(z_0)|$  по степеням  $n$ ,  $\vartheta$ ,  $k_1 - k_2$  до членов второго порядка включительно. Однако фактическая реализация этого пути приводит к чрезвычайно громоздким выкладкам. Поэтому мы получим формулу (18), отправляясь от частного случая, когда окружность  $C_2$  совпадает с осью  $Ox$ , т. е. когда  $k_2 = 0$  (рис. 68). В этом случае формула (17) дает:

$$|f'(x)| = \frac{2ah}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2},$$

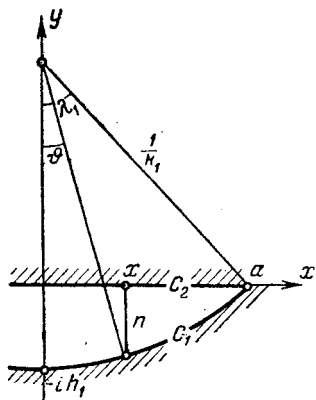


Рис. 68.

где  $\lambda_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{h_1}{a}$  — половина центрального угла дуги  $C_1$  (рис. 68).

С другой стороны, имеем  $\lambda_1 = \arcsin ak_1 = ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3 + \dots$ ,

$x = \frac{\sin \vartheta}{k_1}$ ,  $n = \frac{\cos \vartheta}{k_1} - \frac{\cos \lambda_1}{k_1}$ , следовательно,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{2ah}{ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3} \cdot \frac{1}{a^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{k_1^2}} + \dots = \\ &= \frac{h}{n} \frac{1}{ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3} \cdot \frac{2(\cos \vartheta - \cos \lambda_1)}{ak_1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{ak_1}} + \dots \end{aligned}$$

Далее, имеем с точностью до малых четвертого порядка:

$$\begin{aligned} 2nk_1 &= 2(\cos \vartheta - \cos \lambda_1) \approx \lambda_1^2 - \vartheta^2 - \frac{1}{12}(\lambda_1^4 - \vartheta^4) \approx \\ &\approx a^2 k_1^2 - \vartheta^2 + \frac{1}{4} a^4 k_1^4 + \frac{1}{12} \vartheta^4 \quad (19) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left(ak_1 + \frac{1}{6} a^3 k_1^3\right) \left(ak_1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{ak_1}\right) &\approx \left(1 + \frac{1}{6} a^2 k_1^2\right) \left(a^2 k_1^2 - \vartheta^2 + \frac{1}{3} \vartheta^4\right) \approx \\ &\approx a^2 k_1^2 - \vartheta^2 + \frac{1}{3} \vartheta^4 + \frac{1}{6} a^4 k_1^4 - \frac{1}{6} a^2 k_1^2 \vartheta^2. \end{aligned}$$

Деля первое из этих разложений на второе, получаем с точностью до малых второго порядка включительно:

$$|f'(x)| \approx \frac{h}{n} \left\{ 1 + \left( \frac{a^4 k_1^4}{12} - \frac{\vartheta^4}{4} + \frac{a^2 k_1^2 \vartheta^2}{6} \right) \cdot \frac{1}{a^2 k_1^2 - \vartheta^2} \right\}.$$

Используя справедливое с той же степенью точности соотношение  $2nk_1 = 2(\cos \vartheta - \cos \lambda_1) \approx a^2 k_1^2 - \vartheta^2$ , получаем окончательно:

$$|f'(x)| \approx \frac{h}{n} \left\{ 1 + \left( \frac{n^2 k_1^2}{3} + \frac{2nk_1 \vartheta^2}{3} \right) \frac{1}{2nk_1} \right\} = \frac{h}{n} \left\{ 1 + \frac{nk_1}{6} + \frac{\vartheta^2}{3} \right\}, \quad (20)$$

что совпадает с формулой (8) при  $k_2 = 0$ .

Для перехода к общему случаю, когда  $k_2 \neq 0$ , мы возьмем вспомогательную плоскость  $\zeta$  и в ней луночку  $D^*$ , ограниченную

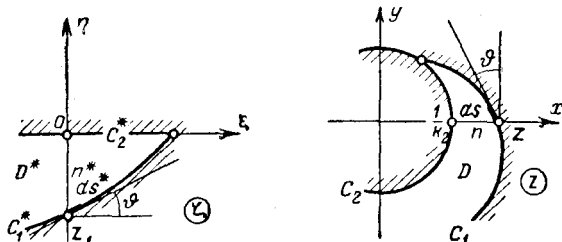


Рис. 69.

отрезком действительной оси  $C_2^*$  и дугой окружности  $C_1^*$  кривизны  $k_1^*$ ; через  $n^*$  обозначим отрезок мнимой оси, заключенный в луночке  $D^*$ , а через  $\vartheta$  — угол, образованный дугой  $C_1^*$  с перпендикуляром к мнимой оси в точке их пересечения (рис. 69). Отобразим конформно нижнюю полуплоскость  $\zeta$  на внешность окружности  $C_2$  кривизны  $k_2$ :

$$z = \frac{1}{k_2} \frac{i - \zeta}{i + \zeta}, \quad \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{2i}{k_2} \frac{1}{(i + \zeta)^2}. \quad (21)$$

При этом луночка  $D^*$  переходит в луночку  $D$ , ограниченную дугой  $C_2$  и дугой окружности  $C_1$  некоторой кривизны  $k_1$ , мнимая ось переходит в действительную, а отрезок  $n^*$  — в отрезок  $n$  действительной оси, причем

$$n = \frac{1}{k_2} \frac{1+n^*}{1-n^*} - \frac{1}{k_2} = \frac{2n^*}{k_2(1-n^*)}, \quad n^* = \frac{k_2 n}{2+k_2 n} = \frac{k_2 n}{2} \frac{1}{1+\frac{k_2 n}{2}}, \quad (22)$$

и окружность  $C_1$  образует с перпендикуляром к действительной оси в точке  $z_1$  их пересечения угол  $\vartheta$  (рис. 69).

Найдем теперь связь между  $k_1$  и другими параметрами. Для этого обозначим через  $ds$  элемент длины дуги  $C_1$ , через  $\alpha(s)$  — угол касательной к  $C_1$  с осью  $x$  ( $s$  отсчитывается от точки  $z_1$ , так что  $\alpha(0) = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ ) и через  $ds^*$  — элемент дуги  $C_1^*$ , соответствующий  $ds$ . Имеем  $k_1 = \frac{d\alpha}{ds}$ . Но бесконечно малое приращение угла  $\alpha$  можно представить в виде

$$d\alpha = k_1^* ds^* + d \arg \frac{dz}{d\zeta},$$

где второе слагаемое  $d \arg \frac{dz}{d\zeta} = \operatorname{Im} d \ln \frac{dz}{d\zeta}$  означает приращение  $\arg \frac{dz}{d\zeta}$  на дуге  $d\zeta = e^{i\vartheta} ds^*$  окружности  $C_1^*$ , примыкающей к точке  $\zeta_1 = -n^*i$ . Согласно формуле (21) это приращение равно  $-2 \operatorname{Im} \frac{e^{i\vartheta} ds^*}{(1-n^*)i} = \frac{2 \cos \vartheta}{1-n^*} ds^*$  и для кривизны имеем:

$$k_1 = \frac{d\alpha}{ds} = \left( k_1^* + \frac{2 \cos \vartheta}{1-n^*} \right) \frac{ds^*}{ds} \approx \left( k_1^* + \frac{2 \cos \vartheta}{1-n^*} \right) \frac{(1-n^*)^2}{2} k_2,$$

ибо по той же формуле (21)  $\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta_1}} = \frac{k_2}{2} (1-n^*)^2$ . Отсюда

и из второй формулы (21), по которой  $\frac{1}{1-n^*} = 1 + \frac{k_2 n}{2}$ , находим:

$$k_1^* \approx \frac{k_1}{k_2} \frac{2}{(1-n^*)^2} - \frac{2 \cos \vartheta}{1-n^*} = 2 \frac{k_1}{k_2} \left( 1 + \frac{k_2 n}{2} \right)^2 - 2 \cos \vartheta \left( 1 + \frac{k_2 n}{2} \right). \quad (23)$$

Пусть функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение луночки, ограниченной дугами  $C_1$  и  $C_2$ , на полосу ширины  $h$ . Согласно формуле (21) в точке  $z_0 = 1/k_2$ , соответствующей точке  $\zeta = 0$ , имеем:

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=z_0} = \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \cdot \frac{k_2}{2}.$$

Величину  $\left| \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0}$  можно вычислить по формуле (20), заменяя в ней  $n$  и  $k_1$  на  $n^*$  и  $k_1^*$ . Используя найденные значения (22) и (23) для  $n^*$  и  $k_1^*$ , получаем с точностью до малых второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= \frac{h}{n^*} \left( 1 + \frac{n^* k_1^*}{6} + \frac{\vartheta^2}{3} \right) = \\ &= \frac{h}{n} \cdot \frac{2}{k_2} \left( 1 + \frac{k_2 n}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{k_1 n}{6} \left( 1 + \frac{k_2 n}{2} \right) - \frac{k_2 n}{6} \cos \vartheta + \frac{\vartheta^2}{3} \right\} = \\ &= \frac{h}{n} \frac{2}{k_2} \left( 1 + \frac{k_1 n}{6} + \frac{k_2 n}{3} + \frac{k_1 k_2 n^2}{6} - \frac{k_2^2 n^2}{12} + \frac{\vartheta^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Так как по условию разность  $k_1 - k_2$  является малой величиной, то с той же степенью точности  $k_1 k_2 n^2 = k_2^2 n^2$ , и мы получаем искомую формулу:

$$|f'(z_0)| \approx \frac{h}{n} \left( 1 + \frac{k_1 n}{6} + \frac{k_2 n}{3} + \frac{k_2^2 n^2}{12} + \frac{\vartheta^2}{3} \right).$$

### § 3. Принцип симметрии и отображение многоугольников

Здесь мы рассмотрим методы, играющие важную роль при фактическом построении конформных отображений. Первый из этих методов опирается на так называемый принцип симметрии, который был сформулирован Б. Риманом и обоснован Г. Шварцем. Этот метод, как мы увидим в п. 36, позволяет в некоторых случаях довольно существенно упростить решение задачи отыскания конформных отображений.

Второй метод особенно важен для приложений, так как он дает возможность выписать (правда, вообще говоря, лишь в виде интеграла) функцию, реализующую отображение верхней полуплоскости на произвольную область, ограниченную многоугольником.

**35. Принцип симметрии** дает в одном частном случае простое достаточное условие существования аналитического продолжения функции, реализующей конформное отображение.

**Теорема 1 (Б. Риман, Г. Шварц).** Пусть граница области  $D_1$  содержит дугу окружности  $C$  и пусть функция  $w = f_1(z)$  реализует конформное отображение этой области на область  $D_1^*$  такое, что дуга  $C$  переходит в участок  $C^*$  границы  $D_1^*$ , также являющийся дугой окружности. В этих условиях функция  $f_1(z)$  допускает аналитическое продолжение  $f_2(z)$  через дугу  $C$  в область  $D_2$ , симметричную с  $D_1$  относительно  $C$ , причем функция  $w = f_2(z)$  реализует конформное отображение об-

ласти  $D_2$  на область  $D_2^*$ , симметричную с  $D_1^*$  относительно  $C^*$ , а функция

$$w = f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{в } D_1, \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{на } C, \\ f_2(z) & \text{в } D_2 \end{cases}$$

реализует конформное отображение\*) области  $D_1 + C + D_2$  на область  $D_1^* + C^* + D_2^*$ .

Для доказательства мы совершим дробно-линейные отображения

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d} = l(z), \quad \omega = \frac{a^*w + b^*}{c^*w + d^*} = l_*(w), \quad (1)$$

преобразующие  $C$  и  $C^*$  в отрезки  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  действительных осей плоскостей  $\zeta$  и  $\omega$ ; области  $D_1$  и  $D_1^*$  пусть переходят при этом

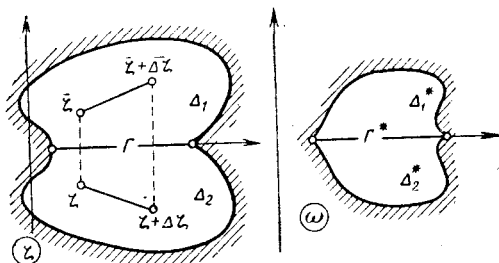


Рис. 70.

в области  $\Delta_1$  и  $\Delta_1^*$ , а функция  $w = f_1(z)$  — в функцию  $\omega = l_* f_1 l^{-1}(\zeta) = \varphi(\zeta)$ , осуществляющую конформное отображение  $\Delta_1$  и  $\Delta_1^*$  (рис. 70)\*\*). Обозначим через  $\Delta_2$  область, симметричную с  $\Delta_1$  относительно  $\Gamma$ . Построим в  $\Delta_2$  функцию

$$\omega = \varphi_2(\zeta) = \overline{\varphi_1(\bar{\zeta})}$$

и покажем, что она является аналитическим продолжением функции  $\varphi_1(\zeta)$ . Прежде всего функция  $\varphi_2(\zeta)$  аналитична в области  $\Delta_2$ . В самом деле, для любых точек  $\zeta$  и  $\zeta + \Delta\zeta$  из  $\Delta_2$  имеем:

$$\frac{\varphi_2(\zeta + \Delta\zeta) - \varphi_2(\zeta)}{\Delta\zeta} = \frac{\overline{\varphi_1(\bar{\zeta} + \overline{\Delta\zeta})} - \overline{\varphi_1(\bar{\zeta})}}{\Delta\zeta} = \overline{\left( \frac{\varphi_1(\bar{\zeta} + \overline{\Delta\zeta}) - \varphi_1(\bar{\zeta})}{\overline{\Delta\zeta}} \right)},$$

\*) Для однолистности этого отображения надо потребовать, чтобы области  $D_1$  и  $D_2$ , а также  $D_1^*$  и  $D_2^*$  не пересекались.

\*\*) Для этого случая принцип симметрии сформулировал еще Эйлер в 1777 г.



где  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\xi} + \overline{\Delta\xi}$  — точки из  $\Delta_1$ . В силу аналитичности  $\varphi_1(\xi)$  в  $\Delta_1$  правая часть имеет предел при  $\overline{\Delta\xi} \rightarrow 0$ , следовательно, существует и производная

$$\varphi'_2(\xi) = \overline{\varphi'_1(\bar{\xi})} \quad (2)$$

в любой точке  $\xi$  области  $\Delta_2$ , т. е.  $\varphi_2(\xi)$  аналитична в  $\Delta_2$ . По построению функции  $\varphi_2(\xi)$  ее граничные значения на отрезке  $\Gamma$  существуют:

$$\varphi_2(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \varphi_2(\xi) = \lim_{\bar{\xi} \rightarrow x} \overline{\varphi_1(\bar{\xi})}, \quad (3)$$

ибо по теореме о соответствии границ при конформном отображении (п. 29) существует  $\lim_{\bar{\xi} \rightarrow x} \varphi_1(\bar{\xi}) = \varphi_1(x)$ . Соотношение (3)

принимает вид  $\varphi_2(x) = \overline{\varphi_1(x)}$ , но так как значения  $\varphi_1(x)$  действительны ( $\Gamma^*$ , по условию, — отрезок действительной оси), то на отрезке  $\Gamma$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x). \quad (4)$$

По принципу непрерывного продолжения (п. 25) можно, следовательно, утверждать, что  $\varphi_2(\xi)$  является аналитическим продолжением  $\varphi_1(\xi)$  через  $\Gamma$ .

Из построения функции  $\varphi_2(\xi)$  следует также, что она реализует конформное отображение области  $\Delta_2$  на область  $\Delta_2^*$ , симметричную с  $\Delta_1^*$  относительно  $\Gamma^*$ . Функция же  $\varphi(\xi)$ , составленная из  $\varphi_1(\xi)$  и ее аналитического продолжения  $\varphi_2(\xi)$ :

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi) & \text{в } \Delta_1, \\ \varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) & \text{на } \Gamma, \\ \varphi_2(\xi) & \text{в } \Delta_2, \end{cases}$$

реализует конформное отображение  $\Delta_1 + \Gamma + \Delta_2$  на  $\Delta_1^* + \Gamma^* + \Delta_2^*$ .

Возвратимся теперь к старым переменным  $z$  и  $w$  с помощью подстановок, обратных (1). В силу свойств дробно-линейных отображений мы получим в области  $D_2$ , симметричной с  $D_1$  относительно дуги  $C$ , функцию  $f_2(z)$ , аналитически продолжающую  $f_1(z)$  через дугу  $C$  и реализующую конформное отображение области  $D_2$  на область  $D_2^*$ , симметричную с  $D_1^*$  относительно дуги  $C^*$ . Теорема доказана.

В качестве примера применения принципа симметрии докажем теорему единственности конформного отображения при заданном соответствии трех граничных точек, о которой мы говорили в п. 29.

**Теорема 2.** *Существует одно и только одно конформное отображение  $w = f(z)$  области  $D$  на область  $D^*$ , переводящее три граничные точки  $z_h$  области  $D$  в три граничные точки  $w_h$*

области  $D^*$ . Точки  $z_k$  и  $w_k$  задаются произвольно, но с соблюдением порядка следования при обходе границ областей.

Рассмотрим сначала случай, когда  $D$  и  $D^*$  представляют собой единичные круги. По формуле (2) п. 32 можно построить дробно-линейное отображение круга  $|z| < 1$  на круг  $|w| < 1$  с заданной нормировкой  $f(z_k) = w_k$ . Докажем единственность этого отображения. Пусть  $w = g(z)$ ,  $g(z_k) = w_k$  будет другое отображение круга  $|z| < 1$  на круг  $|w| < 1$ . Функция  $g(z)$  удовлетворяет условиям принципа симметрии и, следовательно, аналитически продолжается в область, симметричную с кругом  $|z| < 1$  относительно окружности  $|z| = 1$ , т. е. во внешность круга  $|z| > 1$ . Вместе со своим продолжением  $w = g(z)$  реализует однолистное отображение полной плоскости  $z$  и по теореме 1 п. 31 является дробно-линейной функцией. Но тогда можно утверждать, что  $g(z) \equiv f(z)$ , ибо по доказанному в п. 32 дробно-линейное отображение вполне определяется заданием соответствия трех точек.

Общий случай просто сводится к рассмотренному. В самом деле, пусть  $\zeta = \varphi(z)$ ,  $\zeta_k = \varphi(z_k)$  и  $\omega = \psi(w)$ ,  $\omega_k = \psi(w_k)$  будут какие-либо конформные отображения областей  $D$  и  $D^*$  на единичные круги  $|\zeta| < 1$  и  $|\omega| < 1$  и  $\omega = F(\zeta)$ ,  $F(\zeta_k) = \omega_k$  — отображение круга  $|\zeta| < 1$  на круг  $|\omega| < 1$  (его существование и единственность гарантированы). Отображением области  $D$  на область  $D^*$  с заданной нормировкой будет, очевидно, служить

$$w = \psi^{-1} F \varphi(z) = f(z),$$

где  $\psi^{-1}$  — отображение, обратное  $\psi$ . Существование второго отображения  $w = g(z)$  области  $D$  на  $D^*$  с той же нормировкой привело бы к существованию второго отображения

$$\omega = \psi g \varphi^{-1}(\zeta) = G(\zeta)$$

круга  $|\zeta| < 1$  на круг  $|\omega| < 1$  с нормировкой  $G(\zeta_k) = \omega_k$ , что противоречит установленному выше. Теорема доказана полностью.

Рассмотрим еще применение принципа к вопросу о существовании конформных отображений многосвязных областей. По основной теореме п. 28 любые две односвязные области можно однолистно и конформно отобразить друг на друга. С другой стороны, мы видели, что нельзя так же отобразить односвязную область на многосвязную. Возникает вопрос о возможности отображения друг на друга областей одного порядка связности. Оказывается, и этот вопрос, вообще говоря, решается отрицательно. В самом деле, даже в простейшем случае концентрических колец имеет место

**Теорема 3.** Для того чтобы существовало конформное отображение  $w = f(z)$  кольца  $r_1 < |z| < r_2$  на кольцо  $\rho_1 < |w| < \rho_2$ ,

необходимо и достаточно подобие этих колец:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (5)$$

Для доказательства необходимости условия (5) заметим, что функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям принципа симметрии и на основании этого принципа аналитически продолжается в области  $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1$  и  $r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ , симметричные с кольцом  $r_1 < |z| < r_2$  соответственно относительно окружностей  $|z| = r_1$  и  $|z| = r_2$ . Расширенное кольцо  $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$  функция  $f(z)$  (вместе с ее продолжением) отображает на кольцо  $\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |w| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$ . Поэтому к функции  $f(z)$  снова применим принцип симметрии и ее можно продолжить в кольцо  $r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ . Продолжая такое продолжение неограниченно, мы получим, что  $f(z)$  реализует однолистное отображение области  $0 < |z| < \infty$  на область  $0 < |w| < \infty$ , причем либо  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ , либо  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , в зависимости от того, соответствует окружности  $|z| = r_1$  окружность  $|w| = \rho_1$  или  $|w| = \rho_2$ . Отсюда заключаем, что  $f(z)$  является дробно-линейной функцией одного из двух видов:

$$f(z) = az, \quad f(z) = \frac{a}{z}, \quad (6)$$

где  $a$  — комплексная постоянная. В обоих случаях равенство (5), очевидно, выполняется. Достаточность условия (5) следует из того, что при его выполнении кольца подобны и их можно отобразить друг на друга простым растяжением.

В дополнение к доказанной теореме укажем, что любая двусвязная область все же может быть отображена на некоторое кольцо  $\rho_1 < |w| < \rho_2$ , причем при заданном радиусе  $\rho_1$  радиус  $\rho_2$  определяется для данной области однозначно. Точно так же произвольную  $n$ -связную область можно отобразить на некоторую область, получаемую выбрасыванием из плоскости  $n$  кругов. Доказательства этих предложений читатель может найти в статье М. В. Келдыша [7] или книге Р. Куранта [5].

В заключение приведем обобщение принципа симметрии на случай, когда границы отображаемых областей содержат аналитические дуги. Дуга  $S$  называется *аналитической*, если она может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

в которых  $x(t)$  и  $y(t)$  являются аналитическими функциями действительного переменного  $t$  на интервале  $(\alpha, \beta)$ , т. е. функциями, разлагающимися в окрестности каждой точки  $t_0$  этого интервала в степенные ряды по степеням  $t - t_0$ . При этом предполагается, что ни в одной точке интервала производные  $x'(t)$  и  $y'(t)$  не обращаются в нуль одновременно (т. е. на  $C$  нет особых точек). Кривая  $C$  может быть и замкнутой, если  $x(\alpha) = x(\beta)$ ,  $y(\alpha) = y(\beta)$ .

Имеет место так называемый принцип аналитического продолжения:

**Теорема 4 (Г. Шварц).** Пусть функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение области  $D$ , граница которой содержит аналитическую дугу  $C$ , на некоторую область  $D^*$ , причем дуге  $C$  соответствует аналитическая дуга  $C^*$  границы области  $D^*$ . В этих условиях функцию  $w = f(z)$  можно аналитически продолжить через дугу  $C$ .

В самом деле, пусть  $z_0$  — произвольная точка дуги  $C$ ,  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  — уравнение этой кривой и  $z_0 = z(t_0)$ . Так как  $C$  по условию — аналитическая дуга, то в некоторой окрестности  $|t - t_0| < \delta$  функцию  $z = z(t)$  можно разложить в ряд по степеням  $t - t_0$ ; по теореме Абеля последний будет сходиться и для комплексных значений  $t$ , которые мы обозначим через  $\xi$ , в круге  $|\xi - t_0| < \delta$ . Следовательно, в этом круге определена аналитическая функция  $z = z(\xi)$ . Так как  $z'(t_0) \neq 0$ , то, уменьшая в случае надобности  $\delta$ , можно считать отображение  $z = z(\xi)$  конформным. По построению  $z = z(\xi)$  отображает диаметр круга  $|\xi - t_0| < \delta$  на некоторый отрезок кривой  $C$ , содержащий точку  $z_0$ ; мы будем предполагать, что верхний полукруг при этом преобразуется внутрь области  $D$ , а нижний — в ее внешность.

Точно таким же образом, если  $w = w(\tau)$  есть уравнение кривой  $C^*$ , мы можем построить конформное отображение  $w = w(\omega)$  некоторого круга  $|\omega - \tau_0| < \delta_1$  с центром на действительной оси на окрестность точки  $w_0 = w(\tau_0) = f(z_0)$ , преобразующее диаметр этого круга в отрезок кривой  $C^*$ . Мы предположим также, что верхний полукруг при этом преобразуется внутрь области  $D^*$ , а нижний — в ее внешность.

Функция  $w = f(z)$  порождает конформное отображение

$$\omega = \omega \{f[z(\xi)]\} = \varphi(\xi)$$

( $\omega = \omega(w)$  — функция, обратная  $w = w(\omega)$ ) верхнего полукруга  $|\xi - t_0| < \delta$  на некоторую часть верхнего полукруга  $|\omega - \tau_0| < \delta_1$ , причем диаметр первого полукруга переходит в часть диаметра второго. По доказанному принципу симметрии (теорема 1) функция  $\varphi(\xi)$  допускает аналитическое продолжение в нижний полукруг и (вместе со своим продолжением) реализует

конформное отображение всего круга  $|\xi - t_0| < \delta$  на некоторую часть круга  $|\omega - \tau_0| < \delta_1$ , содержащую отрезок диаметра.

Построенное продолжение  $\omega = \varphi(\xi)$  порождает аналитическое продолжение функции  $f(z)$  через отрезок кривой  $C$ . В самом деле, в части внешности области  $D$ , соответствующей нижнему полукругу  $|\xi - t_0| < \delta$ , определена аналитическая функция  $\omega = \omega\{\varphi[\xi(z)]\}$  ( $\xi(z)$  — функция, обратная  $z(\xi)$ ), граничные значения которой на отрезке дуги  $C$  совпадают с граничными значениями  $f(z)$ . По принципу непрерывного продолжения эта функция является аналитическим продолжением функции  $f(z)$ . Так как  $z_0$  — произвольная точка кривой  $C$ , то можно утверждать, что  $f(z)$  аналитически продолжаема через всю дугу  $C$ . Теорема доказана.

В частности, если полные границы  $C$  и  $C^*$  данных областей — аналитические кривые, то  $f(z)$  будет аналитически продолжимой через всю границу области  $D$  (и, следовательно, аналитической в замкнутой области  $\bar{D}$ ).

В следующем пункте мы приведем ряд примеров применения принципа симметрии в практике конформных отображений.

**36. Примеры.** 1) Отображение внешности креста на внешность единичного круга (рис. 71). Проведем вспомогательный (пунктирный) разрез  $FAB$  по мнимой оси и в правой половине фигуры рассмотрим отображение  $z_1 = z^2$ ; оно преобразует эту половину на плоскость  $z_1$  с выброшенным лучом от  $A(-\infty)$  до  $D(a^2)$  по действительной оси. Далее мы применяем отображение

$$z_2 = \sqrt{z_1 - a^2} = \sqrt{z^2 - a^2}, \quad (1)$$

преобразующее полученную область на правую полуплоскость. Вспомогательный разрез при этом переходит в содержащий  $\infty$  отрезок мнимой оси от точки  $F(-fi)$ , где  $f = \sqrt{a^2 + c^2}$ , до точки  $B(gi)$ , где  $g = \sqrt{a^2 + b^2}$  (рис. 71).

Функция  $z_2 = \sqrt{z^2 - a^2}$  удовлетворяет условиям принципа симметрии, следовательно, допускает аналитическое продолжение через  $FAB$  в левую полуплоскость и вместе со своим аналитическим продолжением, которое мы

обозначаем снова через  $z_2 = \sqrt{z^2 - a^2}$  осуществляет отображение внешности заданного креста на внешность отрезка  $BF$  мнимой оси плоскости  $z_2$ .

Остается отобразить последнюю область на внешность единичного круга. Для этого применяем линейное отображение  $z_3 = \frac{2i}{f+g} z_2 - \frac{f-g}{f+g}$ , преобразующее внешность отрезка  $BF$  во внешность единичного отрезка, и затем — обратное отображение Жуковского (см. п. 7):

$$\begin{aligned} \omega &= -i(z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}) = \\ &= \frac{2}{f+g} \left\{ \sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2 + fg + (f-g)i\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{f-g}{2}i} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

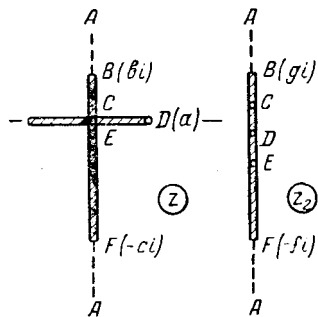


Рис. 71.

В частности, при  $b=c=a$  получаем  $w = \frac{1}{a\sqrt{2}} (\sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{z^2 + a^2})$ , откуда

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{w^4 + 1}}{w} \quad (3)$$

(ср. п. 30, пример 3).

2) Отображение внешности единичного круга с исключенными отрезками  $1 \leq |z| \leq 1+a$ ,  $\arg z = 2k\pi/n$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) на внешность единичного круга (рис. 72). Проведем вспомогательные разрезы от точки  $B_1$  и  $B_2$  до бесконечности по продолжениям радиусов круга и построим конформное отображение полученного сектора на такой же сектор, но так, чтобы точки  $B_1$  и  $B_2$  попали на место  $A_1$  и  $A_2$ .

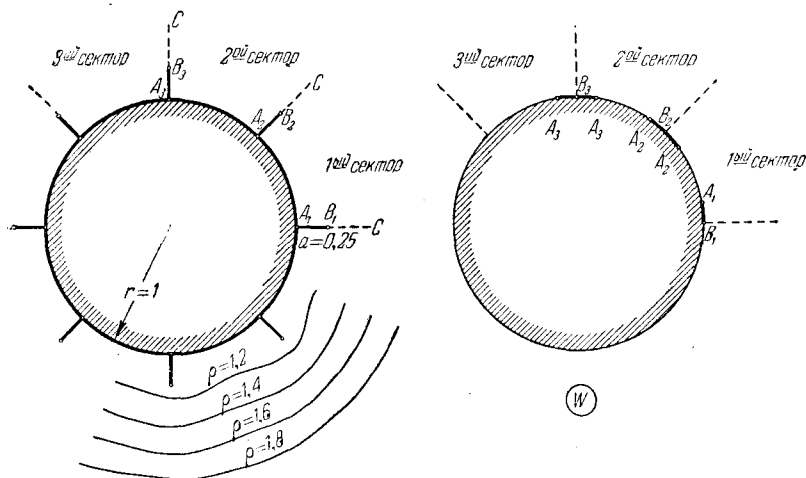


Рис. 72.

Это можно осуществить следующим приемом: с помощью преобразования  $z_1 = z^{n/2}$  отображаем сектор на верхнюю полуплоскость с выброшенным полукругом и затем с помощью функции Жуковского  $z_2 = \frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{1}{z_1} \right)$  — на верхнюю полуплоскость. Точки  $B_1$  и  $B_2$  при этом переходят в точки

$$\pm (1+a_1) = \pm \frac{1}{2} \{ (1+a)^{n/2} + (1+a)^{-n/2} \}. \quad (4)$$

Далее мы сжимаем полуплоскость:  $z_3 = \frac{z_2}{1+a_1}$  и применяем обратное отображение Жуковского:  $z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}$ . В итоге получаем снова верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом, но точки  $B_1$  и  $B_2$  переходят теперь в точки  $\pm 1$ . Остается применить отображение  $w = z_4^{2/n}$ , чтобы получить нужное отображение сектора на сектор:

$$w = \frac{(1+a_1)^{-2/n}}{\sqrt[4]{4}} \left\{ z^{n/2} + z^{-n/2} + \sqrt{(z^{n/2} - z^{-n/2})^2 - 8a_1 - 4a_1^2} \right\}^{2/n}. \quad (5)$$

Функция (5) удовлетворяет условиям принципа симметрии; применяя этот принцип, получим, что эта функция продолжима через луч  $B_2C$  и вместе со своим продолжением осуществляет отображение совокупности 1-го и 2-го секторов плоскости  $z$  на совокупность 1-го и 2-го секторов плоскости  $w$  (рис. 72). Полученное продолжение снова продолжается через луч  $B_3C$ , и новое продолжение отображает 3-й сектор плоскости  $z$  на 3-й сектор плоскости  $w$  (так, что точка  $B_3$  попадает на окружность). Повторяя это рассуждение, мы находим, что функция (5) вместе со своими аналитическими продолжениями реализует искомое отображение.

На рис. 72 показаны части прообразов окружностей  $|w| = \rho$  при рассматриваемом отображении для  $n = 8$  и  $a = 0,25$ ; видно, что при  $\rho = 1,8$  и больше влияние исключенных отрезков практически не сказывается — практически эти прообразы не отличаются от окружностей.

Для  $a = 0$  имеем и  $a_1 = 0$ , следовательно, формула (5) переходит в формулу  $w = z$ . Найдем главную часть отображения (5) для малых  $a$ . Из соотношения (4) находим:  $a_1 \approx n^2 a^2 / 8$ . Пренебрегая малыми порядка выше  $a^2$ , из формулы (5) получаем приближенную формулу для нашего конформного отображения:

$$w \approx \frac{4}{\sqrt[n]{4}} \left(1 - \frac{2a_1}{n}\right) \left\{ z^{\frac{n}{2}} + z^{-\frac{n}{2}} + \left( z^{\frac{n}{2}} - z^{-\frac{n}{2}} \right) \left( 1 - \frac{4a_1}{\left( z^{\frac{n}{2}} - z^{-\frac{n}{2}} \right)^2} \right) \right\}^{\frac{2}{n}} =$$

$$= z \left( 1 - \frac{2a_1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2a_1}{z^n - 1} \right)^{\frac{2}{n}},$$

или окончательно:

$$w \approx z \left( 1 - \frac{na^2}{4} \frac{z^n + 1}{z^n - 1} \right) \quad (6)$$

(ср. формулу (10) из примера 4 п. 30). Формула (6) пригодна для точек, не слишком близких к корням  $n$ -й степени из 1.

3) Отображение верхней полуплоскости с исключенными отрезками  $0 \leq y \leq h$ ,  $x = ka$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на верхнюю полуплоскость. Проведем дополнительные разрезы  $A_{-1}C$  и  $A_0C$  от концов отрезков в бесконечность (штрих-пунктир на рис. 73) и отображим полученную полуполосу  $CB_{-1}B_0C$  на такую же полуполосу, но так, чтобы точки  $A_{-1}$  и  $A_0$  перешли в вершины этой полуполосы. Для этого отобразим сначала нашу полуполосу на полуплоскость:  $z_1 = \cos \frac{\pi z}{a}$  (см. п. 9), сожмем

последнюю:  $z_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{a}} z_1$  (так, что точки  $A_{-1}$  и  $A_0$  перейдут в точки  $z_2 = \pm 1$ )

и воспользуемся отображением, обратным к первому:  $w = \frac{a}{\pi} \arccos z_2$ . Таким образом, мы получаем искомое отображение полуполосы на полуплоскость:

$$w = \frac{a}{\pi} \arccos \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{a}} \cos \frac{\pi z}{a} \right). \quad (7)$$

Применяя к полученной функции неограниченное число раз принцип симметрии, найдем, что она осуществляет искомое отображение «решетки» рис. 73 на полуплоскость.

На рис. 73 показаны прообразы линий  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  при рассматриваемом отображении для  $h = 0,5$  и  $a = 2$ ; видно, что при  $v = 2$  и

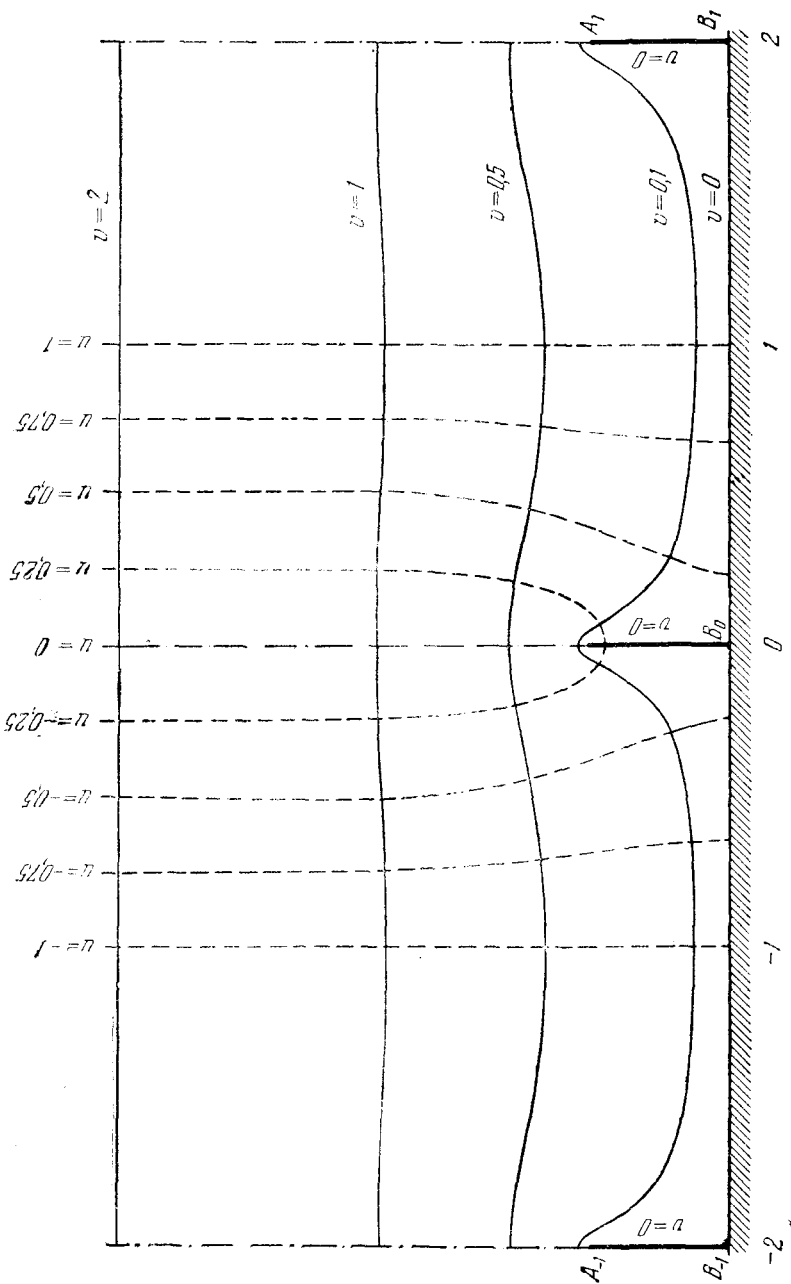


Рис. 73.



больше влияние исключенных отрезков практически не сказывается — рассматриваемые прообразы практически не отличаются от прямых.

4) Отображение плоскости с исключенными отрезками —  $a \leq x \leq a$ ,  $y = kH$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на плоскость с исключенными отрезками действительной оси (рис. 74; обе области бесконечносвязны).

Проведем дополнительный (пунктирный) разрез по мнимой оси и одну из двух образовавшихся областей, например правую, отобразим на верхнюю полуплоскость. Для этого мы повернем плоскость  $z$  на  $90^\circ$  и воспользуемся результатом предыдущей задачи: функция

$$w = \operatorname{arccos} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{H}} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{H} \right\} \quad (8)$$

осуществляет конформное отображение правой половины области на верхнюю полуплоскость. При этом точка  $A_0$  ( $z = a$ ) переходит в точку  $\omega = \operatorname{arccos} 1 = 0$ , точка  $B_{-1}$  ( $z = 0$ ) — в точку  $\omega =$

$$= \operatorname{arccos} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{H}} = b, \text{ точка } C_{-1}$$

$$(z = -iH) \text{ — в точку } \omega = \operatorname{arccos} \frac{-1}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{H}} = \pi - b, A_{-1} \text{ пере-}$$

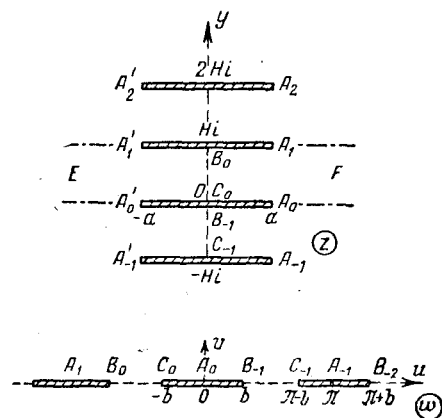


Рис. 74.

ходит в  $-\pi$ ,  $B_{-2}$  — в  $\pi + b$  и вообще точки  $A_k$  переходят в точки  $\omega = -k\pi$ , а отрезки  $B_k C_k$  — в отрезки  $[-(k+1)\pi + b, -k\pi - b]$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Согласно принципу симметрии мы можем продолжить функцию (8) через совокупность отрезков  $B_k C_k$  и получим тогда, что эта функция вместе с ее продолжением осуществляет конформное отображение заданной области на плоскость  $\omega$  с выброшенными отрезками  $(k\pi - b, k\pi + b)$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Задача решена.

5) Отображение областей, ограниченных кривыми второго порядка.

а) Парабола. Пусть начало координат помещено в фокусе параболы  $y^2 = 2p \left( x + \frac{p}{2} \right)$  (рис. 75).

(1) С помощью функции  $w = \sqrt{z}$  внешность этой параболы отображается на полуплоскость  $\operatorname{Im} w > \sqrt{p/2}$ . Действительно, полагая  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , найдем:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad (9)$$

откуда видно, что прямые  $v = c$  переходят в параболы  $y^2 = 4c^2 (x + c^2)$ ; при  $c = \sqrt{p/2}$  получаем заданную параболу. Таким образом, функция

$$w = \sqrt{z} - i \sqrt{p/2} \quad (10)$$

реализует конформное отображение внешности параболы на верхнюю полуплоскость. Внутри параболы функция (10) имеет точку ветвления.

(2) Чтобы получить отображение внутренности параболы, мы проведем разрез по лучу  $BFG$  (рис. 75) и заметим, что верхняя половина параболы

отображается с помощью функции  $z_1 = \sqrt{z}$  на полуполосу  $0 < y_1 < \sqrt{p/2}$ ,  $0 < x_1 < \infty$ . С помощью функции  $z_2 = \cos \left\{ \sqrt{\frac{2}{p}} \pi i z_1 \right\}$  эта полуполоса отображается на верхнюю полуплоскость, причем разрезу  $BFG$  соответствует луч  $-1 \leq x \leq \infty$ . Применяя принцип симметрии, а затем еще преобразование  $w = i \sqrt{1 + z_2}$ , получим искомое отображение внутренности параболы на верхнюю полуплоскость:

$$w = i \sqrt{2} \cos \frac{\pi i z_1}{\sqrt{2p}} = i \sqrt{2} \operatorname{ch} \pi \sqrt{\frac{z}{2p}}. \quad (11)$$

б) Гипербола. (1) Чтобы найти конформное отображение на верхнюю полуплоскость области, заключенной между ветвями гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(рис. 76), мы проведем разрез  $BD$  по действительной оси и заметим, что функция  $z_1 = \frac{1}{c} (z + \sqrt{z^2 - c^2})$ , где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  отображает верхнюю половину заданной области на сектор  $\vartheta < \arg z_1 < \pi - \vartheta$ ,  $|z_1| > 1$ , где

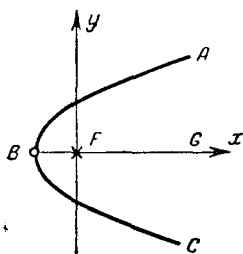


Рис. 75.

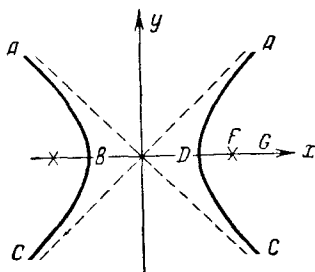


Рис. 76.

$\vartheta = \arccos \frac{a}{c}$  (см. п. 7). По принципу симметрии эта же функция осуществляет конформное отображение всей заданной области на весь сектор  $\vartheta < \arg z_1 < \pi - \vartheta$ . Таким образом, функция

$$w = (e^{-i\vartheta} z_1)^{\pi/(\pi-2\vartheta)} = \left( \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{ce^{i\vartheta}} \right)^{\pi/(\pi-2\vartheta)} \quad (12)$$

осуществляет отображение области, заключенной между ветвями гиперболы, на верхнюю полуплоскость.

(2) Чтобы получить отображение внутренности правой ветви гиперболы проведем разрез по лучу  $DFG$  и заметим, что функция  $z_1 = \frac{1}{c} (z + \sqrt{z^2 - c^2}) = e^{\operatorname{arch} \frac{z}{c}}$  осуществляет конформное отображение верхней половины области на сектор  $0 < \arg z_1 < \vartheta$ ,  $|z_1| > 1$ . Функция  $z_2 = \frac{1}{2} (z_1^{\pi/\vartheta} + z_1^{-\pi/\vartheta}) = \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{\vartheta} \operatorname{arch} \frac{z}{c} \right)$  отображает этот сектор на верхнюю полуплоскость, причем

лучу  $DFG$  соответствует луч  $(-1, \infty)$  действительной оси. Применяя принцип симметрии и затем дополнительное отображение  $w = i\sqrt{1+z_2}$ , получим искомое отображение внутренности правой ветви гиперболы на верхнюю полуплоскость:

$$w = i\sqrt{1 + \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{\vartheta} \operatorname{arch} \frac{z}{c}\right)} = i\sqrt{2} \operatorname{ch}\left\{\frac{\pi}{2\vartheta} \operatorname{arch} \frac{z}{c}\right\}. \quad (13)$$

в) Э л л и п с. (1) Конформное отображение внешности эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

на внешность единичного круга осуществляет функция

$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a + b}, \quad (14)$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  (см. п. 7). Внутри эллипса эта функция имеет точки ветвления (рис. 77).

(2) Чтобы получить отображение внутренности эллипса, мы сделаем разрез вдоль большой оси и воспользуемся функцией  $z_1 = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2 - c^2})$ .

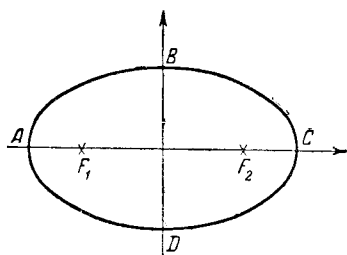


Рис. 77.

Тогда получим отображение верхней половины эллипса на верхнюю половину кольца  $1 < |z_1| < \frac{a+b}{c}$ ,  $\operatorname{Im} z_1 > 0$ , причем разрез переходит в отрезки  $AF_1$ ,  $F_2C$  действительной оси и единичную полуокружность. Функция  $z_2 = \ln z_1$  отображает это полукольцо на прямоугольник  $0 < \operatorname{Re} z_2 < d$ ,  $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$ , где  $d = \ln \frac{a+b}{c}$ . Принцип симметрии еще неприменим, ибо образом нашего разреза является трехзвенная ломаная  $AF_1F_2B$ ; требуется предварительно отобразить прямоугольник на верхнюю по-

луплоскость, чтобы эта ломаная перешла в один отрезок. Отображение прямоугольника на плоскость нельзя получить с помощью комбинации элементарных функций — его осуществляет так называемая эллиптическая функция (см. п. 39, пример 1), — поэтому и отображение внутренности эллипса на полуплоскость не записывается через элементарные функции.

**37. Отображение многоугольников.** Прежде чем приступить к выводу формулы для отображения полуплоскости на многоугольники\*), выясним вопрос о поведении конформного отображения в угловых точках областей. Предположим для простоты, что границы области  $\Delta$  в окрестности угловой точки  $w_0$  состоит из прямолинейных отрезков; угол между этими отрезками мы обозначим через  $\alpha\pi$ , считая  $0 < \alpha \leq 2$  (рис. 78). Пусть функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости на область  $\Delta$ , причем угловой точке  $w_0$  соответствует точка  $z_0$  действительной оси.

\*) Другой, более конструктивный вывод этой формулы см. ниже в п. 44.

Для выяснения характера функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  введем вспомогательное переменное  $\omega = (z - z_0)^{1/\alpha}$ . Сложная функция

$$\omega = \{f(z) - w_0\}^{1/\alpha} = \omega(z) \quad (1)$$

реализует конформное отображение части окрестности точки  $z_0$ , принадлежащей верхней полуплоскости  $z$ , на часть окрестности точки  $\omega = 0$ , принадлежащую одной из полуплоскостей, причем отрезку действительной оси плоскости  $z$  соответствует отрезок

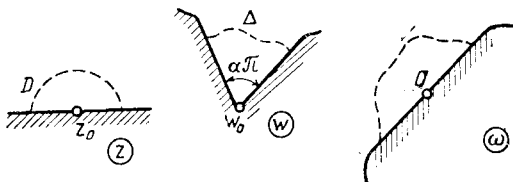


Рис. 78.

прямой (рис. 78). По принципу симметрии функция  $\omega(z)$  допускает аналитическое продолжение в полную окрестность точки  $z_0$  и представима, следовательно, рядом Тейлора

$$\omega(z) = c'_1(z - z_0) + c'_2(z - z_0)^2 + \dots$$

В этом ряду отсутствует свободный член, ибо  $\omega(z_0) = 0$ , однако  $c'_1 = \omega'(z_0) \neq 0$ , так как функция осуществляет конформное отображение. Возвращаясь с помощью соотношения (1) к функции  $f(z)$ , находим, что в окрестности точки  $z_0$  функция  $f(z)$  представима в виде

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^\alpha \{c'_1 + c'_2(z - z_0) + \dots\}^\alpha.$$

Так как выражение в фигурной скобке отлично от нуля при  $z = z_0$ , то в некоторой окрестности точки  $z_0$  можно выделить однозначную аналитическую ветвь функции  $\{c'_1 + c'_2(z - z_0) + \dots\}^\alpha$ . Разлагая эту ветвь в ряд Тейлора, мы получаем окончательное представление функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$ :

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^\alpha \{c_0 + c_1(z - z_0) + \dots\}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что при  $\alpha > 1$  производная  $f'(z_0) = 0$ , при  $\alpha < 1$  имеем  $f'(z_0) = \infty$ . Для обратного отображения  $z = \varphi(w)$ , наоборот,  $\varphi'(w_0) = 0$  при  $\alpha < 1$  и  $\varphi'(w_0) = \infty$  при  $\alpha > 1$ .

Из того же соотношения (2) видно, что  $z_0$  при  $\alpha \neq 1$ ,  $\neq 2$  является точкой ветвления функции  $f(z)$ .

Заметим, что в более общем случае, когда граница области  $\Delta$  в окрестности точки  $w_0$  состоит из гладких или даже

аналитических дуг, пересекающихся в  $\omega_0$  под углом  $\alpha\pi$ , сделанный вывод, вообще говоря, неверен\*). В этом случае отображающая функция не обязана иметь вид (2): в главном члене ее разложения могут появиться множители, стремящиеся к нулю и бесконечности медленнее, чем любая степень  $z - z_0$ .

Рассмотрим, например, в верхнем полукруге  $|z| < r$ ,  $y \geq 0$ , функцию

$$\omega = z \ln \frac{1}{z}, \quad \omega(0) = 0, \quad (3)$$

где ветвь логарифма характеризуется условием  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . Легко видеть, что при достаточно малом  $r$  она преобразует отрезок  $(0, r)$  оси  $x$  в отрезок  $(0, r \ln \frac{1}{r})$  оси  $u$ , отрезок  $(-r, 0) -$

в дугу  $\gamma$ :  $u = x \ln \frac{1}{-x}$ ,  $v = -\frac{x}{\pi}$ , а полуокружность  $|z| = r$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  — в дугу, близкую к полуокружности (рис. 79). По

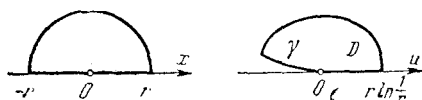


Рис. 79.

принципу соответствия границ функция (3) при малых  $r$  однолистно и конформно отображает полукруг на область  $D$ , изображенную на рис. 79.

Дуга  $\gamma$  гладко примыкает к отрезку  $(0, r \ln \frac{1}{r})$  в точке  $\omega = 0$ , так что угол  $\alpha = 1$ ; тем не менее главный член разложения  $(r)$  «испорчен» множителем  $\ln \frac{1}{z}$ . Аналогичный эффект наблюдается для функции

$$\omega = \frac{z}{\ln \frac{1}{z}}, \quad \omega(0) = 0. \quad (4)$$

Перейдем к отображению многоугольников. Пусть в плоскости  $w$  задан замкнутый многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  без точек самопересечения, не содержащий бесконечно удаленной точки (от этого ограничения мы освободимся в следующем пункте).

Согласно основной теореме Римана (п. 28) существует функция  $\omega = f(z)$ , реализующая конформное отображение верхней полуплоскости  $z$  на внутренность  $\Delta$  этого многоугольника. Для определенности мы зададимся соответствием трех точек действительной оси (например,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ ) и трех точек границы  $\Delta$  (например, вершин  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ); тогда по теореме 2 п. 35 функция  $f(z)$  определится однозначно. Мы предположим сначала,

\*) В предыдущем издании в этом месте имелась неточность, на которую наше внимание любезно обратили М. М. Лаврентьев и А. Б. Шабат.

что эта функция нам известна, в частности известны конечные точки  $a_4, \dots, a_n$  оси  $x$ , переходящие в вершины  $A_4, \dots, A_n$  многоугольника, и поставим своей задачей отыскание ее аналитического выражения.

Так как на любом участке  $(a_k, a_{k+1})$  действительной оси функция  $w = f(z)$  принимает значения, лежащие на прямолинейном отрезке  $A_k A_{k+1}$ , то, по принципу симметрии, она аналитически продолжаема через этот отрезок в нижнюю полуплоскость. Аналитическое продолжение этой функции реализует конформное отображение нижней полуплоскости на многоугольник  $\Delta'$ , симметричный с многоугольником  $\Delta$  относительно отрезка  $A_k A_{k+1}$ . Это аналитическое продолжение можно снова продолжить через любой отрезок  $(a_{k'}, a_{k'+1})$  в верхнюю полуплоскость  $z$ , причем новое аналитическое продолжение будет реализовывать конформное отображение верхней полуплоскости  $z$  на многоугольник  $\Delta''$ , симметричный с многоугольником  $\Delta'$  относительно отрезка  $A_{k'} A_{k'+1}$ .

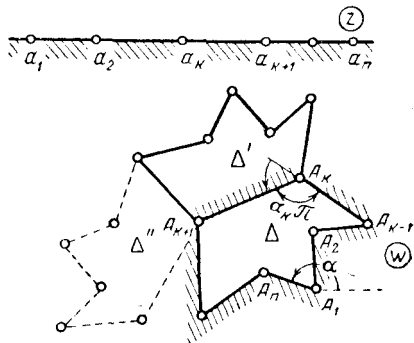


Рис. 80.

Предположим, что мы выполнили всевозможные аналитические продолжения описанного вида. В результате получится, вообще говоря, бесконечнозначная аналитическая функция  $w = F(z)$ , для которой исходная функция  $f(z)$  является в верхней полуплоскости одной из однозначных ветвей.

Пусть  $w = f_*(z)$  и  $w = f_{**}(z)$  будут две произвольные ветви функции  $F(z)$  в верхней полуплоскости. Согласно нашему построению эти ветви осуществляют конформное отображение верхней полуплоскости на два многоугольника  $\Delta^*$  и  $\Delta^{**}$ , отличающиеся друг от друга четным числом симметрий относительно сторон. Но так как всякая пара симметрий относительно двух произвольных прямых сводится к некоторому сдвигу и повороту, то всюду в верхней полуплоскости  $f_{**}(z) = e^{i\alpha} f_*(z) + a$ , где  $a$  и  $\alpha$  постоянные. То же самое справедливо и для любых ветвей функции  $F(z)$  в нижней полуплоскости.

Далее, функция

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{d}{dz} \ln f'(z)$$

аналитична в верхней полуплоскости, ибо  $f'(z)$ , как производная функции, осуществляющей конформное отображение, нигде

не обращается в нуль. Эта функция  $g(z)$  остается однозначной при всевозможных аналитических продолжениях  $\hat{f}(z)$  в силу сделанного выше замечания о ветвях функции  $F(z)$  (имеем:  $f'_{**}(z) = e^{i\alpha} f'_*(z)$ ,  $f''_{**}(z) = e^{i\alpha} f''_*(z)$ , следовательно,  $\frac{f''_{**}(z)}{f'_{**}(z)} = \frac{f''_*(z)}{f'_*(z)}$ ).

Таким образом, можно утверждать, что  $g(z)$  — однозначная функция, аналитическая всюду в полной плоскости  $z$ , кроме точек  $z = a_k$ , соответствующих вершинам многоугольника. Аналитичность  $g(z)$  в бесконечности следует из того, что  $z = \infty$  переходит в некоторую точку на стороне многоугольника, а не в его вершину.

Для выяснения характера функции  $g(z)$  в точке  $z = a_k$  возьмем какую-либо ветвь  $\hat{f}(z)$  и воспользуемся формулой (2). Будем иметь:

$$\hat{f}(z) = A_k + (z - a_k)^{\alpha_k} \{c_0 + c_1(z - a_k) + \dots\};$$

отсюда легко получить лорановское разложение  $g(z)$  в окрестности точки  $z = a_k$ :

$$g(z) = \frac{\hat{f}''(z)}{\hat{f}'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1) \alpha_k c_0 (z - a_k)^{\alpha_k - 2} + \dots}{\alpha_k c_0 (z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \dots} = \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + c'_0 + c'_1(z - a_k) + \dots$$

Из этого разложения видно, что точка  $z = a_k$  является для  $g(z)$  полюсом первого порядка с вычетом  $\alpha_k - 1$ .

Таким образом, функция  $g(z)$  в полной плоскости имеет лишь  $n$  особых точек. Вычитая из  $g(z)$  сумму главных частей ее разложения в этих точках, получим функцию

$$G(z) = g(z) - \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} - \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} - \dots - \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n},$$

регулярную во всей полной плоскости и, следовательно, постоянную (см. теорему Лиувилля в формулировке п. 24). Так как в точке  $z = \infty$  функция  $\hat{f}(z)$  правильна, то в окрестности этой точки

$$\hat{f}(z) = d_0 + \frac{d_{-p}}{z^p} + \frac{d_{-p+1}}{z^{p+1}} + \dots$$

и

$$g(z) = \frac{p(p+1) \frac{d_{-p}}{z^{p+2}} + \dots}{-\frac{p d_{-p}}{z^{p+1}} + \dots} = -\frac{p+1}{z} + \frac{d'_{-2}}{z^2} + \dots$$

Следовательно,  $g(\infty)$ , а значит и  $G(\infty)$ , равно 0. Поэтому

$$g(z) = \frac{d}{dz} \ln f'(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n}. \quad (5)$$

Интегрируя выражение (5) вдоль любого пути, лежащего в верхней полуплоскости, и затем потенцируя, находим:

$$f'(z) = C (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}. \quad (6)$$

Интегрируя еще раз, получаем искомое выражение для  $f(z)$ . Тем самым доказана

**Теорема 1** (Г. Шварц, Э. Кристоффель\*), 1867—1869 гг.). Если функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на внутренность ограниченного многоугольника  $\Delta$  с углами  $\alpha_k \pi$  ( $0 < \alpha_k \leq 2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ) при вершинах, причем известны точки  $a_k$  действительной оси ( $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$ ), соответствующие вершинам этого многоугольника, то  $f(z)$  представляется интегралом

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1, \quad (7)$$

где  $z_0$ ,  $C$  и  $C_1$  — некоторые постоянные.

Интеграл Шварца — Кристоффеля получен в предположении, что точки  $a_k$ , соответствующие вершинам многоугольника, известны. Однако в задачах на конформные отображения задаются лишь вершины  $A_k$  многоугольника, а точки  $a_k$  остаются неизвестными. Согласно сказанному в п. 29 три из них (например,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ ) можно задавать произвольно, а остальные точки и также постоянные  $C$  и  $C_1$  должны определяться из условия задачи\*\*). Это обстоятельство представляет главную трудность при практическом использовании интеграла Шварца — Кристоффеля.

Способы определения постоянных  $a_k$ ,  $C$  и  $C_1$  будут указаны ниже на конкретных примерах. Принципиальная возможность их отыскания по существу вытекает из приведенного доказательства теоремы 1. В самом деле, пусть многоугольник  $\Delta$  задан. По основной теореме мы можем утверждать, что существует единственное конформное отображение  $w = f(z)$  полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на многоугольник  $\Delta$ , переводящее три заданные точки  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  действительной оси в три вершины  $\Delta$ , например в  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . Для этой функции по доказанному выше будет

\*) Эльвин Кристоффель (1829—1900) — немецкий математик.

\*\*) Постоянную  $z_0$  можно раз навсегда фиксировать, например положить  $z_0 = 0$ . Поэтому в дальнейшем мы не будем считать ее неизвестным параметром формулы (7).



иметь место формула (7) при надлежащем подборе постоянных  $a_4, \dots, a_n, C$  и  $C_1$ . Таким образом, при заданных трех  $a_k$  остальные постоянные определяются и притом единственным образом. Заметим еще, что согласно формуле (6) на действительной оси плоскости  $z$  при  $z = x > a_n$  имеем  $\arg(x - a_k)^{a_k-1} = 0$  для всех  $k$  и, следовательно,  $\arg f'(x) = \arg C$ , а так как (содержащий  $z = \infty$ ) отрезок  $(a_n, a_1)$  при отображении  $w = f(z)$  переходит в отрезок  $A_n A_1$ , то  $\arg C$  равен углу  $\theta$ , который этот отрезок составляет с осью  $u$  (на рис. 80  $\alpha = \theta - \pi$ ). Постоянная  $C_1$  определяется заданием положения одной из вершин. Для определения постоянных  $a_k$  и  $C$  можно воспользоваться известными длинами сторон многоугольника

$$A_k A_{k+1} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(x)| dx \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (8)$$

хотя практически этот метод применим далеко не всегда. На практике часто приходится пользоваться приближенными методами определения постоянных  $a_k$  и  $C$ ; с ними читатель может ознакомиться по книге П. Ф. Фильчакова [10], работе Г. Н. Положего [12] или статье Н. П. Стенина в сборнике [8].

**38. Дополнительные замечания.** Рассмотрим ряд случаев, не разобранных в предыдущем пункте.

1. Одна из вершин многоугольника — образ бесконечно удаленной точки. Пусть, например,  $a_n = \infty$ . Чтобы привести этот случай к рассмотренному, совершим линейное преобразование  $\zeta = -\frac{1}{z} + a'_n$  полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta > 0$ , переводящее точки  $a_1, a_2, \dots, a_n = \infty$  в конечные\*) точки  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ . Применяя формулу (7) предыдущего пункта, получаем:

$$\begin{aligned} w &= C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a'_1)^{a_1-1} (\zeta - a'_2)^{a_2-1} \dots (\zeta - a'_n)^{a_n-1} d\zeta + C_1 = \\ &= C' \int_{z_0}^z \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{z}\right)^{a_1-1} \left(a'_n - a'_2 - \frac{1}{z}\right)^{a_2-1} \dots \left(-\frac{1}{z}\right)^{a_n-1} \frac{dz}{z^2} + C_1. \end{aligned}$$

Приведем выражение в каждой скобке к общему знаменателю и вынесем из каждой скобки множитель  $a'_n - a'_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ );

---

\*) Если одна из точек  $a_k = 0$ , то придется взять  $\zeta = \frac{-1}{z-a} + a'_n$ , где  $a$  отлично от всех  $a_k$ .

будем иметь:

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} \times \\ \times \frac{dz}{z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} - n + 2}} + C_1,$$

где  $a_k = \frac{1}{a'_n - a'_k}$  — некоторые действительные постоянные, а

$C$  — комплексная постоянная (в ее выражение включены все вынесенные множители). Используя элементарное геометрическое предложение о сумме углов  $n$ -угольника, согласно которому

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2, \quad (1)$$

получим окончательно

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_1. \quad (2)$$

Таким образом, если одной из вершин многоугольника  $\Delta$  соответствует бесконечно удаленная точка, то относящийся к этой вершине множитель в формуле Шварца — Кристоффеля выпадает.

Это обстоятельство используется на практике для упрощения интеграла Шварца — Кристоффеля (см. п. 39 и след.).

2) Одна или несколько вершин многоугольника лежат в бесконечно удаленной точке. Пусть вершина  $A_h$  многоугольника  $\Delta$  лежит в бесконечно удаленной точке. Возьмем на лучах  $A_{k-1}A_h$  и  $A_hA_{k+1}$  произвольно по точке  $A'_k$  и  $A''_k$ , соединим их отрезком прямой и рассмотрим полученный  $(n+1)$ -угольник  $\Delta'$  (рис. 81). Функция, отображающая полуплоскость на многоугольник  $\Delta'$ , по предыдущему выражается формулой

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a'_k)^{\alpha'_k - 1} (z - a''_k)^{\alpha''_k - 1} \dots \\ \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1, \quad (3)$$

где  $\alpha'_k$  и  $\alpha''_k$  — измеренные в долях  $\pi$  углы при вершинах  $A'_k$  и  $A''_k$ , а  $a'_k$  и  $a''_k$  — точки оси  $x$ , соответствующие этим вершинам.

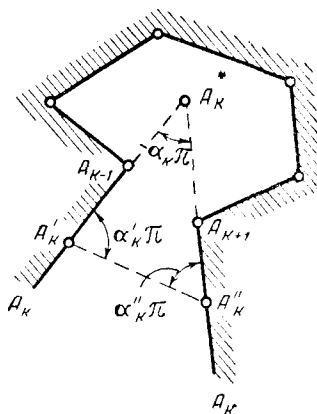


Рис. 81.

Пусть отрезок  $A'_k A''_k$  удаляется в бесконечность, оставаясь параллельным самому себе; при этом точки  $a'_k$  и  $a''_k$  сливаются в одну точку  $a_k$ , соответствующую вершине  $A_k$ , и в пределе множители формулы (3), содержащие  $a'_k$  и  $a''_k$ , переходят в  $(z - a_k)^{\alpha'_k + \alpha''_k - 2}$ . Обозначим через  $\alpha_k \pi$  взятый со знаком минус угол пересечения лучей  $A_{k-1} A_k$  и  $A_{k+1} A_k$  в конечной точке  $A_k^*$ . Тогда из треугольника  $A'_k A''_k A_k^*$  имеем  $\alpha'_k + \alpha''_k - \alpha_k = 1$ , т. е.  $\alpha'_k + \alpha''_k - 2 = \alpha_k - 1$ , и формула (3) принимает обычный вид:

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1. \quad (4)$$

Это же рассуждение можно привести и в случае, когда в бесконечности лежат несколько вершин многоугольника.

Таким образом, формула Шварца — Кристоффеля остается в силе и для многоугольников, у которых одна или несколько вершин лежат в бесконечно удаленной точке, если при этом угол между двумя прямыми с вершиной в бесконечности определяется как угол в конечной точке их пересечения, взятый со знаком минус (ср. п. 31).

При нашем определении угла в бесконечности остается в силе соотношение (1) для суммы углов многоугольника. Действительно, для  $(n+1)$ -угольника  $\Delta'$ , с конечными углами, на основании формулы (1) имеем:  $\Sigma' + \alpha'_k + \alpha''_k = n - 1$ , где  $\Sigma'$  означает сумму всех углов  $\Delta'$ , кроме угла при вершине  $A_k = \infty$  (мы придерживаемся принятых выше обозначений). Заменяя  $\alpha'_k + \alpha''_k = \alpha_k + 1$ , получим соотношение (1) и для многоугольника  $\Delta$ .

3) Отображение внешности многоугольника. Этот случай отличается от разобранный в п. 37 тем, что в некоторой конечной\*) точке  $a$  верхней полуплоскости, соответствующей бесконечно удаленной точке многоугольника, функция  $f(z)$  имеет полюс первого порядка (наличие полюса высшего порядка противоречило бы однолиственности). Так же, как и в п. 37, доказывается, что в этой точке  $g(z)$  будет иметь полюс первого порядка с вычетом, равным  $-2$ . То же самое будет иметь место и для точки  $\bar{a}$  нижней полуплоскости, ибо  $\bar{a}$  служит полюсом первого порядка для аналитического продолжения функции  $f(z)$ . Таким образом, для функции  $g(z)$  будем

---

\*) Если бесконечно удаленной точке многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка плоскости  $z$ , то эта точка является граничной для многоугольника, и мы имеем случай, уже разобранный в разделе 2).

иметь разложение

$$g(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n} - \frac{2}{z - a} - \frac{2}{z - \bar{a}}.$$

Отсюда получим следующую формулу для функции, реализующей *конформное отображение верхней полуплоскости на внешность многоугольника*

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dz}{(z - a)^2 (z - \bar{a})^2} + C_1. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha_k$  — измеренные в долях  $\pi$  внешние углы многоугольника,  $a_k$  — точки действительной оси, соответствующие его вершинам,  $a$  — точка верхней полуплоскости, соответствующая бесконечно удаленной точке многоугольника,  $z_0$ ,  $C$  и  $C_1$  — некоторые постоянные.

4) Отображение внутренности (внешности) единичного круга на внутренность (внешность) многоугольника осуществляется функцией

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_k$  — измеренные в долях  $\pi$  внутренние (внешние) углы многоугольника,  $a_k$ ,  $|a_k| = 1$  — точки единичной окружности, соответствующие его вершинам,  $C$  и  $C_1$  — некоторые постоянные. При отображении внешности круга на внешность многоугольника, кроме того, предполагается, что бесконечно удаленные точки плоскостей  $z$  и  $w$  соответствуют друг другу.

Для отображения внутренности единичного круга на внешность многоугольника имеет место формула

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_1)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dz}{z^2} + C_1, \quad (7)$$

где смысл обозначений тот же, что и в формуле (6), и предполагается, что бесконечно удаленной точке многоугольника соответствует центр круга.

Формулы (6) и (7) сводятся к предыдущим с помощью дополнительного дробно-линейного преобразования плоскости  $z$  так, как это делалось в начале этого пункта при выводе формулы (2).

5) Обратная задача. Пусть теперь заданы произвольные совокупности действительных чисел  $a_k$  и  $\alpha_k$ , удовлетворяющие условиям  $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$ ,  $-2 \leq \alpha_k \leq 2$ ,

$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ , и произвольные комплексные числа  $C$  и  $C_1$ . Построим с их помощью интеграл Шварца — Кристоффеля

$$w = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1. \quad (8)$$

Оказывается, что в этих условиях *интеграл Шварца — Кристоффеля определяет функцию, реализующую конформное отображение верхней полуплоскости на некоторый многоугольник с углами  $\alpha_k \pi$  при вершинах.*

В самом деле, аргумент производной функции (8)

$$\arg \frac{dw}{dz} = \arg C + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \arg (z - a_k) \quad (9)$$

сохраняет постоянное значение на любом отрезке  $(a_k, a_{k+1})$ ,  $k=1, 2, \dots, n-1$  действительной оси\*), а сама производная  $\frac{dw}{dz}$  внутри такого отрезка не обращается в 0. Следовательно, функция (8) взаимно-однозначно отображает отрезок  $(a_k, a_{k+1})$  на некоторый прямолинейный отрезок  $A_k A_{k+1}$ . То же самое относится и к содержащему  $z = \infty$  отрезку  $(a_n, a_1)$  действительной оси. В самом деле, во-первых, в силу условия  $\sum \alpha_k = n - 2$  отрезки  $(a_n, \infty)$  и  $(-\infty, a_1)$  поворачиваются при нашем отображении на одинаковый угол, а во-вторых, интеграл (8) сходится в точке  $z = \infty$ \*\*); следовательно, при  $z \rightarrow \pm \infty$  функция  $w$  стремится к одному и тому же пределу.

Таким образом, функция (8) осуществляет соответствие действительной оси и некоторой ломаной  $A_1 A_2 \dots A_n$ . В общем случае эта ломаная может иметь точки самопересечения и не ограничивать никакой плоской области (она будет тогда ограничивать неоднолистную область на римановой поверхности). Исключая такие случаи, будем считать, что  $A_1 A_2 \dots A_n$  является границей некоторого (однолистного) многоугольника.

Заметим, что некоторые из вершин этого многоугольника могут лежать в бесконечности — это будут те вершины  $A_k$ , для

\*) Мы считаем  $\arg (x - a_k)$  равным 0 или  $\pi$  в зависимости от того, будет ли  $x > a_k$  или  $x < a_k$ , следовательно, на каждом отрезке  $(a_k, a_{k+1})$  постоянны все слагаемые суммы (9).

\*\*) Первое утверждение следует из того, что  $\arg \frac{dw}{dz}$  на отрезке  $(a_n, \infty)$  равен  $\arg C$ , а на отрезке  $(-\infty, a_1)$  равен  $\arg C + (\sum \alpha_k - n)\pi = \arg C - 2\pi$ ; второе утверждение из того, что главный член подынтегральной функции в окрестности точки  $z = \infty$  имеет вид  $z^{\sum \alpha_k - n} = z^{-2}$ .

которых  $a_k \leq 0$  (в самом деле, при приближении к соответствующим точкам  $a_k$  функция  $w \rightarrow \infty$ , ибо интеграл (8) расходится, так как порядок бесконечности подынтегральной функции  $\geq 1$ ). Но и в этом случае применим принцип соответствия границ и можно утверждать, что функция (8) реализует конформное отображение верхней полуплоскости  $z$  на внутренность многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_n$ . Угол при вершине  $A_k$  этого многоугольника равен  $\alpha_k \pi$ , ибо, как видно из (9), при переходе через каждую точку  $a_k$  в направлении слева направо  $\arg \frac{dw}{dz}$  изменяется на  $-\pi(\alpha_k - 1) = \pi - \alpha_k \pi$ , следовательно, соответствующий отрезок  $A_{k-1} A_k$  поворачивается на угол  $\pi - \alpha_k \pi$  против часовой стрелки. Наше предложение полностью доказано.

Предложение остается в силе и в том случае, когда условие  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$  не выполняется. В этом случае лишь появится дополнительная  $(n + 1)$ -я вершина многоугольника, соответствующая точке  $z = \infty$ . Читатель проверит, что эта вершина будет конечной, если  $\sum_{k=1}^n \alpha_k < n - 2$ , и бесконечно удаленной, если  $\sum_{k=1}^n \alpha_k > n - 2$ .

6) Отображение внешности «звезды». В заключение, следуя Л. К. Лахтину, мы найдем общую формулу для отображения внешности круга  $|z| > 1$  на внешность «звезды», образованной  $n$  прямолинейными отрезками  $L_k$ , выходящими из начала координат (рис. 82). Угол между  $L_k$  и  $L_{k+1}$  мы обозначим через  $\alpha_k \pi$ , точки окружности, соответствующие вершине этого угла и концу  $L_k$  — через  $a_k$  и  $b_k$  соответственно ( $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $L_{n+1} = L_1$ ).

Рассмотрим сначала отображение верхней полуплоскости  $\zeta$  на заданную область. Пусть  $a'_k$  и  $b'_k$  будут точки действительной оси плоскости  $\zeta$ , соответствующие вершинам углов  $L_k$  и концам отрезков  $L_k$ , и  $a_0$  — точка верхней полуплоскости, соответствующая  $w = \infty$ . Отображающая функция  $w = f(\zeta)$ , очевидно, в окрестности точек  $\zeta = a'_k$  должна иметь вид

$$f(\zeta) = (\zeta - a'_k)^{\alpha_k} \varphi_k(\zeta), \quad \varphi_k(a'_k) \neq 0,$$

а в окрестности  $\zeta = b'_k$ :

$$f(\zeta) = c_k + (\zeta - b'_k)^2 \psi_k(\zeta), \quad c_k \neq 0, \quad \psi_k(b'_k) \neq 0.$$

где  $\varphi_k(\zeta)$  и  $\psi_k(\zeta)$  — правильные в упомянутых окрестностях функции. Наконец, в точках  $a$  и  $\bar{a}$  она должна иметь полюсы первого порядка и должна

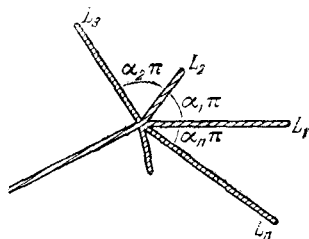


Рис. 82.

быть правильной в остальных точках плоскости  $\zeta$ . Отсюда, как и выше, заключаем, что логарифмическая производная отображающей функции должна иметь полюсы первого порядка с вычетами  $\alpha_k$  в точках  $\zeta = a'_k$ , полюсы первого порядка с вычетами  $-1$  в точках  $\zeta = a$  и  $\zeta = \bar{a}$  и быть правильной в точках  $\zeta = b'_k$  и в остальных точках плоскости  $\zeta$ . Таким образом,

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\zeta - a'_k} - \frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta - \bar{a}}$$

и, следовательно, после интегрирования и потенцирования получаем:

$$f(\zeta) = C' \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta - a'_k)^{\alpha_k}}{(\zeta - a)(\zeta - \bar{a})},$$

где  $C'$  — некоторая постоянная.

Совершая дополнительное отображение  $z = \frac{\zeta - \bar{a}}{\zeta - a}$  верхней полуплоскости на внешность единичного круга  $|z| > 1$ , получим искомое отображение в виде

$$w = C \frac{1}{z} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}, \quad (10)$$

где  $C$  и  $a_k$  ( $|a_k| = 1$ ) — некоторые постоянные \*).

Наряду с формулой Лахтина (10) удобно использовать обычную формулу для отображения внешности круга на внешность многоугольника, которая для нашего случая имеет вид

$$w = C_1 \int \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} (z - b_k) \frac{dz}{z^2}. \quad (11)$$

Совместное рассмотрение формул (10) и (11) позволяет избежать утомительного интегрирования.

В качестве примера рассмотрим частный случай  $n = 2$ , когда многоугольник представляет собой внешность двух отрезков, пересекающихся в начале координат под углом  $\alpha_1 = \alpha$ . Имеем  $\alpha_2 = 2 - \alpha$  и формулы (10) и (11) принимают соответственно вид:

$$w = \frac{C}{z} (z - a_1)^\alpha (z - a_2)^{2-\alpha} \quad (12)$$

и

$$w = C_1 \int \left( \frac{z - a_1}{z - a_2} \right)^{\alpha-1} (z - b_1)(z - b_2) \frac{dz}{z^2}. \quad (13)$$

---

\*) Имеем  $\zeta = \frac{az - \bar{a}}{z - 1}$ ,  $\zeta - a'_k = a''_k \frac{z - a_k}{z - 1}$  ( $a''_k$  — постоянные),  $\zeta - a = \frac{a - \bar{a}}{z - 1}$ ,  $\zeta - \bar{a} = \frac{(a - \bar{a})z}{z - 1}$  и, кроме того,  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$ .

Приравнивая производные, после простых преобразований будем иметь:

$$\frac{C_1}{C} (z - b_1) (z - b_2) = z^2 - (\alpha - 1) (a_2 - a_1) z - a_1 a_2,$$

откуда для определения постоянных  $b_1$  и  $b_2$  получаем уравнение

$$z^2 - (\alpha - 1) (a_2 - a_1) z - a_1 a_2 = 0.$$

Можно принять, например,  $b_1 = 1$ ; тогда  $(\alpha - 1) (a_2 - a_1) = 1 - a_1 a_2$  и  $b_2 = -a_1 a_2$ . Формула (12) содержит четыре действительных параметра ( $C = C_1 + iC_2$ ,  $a_1 = e^{i\varphi_1}$ ,  $a_2 = e^{i\varphi_2}$ ); подбирая их, можно добиться соответствия точек  $b_1$ ,  $b_2$  и концов отрезков  $L_1$  и  $L_2$ .

В следующем пункте мы приведем ряд примеров применения формулы Шварца — Кристоффеля к отображениям многоугольников.

**39. Примеры.** 1) Отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на прямоугольник  $A_1 A_2 A_3 A_4$  (рис. 83). Рассмотрим сначала отображение первого квадранта плоскости  $z$  на правую половину  $OA_1 A_2 B$  данного прямоугольника с соответствием точек  $O \leftrightarrow 0$ ,  $A_1 \leftrightarrow 1$ ,  $B \leftrightarrow \infty$ . Прообраз точки  $A_2$  обозначим  $1/k$ , где  $0 < k < 1$ . Искомое отображение можно рассматривать как продолжение этого отображения по принципу симметрии через положительную полуось  $y$ , следовательно, можно считать, что  $A_3 \leftrightarrow 1/k$ . Таким образом, искомое отображение запишется в виде

$$w = C' \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1) \left( z^2 - \frac{1}{k^2} \right)}} + C_1 = C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2) (1 - k^2 z^2)}}$$

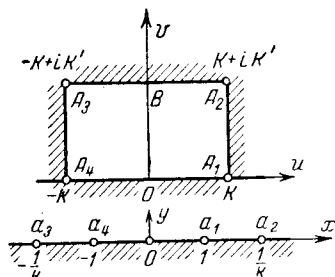


Рис. 83.

(постоянная  $C_1 = 0$  в силу соответствия точек  $O \leftrightarrow 0$ ). Для определения постоянных  $C$  и  $k$  воспользуемся соответствием точек  $A_1 \leftrightarrow 1$ :

$$K = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2) (1 - k^2 t^2)}}, \quad (1)$$

а также точек  $A_2 \leftrightarrow 1/k$ :

$$K + iK' = C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2) (1 - k^2 t^2)}} + C \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1) (1 - k^2 t^2)}} = K + iC \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1) (1 - k^2 t^2)}}$$

(мы разбили интеграл от 0 до  $1/k$  на два — от 0 до 1 и от 1 до  $1/k$  и воспользовались равенством (1)). Отсюда

$$K' = C \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1) (1 - k^2 t^2)}}. \quad (2)$$



Мы будем считать постоянную  $k$  ( $0 < k < 1$ ) заданной, а размеры прямоугольника  $K$  и  $K'$  выбранными так, что постоянная  $C$  в формулах (1) и (2) равна 1:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \quad (3)$$

Тогда отображение полуплоскости на наш прямоугольник будет осуществляться функцией

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (4)$$

Интеграл (4) не выражается в элементарных функциях, он принадлежит к числу так называемых *эллиптических интегралов*, а функция, обращающая его (т. е. реализующая отображение прямоугольника на полуплоскость), — к числу *эллиптических функций Якоби*. Она имеет специальное обозначение

$$z = \operatorname{sn} w = \operatorname{sn}(w; k) \quad (5)$$

(читается «эс эн  $w$ » или «эс эн  $w$ ,  $k$ ») и название *эллиптический синус*. Подробнее мы ознакомимся с ней в последней главе (см. п 102); там же мы рассмотрим решение задачи об отображении на полуплоскость произвольного прямоугольника (а не с фиксированными размерами, как здесь).

Здесь мы лишь отметим интересное свойство функции  $\operatorname{sn} z$  (\*): она оказывается мероморфной функцией, обладающей двумя периодами, отношение которых чисто мнимое.

Для доказательства этого утверждения мы обозначим наш прямоугольник цифрой (1), а его стороны — цифрами I, II, III, IV, как указано на рис. 84. Функцию  $w = \operatorname{sn} z$ , первоначально определенную в прямоугольнике (1), по принципу симметрии мы продолжаем, например, через сторону I в прямоугольник (2).

Это продолжение реализует отображение (2) на нижнюю полуплоскость. Продолжая далее это отображение через сторону II' прямоугольника (2), получим, что  $w = \operatorname{sn} z$  реализует отображение прямоугольника (3) снова на верхнюю полуплоскость и т. д. (прямоугольники, заштрихованные на рис. 84, отображаются на верхнюю полуплоскость, а незаштрихованные — на нижнюю).

Таким образом, мы продолжим функцию  $w = \operatorname{sn} z$  на всю плоскость  $z$ . При этом функция окажется однозначной, ибо если при обходе какого-либо замкнутого контура мы вновь попадем, например, в прямоугольник (1), то новые значения  $\operatorname{sn} z$  будут совпадать со старыми (они отображают (1) на полуплоскость с той же нормировкой, что и раньше). Далее, эта функция правильна внутри прямоугольников и на их границах всюду, кроме точки  $iK'$  и всех точек, соответствующих ей при продолжениях (они отмечены на рис. 83 крестиком), где она имеет полюсы, ибо эти точки при конформном отображении переходят в  $w = \infty$ . Итак,  $\operatorname{sn} z$  является мероморфной функцией.

\*) Мы изменяем обозначения переменных.

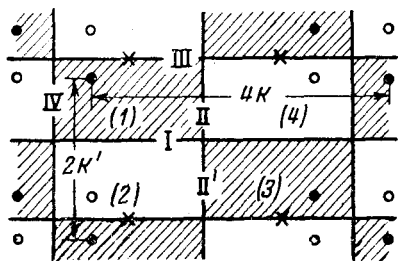


Рис. 84.

Далее, на рис. 84 черным кружком отмечена произвольная точка  $z$  прямоугольника ( $I$ ) и все точки, которые получаются из нее четным числом продолжений\*). Во всех этих точках, имеющих вид  $z + 4nK + 2n'K'i$ , где  $n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , функция  $\operatorname{sn} z$  принимает одинаковые значения:

$$\operatorname{sn}(z + 4nK + 2n'K'i) = \operatorname{sn} z. \quad (6)$$

Это свойство и означает, что  $\operatorname{sn} z$  имеет два периода  $\tau = 4K$  и  $\tau' = 2K'i$ .

Из рассмотрения продолжений  $\operatorname{sn} z$  следует также, что эта функция является нечетной

$$\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z. \quad (7)$$

2) Полоса с горизонтальным вырезом (рис. 85) представляет собой четырехугольник, три вершины  $A_1, A_2$  и  $A_3$  которого находятся в бесконечности и углы  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Будем считать  $a_4 = 0, a_1 = 1$  и  $a_2 = \infty$ , а также примем  $z_0 = 0$  (тогда из соответствия точек  $a_4$  и  $A_4$  сразу находим  $C_1 = 0$ ). Точке  $A_3$ , следовательно, соответствует некоторая точка  $a_3 = -a$  отрицательной полуоси. Интеграл Шварца — Кристоффеля принимает вид:

$$w = C \int_0^z \frac{z dz}{(z-1)(z+a)} =$$

$$= C' \left\{ \ln(1-z) + a \ln\left(1 + \frac{z}{a}\right) \right\} \quad (8)$$

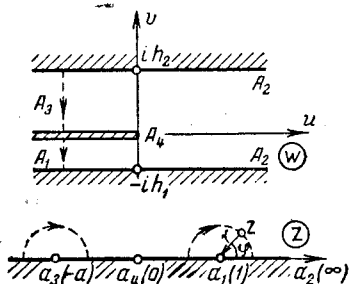


Рис. 85.

(множитель, соответствующий точке  $A_2$ , исчезает; см. 1) предыдущего пункта).

Для определения постоянных  $C'$  и  $a$  мы воспользуемся следующим соображением: когда точка  $z$  обходит точку  $a_1 = 1$  по полуокружности  $c$ , достаточно малого радиуса  $r$  (т. е. когда вектор  $1-z = re^{i\varphi}$  поворачивается, изменяя свой аргумент от 0 до  $-\pi$ ), то соответствующая точка  $w$  должна перейти с луча  $A_4A_1$  на  $A_1A_2$  и приращение  $w$  должно мало отличаться от  $-ih_1$ :

$$\Delta w = -ih_1 + O(r),$$

где  $O(r)$  — бесконечно малая при  $r \rightarrow 0$ . Это соображение оправдывается тем, что образ полуокружности  $c$ , при малых  $r$  мало отличается от отрезка прямой, соединяющего лучи  $A_4A_1$  и  $A_1A_2$  и перпендикулярного к ним.

С другой стороны, при таком малом приращении  $\Delta z$  приращение второго слагаемого из фигурной скобки формулы (8) также будет малым, ибо это слагаемое непрерывно в точке  $z=1$ . Приращение же первого слагаемого  $\ln(1-z) = \ln r + i\varphi$  равно  $-i\pi$ , следовательно,

$$\Delta w = -C'i\pi + O(r).$$

Приравнявая выражения, полученные для  $\Delta w$ , и переходя к пределу при  $r \rightarrow 0$ , находим:

$$C' = h_1/\pi.$$

Аналогично, когда точка  $z$  обходит точку  $a_3 = -a$  по окружности  $z+a=re^{i\varphi}$  ( $\varphi$  меняется от  $\pi$  до 0), приращение  $\Delta w = -C'ai\pi + O(r)$  должно мало отличаться от  $-ih_2$ ; отсюда

$$a = h_2/h_1.$$

\*) Белыми кружками отмечены точки, в которых наша функция принимает значения  $\operatorname{sn} z$ .

Окончательно, функция, реализующая конформное отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на полосу с вырезом (рис. 85), имеет вид

$$w = \frac{h_1}{\pi} \ln(1 - z) + \frac{h_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right). \quad (9)$$

Совершая дополнительное отображение нашей полосы с вырезом на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \omega > 0$  с выброшенным наклонным отрезком длины 1 (рис. 86):

$$\omega = e^{\frac{\pi}{H}(w + h_1 i)},$$

где  $H = h_1 + h_2$ , и используя формулу (9), мы находим отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на эту область:

$$\frac{H}{\pi} \ln \omega - h_1 i = \frac{h_1}{\pi} \ln(1 - z) + \frac{h_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right)$$

(мы обозначим  $\omega$  снова через  $w$ ). После простых преобразований получим:

$$w = (z - 1)^{h_1/H} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right)^{h_2/H}.$$

Выброшенный отрезок составляет с положительной осью угол  $\pi \frac{h_1}{H}$ , который мы обозначим через  $\alpha\pi$  (рис. 86); вводя параметр  $\alpha$ , получим окончательно

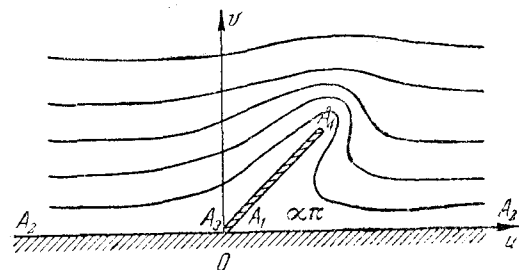


Рис. 86.

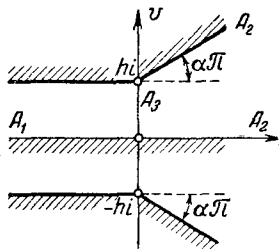


Рис. 87.

отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  с выброшенным отрезком  $(0, e^{i\alpha\pi})$ :

$$w = (z - 1)^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha - 1} z\right)^{1-\alpha}. \quad (10)$$

На рис. 86 указаны линии, соответствующие при этом отображении прямым  $\text{Im } z = \text{const.}$

При  $\alpha = 1/2$  получаем старый результат (см. п. 33, пример 2).

3) Многоугольник на рис. 87 представляет собой четырехугольник с двумя вершинами в бесконечности. Имея в виду применение принципа симметрии, мы ограничимся рассмотрением верхней его половины — треугольника  $A_1A_2A_3$  с углами  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = -\alpha$ ,  $\alpha_3 = 1 + \alpha$  ( $\sum \alpha_k = 1$ ). Назначим точки оси  $x$ , соответствующие вершинам, так:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \infty$ ,  $a_3 = -1$ ; учитывая соответствие точек  $a_3$  и  $A_3$ , имеем:

$$w = C \int_{-1}^z \frac{(z+1)^\alpha}{z} dz + ih.$$

Для определения постоянной  $C$  мы воспользуемся тем, что при обходе точкой  $z$  полуокружности  $c_r$ :  $z = re^{i\varphi}$  ( $\varphi$  меняется от  $\pi$  до 0) функция, определяемая последним интегралом, получает приращение

$$\Delta w = C \int_{c_r} \frac{dz}{z} + O(r) = -C\pi i + O(r)$$

(функция  $(z+1)^\alpha$  на окружности  $c_r$  мало отличается от 1:  $(z+1)^\alpha = 1 + O(r)$ ). С другой стороны, при этом обходе соответствующая точка  $w$  переходит с луча  $A_1A_3$  на луч  $A_1A_2$ , следовательно,  $\Delta w$  мало отличается от  $-hi$ . Таким образом,  $C = h/\pi$ , и функция, осуществляющая конформное отображение верхней полуплоскости на верхнюю половину многоугольника рис. 87, имеет вид

$$w = \frac{h}{\pi} \int_{-1}^z \frac{(z+1)^\alpha}{z} dz + ih. \quad (11)$$

Заменяя здесь  $z$  на  $e^z$ , получим отображение полосы  $0 < y < \pi$  на верхнюю половину многоугольника:

$$w = \frac{h}{\pi} \left\{ \int_{i\pi}^z (e^z + 1)^\alpha dz + i\pi \right\}. \quad (12)$$

Так как согласно нашему выбору соответствующих точек нижнему краю полосы соответствует средняя линия многоугольника, то по принципу симметрии та же функция (12) реализует конформное отображение полосы  $-\pi < y < \pi$  на весь многоугольник.

При рациональных  $\alpha$  интеграл (12) выражается в элементарных функциях (он сводится к интегралу от биномиального дифференциала). При  $\alpha = 1$  получаем уже известное отображение (см. пример 5 п. 30):

$$w = \frac{h}{\pi} \{e^z + z + 1\}. \quad (13)$$

При  $\alpha = 1/2$  имеем:

$$w = \frac{2h}{\pi} \left\{ \sqrt{e^z + 1} + \ln(\sqrt{e^z + 1} - 1) - \frac{z}{2} \right\}. \quad (14)$$

4) Найдем конформное отображение полосы  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  на плоскость с двумя выброшенными лучами (рис. 88,  $0 < \alpha < 1$ ). Опять применим принцип симметрии — верхняя половина области в плоскости  $w$  представляет собой треугольник с двумя вершинами в бесконечности и углами  $\alpha_1 = \alpha - 1$ ,  $\alpha_2 = -\alpha$ ,  $\alpha_3 = 2$ . Чтобы воспользоваться формулой Шварца — Кристоффеля, отобразим полосу  $0 < y < \pi$  на полуплоскость:  $\xi = e^z$ . Учитывая соответствие точек, указанное на рис. 88, мы принимаем  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -\infty$ , тогда точка  $a_3$  попадает на отрицательную полуось и мы полагаем  $a_3 = -a$ , где  $a$  — пока неопределенное положительное число. Формула Шварца — Кристоффеля принимает тогда вид:

$$w = C \int \xi^{\alpha-2} (\xi + a) d\xi + C_1 = C \left( \frac{\xi^\alpha}{\alpha} + \frac{a}{\alpha-1} \xi^{\alpha-1} \right) + C_1; \quad (15)$$

здесь  $C$  — положительная постоянная, ибо луч  $A_1A_2$  не поворачивается при отображении и, следовательно,  $\arg C = 0$  (см. замечание в конце п. 37),

$C_1$  — действительно, ибо подстановка в (15) положительных значений  $\xi$  должна привести к действительным  $w$  (см. рис. 88). Чтобы формула (15) приняла наиболее простой вид, положим  $\frac{1}{a} = -\frac{a}{a-1}$ , т. е.  $a = \frac{1-a}{a}$ ; будем иметь:

$$w = \frac{C}{a} (\xi^a - \xi^{a-1}) + C_1. \quad (16)$$

Соответствие точек  $\xi = -a$  и  $w = le^{ia\pi}$  дает:

$$\frac{C}{a} (e^{ia\pi} a^a + e^{ia\pi} a^{a-1}) + C_1 = le^{ia\pi},$$

откуда, учитывая, что постоянные  $C$  и  $C_1$  — действительные, получаем значения  $C_1 = 0$  и  $C = \frac{al}{a^{a-1}(a+1)} = l\alpha^{1+a}(1-\alpha)^{1-a}$ . Подставляя в (16)  $\xi = e^z$ , находим искомое отображение:

$$w = l\alpha^a (1-\alpha)^{1-a} (e^{az} - e^{(a-1)z}). \quad (17)$$

На рис. 88 показано также соответствие линий при этом отображении.

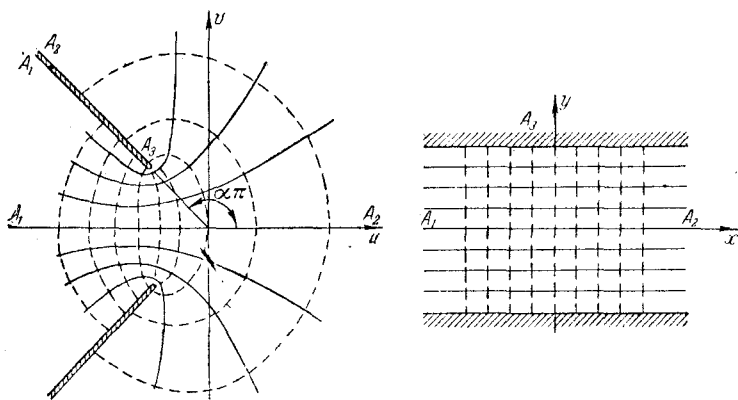


Рис. 88.

5) Многоугольник на рис. 89 ( $0 \leq \alpha < \frac{3}{2}$ ) представляет собой четырехугольник с двумя вершинами в  $\infty$  и углами  $\alpha_1 = \alpha - 2$ ,  $\alpha_2 = 2$ ,  $\alpha_3 = -\alpha$ ,  $\alpha_4 = 2$ . Положим  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = \infty$ ; тогда  $a_4$  попадает на отрицательную ось и мы считаем  $a_4 = -b$ . Интеграл Шварца — Кристоффеля имеет вид

$$\begin{aligned} w &= C \int_1^z z^{\alpha-3} (z-1)(z+b) dz = \\ &= C \left[ \frac{1}{\alpha} z^\alpha + \frac{b-1}{\alpha-1} z^{\alpha-1} - \frac{b}{\alpha-2} z^{\alpha-2} + \frac{\alpha(1+b)-2}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

( $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ ). Для определения постоянных  $C$  и  $b$  воспользуемся: 1) тем, что луч  $A_2A_3$  переходит в положительную полуось, следовательно,  $\arg C = 0$ , т. е.  $C$  — положительная постоянная; 2) соответствием точек  $z = -b$  и  $w = ai$ . Отделяя в (18) после подстановки  $z = be^{i\pi}$ ,  $w = ai$  действительные и мнимые части, получим два уравнения:

$$b^{\alpha-1} \cos \pi \alpha = \frac{2 - \alpha(1+b)}{2b - \alpha(1+b)}; \quad C = \frac{ab^{1-\alpha}}{\sin \pi \alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2b - \alpha(1+b)}, \quad (19)$$

которые и позволяют (хотя бы приближенно) найти неизвестные постоянные.

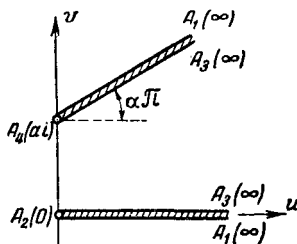


Рис. 89.

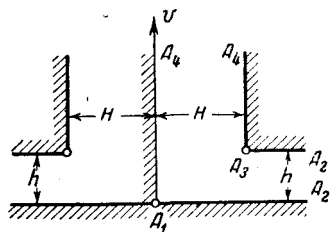


Рис. 90.

В частности, при  $\alpha = \frac{1}{2}$  получаем  $b = 3$ ,  $C = \frac{3\sqrt{3}}{32} a$ , и отображающая функция принимает вид

$$w = \frac{3a}{16} \sqrt{3z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2. \quad (20)$$

При  $\alpha = 1$  вместо выражения (18) получаем:

$$w = C \left\{ z + \frac{b}{z} + (b-1) \ln z - 1 - b \right\}; \quad (21)$$

для определения постоянных имеем уравнения

$$\ln b = 2 \frac{b+1}{b-1}, \quad C = \frac{a}{\pi(b-1)}. \quad (22)$$

6) Многоугольник на рис. 90 представляет собой пятиугольник. Рассмотрим его правую половину — четырехугольник с углами  $\alpha_1 = 1/2$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_3 = 3/2$  ( $\sum \alpha_k = 2$ ). Конформное отображение верхней полуплоскости  $\xi$  на этот четырехугольник, если принять  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = a^2$ ,  $a_4 = \infty$ , осуществляет функция

$$w = C \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{\xi - a^2}{\xi}} \frac{d\xi}{\xi - 1}.$$

Для подсчета постоянных  $a$  и  $C$  рассматриваем приращения  $w$  при обходе  $z$  по полуокружностям  $C_R$  и  $c_r$  с центром  $\xi = 1$  и, соответственно, бесконечно большого и бесконечно малого радиусов. Первому обходу соответствует переход с луча  $A_1A_4$  на луч  $A_3A_4$ , следовательно,  $\Delta w = H + O(1/R)$ ; с другой стороны, при больших  $|\xi|$  корень под интегралом близок к 1 и,

следовательно,  $\Delta w = C \Delta \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\xi - 1} + O\left(\frac{1}{R}\right) = -i\pi C + O(1/R)$ ; сравнивая

эти выражения, находим  $C = Hi/\pi$ . Второму обходу соответствует переход с луча  $A_1A_2$  на  $A_3A_2$ , следовательно,  $\Delta\omega = ih + O(r)$ , а интеграл Шварца — Кристоффеля дает  $\Delta\omega = C\sqrt{1-a^2}(-i\pi) + O(r)$ ; сравнение этих двух выражений приводит к равенству  $a^2 = (H^2 + h^2)/H^2$ .

Подстановка  $\frac{\xi - a^2}{\xi} = \frac{1}{\omega^2}$  приводит наш интеграл к виду

$$\omega = 2C \int_0^{\omega} \left\{ \frac{a^2 - 1}{1 + (a^2 - 1)\omega^2} + \frac{1}{1 - \omega^2} \right\} d\omega,$$

после чего интеграл легко вычисляется. Подставляя найденные значения  $a$  и  $C$  и интегрируя, получаем:

$$\omega = \frac{2i}{\pi} \left( h \operatorname{arctg} \frac{h}{H} \sqrt{\frac{\xi}{\xi - a^2}} + H \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\xi}{\xi - a^2}} \right).$$

Вспомогательному разрезу по мнимой оси в плоскости  $w$  соответствует разрез по отрицательной полуоси в плоскости  $\xi$ , поэтому, по принципу симметрии, полученная функция реализует отображение плоскости  $\xi$  с вырезанной положительной полуосью на весь заданный пятиугольник.

Полагая  $\xi = z^2$ , получим окончательное отображение верхней полуплоскости  $z$  на весь пятиугольник:

$$w = \frac{2i}{\pi} \left( h \operatorname{arctg} \frac{hz}{H\sqrt{z^2 - a^2}} + H \operatorname{arth} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right). \quad (23)$$

7) Углы многоугольника на рис. 91 суть  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = 3/2$ . Пусть точки, соответствующие вершинам, будут  $a_1 = -a$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = -b$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_5 = \infty$ , тогда функция, ото-

бражающая верхнюю полуплоскость на этот многоугольник, имеет вид:

$$w = C \int_0^z \frac{\sqrt{z(z+1)}}{(z+a)(z+b)} dz. \quad (24)$$

Интегрируя по бесконечно большой полуокружности с центром в начале координат, найдем  $C(-i\pi) = -ih_3$ , откуда  $C = h_3/\pi$ . Интегрируя по бесконечно малым полуокружностям с центрами в точках  $z = -a$  и  $z = -b$ , получим \*)

$$-C \frac{\sqrt{a(a-1)}}{-a+b} (-i\pi) = -h_1 i \quad \text{и} \quad C \frac{i\sqrt{b(1-b)}}{a-b} (-i\pi) = h_2,$$

откуда  $\frac{\sqrt{a(a-1)}}{a-b} = \frac{h_1}{h_3}$ ,  $\frac{\sqrt{b(1-b)}}{a-b} = \frac{h_2}{h_3}$ . Последние два уравнения позволяют найти  $a$  и  $b$ ; интеграл (24) выражается в элементарных функциях.

\*) Нетрудно проследить, что здесь следует брать отрицательное значение корня.

8) В заключение приведем пример отображения круга  $|z| < 1$  на внутренность многоугольника — пятиконечной звезды, изображенной на рис. 92. Эта область представляет собой десятиугольник, пять углов которого равны  $\alpha = 5/7$  и пять  $\beta = 1/5$ . Мы воспользуемся формулой (6) п. 38; чтобы найти точки окружности, соответствующие вершинам звезды, рассмотрим десятую ее часть — треугольник  $A_1 B_1 O$  (рис. 92). Этот треугольник можно отобразить на сектор  $0 < \arg z < \pi/5$ ,  $|z| < 1$  так, чтобы точка  $A_1$  перешла в 1, а  $B_1$  — в  $e^{i \frac{\pi}{5}}$ . По принципу симметрии наше отображение про-

должается на всю звезду, причем точки  $A_k$  переходят в  $a_k = e^{i \frac{2\pi}{5}(k-1)}$  (корни пятой степени из 1), а  $B_k$  — в  $b_k =$

$e^{i \frac{\pi}{5}(2k-1)}$  (корни пятой степени из  $-1$ );  $k = 1, 2, \dots, 5$ . В силу единственности отображения его можно найти по формуле (6) п. 38, которая, следовательно, принимает вид

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z \frac{\prod (z - a_k)^{2/5}}{\prod (z - b_k)^{4/5}} dz = \\ &= C \int_0^z \frac{(1 - z^5)^{2/5}}{(1 + z^5)^{4/5}} dz, \end{aligned} \quad (25)$$

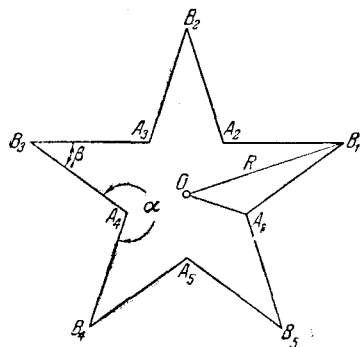


Рис. 92.

(мы воспользовались очевидными тождествами  $\prod (z - a_k) = z^5 - 1$ ,  $\prod (z - b_k) = z^5 + 1$ ;  $\Pi$  — знак произведения).

Постоянную  $C$  мы примем действительной, она определяется размером  $OB_k = R$  звезды: так как точка  $z = -1$  переходит в вершину звезды, а  $z = 0$  — в центр, то

$$R = C \int_{-1}^0 \frac{(1 - x^5)^{2/5}}{(1 + x^5)^{4/5}} dx;$$

после подстановки  $t = \left( \frac{1 + x^5}{1 - x^5} \right)^2$  этот интеграл переходит в интеграл, выражающийся через гамма-функцию Эйлера:

$$\frac{1}{5 \cdot 2^{2/5}} \int_0^1 t^{-9/10} (1-t)^{-4/5} dt = \frac{1}{5 \cdot 2^{2/5}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{10}\right) \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{10}\right)}$$

(см. п. 90). Таким образом,

$$C = \frac{5 \sqrt[5]{4} \Gamma\left(\frac{3}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(\frac{1}{10}\right)} R. \quad (26)$$



**40. Скругление углов.** Во многих практических вопросах приходится учитывать, что фактически углы рассматриваемых многоугольников всегда скруглены. Мы дадим здесь приближенные методы учета влияния таких закруглений.

1) Скругление угла, меньшего  $\pi$ . Найдем сначала функцию, реализующую отображение верхней полуплоскости  $z$  на верхнюю полуплоскость  $\zeta$ , из которой выброшена малая площадка, ограниченная отрезком  $(-1, 1)$  и дугой кривой, опирающейся на этот отрезок и касающейся действительной оси в его концах \*) (рис. 93). Для этого мы рассмотрим отображение  $z_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$  верхней полуплоскости  $\zeta$  на верхнюю полуплоскость  $z_1$  с выброшенным единичным полукругом и в качестве нашей кривой возьмем прообраз половины эллипса с полуосями 1 и  $1+h$ , близкого к полуокружности (рис. 93). Теперь остается найти

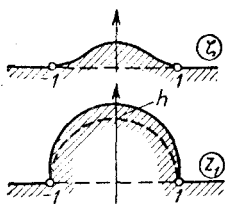


Рис. 93.

отображение верхней полуплоскости  $z_1$  с выброшенной половиной эллипса на верхнюю полуплоскость  $z$ . Последняя задача решается элементарно. Преобразованием подобия  $z_2 = z_1/c$ , где  $c = \sqrt{(1+h)^2 - 1} = \sqrt{h(2+h)}$ , мы переводим фокусы эллипса в точки  $\pm i$ , затем применяем отображение  $z_2 = \frac{1}{2} \left( z_3 - \frac{1}{z_3} \right)$ , получая в плоскости  $z_3$  вместо эллипса круг радиуса  $r = \frac{1 + \sqrt{1+c^2}}{c} = \sqrt{\frac{2+h}{h}}$ , наконец, преобразованием  $z = \frac{1}{2} \left( \frac{z_3}{r} + \frac{r}{z_3} \right)$  получаем верхнюю полуплоскость. Имеем:  $z_3 = r(z + \sqrt{z^2 - 1})$ ,  $z_1 = \frac{c}{2} \left[ \left( r - \frac{1}{r} \right) z + \left( r + \frac{1}{r} \right) \sqrt{z^2 - 1} \right]$ , или, учитывая выражения для  $r$  и  $c$ ,  $z_1 = z + (1+h) \sqrt{z^2 - 1}$ .

Наконец, пренебрегая малыми порядка выше  $h$ , получаем окончательно:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z_1 + \frac{1}{z_1} \right) \approx z - h \{ \sqrt{(z^2 - 1)^3} - z(z^2 - 1) \}. \quad (1)$$

С помощью дополнительных линейных преобразований  $\tilde{\zeta} = a\zeta + b$ ,  $\tilde{z} = az + b$  мы получим более общий результат: функция \*\*)

$$\zeta \approx z - \frac{h}{a^2} \{ \sqrt{(z - b_1)^3 (z - b_2)^3} - (z - b_1)(z - b_2)(z - b) \} = g_b(z), \quad (2)$$

\*) Функция из примера 2) п. 34 не годится, ибо там дуга не касается оси.

\*\*) Вместо  $\tilde{z}$  и  $\tilde{\zeta}$  мы снова пишем  $z$  и  $\zeta$ .

где  $b_1 = b - a$ ,  $b_2 = b + a$ , реализует отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  с выброшенной малой площадкой, ограниченной отрезком  $(b - a, b + a)$  и дугой, опирающейся на этот отрезок и касающейся его в концах; величина  $h$ , пропорциональная максимальной ординате кривой, предполагается малой высшего порядка относительно  $a$  (рис. 94).

Пусть теперь функция  $w = f(\zeta)$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$  на некоторый многоугольник  $\Delta$ , причем точка  $b$  соответствует вершине  $B$  угла многоугольника, меньшего  $\pi$ . Совершая дополнительное отображение  $\zeta = g_b(z)$  с помощью функции (2), мы найдем конформное отображение

$$w = f[g_b(z)] \quad (3)$$

верхней полуплоскости  $z$  на область  $\tilde{\Delta}$ , которая получается из  $\Delta$  скруглением угла  $B$  в достаточно малой окрестности вершины этого угла (рис. 94). Повторным применением этого приема можно скруглить все углы  $\Delta$ , меньшие  $\pi$ .

2) Скругление угла, большего  $\pi$ . Без ограничения общности можно считать, что вершина  $A_1$  многоугольника  $\Delta$ , угол при которой мы скругляем, лежит в точке  $w = 0$ , сторона  $A_1A_2$  идет по положительной полуоси и  $a_1 = 0$ , а прообразы  $-a_2, -a_3, \dots, -a_n$  остальных вершин  $\Delta$  отрицательны (этого всегда можно достичь дополнительными дробно-линейными преобразованиями плоскостей). В этих предположениях функцию, реализующую конформное отображение верхней полуплоскости  $z$  на многоугольник  $\Delta$ , можно записать с помощью интеграла Шварца — Кристоффеля в виде

$$w = C \int_0^z z^{a_1-1} \varphi(z) dz, \quad (4)$$

где  $\varphi(z) = (z + a_2)^{a_2-1} \dots (z + a_n)^{a_n-1}$  и  $C$  — положительная постоянная ( $\arg C = 0$  в силу нашего выбора отрезка  $A_1A_2$ ).

Для того чтобы скруглить угол в вершине  $A_1$ , мы вместо (4) рассматриваем функцию

$$w = f(z) = C \int_0^z \{z^{a_1-1} + \gamma(z + \beta)^{a_1-1}\} \varphi(z) dz, \quad (5)$$

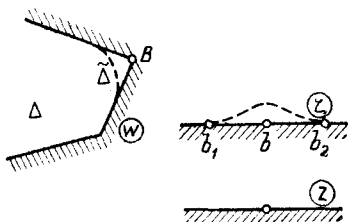


Рис. 94.

где  $\beta$  и  $\gamma$  — постоянные, подлежащие определению; мы будем считать  $\beta$  малым положительным числом (во всяком случае,  $\beta < a_n$ ). Согласно разделу 5) п. 38 функция

$$w = f_2(z) = C\gamma \int_0^z (z + \beta)^{\alpha_1 - 1} \varphi(z) dz$$

реализует отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на многоугольник со сторонами, параллельными сторонам  $\Delta$ , причем точка  $z = -\beta$  соответствует вершине  $B''$ , лежащей на отрицательной полуоси  $u$  (угол при ней равен  $\alpha_1\pi$ ), а остальным вершинам  $A_2'', \dots, A_n''$  соответствуют точки  $-a_2, \dots, -a_n$  (этот многоугольник обозначен пунктиром на рис. 95).

Рассмотрим еще функцию

$$w = f_1(z) = C \int_0^z z^{\alpha_1 - 1} \varphi(z) dz,$$

которая реализует отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на многоугольник с вершинами  $A_1, A_2', \dots, A_n'$  (он обозначен на рис. 95 тонкими сплошными линиями). Для каждого фиксированного  $z$  вектор  $w$ ,

определяемый формулой (5), получается сложением векторов  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ . Выполняя это сложение, мы убедимся в том, что когда  $z$  описывает действительную ось, точка  $w$  будет описывать замкнутый путь  $A_1A_2 \dots \dots A_nBA_1$ , который весь, кроме участка  $BA_1$ , состоит из отрезков, параллельных соответствующим сторонам заданного многоугольника (жирные линии на рис. 95).

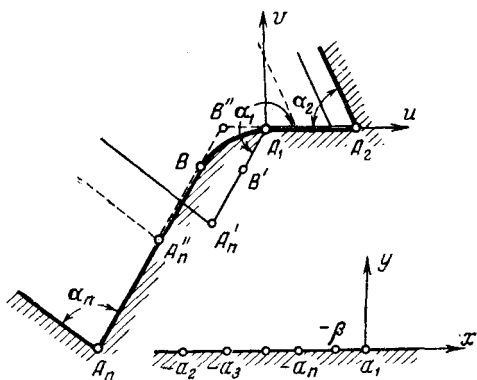


Рис. 95.

Для того чтобы получить параметрические уравнения участка  $BA_1$ , мы введем положительный параметр  $t = -z$  ( $0 < t < \beta$ ). Формула (5) даст тогда

$$\frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} = C \{ e^{i\alpha_1\pi} t^{\alpha_1 - 1} - \gamma (\beta - t)^{\alpha_1 - 1} \} \varphi(-t),$$

откуда для тангенса угла наклона касательной к  $BA_1$  с осью  $u$  будем иметь:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\sin \alpha_1 \pi \cdot t^{\alpha_1-1}}{\cos \alpha_1 \pi \cdot t^{\alpha_1-1} - \gamma (\beta - t)^{\alpha_1-1}} = \frac{\sin \alpha_1 \pi}{\cos \alpha_1 \pi - \gamma \left( \frac{\beta}{t} - 1 \right)^{\alpha_1-1}}.$$

Из этого выражения видно, что в случае угла, большего  $\pi$  (т. е. при  $1 < \alpha_1 < 2$ ),  $\operatorname{tg} \theta$  будет равным 0 в точке  $t = 0$ , соответствующей  $A_1$ , и равным  $\operatorname{tg} \alpha_1 \pi$  в точке  $t = \beta$ , соответствующей  $B$ . Таким образом, в случае угла, большего  $\pi$ , дуга  $BA_1$  действительно скругляет угол при вершине  $A_1$  \*).

Согласно принципу соответствия границ функция (5) реализует конформное отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на область  $\tilde{\Delta}$ , ограниченную контуром  $A_1 A_2 \dots A_n B A_1$ . Варьируя постоянные  $C$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , мы можем достичь того, что область  $\Delta$  будет сколь угодно мало отличаться от заданной многоугольной области  $\tilde{\Delta}$ .

Покажем, как это делается, на одном простом примере. Рассмотрим многоугольник, изображенный на рис. 96, — это частный случай треугольника из примера 3) предыдущего пункта. Будем считать, что точкам  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  соответствуют точки 0, 1 и  $\infty$  действительной оси; тогда интеграл Шварца — Кристоффеля запишется в виде

$$w = C \int_0^z \frac{\sqrt{z}}{1-z} dz, \quad (6)$$

где  $C$  — положительная постоянная (на участке  $(0, 1)$   $w$  должно принимать положительные значения). В соответствии с

\*) При  $\alpha_1 < 1$  имеем  $\left. \frac{dv}{du} \right|_{t=0} = \operatorname{tg} \alpha_1 \pi$ ,  $\left. \frac{dv}{du} \right|_{t=\beta} = 0$  и дуга  $A_1 B$  не скругляет угол. Скругления в этом случае можно достичь, если вместо (5) взять функцию

$$w = C \int_0^z \{z^{\alpha_1-1} + \gamma (z - \beta)^{\alpha_1-1}\} \varphi(z) dz,$$

где  $\beta > 0$ , однако такой способ менее удобен, чем описанный в начале пункта.

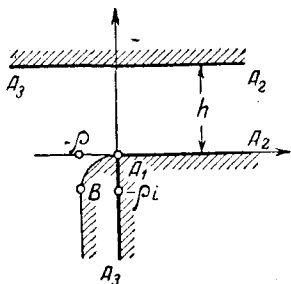


Рис. 96.

изложенным выше мы полагаем вместо этого

$$w = C \int_0^z \frac{\sqrt{z} + \gamma \sqrt{z + \beta}}{1 - z} dz. \quad (7)$$

Эта функция переводит отрезок  $(0, 1)$  в положительную полуось, и мы потребуем, чтобы при переходе через точку  $z = 1$  она получила приращение  $ih$ ; отсюда, как и в п. 39, получаем:

$$C\pi(1 + \gamma \sqrt{1 + \beta}) = h. \quad (8)$$

Далее мы потребуем, чтобы точке  $z = -\beta$  соответствовала точка  $B = -\rho - i\rho$  так, чтобы при малых  $\beta$  дуга  $BA_1$  была близка к дуге окружности радиуса  $\rho$ . После замены  $z = -t$  это приведет к уравнению

$$\rho + i\rho = C \int_0^\beta \frac{i\sqrt{t} + \gamma \sqrt{\beta - t}}{1 + t} dt.$$

Разделяя в ней действительные и мнимые части и интегрируя, придем к следующим двум соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 2C \{ \sqrt{\beta} - \operatorname{arctg} \sqrt{\beta} \}, \\ \rho &= 2C\gamma \left\{ \sqrt{1 + \beta} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\beta}{1 + \beta}} - \sqrt{\beta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Полученные три соотношения (8) и (9) позволяют найти  $\rho$ ,  $C$  и  $\gamma$ , как функции параметра  $\beta$ . При малых  $\beta$  имеем:

$$\rho \approx \frac{h}{3\pi} \beta^{3/2}, \quad C \approx \frac{h}{2\pi} \left( 1 - \frac{3}{4}\beta \right), \quad \gamma \approx 1 + \beta. \quad (10)$$

Отображающая функция примет тогда вид (с точностью до малых высшего порядка относительно  $\beta$ )

$$w = \frac{2h}{\pi} \left\{ \operatorname{arth} \sqrt{z} - \sqrt{z} + \left( \frac{\beta}{4} - 1 \right) \sqrt{z} \right\}. \quad (11)$$

\* \* \*

В этой главе мы ознакомились с некоторыми задачами теории конформных отображений, относящимися к кругу проблем, сформулированных в начале п. 28. В следующих двух главах читатель найдет дальнейшие примеры таких задач. В гл. III конформные отображения будут встречаться в связи с решениями различных краевых задач теории плоских векторных полей, тесно связанных с приложениями. Гл. IV посвящена вариационным принципам в теории конформных отображений; мы рассмотрим там поведение конформных отображений при изме-

нении границы отображаемых областей (проблема 3 из п. 28), а также некоторые приближенные формулы.

Мы не будем касаться методов приближенных расчетов конформных отображений (за исключением метода сеток в п. 45, который может быть использован для этой цели). С аналитическими методами таких расчетов читатель может ознакомиться по гл. V книги Л. В. Канторовича и В. М. Крылова [9]. Для многих практических целей предпочтительнее методы расчетов, использующие физические аналогии — методика таких расчетов с применением несложных специализированных приборов и электропроводной бумаги описана в книге П. Ф. Фильчакова и В. И. Панчишина [11].

С некоторыми практическими методами читатель может ознакомиться по книге Коппенфельса и Штальмана [13].

### Литература к главе II

- [1] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, тт. 1, 2, «Наука», 1968.
- [2] М. А. Лаврентьев, Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, Гостехиздат, 1947.
- [3] Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, «Наука», 1969.
- [4] К. Каратеодори, Конформное отображение, перев. с англ., ОНТИ, 1934.
- [5] Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, перев. с англ., ИЛ, 1953.
- [6] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
- [7] М. В. Келдыш, Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, Успехи матем. наук. вып. VI, 1939, стр. 90—119.
- [8] Г. М. Голузин, Л. В. Канторович и др., Конформное отображение односвязных и многосвязных областей, ОНТИ, 1937.
- [9] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962.
- [10] П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы конформных отображений. Справочное руководство, Киев, 1964.
- [11] П. Ф. Фильчаков и В. И. Панчишин, Интеграторы. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге, Изд-во АН УССР, Киев, 1961.
- [12] Г. Н. Положий, Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двухсвязных областей и определение постоянных Кристоффеля — Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий, Укр. матем. журн. 7, № 4 (1956), 423—432.
- [13] В. Коппенфельс и Ц. Штальман, Практика конформных отображений, перев. с нем., ИЛ, 1963.

## Краевые задачи теории функций и их приложения

Мы уже говорили, что теория функций комплексного переменного и в особенности ее геометрическая часть — теория конформных отображений — возникла и развилась на основании физических представлений. Леонард Эйлер и Жан Даламбер пришли к условиям аналитичности функций комплексного переменного из гидродинамических соображений, Бернхард Риман в своих исследованиях постоянно пользовался интерпретациями аналитических функций, связанными с плоскими течениями жидкости и тепловыми потоками.

С другой стороны, обратно, развитие теории функций комплексного переменного позволило создать новые методы решения важнейших практических задач из различных разделов математического естествознания (гидро- и аэродинамика, теория упругости, электростатические, магнитные и тепловые поля и т. д.). Следует отметить, что большие заслуги в приложениях теории функций комплексного переменного принадлежат ученым нашей страны.

Николай Егорович Жуковский и Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942) в начале XX в. пришли ко многим принципиальным результатам в применении теории функций к гидро- и аэродинамике. Методы теории функций комплексного переменного играют весьма существенную роль в их замечательных статьях, а также в книге Н. Е. Жуковского «Теоретические основы воздухоплавания» (1911 г.). И в наши дни важные и глубокие применения теории функций к гидро- и аэродинамике получены советскими учеными (М. В. Келдышем, С. А. Христиановичем, В. В. Голубевым, Л. И. Седовым и другими).

Г. В. Колосов\*) в 1909 г. положил начало серьезному применению теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. Блестящее решение этой задачи

---

\*) Гурий Васильевич Колосов (1867—1936) — русский ученый, специалист по теории упругости.

методами, опирающимися на теорию функций, получил в двадцатых годах Н. И. Мусхелишвили. Эти методы изложены в его книге [10], первое издание которой вышло в 1933 г. Методы теории функций комплексного переменного занимают видное место и в исследованиях по различным отраслям физики (В. А. Фок, Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров и др.).

В этой главе мы рассмотрим основные физические представления, связанные с теорией функций комплексного переменного, и простейшие приложения этой теории. Изложение мы начнем с теории гармонических функций двух переменных, тесно связанных с потенциалами плоских векторных полей, основных краевых задач теории гармонических и аналитических функций и затем на основе развитой теории изложим основные вопросы приложений.

## § 1. Гармонические функции

*Гармонической в области  $D$  функцией* называется действительная функция  $u(x, y)$  двух действительных переменных, обладающая в этой области непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяющая дифференциальному уравнению \*)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — символ дифференциального оператора). Это уравнение обычно называют *уравнением Лапласа*. Однако Лаплас рассмотрел его в 1782 г., а задолго до него это уравнение использовал Л. Эйлер в своих работах по гидродинамике и другим разделам математической физики. Заметим сразу, что в силу линейности уравнения Лапласа любая линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x, y)$$

гармонических функций  $u_k(x, y)$  с действительными постоянными коэффициентами  $\alpha_k$  снова является гармонической функцией.

Как мы увидим в последующих параграфах этой главы, потенциалы важнейших векторных полей, рассматривающихся

---

\*) Здесь всюду будет идти речь о гармонических функциях двух переменных, ибо именно они тесно связаны с аналитическими функциями. Для практики не менее важны гармонические функции трех переменных  $u(x, y, z)$ , удовлетворяющие уравнению  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ , которые, однако, мы не будем рассматривать.



в физике, являются гармоническими функциями, и любую гармоническую функцию можно представлять физически как потенциал некоторого поля. Поэтому и в общем случае гармонические функции часто называют *потенциалами*, а теорию гармонических функций — *теорией потенциала*.

**41. Свойства гармонических функций.** Выясним прежде всего связь между понятиями аналитических и гармонических функций. Эта связь выражается в следующих двух простых теоремах:

**Теорема 1.** Действительная и мнимая части произвольной функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , однозначной и аналитической в области  $D$ , являются в этой области гармоническими функциями.

Доказательство непосредственно вытекает из условий Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

В самом деле, так как аналитические функции обладают производными всех порядков, то уравнения (1) можно дифференцировать по  $x$  и  $y$ . Дифференцируя первое из них по  $x$ , а второе по  $y$  и пользуясь теоремой о равенстве смешанных производных, находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

откуда

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Для функции  $v(x, y)$  доказательство аналогично.

Две гармонические в области  $D$  функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , связанные условиями Коши—Римана, называются *сопряженными*.

**Теорема 2.** Для всякой функции  $u(x, y)$ , гармонической в односвязной области  $D$ , можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию  $v(x, y)$ .

В самом деле, рассмотрим интеграл

$$v_0(x, y) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

где  $z_0 = x_0 + iy_0$  — фиксированная, а  $z = x + iy$  — переменная точка области  $D$ . В силу уравнения Лапласа  $\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ , этот интеграл не зависит от пути интегрирования и является функцией только точки  $z$ ; мы и обозначаем эту функцию

$v_0(x, y)$ . Имеем, пользуясь свойствами криволинейных интегралов,

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_0(x+h, y) - v_0(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} -\frac{\partial u}{\partial y} dx = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

(мы можем брать интеграл от  $z$  до  $z+h$  по горизонтальному отрезку, на котором  $dy = 0$ ); аналогично,  $\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Следовательно,  $v_0(x, y)$  и является искомой функцией, сопряженной с функцией  $u(x, y)$ . Так как функция определяется своими частными производными с точностью до постоянного слагаемого, то совокупность всех гармонических функций, сопряженных с  $u(x, y)$ , дает формула

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C, \quad (2)$$

где  $C$  — произвольная (действительная) постоянная.

Заметим, что в многосвязной области  $D$  интеграл (2)

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C$$

определяет, вообще говоря, многозначную функцию. Он может принимать различные значения вдоль двух путей  $L$  и  $\tilde{L}$ , соединяющих точки  $z_0$  и  $z$ , если эти пути нельзя деформировать друг в друга, оставаясь в области  $D$  (т. е. если внутри области, ограниченной  $L$  и  $\tilde{L}$ , имеются точки, не принадлежащие к  $D$ ). Очевидно, на наш случай полностью переносится соответствующее рассуждение п. 13 и можно утверждать, что в многосвязной области общая формула для значений функции  $v(x, y)$ , определяемой интегралом (2), имеет вид:

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z_{L_0} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + N_1\Gamma_1 + N_2\Gamma_2 + \dots + N_n\Gamma_n + C, \quad (3)$$

где  $N_k$  — произвольные целые числа и  $\Gamma_k$  — интегралы вдоль замкнутых контуров  $\gamma_k$ , каждый из которых содержит внутри себя одну связную часть границы  $D$ :

$$\Gamma_k = \int_{\gamma_k} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (4)$$

(ср. формулы (2) и (3) из п. 13). Постоянные  $\Gamma_k$  называются *периодами* интеграла (2), или *циклическими постоянными*.

Если в некоторой области  $D'$ , лежащей в  $D$ , можно выделить однозначную и непрерывную ветвь функции  $v(x, y)$ , определяемой формулой (3), то эта ветвь, очевидно, является гармонической функцией, сопряженной с  $u(x, y)$ . Поэтому функцию  $v(x, y)$  считают *многозначной гармонической функцией*. Заметим, что частные производные этой функции однозначны:  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ; это вытекает из формулы (3).

Теорему 2-можно, очевидно, сформулировать так:

**Теорема 2'.** Любую гармоническую в области  $D$  функцию можно рассматривать как действительную или мнимую часть некоторой аналитической функции  $f(z)$ ; эта последняя определяется с точностью до постоянного слагаемого, соответственно мнимого или действительного.

Мы не исключаем случая многосвязных областей, поэтому аналитическая функция  $f(z)$  может оказаться многозначной.

**Пример.** Подсчет частных производных показывает, что функция

$$u = \ln(x^2 + y^2) = 2 \ln |z|$$

является гармонической в кольце  $0 < |z| < \infty$ . Интеграл (2) имеет вид:

$$v(x, y) = 2 \int_L^z \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} + C = 2 \operatorname{Arg} z + C$$

и представляет в кольце  $0 < |z| < \infty$  бесконечнозначную функцию. Соответствующая аналитическая функция

$$f(z) = u + iv = 2 \ln |z| + 2i \operatorname{Arg} z + iC = 2 \operatorname{Ln} z + iC$$

также бесконечнозначна.

**Теорема 3.** Любая гармоническая функция  $u(x, y)$  является аналитической функцией своих аргументов  $x$  и  $y$ , т. е. в окрестности каждой точки  $z_0 = x_0 + iy_0$  области  $D$  она представляется в виде суммы абсолютно сходящегося ряда

$$u(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (5)$$

В самом деле,  $u(x, y)$  по теореме 2' можно рассматривать как действительную часть функции  $f(z)$ , однозначной и аналитической в некоторой окрестности  $|z - z_0| < R$  точки  $z_0$ . Пусть в этой окрестности

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

где  $c_n = \alpha_n + i\beta_n$ . Действительная часть общего члена ряда (6)

$$\alpha_n \left\{ (x - x_0)^n - \frac{n(n-1)}{2!} (x - x_0)^{n-2} (y - y_0)^2 + \dots \right\} + \\ + \beta_n \left\{ -n(x - x_0)^{n-1} (y - y_0) + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (x - x_0)^{n-3} (y - y_0)^3 + \dots \right\}, \quad (7)$$

по абсолютной величине не превосходит

$$|c_n| \{ |x - x_0| + |y - y_0| \}^n,$$

а так как по теореме Абеля п. 19 ряд (6) абсолютно сходится в любом круге  $|z - z_0| \leq r < R$ , т. е. ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$  сходится при  $r < R$ , то и ряд с общим членом (7) будет абсолютно сходиться при  $|x - x_0| + |y - y_0| < R$ . Этот ряд и представляет собой ряд для  $u(x, y)$ . После перегруппировки его членов (что законно в силу доказанной абсолютной сходимости), мы получаем требуемый ряд (5). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что гармонические функции обладают частными производными всех порядков. Нетрудно показать, что последние также являются гармоническими функциями (см. теорему 1 п. 17).

Основываясь на теореме 3, можно получить практически удобный способ восстановления аналитической функции  $f(z)$  по известной действительной части  $u(x, y)$ . Элементарно преобразуя выражение (7) общего члена ряда для  $u(x, y)$ , мы получаем представление этой функции в окрестности точки  $z_0$ :

$$u(x, y) = \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{ c_n [(x - x_0) + i(y - y_0)]^n + \\ + \bar{c}_n [(x - x_0) - i(y - y_0)]^n \}.$$

Этот ряд, по теореме Абеля, сходится и для комплексных значений  $x$  и  $y$ , достаточно близких к  $x_0$  и  $y_0$ , поэтому в нем можно положить  $x - x_0 = \frac{\xi - z_0}{2}$ ,  $y - y_0 = \frac{\xi - z_0}{2i}$ , где  $\xi$  — точка, достаточно близкая к  $z_0$ , и мы получим:

$$u\left(x_0 + \frac{\xi - z_0}{2}, y_0 + \frac{\xi - z_0}{2i}\right) = \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n = \\ = \alpha_0 + \frac{1}{2} [f(\xi) - c_0].$$

Заменяя здесь  $\zeta$  через  $z$ , после простых преобразований получаем окончательную формулу

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - \bar{c}_0. \quad (8)$$

Формула (8) получена для точек  $z$ , близких к  $z_0$ , но, по теореме единственности, очевидно, сохраняет силу во всей области определения  $f(z)$ , ибо в этой области обе части (8) являются аналитическими функциями  $z$ .

В частности, если  $f(z)$  аналитична в начале координат, то можно положить  $z_0 = 0$ , и формула (8) принимает особенно простой вид:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \bar{c}_0. \quad (9)$$

Приведем несколько примеров применения формул (8) и (9):

$$1) u = x + y, f(z) = z + \frac{z}{i} + C = (1 - i)z + C$$

(формула (9));

$$2) u = \ln(x^2 + y^2), f(z) = 2 \ln \left\{ \frac{(z+1)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{4} \right\} + C = 2 \ln z + C$$

(формула (8),  $z_0 = 1$ );

$$3) u = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}, f(z) = \frac{2 \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch} i\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} + C = \operatorname{ctg} z + C$$

(формула (8),  $z_0 = \pi/2$ ).

Во всех трех формулах  $C$  — чисто мнимая постоянная.

Перейдем к рассмотрению свойств гармонических функций. На основании теорем 1 и 2 эти свойства легко получаются из соответствующих свойств аналитических функций. Для удобства мы будем иногда писать  $u(z)$  вместо  $u(x, y)$ , как пишут  $u(P)$  вместо  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  для функций нескольких переменных, понимая под  $P$  точку с координатами  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Теорема 4 (о среднем).** Если функция  $u(z)$  непрерывна в замкнутом круге радиуса  $r$  с центром в точке  $z$  и гармонична внутри этого круга, то

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (10)$$

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (5) п. 14 отделением действительных частей.

**Теорема 5.** Отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения.

Теорему достаточно доказать для случая максимума, ибо точка минимума гармонической функции  $u(z)$  является точкой максимума функции  $-u(z)$ , также гармонической. Предполагая противное, предположим, что гармоническая функция  $u(z)$  достигает максимума во внутренней точке  $z_0$  области.

В окрестности точки  $z_0$  построим однозначную аналитическую функцию  $f(z)$  такую, что  $u = \operatorname{Re} f(z)$ . Функция  $e^{f(z)}$  аналитична и не постоянна, а ее модуль  $e^{u(z)}$ , по нашему предположению, достигает максимума во внутренней точке области  $z_0$ . Это противоречит принципу максимума из п. 15, и теорема доказана.

Можно было бы доказать теорему 5 непосредственно на основании теоремы о среднем в точности так, как доказывается принцип максимума в п. 15.

*Теорема 6. Если гармоническая во всей открытой плоскости функция  $u(z)$  ограничена хотя бы сверху или снизу, то она постоянна.*

В самом деле, пусть  $u(z)$  ограничена сверху:  $u(z) < M$ . Построим аналитическую во всей открытой плоскости функцию  $f(z)$  такую, что  $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ . По условию теоремы все значения функции  $w = f(z)$  лежат в полуплоскости  $u < M$ , следовательно, по замечанию в конце п. 28, функция  $f(z)$  постоянна, а значит, постоянна и  $u(z)$ .

Следующие две теоремы устанавливают характер линий уровня гармонических функций, т. е. совокупностей точек, для которых  $u(z) = \operatorname{const}$ .

*Теорема 7. Если отличная от постоянной гармоническая функция  $u(z)$  имеет замкнутую линию уровня  $u(z) = u_0$ , то внутри линии находится хотя бы одна особая точка\*) этой функции.*

В самом деле, в противном случае функция  $u(z)$ , непрерывная в замкнутой области, ограниченной линией уровня, должна достигать своего наибольшего значения  $u(z_1)$  и наименьшего значения  $u(z_2)$ . По теореме 5 точки  $z_1$  и  $z_2$  должны лежать на границе области, т. е. на линии уровня; следовательно,  $u(z_1) = u(z_2)$ , и функция  $u(z)$  постоянна.

*Теорема 8. Любая достаточно малая окрестность точки  $z_0$  линии уровня  $u(z) = u_0$  разбивается этой линией на четное число  $2n$  ( $n \geq 1$ ) секторов, в которых  $u(z)$  попеременно принимает значения, большие и меньшие  $u_0$ .*

Функция  $u(z) - u_0$  равна нулю в точке  $z_0$ ; подобрав к ней сопряженную функцию  $v(z)$  так, чтобы  $v(z_0) = 0$ , получим аналитическую функцию  $f(z) = u(z) - u_0 + iv(z)$ , также равную

---

\*) Так называют точку, в которой нарушается условие гармоничности функции.

нулю в точке  $z_0$ . Обозначим через  $n$  порядок этого нуля, тогда в окрестности точки  $z_0$  имеем  $f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots$ ,  $c_n \neq 0$  и, следовательно,

$$u(z) = u_0 + \operatorname{Re} f(z) = u_0 + Ar^n \sin(n\varphi + B) + o(r^n), \quad (11)$$

где положено  $z - z_0 = re^{i\varphi}$ ,  $A \neq 0$  и  $B$  — некоторые постоянные и  $o(r^n)$  означает малую порядка выше  $r^n$  при  $z \rightarrow 0$ . Отсюда видно, что для достаточно малых  $r$  при изменении  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  разность  $u - u_0$  обращается в нуль  $2n$  раз, меняя при этом знак. Теорема доказана.

Точно так же доказывается, что линия уровня сопряженной с  $u(z)$  гармонической функции  $v(z)$ , проходящая через точку  $z_0$ , в окрестности этой точки распадается на  $n$  ветвей, касающихся в  $z_0$  биссектрис секторов, о которых идет речь в теореме 8.

Из теоремы 8 вытекает, что линия уровня гармонической функции может иметь лишь простые точки ( $n = 1$ ) или кратные точки \*) с различными касательными ( $n > 1$ ) — случаи изолированных точек, концевых точек или точек возврата исключаются.

Для дальнейшего полезно отметить следующее предложение, обратное теореме о среднем.

**Теорема 9.** Если функция  $u(z)$  непрерывна в области  $D$  и в любой точке  $z$  для достаточно малых  $r$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi,$$

то функция  $u(z)$  гармонична в  $D$ .

Наше доказательство основано на теореме существования гармонической функции, принимающей на границе односвязной области заданные значения; эта теорема будет доказана в п. 43. Пусть  $z_0$  — произвольная точка  $D$  и  $\bar{D}_0$  — замкнутая односвязная область, принадлежащая  $D$  и содержащая точку  $z_0$  внутри. По цитированной теореме построим гармоническую функцию  $u_0(z)$ , принимающую на границе  $C_0$  области  $\bar{D}_0$  те же значения, что и функция  $u(z)$ , и обозначим  $U(z) = u_0(z) - u(z)$ .

По построению и условиям доказываемой теоремы функция  $U(z)$  непрерывна в  $\bar{D}_0$  и равна нулю на границе этой области. Кроме того, значение  $U(z)$  в центре любого круга, принадлежащего  $\bar{D}_0$ , равно среднему арифметическому ее значений на окружности этого круга, ибо этим свойством обладают обе функции  $u(z)$  и  $u_0(z)$ : первая по условию, а вторая по теореме о среднем.

\*) В любой замкнутой области гармоничности функции  $u(z)$  может находиться конечное число кратных точек линии уровня (в каждой такой точке  $f'(z) = 0$ ); в противном случае по теореме единственности (п. 20) должно быть  $f'(z) \equiv 0$ .

Отсюда вытекает, что функция  $U(z)$  не может достигать экстремума во внутренних точках  $D_0$ ; доказательство этого предложения опирается лишь на непрерывность функции и теорему о среднем (см. замечание после теоремы 5). Но так как непрерывная в замкнутой области функция  $U(z)$  должна достигать своих экстремальных значений, то она достигает их на границе  $\bar{D}_0$ . А так как на границе всюду  $U(z) = 0$ , то и максимальное и минимальное значения  $U(z)$  равны нулю, а следовательно,  $U(z) \equiv 0$  всюду в  $\bar{D}_0$ . Это означает, что всюду в  $\bar{D}_0$  функция  $u(z)$  совпадает с гармонической функцией  $u_0(z)$  и, в частности, гармонична в точке  $z_0$ . Так как  $z_0$  — произвольная точка  $D$ , то теорема доказана.

Приведем теперь теорему, аналогичную теореме Вейерштрасса п. 19.

**Теорема 10.** Пусть задана последовательность функций  $u_0(z), u_1(z), \dots, u_n(z), \dots$ , гармонических в области  $D$  и непрерывных в  $\bar{D}$ . Если ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$  равномерно сходится на границе  $D$ , то он равномерно сходится и внутри  $D$ , причем его сумма является гармонической в  $D$  функцией.

Из принципа экстремума вытекает равномерная сходимость ряда внутри  $D$ . В самом деле, по известному признаку сходимости Коши\*) из равномерной сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$  на границе области  $D$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется целое число  $N$  такое, что для любого  $n > N$  и любого целого положительного  $p$  и всех точек  $\zeta$  границы

$$|u_{n+1}(\zeta) + u_{n+2}(\zeta) + \dots + u_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon.$$

Так как сумма, стоящая под знаком модуля, гармонична, то по принципу экстремума и для всех точек области

$$|u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots + u_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Но по тому же принципу Коши отсюда вытекает равномерная сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ . Остается показать, что сумма этого ряда  $u(z)$  — гармоническая функция. Для этого воспользуемся теоремами 9 и 4. Для любого достаточно малого  $r$  имеем:

$$\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z + re^{i\varphi}) d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} u_k(z + re^{i\varphi}) d\varphi$$

\*) См. Фихтенгольц, т. II, стр. 309.



(почленное интегрирование ряда законно в силу его равномерной сходимости). По теореме 4 интегралы справа равны  $2\pi u_k(z)$ , следовательно,

$$\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) = 2\pi u(z)$$

и по теореме 9 функция  $u(z)$  гармонична в точке  $z$ . Теорема доказана, так как  $z$  — произвольная точка области  $D$ .

В заключение отметим еще две полезные для дальнейшего теоремы. Первая из них выражает, что свойство функции быть гармонической не нарушается при аналитическом преобразовании независимого переменного.

**Теорема 11.** Если функция  $u(z)$  гармонична в области  $D$  и  $z = g(\xi)$  — аналитическая в некоторой области  $\Delta$  функция, значения которой лежат в  $D$ , то сложная функция  $u[g(\xi)] = U(\xi)$  гармонична в  $\Delta$ .

В самом деле, построим (быть может, многозначную) аналитическую функцию  $f(z)$ , для которой  $u = \operatorname{Re} f(z)$ . Функция  $f[g(\xi)] = F(\xi)$ , очевидно, аналитическая в области  $\Delta$  и, следовательно,  $U(\xi) = \operatorname{Re} f[g(\xi)] = \operatorname{Re} F(\xi)$  гармонична в этой области.

Вторая теорема выражает свойство интеграла от нормальной производной гармонической функции:

**Теорема 12.** Если функция  $u(z)$  гармонична в односвязной области  $D$  и непрерывна вместе со своими частными производными в  $\bar{D}$ , то

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \quad (12)$$

где  $C$  — граница области  $D$  и  $\frac{\partial}{\partial n}$  обозначает производную в направлении нормали к  $C$ , а  $ds$  — дифференциал дуги.

Построим в  $\bar{D}$  сопряженную к  $u$  гармоническую функцию  $v$ ; она однозначна в силу односвязности  $D$ . По замечанию в конце п. 5, условия Коши — Римана можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (13)$$

где  $\frac{\partial}{\partial s}$  обозначает производную в направлении касательной к некоторой кривой, а  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производную в направлении нормали к ней (так, что вращение от вектора  $n^0$  к  $s^0$  происходит против часовой стрелки). В силу непрерывности частных про-

изводных, а следовательно, и их комбинаций  $\frac{\partial u}{\partial n}$  и  $\frac{\partial u}{\partial s}$ , равенство (13) имеет место и на границе  $C$  области  $D$ . Поэтому вдоль замкнутого контура  $C$

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_C \frac{\partial v}{\partial s} ds = \int_C dv = 0$$

в силу однозначности функции  $v(z)$ .

**42. Свойства гармонических функций (продолжение).** Здесь мы рассмотрим вопросы об особых точках, теоремах единственности и аналитическом продолжении гармонических функций. Начнем с изучения поведения однозначной гармонической функции  $u(z)$  в окрестности ее изолированной особой точки. Пусть функция  $u(z)$  однозначна и гармонична в окрестности  $0 < |z - a| < R$  точки  $a$ . Обозначим через  $\Gamma$  циклическую постоянную гармонической функции  $v(z)$ , сопряженной с  $u(z)$  в этой окрестности. Так как приращение любой ветви функции  $iv(z)$  при обходе в положительном направлении замкнутого контура, окружающего точку  $a$ , равно  $i\Gamma$ , а приращение при том же обходе любой ветви  $\text{Ln}(z - a)$  равно  $2\pi i$ , то функция

$$f(z) = u(z) + iv(z) - \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Ln}(z - a)$$

будет в нашей окрестности распадаться на совокупность однозначных аналитических функций, значения которых в любой фиксированной точке отличаются друг от друга на целое кратное  $i\Gamma$ . Поэтому функция

$$e^{\frac{2\pi}{\Gamma}(u+iv)} = (z - a) e^{\frac{2\pi}{\Gamma} f(z)} = g(z)$$

является однозначной аналитической, и мы получаем представление однозначной гармонической функции  $u$  в окрестности изолированной особой точки  $a$ :

$$u(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln |g(z)|. \quad (1)$$

Представление того же типа справедливо и в случае  $\Gamma = 0$ , ибо в этом случае однозначна функция  $f(z) = u + iv$  и, положив  $e^{f(z)} = g(z)$ , мы найдем:

$$u(z) = \ln |g(z)|. \quad (2)$$

На формулах (1) и (2) основывается классификация изолированных особых точек однозначных гармонических функций. Возможные случаи поведения таких функций в окрестности особых точек исчерпывают следующие три теоремы:

**Теорема 1.** Если  $u(z)$  ограничена в окрестности точки  $a$ , то существует  $\lim_{z \rightarrow a} u(z) = b$ ; положив  $u(a) = b$ , мы получаем функцию, гармоническую и в точке  $a$  (устраняемая особая точка).

В самом деле, в этом случае функция  $g(z)$  в выражении (1) или (2) имеет в точке  $a$  устранимую особенность, т. е. существует  $\lim_{z \rightarrow a} g(z)$ ; этот предел, очевидно, отличен от нуля — отсюда и следует утверждение.

**Теорема 2.** Если  $u(z)$  стремится к бесконечности при  $z \rightarrow a$ , то в окрестности точки  $a$  она допускает представление вида

$$u(z) = k \ln |z - a| + U(z), \quad (3)$$

где  $k \neq 0$  — некоторая постоянная, а  $U(z)$  — гармоническая в точке  $a$  функция (полюс).

Действительно, в этом случае функция  $g(z)$  может иметь в точке  $a$  лишь полюс или нуль (если  $u \rightarrow -\infty$ ), следовательно, ее можно представить в виде

$$g(z) = (z - a)^n \varphi(z),$$

где  $n$  — положительное или отрицательное число и  $\varphi(z)$  — аналитическая в точке  $a$  функция, причем  $\varphi(a) \neq 0$ . Подставляя это в выражение (1) или (2), получаем искомое представление (3).

Наконец, справедлива

**Теорема 3.** Если  $u(z)$  не стремится при  $z \rightarrow a$  ни к какому пределу, то она имеет в точке  $a$  полную неопределенность: для любого действительного  $b$  можно найти последовательность точек  $z_n \rightarrow a$ , для которой  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = b$  (существенно особая точка).

В самом деле, в этом случае  $g(z)$  может иметь в  $a$  лишь существенно особую точку, и утверждение является непосредственным следствием теоремы Ю. В. Сохоцкого (п. 22).

Пример:  $g(z) = e^{1/z}$ ,  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

Все сказанное относится и к бесконечно удаленной точке, только окрестность  $0 < |z - a| < R$  надо заменить окрестностью  $R < |z| < \infty$  и представление (3) представлением

$$u(z) = k \ln |z| + U(z).$$

Гармоничность функции в бесконечности означает, что  $z = \infty$  является устранимой особой точкой этой функции.

Мы не рассматриваем особые точки многозначного характера (примером такой точки является точка  $z = 0$  для функции  $u = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ ), а также неизолированные особые точки.

Перейдем к вопросу о теоремах единственности для гармонических функций. Внутренняя теорема единственности теории аналитических функций (п. 20) не переносится полностью на гармонические функции, ибо гармонические функции, совпадающие на линиях, вовсе не обязаны совпадать в области. Действительно, гармонические функции принимают каждое свое значение на некоторых линиях (линиях уровня) и, следовательно, совпадают с постоянными на линиях, не будучи постоянными в области. Справедлива, однако, такая

**Теорема 4.** *Если две функции, гармонические в области  $D$ , совпадают в какой-либо области  $D_0$ , лежащей в  $D$ , то они совпадают и во всей области  $D$ .*

Действительно, разность  $u(z)$  таких функций гармонична и тождественно равна нулю в области  $D_0$ . Построим в области  $D$  (быть может, многозначную) аналитическую функцию  $f(z)$  такую, что  $u = \operatorname{Re} f(z)$ . В области  $D_0$  сопряженная с  $u$  гармоническая функция  $v(z)$  должна быть постоянной, ибо в силу условий Коши—Римана в этой области  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$ . Следовательно,  $f(z)$  постоянна в  $D_0$ , а значит, и во

всей области  $D$ . Но тогда  $u(z)$  постоянна в  $D$  и равна там, следовательно, нулю (ибо она равна нулю в  $D_0$ ). Теорема доказана.

Граничная теорема единственности теории аналитических функций, выражающая, что функция, аналитическая в области, определяется своими значениями на границе (см. п. 14), переносится на гармонические функции. Для гармонических функций эта теорема является непосредственным следствием принципа экстремума (теорема 5 предыдущего пункта). Чтобы получить ее в достаточно общих для практики предположениях, мы предварительно докажем *обобщенный принцип экстремума*:

**Теорема 5.** *Если гармоническая и ограниченная в области  $D$  функция  $u(z)$  принимает\*) на границе  $C$  этой области значения  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывные с конечным числом точек разрыва первого рода, то значения  $u(z)$  внутри  $D$  заключены между максимальным и минимальным ее граничными значениями (значения  $u(\xi)$  в точках разрыва не учитываются).*

---

\*) Говорят, что функция  $u(z)$ , определенная в области  $D$ , принимает значение  $u(\xi)$  в граничной точке  $\xi$  этой области, если при  $z \rightarrow \xi$  по точкам области существует  $\lim_{z \rightarrow \xi} u(z) = u(\xi)$ .

Пусть  $M = \sup u(\zeta)$  на  $C$ , а  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$  — точки разрыва  $u(\zeta)$  и  $\delta$  — диаметр области  $D$ , т. е. максимум расстояния между двумя точками из  $D$ . Зафиксируем произвольное положительное число  $\varepsilon$  и рассмотрим функцию

$$U(z) = M + \varepsilon \sum_{k=1}^n \ln \frac{\delta}{|z - \zeta_k|}. \quad (4)$$

Функция  $U(z)$ , очевидно, гармонична в области  $D$ , везде больше  $M$  и непрерывна в  $\bar{D}$  всюду, кроме точек  $\zeta_k$ , при приближении к которым она стремится к  $+\infty$ . Из каждой точки  $\zeta_k$ , как из центра, опишем круг достаточно малого радиуса  $r$  и обозначим через  $D_r$  область, получаемую из области  $D$  удалением всех таких кругов.

Функция  $U(z) - u(z)$  неотрицательна на общей части границ  $D$  и  $D_r$ , а при достаточно малых  $r$  и на окружностях  $|z - \zeta_k| = r$ , ибо функция  $u(z)$  по условию ограничена, а при  $r \rightarrow 0$  значения  $U(z)$  на окружностях неограниченно возрастают. Отсюда на основании обычного принципа экстремума (теорема 5 предыдущего пункта) заключаем, что в любой точке из  $D_r$ , а следовательно, и в любой точке из  $D^*$ , функция  $U(z) - u(z)$  не отрицательна. Но так как при фиксированном  $z$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция  $U(z) \rightarrow M$ , то отсюда вытекает, что в любой точке  $D$  имеем  $|u(z)| \leq M$ . Но по теореме 5 предыдущего пункта функция  $u(z)$  не может принимать внутри  $D$  значения, равного ее максимальному значению  $M$ , следовательно, всюду в  $D$  имеет место строгое неравенство  $u(z) < M$ . Аналогично доказывается, что всюду в  $D$  справедливо неравенство  $u(z) > m$ , где  $m = \inf u(\zeta)$  на  $C$ .

**Замечание.** Для неограниченных функций  $u(z)$  теорема не имеет места. Например, функция

$$u(z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = \operatorname{Re} \left( 1 - \frac{2}{z} \right) \quad (5)$$

гармонична в круге  $x^2 + y^2 < 2x$ , равна нулю всюду на окружности этого круга, кроме точки  $z = 0$ , и тем не менее внутри круга отлична от нуля.

Теперь легко доказывается *граничная теорема единственности*, о которой мы говорили выше:

**Теорема 6.** Пусть на границе  $C$  области  $D$  задана функция  $u(\zeta)$ , кусочно-непрерывная с конечным числом точек разрыва первого рода  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ . Существует не более одной функции  $u(z)$ , гармонической и ограниченной в области  $D$ , ко-

\*) Действительно, любая точка  $z$  области  $D$  принадлежит некоторой области  $D_r$  при достаточно малом  $r$ .

торая в точках  $\xi \neq \xi_h$  границы принимает заданные значения  $u(\xi)$ .

В самом деле, пусть существуют две функции  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ , удовлетворяющие условиям теоремы. Их разность

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z)$$

гармонична в области  $D$ , ограничена и принимает значения, равные нулю во всех граничных точках  $\xi \neq \xi_h$ . По теореме 5 все значения  $u(z)$  внутри  $D$  заключены между максимальным и минимальным ее значением в точках  $\xi \neq \xi_h$ , т. е. равны нулю. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 6 область  $D$  может содержать бесконечно удаленную точку внутри или на границе. Для неограниченных функций теорема, конечно, неверна. Например, в случае круга  $x^2 + y^2 < 2x$  и нулевых (всюду, кроме  $z = 0$ ) граничных значений существуют две гармонические функции, принимающие заданные значения — функция (5) и  $u \equiv 0$ .

В заключение выясним вопрос об аналитическом продолжении гармонических функций. Принцип непрерывного продолжения (п. 25) не переносится на гармонические функции. Например, пусть  $u_1(z) = y$  в верхнем единичном полукруге,  $u_2(z) \equiv 0$  в нижнем; тогда  $u_1 = u_2$  на отрезке  $(-1, 1)$ , однако функция  $u(z)$ , равная  $u_1$  в верхнем полукруге и  $u_2$  в нижнем, не является гармонической, ибо в точках диаметра  $y = 0$  она не имеет производной. Однако принципы симметрии и аналитического продолжения (п. 35) остаются в силе:

**Теорема 7. (Принцип симметрии.)** Пусть функция  $u_1(z)$  гармонична в области  $D_1$ , граница которой содержит отрезок  $(\alpha, \beta)$  действительной оси, и равна нулю на этом отрезке. Тогда функция

$$u_2(z) = -u_1(\bar{z}) \quad (6)$$

гармонична в области  $D_2$ , симметричной с  $D_1$  относительно действительной оси, и дает аналитическое продолжение функции  $u_1(z)$  в  $D_2$ .

Действительно, гармоничность  $u_2(z)$  в области  $D_2$  очевидна. Она следует из условия (6), записанного в виде  $u_2(x, y) = -u_1(x, -y)$ , ибо отсюда

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x, -y)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u_1(x, -y)}{\partial y^2}.$$

Остается показать, что функция

$$u(z) = \begin{cases} u_1(z) & \text{в } D_1, \\ 0 & \text{на } (\alpha, \beta), \\ u_2(z) & \text{в } D_2 \end{cases}$$

гармонична в области  $D = D_1 + (\alpha, \beta) + D_2$ . Функция  $u(z)$  непрерывна в  $D$  и ее значение в любой точке  $z$  равно среднему арифметическому значений на окружности достаточно малого радиуса с центром в  $z$ . Для точек областей  $D_1$  и  $D_2$  это следует из гармоничности  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ , а для точек отрезка  $(\alpha, \beta)$ , где  $u(z) = 0$ , — из соображений симметрии. Но тогда по теореме 9 предыдущего пункта функция  $u(z)$  гармонична в  $D$ .

**Теорема 8.** (Принцип аналитического продолжения.) *Если функция  $u(z)$  гармонична в области  $D$ , граница которой содержит аналитическую дугу  $\gamma$  и значения  $u(z)$  на этой дуге образуют действительную аналитическую функцию параметра, то  $u(z)$  можно аналитически продолжить через дугу  $\gamma$ .*

Пусть сначала  $\gamma$  представляет собой отрезок действительной оси  $x$ . Так как действительная функция  $u(x)$  по условию аналитична на  $\gamma$ , то она может быть аналитически продолжена в комплексную область (см. доказательство принципа аналитического продолжения в п. 35). Обозначим это продолжение через  $f_1(z)$  — это (комплексная) аналитическая функция в окрестности  $\Delta$  отрезка  $(\alpha, \beta)$  и ее действительная часть  $u_1(z)$  — гармоническая в  $\Delta$  функция, равная  $u(x)$  на отрезке  $\gamma$ . По теореме 7 разность  $u(z) - u_1(z)$  можно аналитически продолжить за отрезок, именно в область, симметричную с пересечением областей  $D$  и  $\Delta$  относительно отрезка  $\gamma$ . Так как  $u_1(z)$  уже определена в этой области, то такое продолжение даст и аналитическое продолжение функции  $u(z)$  в ту же область. Для нашего частного случая теорема доказана.

Переходя к общему случаю, предположим, что дуга  $\gamma$  задана параметрическим уравнением  $z = z(t)$ , где  $z(t)$  — аналитическая на отрезке  $(\alpha, \beta)$  действительной оси функция и  $z'(t) \neq 0$ . По условию функция  $u(z(t)) = U(t)$  также аналитична на этом отрезке. Продолжим функцию  $z = z(t)$  в комплексную область значений  $t$ , содержащую отрезок  $(\alpha, \beta)$ ; комплексные значения  $t$  мы обозначим через  $\zeta$ , а полученное продолжение через  $z = z(\zeta)$ . Функция  $u\{z(\zeta)\} = U(\zeta)$  гармонична с одной стороны отрезка  $(\alpha, \beta)$  (см. теорему 11 предыдущего пункта) и на самом отрезке, где  $\zeta = t$ , принимает аналитические значения  $U(t)$ . Следовательно, по доказанному частному случаю,  $U(\zeta)$  продолжается через отрезок  $(\alpha, \beta)$  и, возвращаясь к переменной \*)  $z$ , мы получим аналитическое продолжение функции  $u(z)$  через кривую  $\gamma$ . Теорема доказана.

\*) Для того чтобы перейти к переменной  $z$ , надо в  $U(\zeta)$  подставить  $\zeta = \zeta(z)$ , где  $\zeta(z)$  — функция, обратная к  $z(\zeta)$ . Функция  $\zeta(z)$  однозначна и аналитична в некоторой окрестности  $\gamma$ , ибо на  $(\alpha, \beta)$ , по условию,  $z'(t) \neq 0$ .

В заключение отметим, что при заданных областях  $D_1$  и  $D_2$  и заданном общем участке  $\gamma$  их границы аналитическое продолжение гармонической \*) функции  $u_1(z)$  через  $\gamma$  в  $D_2$  определяется единственным образом. Это следует из теоремы 4, примененной к областям  $D_0 = D_1$  и  $D = D_1 + \gamma + D_2$ .

**43. Задача Дирихле.** Совокупность гармонических функций — это совокупность всех решений уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

которое является одним из простейших дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Подобно тому как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений для выделения одного определенного решения задают дополнительные условия, так и для полного определения решения уравнения Лапласа требуются дополнительные условия. Для уравнения Лапласа они формулируются в виде так называемых *краевых условий*, т. е. заданных соотношений, которым должно удовлетворять искомое решение на границе области.

Простейшее из таких условий сводится к заданию значений искомой гармонической функции в каждой точке границы области. Таким образом, мы приходим к первой краевой задаче, или задаче Дирихле \*\*):

*Найти гармоническую в области  $D$  и непрерывную в  $\bar{D}$  функцию  $u(z)$ , которая на границе  $D$  принимает заданные непрерывные значения  $u(\xi)$ .*

К задаче Дирихле приводится, например, отыскание температуры теплового поля или потенциала электростатического поля в некоторой области при заданной температуре или потенциале на границе области. К ней, как мы увидим ниже, сводятся и краевые задачи других типов.

В приложениях условие непрерывности граничных значений  $\bar{u}(\xi)$  является слишком стеснительным и приходится рассматривать обобщенную задачу Дирихле:

*На границе  $S$  области  $D$  задана функция  $u(\xi)$ , непрерывная всюду, кроме конечного числа точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , где она имеет точки разрыва первого рода. Найти гармоническую и ограниченную в области  $D$  функцию  $u(z)$ , принимающую значения  $u(\xi)$  во всех точках непрерывности этой функции \*\*\*).*

\*) Для аналитического продолжения гармонической функции сохраняется определение п. 25 с заменой слова «аналитическая» на «гармоническая».

\*\*) Лежен Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

\*\*\*). Если заданная функция  $u(\xi)$  непрерывна, то обобщенная задача Дирихле совпадает с обычной, ибо условие ограниченности функции  $u(z)$  следует автоматически из условия ее непрерывности в  $\bar{D}$ .



Теорему 6 предыдущего пункта можно теперь формулировать как *теорему единственности* решения обобщенной задачи Дирихле.

**Теорема 1.** В данной области при заданной граничной функции  $u(\zeta)$  существует не более одного решения обобщенной задачи Дирихле.

Решение обобщенной задачи Дирихле с помощью одного приема можно свести к решению обычной задачи; для простоты мы ограничимся случаем односвязных областей. Обозначим че-

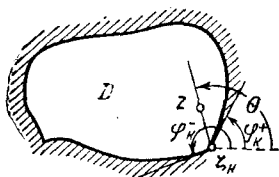


Рис. 97.

рез  $u^-(\zeta_k)$  и  $u^+(\zeta_k)$  предельные значения граничной функции  $u(\zeta)$  при  $\zeta$ , стремящейся к точке  $\zeta_k$  вдоль  $C$  соответственно в положительном и отрицательном направлениях, через  $h_k \equiv u^+(\zeta_k) - u^-(\zeta_k)$  мы обозначим скачок  $u(\zeta)$  в точке  $\zeta_k$ . Для общности предположим, что  $\zeta_k$  является угловой точкой контура  $C$  и через  $\varphi_k^-$  и  $\varphi_k^+$  обозначим углы между осью  $x$  и касательными к  $C$  в точке  $\zeta_k$

(рис. 97); пусть еще  $\alpha_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^-$  (если  $\zeta_k$  не является угловой точкой, то  $\alpha_k = -\pi$ ). Возьмем функцию  $u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k)$ , где  $\arg$  обозначает надлежащим образом выбранную ветвь аргумента. Эта функция, очевидно, гармонична в области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$  всюду, кроме точки  $\zeta = \zeta_k$ . Если  $z \rightarrow \zeta_k$  по пути, касательная к которому в точке  $\zeta_k$  составляет с осью  $x$  угол  $\theta$  (значение  $\theta$  заключено между  $\varphi_k^-$  и  $\varphi_k^+$ ), то эта функция стремится к пределу  $\frac{h_k}{\alpha_k} \theta$ . При переходе по кривой  $C$  в положительном направлении через точку  $\zeta_k$  функция  $u_k(\zeta)$  испытывает, следовательно, скачок  $\frac{h_k}{\alpha_k} \varphi_k^+ - \frac{h_k}{\alpha_k} \varphi_k^- = h_k$ .

Пусть теперь  $u(z)$  будет решение обобщенной задачи Дирихле при заданных граничных значениях  $u(\zeta)$ . Рассмотрим функцию

$$U(z) = u(z) - \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k); \quad (2)$$

она гармонична в области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$ . В самом деле,  $u(z)$  и все функции  $u_k(z) = \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k)$  гармоничны в  $D$ . Далее, предельные значения  $U(z)$  при  $z \rightarrow \zeta \neq \zeta_k$  равны

$$U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta), \quad (3)$$

и функция  $U(\zeta)$  остается непрерывной при переходе через каждую точку  $\zeta_k$ , ибо при построении  $U(\zeta)$  мы вычитаем из функции  $u(\zeta)$ , имеющей скачок  $h_k$  в точке  $\zeta_k$ , функцию  $u_k(\zeta)$ , имеющую тот же скачок, а остальные члены суммы (3) непрерывны в этой точке.

Таким образом, действительно, решение обобщенной задачи Дирихле  $u(z)$  можно представить как сумму функции  $U(z)$ , решающей задачу Дирихле с непрерывными граничными значениями  $U(\zeta) = u(\zeta) - \sum_{k=1}^n u_k(\zeta)$ , и функции  $\sum_{k=1}^n u_k(z)$ :

$$u(z) = U(z) + \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{\alpha_k} \arg(z - \zeta_k). \quad (4)$$

По теореме 1 найденное решение единственно.

Из формулы (4) вытекает следующая теорема, выясняющая поведение обобщенного решения в окрестности точек  $\zeta_k$ .

**Теорема 2.** При приближении  $z$  к точке разрыва  $\zeta_k$  граничной функции  $u(\zeta)$  вдоль различных путей решение  $u(z)$  обобщенной задачи Дирихле может стремиться к любому пределу, заключенному между  $u^-(\zeta_k)$  и  $u^+(\zeta_k)$ .

Действительно, пусть  $z \rightarrow \zeta_k$  вдоль пути, касательная к которому в точке  $\zeta_k$  составляет с осью  $x$  угол  $\theta$ . Из формулы (4) следует, что  $u(z)$  при этом стремится к пределу

$$u_\theta(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k} \theta, \quad (5)$$

где  $\tilde{u}(\zeta_k)$  — предельное значение суммы  $U(z)$  и всех функций  $u_v(z)$ , кроме  $u_k(z)$ , не зависящее от способа приближения  $z$  к точке  $\zeta_k$ . В частности, приближаясь к точке  $\zeta_k$  вдоль кривой  $C$  в отрицательном направлении, получим  $u^+(\zeta_k) = \tilde{u}(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k} \varphi_k^+$ , так что формулу (5) можно переписать в виде

$$u_\theta(\zeta_k) = u^+(\zeta_k) + \frac{h_k}{\alpha_k} (\theta - \varphi_k^+).$$

Отсюда и следует утверждение теоремы 2 (см. рис. 97).

Перейдем к решению задачи Дирихле для произвольной односвязной области  $D$ , причем сначала рассмотрим случай, когда  $D$  представляет собой единичный круг  $|z| < 1$ . Для этого случая решение основывается на следующей лемме:

**Лемма.** Пусть действительная функция  $U(z, \zeta)$ , где

$$z = re^{i\varphi}, \quad \zeta = e^{it}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \varphi, \quad t < 2\pi,$$

1) непрерывна и неотрицательна,

2) для любого  $z$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z, \xi) dt = 1, \quad (6)$$

3) при  $z \rightarrow \xi_0 = e^{it_0}$  ( $\xi_0$  — любая точка окружности) и  $\xi \neq \xi_0$  функция  $U(z, \xi)$  стремится к нулю, причем равномерно относительно  $\xi^*$ ).

Тогда для любой действительной функции  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывной с точками разрыва первого рода, в любой точке ее непрерывности  $\xi_0$  существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) U(z, \xi) dt = u(\xi_0). \quad (7)$$

Для доказательства мы прежде всего воспользуемся условием 2) и представим разность между интегралом в левой части (7) и его предполагаемым пределом в виде

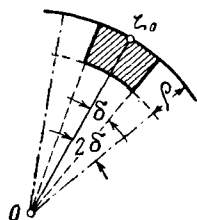


Рис. 98.

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(\xi) - u(\xi_0)\} U(z, \xi) dt.$$

Зададимся числом  $\varepsilon > 0$  и, пользуясь непрерывностью  $u(\xi)$  в точке  $\xi_0$ , выберем  $\delta > 0$  так, чтобы при  $|t - t_0| < 2\delta$  было  $|u(\xi) - u(\xi_0)| < \varepsilon$  (рис. 98). Имеем:

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| < 2\delta} + \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| \geq 2\delta},$$

где интегралы берутся по тем дугам единичной окружности, для аргументов точек которых выполнены соответствующие неравенства. Применяя к первому из них известную из анализа теорему о среднем\*\*) и снова пользуясь условиями 1) и 2), мы получим:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| < 2\delta} \{u(\xi) - u(\xi_0)\} U(z, \xi) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t-t_0| < 2\delta} U(z, \xi) dt < \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z, \xi) dt = \varepsilon. \quad (8)$$

\*) Точный смысл условия 3) следующий: для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся числа  $\rho < 1$  и  $\delta > 0$  такие, что при  $r > 1 - \rho$  и  $|\varphi - t_0| < \delta$  для всех  $t$ , удовлетворяющих неравенству  $|t - t_0| > 2\delta$ , справедливо неравенство  $0 \leq U(z, \xi) < \varepsilon$ .

\*\*) См. Фихтенгольц, т. II, стр. 133; теорема применима, ибо у нас  $U(z, \xi) \geq 0$ .

Теперь предположим, что  $|\varphi - t_0| < \delta$ , тогда для всех значений  $t$  из интервала  $|t - t_0| > 2\delta$  будем иметь  $|\varphi - t| > \delta$  и в силу условия 3) найдется такое число  $\rho < 1$ , что для этих  $t$  и  $r > 1 - \rho$  выполняется неравенство  $U(z, \zeta) < \varepsilon$  (см. сноску на стр. 218). Таким образом, для всех  $z$  из области, заштрихованной на рис. 98 (для которых  $|\varphi - t_0| < \delta$ ,  $r > 1 - \rho$ ), будем иметь:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-t_0| > 2\delta} \{u(\zeta) - u(\zeta_0)\} U(z, \zeta) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2M(2\pi - 2\delta) < 2\varepsilon M, \quad (9)$$

где  $M$  — максимум  $|u(\zeta)|$  на окружности. Объединяя полученные неравенства (8) и (9), найдем, что для всех  $z$  из заштрихованной области  $|\Delta| \leq (1 + 2M)\varepsilon$ , и наша лемма доказана.

Перейдем к решению задачи Дирихле для круга. Для этого заметим, что функцию  $U(z, \zeta)$  леммы можно получить геометрически, как действительную часть конформного отображения круга  $|z| < 1$  на правую полуплоскость  $\operatorname{Re} w > 0$ :

$$U(z, \zeta) = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2}. \quad (10)$$

В самом деле, справедливость свойств 1) и 3) для нее очевидна, а 2) получается отделением действительных частей равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} = 1,$$

которое просто доказывается по теореме о вычетах п. 23 (функция  $\frac{\zeta + z}{(\zeta - z)\zeta}$  при  $z \neq 0$  имеет в единичном круге два полюса:  $\zeta = 0$  с вычетом  $-1$  и  $\zeta = z$  с вычетом  $2$ ; при  $z = 0$  равенство тривиально).

Теперь уже нетрудно доказать, что решение обобщенной задачи Дирихле для единичного круга дает интеграл (С. Пуассон\*), 1823 г.)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2} dt \quad (z = re^{i\varphi}). \quad (11)$$

В самом деле, функция  $u(z)$ , определяемая интегралом (11), является действительной частью функции

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} dt + iC \quad (\zeta = e^{it}), \quad (12)$$

\*) Симеон Пуассон (1781—1840) — французский физик и математик.

которая аналитична в единичном круге по теореме 4 п. 16; следовательно,  $u(z)$  гармонична в единичном круге. Она ограничена, ибо из (11) следует

$$|u(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2} dt = M,$$

где  $M$  — максимум  $|u(\zeta)|$  на окружности (мы воспользовались свойством 2) функции (10)). Наконец, по предыдущей лемме, при  $z$ , стремящемся к любой точке  $\zeta$  непрерывности  $u(\zeta)$ , функция  $u(z)$  стремится к  $u(\zeta)$ , что и требуется.

Теперь нетрудно доказать разрешимость обобщенной задачи Дирихле и для произвольной односвязной области.

**Теорема 3.** Для любой односвязной области  $D$  и любой кусочно-непрерывной с точками разрыва первого рода граничной функции  $u(\zeta)$  решение обобщенной задачи Дирихле существует.

В самом деле, по основной теореме п. 28 существует конформное отображение  $w = w(z)$  области  $D$  на единичный круг  $|w| < 1$ . Заданные на границе  $D$  кусочно-непрерывные значения  $u(\zeta)$  переходят в кусочно-непрерывные на единичной окружности значения  $u[z(w)] = U(w)$ , где  $z = z(w)$  — функция, обратная к  $w = w(z)$ . По этим граничным значениям с помощью интеграла Пуассона (11) можно построить гармоническую в круге  $|w| < 1$  функцию  $U(w)$ . Тогда, по теореме 11 п. 41, функция

$$u(z) = U[w(z)] \quad (13)$$

будет гармонической в области  $D$ . Она ограничена вместе с  $U(w)$ , и при  $z$ , стремящемся к точке  $\zeta$  непрерывности заданной функции  $u(\zeta)$ , стремится к значению  $u(\zeta) = U[w(\zeta)]$ , ибо при этом точка  $w = w(z)$  стремится к точке  $w = w(\zeta)$  непрерывности функции  $U(w)$ . Таким образом, функция (13) дает решение обобщенной задачи Дирихле для области  $D$ , и теорема (3) доказана.

Если граница  $C$  области  $D$  не имеет бесконечных ветвей и обладает непрерывной кривизной, то решение обобщенной задачи Дирихле можно выразить замкнутой формулой. Для получения этой формулы фиксируем произвольную точку  $z_0$  области  $D$  и обозначим через

$$w = f(z, z_0); \quad f(z_0, z_0) = 0 \quad (14)$$

функцию, реализующую отображение  $D$  на единичный круг  $|w| < 1$ . Переходя, как при доказательстве теоремы 3, к плоскости  $w$ , мы можем представить решение задачи Дирихле с помощью интеграла Пуассона. В частности, пользуясь обо-

значениями, введенными в этом доказательстве, в центре круга  $w = 0$  мы получим:

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} U(\omega) d\sigma, \quad (15)$$

где  $\omega = e^{i\tau}$  и  $d\sigma = d\tau$  — элемент длины окружности  $|\omega| = 1$ .

В наших условиях, по теореме 1 п. 29, функция (14) обладает непрерывной производной на границе и, следовательно,

$$d\sigma = |f'(\zeta; z_0)| ds,$$

где  $ds$  — элемент длины  $C$ , соответствующий  $d\sigma$ . Обозначим через  $dn$  элемент внутренней нормали к  $C$  и через  $-d\rho$  соответствующий ему элемент радиуса окружности  $|\omega| = 1$ ; тогда будем иметь  $|f'(\zeta, z_0)| dn = -d\rho$ . Так как  $\rho = |f(\zeta, z_0)| = 1$  на  $C$ , то можно написать  $d\rho = \frac{d\rho}{\rho} = d \ln \rho$  и  $|f'(\zeta; z_0)| = -\frac{d\rho}{dn} = -\frac{d \ln \rho}{dn} = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\rho}$ , где  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает производную в направлении внутренней нормали к  $C$ . Подставляя это в найденное выше выражение для  $d\sigma$ , находим:

$$d\sigma = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|} ds. \quad (16)$$

Теперь остается в формуле (15) возвратиться к переменной  $z$ . Учитывая нормировку (14), по которой точке  $w = 0$  соответствует  $z_0$ , и соотношение (16), мы получаем:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|} ds. \quad (17)$$

**Функция**

$$g(z; z_0) = \ln \frac{1}{|f(z; z_0)|} \quad (18)$$

называется *функцией Грина* для области  $D$ , она, очевидно, гармонична всюду в  $D$ , кроме точки  $z_0$ , где имеет полюс. Вводя в (17) эту функцию и заменяя  $z_0$  на  $z$ , мы получаем искомую формулу для решения обобщенной задачи Дирихле: (Дж. Грин\*), 1828 г.):

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds \quad (19)$$

$\left( \frac{\partial}{\partial n} \right.$  — производная в направлении внутренней нормали).

\*) Джордж Грин (1793—1841) — английский математик.

Формула Грина выражает решение задачи Дирихле для некоторой области  $D$  через логарифм конформного отображения  $D$  на единичный круг, т. е. сводит решение задачи Дирихле к задаче конформного отображения. Оказывается и обратно, если для некоторой области  $D$  известно решение задачи Дирихле, то можно построить конформное отображение этой области на единичный круг.

В самом деле, по основной теореме такое отображение  $w = f(z; z_0)$ ,  $f(z_0, z_0) = 0$  существует. Предположим сначала, что мы знаем это отображение, и рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{f(z, z_0)}{z - z_0}, \quad F(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z, z_0)}{z - z_0} = f'(z_0, z_0).$$

Она, очевидно, аналитична и отлична от нуля всюду в области  $D$  (функция  $f(z, z_0)$  равна 0 лишь при  $z = z_0$ , а  $f'(z, z_0) \neq 0$  в силу конформности отображения). Поэтому функция  $U(z) = \ln|F(z)|$  гармонична в области  $D$ . Ее значения на границе  $C$  этой области

$$U(\xi) = \ln \left| \frac{f(\xi, z_0)}{\xi - z_0} \right| = \ln \frac{1}{|\xi - z_0|}$$

не зависят от вида функции  $f(z, z_0)$ , ибо  $|f(\xi, z_0)| = 1$  на  $C$ .

Предположим теперь, что функция  $f(z, z_0)$  неизвестна. По заданным граничным значениям гармонической функции  $U(\xi)$  мы можем однозначным образом восстановить значения  $U(z)$  внутри  $D$  (задача Дирихле). Затем с помощью интегрирования восстанавливаем сопряженную гармоническую функцию  $V(z)$ ; она находится с точностью до постоянного слагаемого  $\alpha$ . Таким образом, мы находим функцию  $\ln G(z) = U(z) + iV(z) + i\alpha$ , а затем и искомое конформное отображение

$$f(z, z_0) = (z - z_0) e^G(z) = e^{i\alpha} (z - z_0) e^{U(z) + iV(z)}. \quad (20)$$

Оно определяется с точностью до поворота, что соответствует принятым условиям нормировки.

Итак, задача конформного отображения области на единичный круг и задача Дирихле для той же области эквивалентны; они сводятся друг к другу с помощью простых операций дифференцирования и интегрирования.

Задача отображения области  $D$  на полосу  $0 < v < 1$ :

$$w = f(z); \quad f(z_1) = -\infty; \quad f(z_2) = 0, \quad f(z_3) = \infty,$$

еще более просто сводится к обобщенной задаче Дирихле. Мы находим гармоническую функцию  $v(z)$  по условиям:  $v(\xi) = 0$  на дуге  $z_1 z_2 z_3$  границы  $C$  и  $v(\xi) = 1$  на остальной части  $C$ , затем находим сопряженную к ней функцию  $u(z)$ , удовлетворяющую условию  $u(z_2) = 0$ . Функция  $f(z) = u(z) + iv(z)$  и есть искомая.

**44. Примеры. Дополнения.** 1) Интеграл Шварца. Интеграл (12) предыдущего пункта

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi - z} dt + iC \quad (\xi = e^{it}), \quad (1)$$

где  $C$  — действительная постоянная, решает следующую задачу: найти аналитическую в круге  $|z| < 1$  функцию, действительная часть которой на окружности принимает заданные значения  $u(\xi)$  в каждой точке непрерывности функции  $u(\xi)$  (Г. Шварц, 1869 г.).

Действительно, по теореме единственности решения задачи Дирихле действительная часть  $u(z)$  функции  $f(z)$  вполне определяется своими граничными значениями, а из уравнений Коши — Римана следует, что тогда мнимая часть  $v(z)$  этой функции определена с точностью до постоянного слагаемого. Таким образом, формула (1) при различных  $C$  содержит все решения поставленной задачи.

Полагая в этой формуле  $z = 0$  и пользуясь теоремой о среднем, получим, что член с интегралом равен  $u(0)$ ; мы можем, следовательно, утверждать, что постоянная  $C = v(0)$ .

Отделяя в интеграле Шварца мнимые части, мы получим выражение гармонической функции  $v(z)$  через граничные значения сопряженной к ней функции:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{2r \sin(\varphi - t)}{1 - 2r \cos(\varphi - t) + r^2} dt + C. \quad (2)$$

Если мы воспользуемся методом п. 41 для восстановления аналитической функции по ее действительной части (формула (9) п. 41), то получим интеграл, решающий ту же задачу, что и интеграл Шварца, но несколько отличающийся от него. В соответствии со сказанным в п. 41 положим  $z = 0$ ; тогда будем иметь:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0,$$

$$2r \cos(\varphi - t) \frac{re^{i\varphi}}{e^{it}} + \frac{re^{it}}{r^{i\varphi}} = \frac{z}{\xi} + \frac{r^2 \xi}{z} = \frac{z}{\xi}, \quad dt = -i \frac{d\xi}{\xi}$$

(как и выше, мы считаем  $z = re^{i\varphi}$ ,  $\xi = e^{it}$ ). Подставляя это в интеграл Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - t)} dt,$$



по формуле (9) п. 41 получим:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \overline{f(0)} = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|=1} u(\xi) \frac{-i d\xi}{\xi \left(1 - \frac{z}{\xi}\right)} - \overline{f(0)},$$

или окончательно

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{u(\xi) d\xi}{\xi - z} - \overline{f(0)}. \quad (3)$$

2) Задача Дирихле для полуплоскости. Пусть на действительной оси задана функция  $u(t)$ , ограниченная и с конечным числом точек разрыва; пусть еще пределы  $u(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  существуют и конечны. Для того чтобы найти значение в точке  $z$  гармонической в верхней полуплоскости функции  $u(z)$ , принимающей заданные значения на оси, мы совершим конформное отображение

$$\omega = \frac{\xi - z}{\xi - \bar{z}}$$

полуплоскости  $\text{Im } \xi > 0$  на круг  $|\omega| < 1$ . Так как точка  $z$  переходит при этом в  $\omega = 0$ , то по теореме о среднем

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega) d\tau, \quad (4)$$

где  $u[\xi(\omega)] = U(\omega)$ , а  $\tau$  — аргумент точки на окружности:

$$e^{i\tau} = \frac{t - z}{t - \bar{z}}.$$

Дифференцируя последнее равенство, находим  $e^{i\tau} d\tau = \frac{2y}{(t - \bar{z})^2} dt$ , откуда  $d\tau = \frac{2y dt}{(t - z)(t - \bar{z})} = \frac{2y dt}{(t - x)^2 + y^2}$ ; перейдя в (4) к старым переменным  $z$  и  $t$ , найдем окончательно интеграл Пуассона для верхней полуплоскости:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y dt}{(t - x)^2 + y^2}. \quad (5)$$

Так как, очевидно,

$$\frac{y}{(t - x)^2 + y^2} = \text{Re} \frac{1}{i(t - z)},$$

то можно написать и интеграл Шварца для полуплоскости:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{dt}{t - z} + iC, \quad (6)$$

где  $C$  — действительная постоянная. Следует, однако, иметь в виду, что в то время как интеграл (5) сходится для ограниченных функций  $u(t)$ , для сходимости интеграла (6) недостаточно ограниченности  $u(t)^*$ . Для сходимости этого интеграла достаточно, например, чтобы функция  $u(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$  стремилась к нулю не медленнее, чем  $1/|t|^\alpha$ , где  $\alpha > 0$  — произвольная постоянная.

Приведем несколько примеров. Непосредственно по формуле (5) получаем гармоническую в верхней полуплоскости функцию, равную 1 на отрезке  $(\alpha, \beta)$  действительной оси и 0 на остальной части этой оси:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y \, dt}{(t-x)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{\beta-x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha-x}{y} \right).$$

Если ввести углы  $\varphi_{\alpha}$  и  $\varphi_{\beta}$ , образованные векторами  $z - \alpha$  и  $z - \beta$  с действительной осью  $x$ , то можно написать:

$$u(z) = \frac{\varphi_{\beta} - \varphi_{\alpha}}{\pi} = \frac{\omega}{\pi} \quad (7)$$

(из рис. 99 видно, что  $\varphi_{\beta} = \varphi_{\alpha} + \omega$ ). Таким образом, функция  $u(z)$  равна деленному на  $\pi$  углу  $\omega$ , под которым отрезок  $\overline{\alpha\beta}$  виден из точки  $z$ . Формула Шварца здесь также применима и она дает

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t-z} = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{\beta-z}{\alpha-z}. \quad (8)$$

Пусть теперь заданы точки  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$ ) действительной оси и требуется найти гармоническую в верхней полуплоскости функцию  $u(z)$ , принимающую на отрезках  $(-\infty, a_1)$ ,  $(a_1, a_2)$ ,  $\dots$ ,  $(a_n, \infty)$  постоянные значения  $u_0, u_1, \dots, u_n$  соответственно. Задача решается применением формулы (7):

$$u(z) = \frac{\varphi_1 u_0}{\pi} + \frac{u_1}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + \frac{u_n}{\pi} (\pi - \varphi_n),$$

или, после перегруппировки членов,

$$u(z) = \frac{\varphi_1}{\pi} (u_0 - u_1) + \frac{\varphi_2}{\pi} (u_1 - u_2) + \dots + \frac{\varphi_n}{\pi} (u_{n-1} - u_n) + u_n. \quad (9)$$

\*) Это объясняется тем, что интеграл от мнимой части подынтегральной функции в (6) сходится хуже интеграла (5).

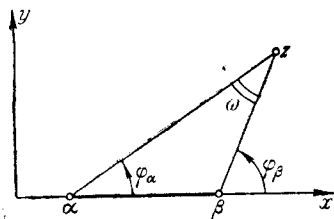


Рис. 99.

3) Вывод интеграла Шварца—Кристоффеля. В качестве примера применения полученных формул приведем вывод интеграла Шварца—Кристоффеля, значительно более простой, чем в п. 37; мы сохраняем принятые там обозначения. Рассмотрим гармоническую в верхней полуплоскости функцию

$$u(z) = \arg f'(z) = \operatorname{Im} \ln f'(z).$$

Из геометрического смысла производной конформного отображения мы заключаем, что на отрезках  $(-\infty, a_1)$ ,  $(a_1, a_2)$ , ...,  $(a_n, \infty)$  эта функция принимает постоянные значения  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , ибо эти отрезки переходят в прямолинейные отрезки—стороны многоугольника. На отрезках  $(-\infty, a_1)$  и  $(a_n, \infty)$  значение  $u_0 = u_n = \alpha - \pi = \theta$ , где  $\alpha$ —угол отрезка  $A_1A_n$  с осью  $u$ . При переходе через точку  $a_k$  функция  $u(t)$  увеличивается на  $(1 - \alpha_k)\pi$ , ибо отрезок  $A_kA_{k+1}$  получается из отрезка  $A_{k-1}A_k$  поворотом на этот угол против часовой стрелки (см. рис. 80), следовательно,  $u_{k-1} - u_k = (\alpha_k - 1)\pi$ . По формуле (9) находим тогда:

$$\begin{aligned} u(z) &= (\alpha_1 - 1)\varphi_1 + (\alpha_2 - 1)\varphi_2 + \dots + (\alpha_n - 1)\varphi_n + \theta = \\ &= \theta + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \arg(z - a_k). \end{aligned}$$

По известной мнимой части легко восстанавливается и аналитическая функция

$$\ln f'(z) = \ln C_0 + i\theta + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \ln(z - a_k),$$

откуда потенцированием и интегрированием находится искомое конформное отображение

$$f(z) = C_0 e^{i\theta} \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1 \quad (10)$$

( $C_0$ —положительная,  $C_1$ —комплексная постоянная).

4) Интеграл Шварца для полосы  $-h < \operatorname{Im} z < h$ . Интеграл Шварца для круга  $|w| < 1$  имеет вид:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\omega) \frac{\omega + w}{\omega - w} d\tau + iC, \quad (11)$$

где  $\omega = e^{i\tau}$  (см. формулу (1)). Рассмотрим конформное отображение  $w = w(z) = \operatorname{th} \frac{\pi z}{4h}$  круга  $|w| < 1$  на полосу  $-h <$

$\leq \operatorname{Im} z < h$ , переводящее нижнюю и верхнюю полуокружности соответственно в нижний и верхний берега полосы (см. формулу (5) п. 33) и обозначим  $F[w(z)] = f(z)$ ,  $U[w(z)] = u(z)$ . На нижнем берегу полосы при  $\zeta = t - hi$  имеем:

$$\omega = e^{i\tau} = \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} (t - hi) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2h} - i}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}} \quad (-\pi < \tau < 0),$$

откуда  $\tau = \frac{1}{i} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2h} - i}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}}$  и  $d\tau = \frac{\pi dt}{2h \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}}$ . Аналогично на верх-

нем берегу  $\omega = e^{i\tau} = \operatorname{th} \frac{\pi}{4h} (t + hi) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2h} + i}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}}$  ( $0 < \tau < \pi$ ), откуда

$d\tau = -\frac{\pi dt}{2h \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h}}$ . Подставляя это в формулу (11), будем иметь:

$$f(z) = \frac{1}{4h} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{-}(t) \frac{s_t - i + t_z \cdot c_t}{s_t - i - t_z \cdot c_t} \frac{dt}{c_t} + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} u_{+}(t) \frac{s_t + i + t_z c_t}{s_t + i - t_z c_t} \frac{dt}{c_t} \right\} + iC,$$

где  $u_{\pm}(t)$  обозначают значения  $u(\zeta)$  в точках  $\zeta = t \pm ih$ ,  $s_t$  и  $c_t$  — гиперболические синус и косинус  $\frac{\pi t}{2h}$ ,  $t_z = \operatorname{th} \frac{\pi z}{4h}$ . После простых преобразований получаем окончательно \*):

$$f(z) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{+}(t) + u_{-}(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2h} (t - z)} dt - \\ - \frac{i}{4h} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{+}(t) - u_{-}(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2h} \operatorname{ch} \frac{\pi (t - z)}{2h}} dt + iC. \quad (12)$$

\*) Эту формулу обычно называют формулой Палатини. Однако последний опубликовал ее в 1915 г., а между тем она в несколько видоизмененном виде содержится в работе Д. А. Граве «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (Петербург, 1896).

Для полосы  $0 < y < 1$  эту формулу можно переписать также в виде

$$f(z) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(t-z)}{2} dt + \\ + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \operatorname{th} \frac{\pi(t-z)}{2} dt + iC_1. \quad (13)$$

5) Формула Чизотти (1921 г.) дает выражение для конформного отображения  $w = f(z)$  круга  $|z| < 1$  на произвольную односвязную область  $D$ , ограниченную контуром  $C$ , если в каждой точке  $z = e^{it}$  окружности известен угол наклона

$\vartheta = \vartheta(t)$  касательной к  $C$  в точке  $w$ , соответствующей  $z$ . Пусть  $dz = ie^{it} dt$  и  $dw = |dw| e^{i\vartheta}$  — элементы окружности и кривой  $C$ , соответствующие друг другу при нашем конформном отображении, тогда на окружности

$i \frac{dw}{dz} = e^{i(\vartheta-t)} \frac{|dw|}{dt}$ . Так как  $f(z)$  реализует конформное отображение, то  $\frac{dw}{dz} \neq 0$  и функция

$-i \ln \left[ i \frac{dw}{dz} \right]$  правильна в круге  $|z| < 1$ , причем по предыдущему

ее действительная часть на окружности  $|z| = 1$  равна  $\vartheta - t$ . С другой стороны, из элементарных геометрических соображений ясно, что на окружности

$$\operatorname{Re} \{-i \ln [-(1-z)^2]\} = \pi + 2 \arg(1-z) = t$$

(см. рис. 100, где обозначено  $\arg(1-z) = \varphi$ ). Поэтому действительная часть правильной в круге  $|z| < 1$  функции

$$g(z) = -i \ln \left[ -i(1-z)^2 \frac{dw}{dz} \right] \quad (14)$$

на окружности  $|z| = 1$  совпадает с  $\vartheta$ . Если функция  $\vartheta(t)$  известна, то функция  $g(z)$  восстанавливается с помощью интеграла Шварца

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + iA, \quad (15)$$

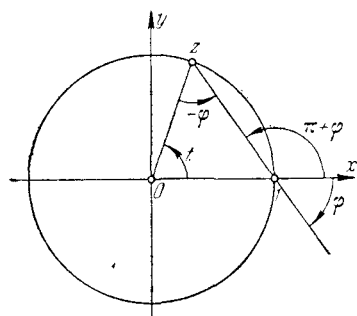


Рис. 100.

где  $A$  — действительная постоянная. Зная  $g(z)$ , мы из (14) находим и искомое конформное отображение

$$w = f(z) = i \int_{z_0}^z \frac{e^{ig(z)} dz}{(1-z)^2} + w_0. \quad (16)$$

Вообще говоря, функция  $\vartheta(t)$  неизвестна, и формула Чизотти (16) не дает эффективного решения задачи конформного отображения. Однако эта формула оказывается полезной всякий раз, когда  $\vartheta(t)$  можно найти из каких-либо соображений. Например, в задаче отображения круга на многоугольник  $\vartheta(t)$  равна известной постоянной на каждой дуге окружности, соответствующей стороне многоугольника, поэтому формула Шварца — Кристоффеля легко получается из формулы Чизотти.

6) Задача Неймана. Наряду с задачей Дирихле для некоторых приложений важно рассмотреть так называемую вторую краевую задачу, или задачу Неймана \*):

Найти гармоническую в области  $D$  функцию  $u(z)$ , зная значения ее нормальной производной на границе  $C$ :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha = g(\xi) \quad (17)$$

и значение  $u(z_0)$  в какой-либо точке  $z_0$  области  $D$ .

Для определенности мы будем предполагать, что в (17) рассматривается внешняя нормаль,  $\alpha$  означает угол, образованный этой нормалью с осью  $x$ . Функция  $g(\xi)$  может иметь на  $C$  конечное число точек разрыва первого рода, функция  $u$  и ее частные производные первого порядка предполагаются ограниченными.

Из теоремы 12 п. 41 следует, что для разрешимости задачи Неймана необходимо выполнение соотношения

$$\int_C g(\xi) ds = 0. \quad (18)$$

Докажем единственность решения задачи Неймана. Заметим прежде всего, что с помощью вспомогательного конформного отображения  $z = f(z_1)$  верхней полуплоскости  $\text{Im } z_1 > 0$  на область  $D$  задача Неймана для  $D$  сводится к такой же задаче для верхней полуплоскости. В самом деле, пусть  $u(z)$  — решение задачи Неймана для области  $D$  с заданной граничной функцией  $g(\xi)$ . Функция

$$u_1(z_1) = u[f(z_1)]$$

\*) Карл Нейман (1832—1925) — немецкий математик.

гармонична в верхней полуплоскости. Так как при конформном отображении направление внутренней нормали к  $C$  переходит в направление положительной оси  $y_1 = \text{Im } z_1$  (всюду, кроме угловых точек контура  $C$ , которых по нашему обычному предположению конечное число) и так как отношение элемента длины нормали  $dn$  к соответствующему элементу  $dy_1$  равно растяжению отображения, т. е. равно  $|f'(x_1)|$ , то на оси  $x_1 = \text{Re } z_1$  имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_f(x_1) \cdot |f'(x_1)| = g[f(x_1)] \cdot |f'(x_1)| = g_1(x_1).$$

Функция  $g_1(x_1)$  непрерывна на оси  $x_1$  всюду, кроме конечного числа точек, соответствующих угловым точкам кривой  $C$ , и конечного числа точек разрыва функции  $g[f(x_1)]$ ; она вполне определяется конформным отображением и заданной граничной функцией. Если теперь, не зная  $u(z)$ , решить задачу Неймана для верхней полуплоскости  $\text{Im } z_1 > 0$  и граничной функции  $g_1(x_1)$ , то очевидно  $u_1[\varphi(z)]$ , где  $z_1 = \varphi(z)$  — отображение, обратное к  $z = f(z_1)$ , будет являться решением задачи Неймана для области  $D$ .

Приведенное рассуждение показывает, что при доказательстве единственности решения задачи Неймана можно ограничиться случаем, когда область  $D$  представляет собой полуплоскость. Предположим, что имеются два решения задачи Неймана  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ ; тогда их разность  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$  будет гармонической в верхней полуплоскости функцией, причем на оси  $x$  ее нормальная производная  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  и в некоторой точке  $z_0$

будет  $u(z_0) = 0$ . Функция  $\frac{\partial u}{\partial y}$  гармонична и ограничена в верхней полуплоскости и равна нулю на оси  $x$ , т. е. решает для верхней полуплоскости и нулевых граничных значений задачу Дирихле. Так как эту же задачу решает функция тождественно равная нулю, то  $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ . Но тогда  $u(z)$  должна быть постоянной и равной нулю в силу условия  $u(z_0) = 0$ . Единственность решения задачи Неймана доказана.

В дополнительном предположении непрерывности частных производных в  $\bar{D}$  решение задачи Неймана сводится к решению задачи Дирихле для сопряженной гармонической функции.

Действительно, пусть  $v(z)$  — гармоническая функция, сопряженная с  $u(z)$ . В силу условий Коши — Римана, записанных в точках кривой  $C$  для направлений  $s$  и  $n$  (см. конец п. 5), имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} = g(\xi).$$

Зная  $\frac{\partial v}{\partial s}$  вдоль  $C$ , мы непосредственным интегрированием определяем

$$v(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\partial v}{\partial s} ds = \int_{\xi_0}^{\xi} g(\xi) d\xi.$$

Теперь разыскание  $v(z)$  в области  $D$  сводится к задаче Дирихле; зная  $v(z)$ , мы простым интегрированием найдем и искомого функцию  $u(z)$ .

Для случая, когда  $D$  представляет собой единичный круг, легко получить формулы, дающие решение задачи Неймана. В самом деле, пусть  $f(z) = u + iv$  будет решение этой задачи.

Полагая  $z = re^{it}$ , имеем, очевидно,  $f'(z) = \frac{1}{e^{it}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)$  или

$$\frac{z}{r} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Отсюда видно, что значения действительной части аналитической функции  $zf'(z)$  на единичной окружности совпадают с заданной функцией  $\frac{\partial u}{\partial r} = g(\xi)$ . Поэтому  $zf'(z)$  можно записать с помощью интеграла Шварца (3):

$$zf'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

(мы учитываем, что значение рассматриваемой функции в начале координат равно нулю). Интегрированием получаем:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{dz}{z} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (19)$$

Меняя порядок интегрирования и вычисляя элементарный интеграл

$$\int \frac{dz}{z(\xi - z)} = -\frac{1}{\xi} \ln(\xi - z) + \frac{1}{\xi} \ln z + \text{const},$$

находим:

$$f(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi)}{\xi} \ln(\xi - z) d\xi + \frac{\ln z}{\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi + \text{const},$$

или, учитывая, что согласно (18)  $\int_{|\xi|=1} \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi = i \int_0^{2\pi} g(e^{it}) dt = 0$ , получаем выражение для функции  $f(z)$ :

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \ln(e^{it} - z) dt + \text{const}. \quad (20)$$



Отделение действительных частей дает искомую формулу

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \ln |e^{it} - z| dt + \text{const} \quad (21)$$

(Дини).

**45. Метод сеток.** Мы приведем здесь наиболее употребительный приближенный метод решения задачи Дирихле, так называемый *метод сеток*. Основание метода сеток было дано в 1924 г. Л. А. Люстерником. Этот метод применим также для решения многих задач математической физики. Мы поясним идею метода, отсылая за подробностями к специальной литературе.

Метод основан на замене производных, входящих в уравнение Лапласа, соответствующими отношениями конечных разностей. Для достаточно малых значений  $h$  частные производные функции  $u(x, y)$  можно приближенно заменить отношениями разностей

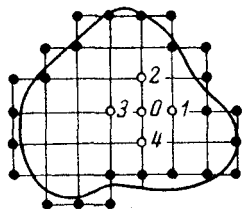


Рис. 101.

$$\left. \begin{aligned} u_x &\approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}, \\ u_y &\approx \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Такие же приближенные выражения можно написать и для производных второго порядка, например:

$$\begin{aligned} u_{xx} &\approx \frac{1}{h} \left\{ \frac{u(x+2h, y) - u(x+h, y)}{h} - \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \right\} = \\ &= \frac{1}{h^2} \{u(x+2h, y) - 2u(x+h, y) + u(x, y)\}. \end{aligned}$$

Заменяя для большей симметрии  $x+h$  через  $x$ , получим:

$$u_{xx} \approx \frac{1}{h^2} \{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)\} \quad (2)$$

и аналогично

$$u_{yy} \approx \frac{1}{h^2} \{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)\}. \quad (3)$$

Таким образом, уравнение Лапласа  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  приближенно заменяется следующим разностным уравнением:

$$u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) связывает между собой значения искомой функции в пяти точках, которые расположены, как белые кружки на рис. 101.

Для того чтобы решить задачу Дирихле методом сеток, надо покрыть заданную область  $D$  квадратной сеткой с шагом  $h$ , как указано на рис. 101. Границу сеточной области следует выбирать так, чтобы она лучше всего приближала границу области  $D$ , при этом граничные точки сеточной области могут лежать как вне, так и внутри  $D$ . Заданные на кривой  $C$  значения функции  $u$  переносятся в граничные точки сеточной области с помощью

интерполирования и, следовательно, значения  $u$  в таких точках можно считать известными.

Неизвестными считаются значения  $u$  во внутренних узлах сетки, для определения которых имеется система линейных уравнений (4). Решив эту систему, мы найдем приближенное решение задачи Дирихле, ибо, как доказал Л. А. Люстерник, при  $h \rightarrow 0$  решение разностного уравнения (4) стремится к гармонической функции  $u(x, y)$ . Доказательство этого предложения читатель может найти в книге И. Г. Петровского [1].

Так как число уравнений системы (4) весьма велико, и эта система симметрична, то ее решение удобнее всего находить с помощью *метода итераций*. Для этого прежде всего перепишем уравнения (4) в обозначениях, смысл которых ясен из рис. 101,

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4}, \quad (5)$$

значение функции  $u(x, y)$  в каждом узле сетки равно среднему арифметическому ее значений в четырех соседних узлах. После этого зададимся произвольно начальной системой значений  $u$  во внутренних узлах сетки (0-система) и найдем средние арифметические значений этой системы, причем для некоторых узлов придется использовать и известные значения  $u$  в граничных узлах. Построенные средние арифметические будут давать первое приближение (1-система). Затем находим средние арифметические значений первой системы, опять используя для некоторых узлов известные граничные значения  $u$ , получим второе приближение (2-система) и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока переход от  $(n-1)$ -й системы к  $n$ -й не дает изменения в пределах нужной точности.

Практическое осуществление вычислений по методу итераций зависит от имеющихся в распоряжении вычислительных средств. Наиболее совершенным средством являются быстродействующие вычислительные машины, которые в очень короткий срок дают решение задачи с весьма большой точностью.

Для проведения вычислений вручную или при помощи малых машин (типа арифмометра) удобно заготовить достаточное число шаблонов. Нулевой шаблон состоит из сетки, подобной заданной, но такой, что ее линии проходят посередине между линиями заданной сетки, а узлы лежат в центре квадратов. Квадраты шаблона, содержащие граничные точки сетки, обводятся жирными линиями, и в них вписываются заданные граничные значения. Остальные шаблоны отличаются от нулевого лишь тем, что в них срезаны квадраты, содержащие граничные данные. Эти шаблоны лучше изготовлять из кальки.

Вычисления ведутся следующим образом.

1) Внутренние клетки нулевого шаблона заполняются значениями 0-системы. Заметим, что чем ближе эти значения к истинным, тем быстрее сходится итерационный процесс, поэтому правильный выбор 0-системы имеет большое значение.

2) Первый шаблон накладывается на нулевой так, чтобы соответствующие клетки находились друг над другом, а клетки этого шаблона заполняются средними арифметическими значениями 0-системы (с учетом граничных значений, которые остаются непокрытыми первым шаблоном). Для ускорения процесса при подсчете средних арифметических можно использовать найденные значения 1-системы — шаблон из кальки хорошо приспособлен для этого, ибо после того как написано значения 1-системы, находящиеся под ним значения на 0-шаблоне почти не видны.

3) Второй шаблон накладывается на нулевой и первый, и клетки второго шаблона заполняются средними арифметическими значений 1-системы (с учетом граничных значений и уже найденных значений 2-системы). То же делается и с третьим, четвертым и т. д. шаблонами до тех пор, пока следующий шаблон не совпадет в пределах заданной точности с предыдущим. Полученная система значений и есть искомая.

Мы уже говорили, что хотя с принципиальной точки зрения итерационный процесс сходится при любой начальной системе значений\*), все же скорость его сходимости существенно зависит от того, насколько начальная система близка к истинной. Если результат не требует большой точности (3 знака), то для определения начальной системы можно использовать графический метод. Он состоит в том, что заданные на кривой  $C$  значения изображают с помощью аксонометрической проекции в виде линии  $\Gamma$  в пространстве  $(x, y, z)$ ; через эту линию проводят на глаз поверхность (лучше всего представить ее как мыльную пленку, натянутую из  $\Gamma$ ) и снимают с чертежа ординаты этой поверхности над узлами сетки.

Значительно эффективнее выбирать в качестве начальной системы для метода итераций решение той же задачи, полученное каким-либо более простым приближенным методом.

Среди таких методов особое место занимает так называемый *метод аналогий*, основанный на использовании моделирующих устройств, физические процессы в которых описываются уравнением Лапласа. Одна из наиболее употребительных аналогий — электрическая — основана на том, что этому уравнению удовлетворяет потенциал электрического поля в тонком плоском слое проводящего вещества.

Для практического осуществления этого метода обычно изготовляют из какого-либо изолирующего материала границу области, для которой надо решить задачу Дирихле, и укрепляют эту границу в ванне так, чтобы внутренность области можно было залить слоем электролита. Можно, например, укрепить пластином по контуру границы области стенки из гибких изолирующих полосок высотой в 1—2 см и залить образовавшуюся область слоем слабо подсоленной воды. Теперь остается сообщить точкам границы потенциалы в соответствии с заданными граничными условиями — это делают с помощью зажимов из проволок или тонких металлических пластинок, закрепляемых на стенке, к которым подводится напряжение. Распределение потенциала внутри области исследуется при помощи игольчатого зонда. При хорошем выполнении модели и при соблюдении особых мер для уменьшения погрешностей этим методом можно получить точность до 1—2%.

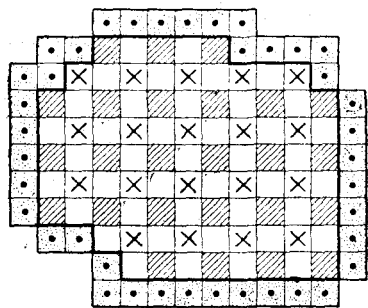


Рис. 102.

проще, чем способ электролитической ванны, но менее точен — он дает точность около 5%. Более подробное описание метода аналогий читатель может найти в книге П. Ф. Фидьчакова и В. И. Панчишина [5].

Если требуется большая точность (4—5 знаков) и сетка содержит большое число узлов, а вычисления ведутся вручную, то лучше сначала провести итерационный процесс с более грубой сеткой, составленной из квадратов основной сетки, взятых в шахматном порядке (заштрихованы на рис. 102). На этом этапе можно проводить итерации до совпадения 2—3 знаков. Когда это достигнуто, нужно вернуться к основной сетке и вычислить значения в пустых клетках, отмеченных на рис. 102 косым крестом, как средние арифметические

\*) Доказательство см. в дополнении Д. Ю. Панова в книге Скарборо, Численные методы математического анализа, ОНТИ, 1934.

четырёх соседних по диагоналям значений, а затем в оставшихся пустых клетках как обычные средние арифметические. Полученную таким образом систему значений принимают за начальную и далее ведут процесс итераций для основной сетки с полным числом знаков.

Для ускорения процесса итераций разработано большое количество разнообразных приемов, выбор которых определяется особенностью задачи, а также применяемыми вычислительными средствами. При вычислениях на малых машинах наиболее эффективны так называемые релаксационные приемы или методы применения поправок по различным формулам. С этими приемами и методами читатель может ознакомиться, например, по книгам В. Э. Милна «Численное решение дифференциальных уравнений», ИЛ, 1955 или Л. Коллатца «Численные методы решения дифференциальных уравнений», ИЛ, 1953.

## § 2. Физические представления. Постановка краевых задач

В этом параграфе мы рассмотрим основные физические представления, связанные с теорией функций комплексного переменного. Они относятся к плоским векторным полям различной физической природы (пп. 46 и 47), а также к плоскому напряженному состоянию тела, которое имеет характер более сложный, чем векторный (п. 50).

Эти физические представления, естественно, приводят к приложениям теории функций к различным областям физики. Основное внимание в этом параграфе мы уделяем постановке соответствующих задач (пп. 48 и 50) с тем, чтобы в дальнейшем изложении дать и конкретные примеры таких приложений. Лишь в п. 49 мы приводим ряд конкретных задач, которые решаются методом конформных отображений.

**46. Плоское поле и комплексный потенциал.** Мы будем рассматривать здесь *стационарные плоско-параллельные векторные поля*. Это означает, во-первых, что векторы поля не зависят от времени, и, во-вторых, что векторы поля параллельны некоторой плоскости  $S_0$ , причем во всех точках любой прямой, перпендикулярной к  $S_0$ , векторы поля равны (по величине и направлению). Очевидно, во всех плоскостях, параллельных  $S_0$ , картина поля одинакова и, следовательно, поле полностью описывается *плоским полем* векторов, лежащих в плоскости  $S_0$ . При этом, говоря о точке плоского поля, мы будем иметь в виду бесконечную прямую плоскопараллельного поля, перпендикулярную  $S_0$  и проходящую через эту точку, кривая будет означать цилиндрическую поверхность, а область — цилиндрическое тело.

Введем в плоскости  $S_0$  систему декартовых координат  $(x, y)$ ; тогда каждый вектор поля  $\mathbf{A}$  с компонентами  $\{A_x, A_y\}$  будет характеризоваться комплексным числом

$$\mathbf{A} = A_x + iA_y, \quad (1)$$

причем компоненты являются известными функциями  $x$  и  $y$ :

$$A_x = A_x(x, y), \quad A_y = A_y(x, y), \quad (2)$$

или, что то же самое, комплексного переменного  $z = x + iy$ .

Таким образом, плоские стационарные векторные поля описываются с помощью комплексных чисел и функций комплексного переменного. Более того, в условиях, которые выполняются для наиболее важных практически полей, оказывается возможным построить описывающую поле аналитическую функцию, так называемый *комплексный потенциал поля*. Благодаря применению хорошо разработанной теории аналитических функций задачи, связанные с такими полями, поддаются наиболее глубокому анализу и удобному для расчетов решению.

Остановимся подробнее на построении комплексного потенциала. Для этого напомним основные понятия векторного анализа плоских полей \*). Мы будем, как принято, пользоваться гидродинамической терминологией, хотя все, что мы будем говорить, относится к полям самой различной физической природы.

*Потоком* векторного поля  $\mathbf{A}$  через кривую  $C$  называется интеграл

$$N = \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{n}^0) ds, \quad (3)$$

где  $(\mathbf{A}, \mathbf{n}^0)$  означает (как и дальше) скалярное произведение вектора поля  $\mathbf{A}$  и единичного вектора нормали  $\mathbf{n}^0$  к кривой  $C$ . Если обозначить через  $dx$  и  $dy$  дифференциалы вдоль  $C$ , т. е. положить  $s^0 ds = dx + i dy$ , то будем иметь  $\mathbf{n}^0 ds = -is^0 ds = = dy - i dx$ ,  $(\mathbf{A}, \mathbf{n}^0) ds = A_x dy - A_y dx$ , и формула (3) принимает вид

$$N = \int_C A_x dy - A_y dx. \quad (4)$$

Поверхностная плотность потока, т. е. предел отношения потока через замкнутую кривую  $C$  к площади  $S$ , ограниченной этой кривой, взятый в предположении, что область  $S$  стягивается к точке  $z$ , называется *дивергенцией*, или *расхождением* поля в точке  $z$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{C \rightarrow z} \frac{1}{S} \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{n}^0) ds; \quad (5)$$

как известно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \quad (6)$$

---

\*) Основные понятия векторного анализа мы считаем известными; см., например, Ф и х т е н г о л ь ц, т. III, стр. 445 и след.

Точка поля, в которой  $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$ , называется *источником* (иногда говорят об источниках лишь в случае, когда  $\operatorname{div} \mathbf{A} > 0$ ; точку, в которой  $\operatorname{div} \mathbf{A} < 0$ , тогда называют *стоком*). Если в каждой точке некоторой области  $D$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

то говорят, что поле *соленоидально* в этой области.

В таком поле поток через любую замкнутую линию  $c$ , внутренность которой  $d$  принадлежит полю, равен нулю — это следует из известной теоремы Остроградского:

$$\int_c (\mathbf{A}, \mathbf{n}^0) ds = \int_d \operatorname{div} \mathbf{A} dS. \quad (8)$$

По той же теореме поток через любое сечение *трубки тока* (так называют область, ограниченную двумя *линиями тока*, т. е. кривыми, в каждой своей точке касающимися соответствующего вектора поля) одинаков (рис. 103).

Условие соленоидальности (7) показывает, что выражение  $-A_y dx + A_x dy$  является дифференциалом некоторой функции  $v(x, y)$ , которая называется *функцией тока*. Это название объясняется тем, что линии уровня функции  $v(x, y)$  являются линиями тока. Действительно, вдоль такой линии уровня имеем  $dv = -A_y dx + A_x dy = 0$ , следовательно,  $\frac{dy}{dx} = \frac{A_y}{A_x}$ , т. е. направление касательной к этой линии совпадает с направлением вектора  $\mathbf{A}$ .

Из выражения дифференциала функции  $v$  вытекает, что ее частные производные равны, соответственно,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -A_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A_x. \quad (9)$$

Функция  $v(x, y)$  восстанавливается (с точностью до постоянного слагаемого) по своему полному дифференциалу  $dv$  с помощью интеграла

$$v(x, y) = \int_{z_0}^z L - A_y dx + A_x dy + \text{const.} \quad (10)$$

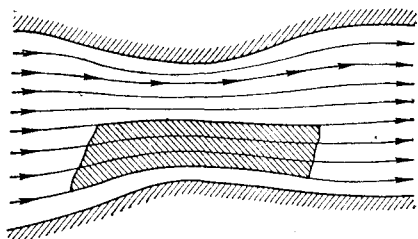


Рис. 103.

В силу условия (7) этот интеграл в односвязной области  $D$  не зависит от пути и, следовательно, определяет однозначную функцию, а в многосвязной области обладает циклическими постоянными и определяет многозначную функцию \*).

В соленоидальном поле поток через линию  $C$  согласно формулам (4) и (10) равен приращению функции тока в концах  $C$ :

$$N = \int_C^{z_2} -A_y dx + A_x dy = \int_C^{z_2} dv = v(z_2) - v(z_1), \quad (11)$$

при этом, если область  $D$  многосвязна, следует брать ветвь  $v(z)$ , непрерывную на линии  $C$ .

Далее, *циркуляцией* поля вдоль замкнутого контура  $C$  называется интеграл вида

$$\Gamma = \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{s}^0) ds = \int_C A_x dx + A_y dy. \quad (12)$$

Поверхностная плотность циркуляции, т. е. предел отношения циркуляции вдоль кривой  $C$  к площади  $S$ , ограниченной этой кривой, взятый в предположении, что  $S$  стягивается к точке  $z$ , называется *ротором* или *вихрем* поля \*\*) в точке  $z$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \lim_{C \rightarrow z} \frac{1}{S} \int_C (\mathbf{A}, \mathbf{s}^0) ds; \quad (13)$$

как известно,

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (14)$$

Точка поля, в которой  $\text{rot } \mathbf{A} \neq 0$ , называется *вихревой точкой*, или, короче, *вихрем* поля. Если в каждой точке некоторой области  $D$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

то говорят, что поле является в этой области *безвихревым*, или *потенциальным*.

В таком поле циркуляция вдоль любой замкнутой линии  $c$ , внутренность  $d$  которой принадлежит полю, равна нулю — это следует из известной формулы Римана — Грина

$$\int_c (\mathbf{A}, \mathbf{s}^0) ds = \int_d \int \text{rot } \mathbf{A} dS. \quad (16)$$

\*) К интегралу (10) при условии (7) полностью применяются рассуждения относительно интеграла (2) п. 41.

\*\*) Для пространственных полей плотность циркуляции дает лишь проекцию вихря на направление нормали к площадке  $S$ ; сам же вихрь является вектором. Можно считать, что и в плоском поле вихрь является вектором, направленным перпендикулярно к плоскости поля. Тогда абсолютная величина (13) будет давать модуль этого вектора, а знак указывать ориентацию.

Условие потенциальности (15) показывает, что выражение  $A_x dx + A_y dy$  является дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , которая называется *потенциальной функцией* или *потенциалом* поля. Это название объясняется тем, что из соотношения  $A_x dx + A_y dy = du$  вытекает

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (17)$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{A} = \text{grad } u$$

(скаляр  $u$  по отношению к своему градиенту  $\mathbf{A}$  и называется потенциалом). Потенциальная функция восстанавливается по своему дифференциалу с помощью интеграла

$$u(x, y) = \int_{z_0}^z A_x dx + A_y dy + \text{const.} \quad (18)$$

В силу условия (15) этот интеграл в односвязной области  $D$  не зависит от пути, а в многосвязной области обладает циклическими постоянными.

Если в области  $D$  поле одновременно является и соленоидальным и безвихревым, т. е. в ней выполнены условия (7) и (15), то из сравнения формул (9) и (17) мы получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (19)$$

а. это — уравнения Коши — Римана. Таким образом, доказана

**Теорема 1.** *В плоском поле без источников и вихрей функция тока и потенциал являются сопряженными гармоническими функциями.*

Отсюда вытекает, в частности, что в таком поле линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональные семейства; совокупность этих семейств иногда называют сеткой поля. Функция комплексного переменного

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (20)$$

называется *комплексным потенциалом поля* — это и есть описывающая поле аналитическая функция, которую мы хотели построить. Из предыдущего вытекает, что если поле занимает многосвязную область (например, имеет источники, или вихри, которые приходится исключать из области для возможности нашего построения), то комплексный потенциал может оказаться и многозначной функцией.

С помощью комплексного потенциала выражаются все основные величины, характеризующие поле. Например, по формулам



(17), (19) и формуле для производной аналитической функции из п. 5 находим вектор поля

$$\mathbf{A} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \quad (21)$$

Отсюда вытекает, между прочим, что производная комплексного потенциала всегда однозначна.

Далее,  $f'(z)dz = (A_x - iA_y)(dx + i dy)$ , следовательно, формулы (4) и (12) можно переписать в виде

$$N = \operatorname{Im} \int_C f'(z) dz, \quad \Gamma = \operatorname{Re} \int_C f'(z) dz. \quad (22)$$

Объединяя обе формулы, получаем:

$$\Gamma + iN = \int_C f'(z) dz. \quad (23)$$

Приведем несколько примеров простейших плоских полей.

1) Источник. Пусть в поле имеется единственный точечный источник, расположенный в начале координат; вихри отсутствуют\*). Из соображений симметрии ясно, что вектор поля имеет вид

$$\mathbf{A} = \varphi(r) \mathbf{r}^0, \quad (24)$$

где  $r = |z|$  — расстояние точки от начала координат и  $\mathbf{r}^0 = z/|z|$  — единичный вектор, направленный из начала к точке  $z$ . Поток вектора через любую окружность  $|z| = r$  с центром в начале равен

$$N = \int_{|z|=r} (\mathbf{A}, \mathbf{r}^0) ds = \varphi(r) \cdot 2\pi r.$$

Этот поток не должен зависеть от радиуса, ибо по формуле Остроградского (8), примененной к кольцу  $r_1 < |r| < r_2$ , мы получаем:

$$\int_{|z|=r_2} (\mathbf{A}, \mathbf{r}^0) ds - \int_{|z|=r_1} (\mathbf{A}, \mathbf{r}^0) ds = \int_{r_1 < |z| < r_2} \operatorname{div} \mathbf{A} dS = 0,$$

так как в этом кольце отсутствуют источники и, следовательно,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Отсюда следует, что величина  $N$  постоянна и, значит,

$$\varphi(r) = \frac{N}{2\pi r}. \quad (25)$$

\*) Такое поле следует представлять как пространственное поле, возникающее от действия источников, равномерно распределенных на прямой, перпендикулярной плоскости  $z$  в начале координат. Аналогично и в примерах 2—4.

Число  $N$  называют *интенсивностью источника*. Подставляя это значение в формулу (24), получаем вектор поля в виде

$$\mathbf{A} = \frac{N}{2\pi r} \cdot \mathbf{r}^0 = \frac{N}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{\bar{z}}. \quad (26)$$

По формуле (21) находим производную комплексного потенциала

$$f'(z) = \frac{N}{2\pi} \frac{1}{z}$$

и, следовательно, сам комплексный потенциал имеет вид

$$f(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c. \quad (27)$$

Отделяя действительные и мнимые части, получаем потенциальную функцию и функцию тока:

$$u = \frac{N}{2\pi} \ln |z| + c_1, \quad v = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_2. \quad (28)$$

На рис. 104 (и следующих) сплошными линиями указаны линии тока и пунктиром — линии равного потенциала.

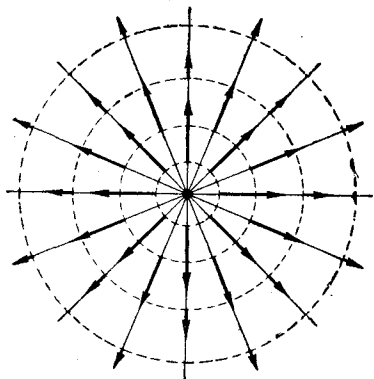


Рис. 104.

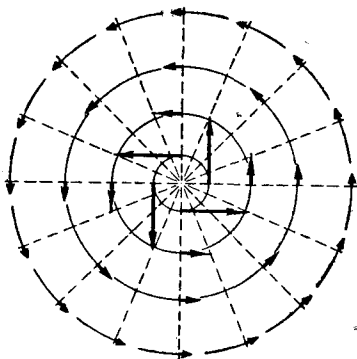


Рис. 105.

2) Вихрь. Совершенно такими же соображениями получим, что вектор поля точечного вихря, расположенного в начале координат, равен

$$\mathbf{A} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{z}, \quad (29)$$

где постоянная  $\Gamma$  — *интенсивность вихря*, т. е. циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по любому замкнутому контуру, окружающему вихрь (рис. 105). Комплексный потенциал отличается от предыдущего

множителем  $i$ , потенциальная функция и функция тока меняются местами:

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + c; \quad u = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Arg} z + c_1, \quad v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln|z| + c_2. \quad (30)$$

3) Вихреисточник. Предположим, что в начале координат сосредоточены источник интенсивности  $N$  и вихрь интенсивности  $\Gamma$ . Вектор поля и комплексный потенциал получаются сложением выражений (26) и (29) и, соответственно (27) и (30):

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{N + i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}, \\ f(z) &= \frac{N - i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln} z + c. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Линии тока и линии равного потенциала в полярных координатах  $z = re^{i\varphi}$  представляются соответственно уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \ln r - N\varphi &= c_1, \\ N \ln r + \Gamma\varphi &= c_2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Это — ортогональные семейства логарифмических спиралей (рис. 106).

4) Диполь. Рассмотрим систему источника и стока интенсивностей  $\pm N$ , расположенных соответственно в точках  $z_1 = -h$ ,  $z_2 = 0$  (рис. 107). Комплексный потенциал этой системы найдется сложением потенциалов источника и стока

$$f_h(z) = \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln}(z + h) - \frac{N}{2\pi} \operatorname{Ln} z \quad (33)$$

(мы воспользовались формулой (27) и ее очевидным обобщением на случай, когда источник расположен не в начале координат; постоянное слагаемое мы не учитываем).

Рассмотрим теперь предельное образование, которое получается из нашей системы, когда  $h \rightarrow 0$  и одновременно  $N \rightarrow \infty$  так, что  $Nh \rightarrow p$ , — оно называется *точечным диполем* с моментом  $p$  (рис. 108). Комплексный потенциал поля точечного диполя находится предельным переходом в формуле (33) при  $h \rightarrow 0$ :

$$f(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Nh}{2\pi} \frac{\operatorname{Ln}(z + h) - \operatorname{Ln} z}{h} = \frac{p}{2\pi} \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{p}{2\pi z}. \quad (34)$$

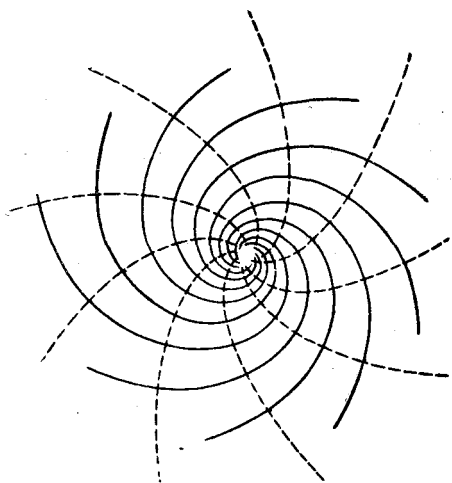


Рис. 106.

На рис. 108 изображены линии тока и линии равного потенциала — это прообразы линий  $\text{Im } w = c_1$  и  $\text{Re } w = c_2$  при отображении  $w = \frac{p}{2\pi z}$ , т. е. окружности, касающиеся координатных осей.

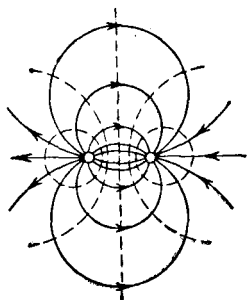


Рис. 107.

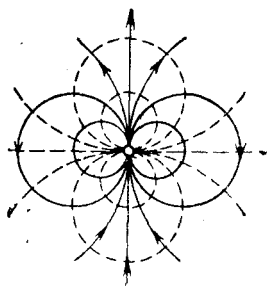


Рис. 108.

5) Простой слой. Предположим, что источники расположены на некоторой линии  $C$  с линейной плотностью  $\rho(\xi)^*$ . Обозначая  $r = |\xi - z|$ , по формуле (28) получим потенциал от элементарного источника  $\rho(\xi)ds$ , расположенного в точке  $\xi$ , в виде  $\frac{\rho(\xi)}{2\pi} \ln r ds$ . Интегрируя, получим потенциал простого слоя

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \rho(\xi) \ln r ds. \quad (35)$$

6) Двойной слой. Предположим, что наряду с линией  $C$ , несущей источники с плотностью  $\rho(\xi)$ , имеется линия  $C'$ , которая получается из  $C$ , если на всех нормалях к ней в определенную сторону отложить малые отрезки постоянной длины  $h$ . Пусть плотность распределения источников на  $C'$  такова, что на ее элементе длины  $ds'$  расположен источник величины  $\rho' ds' = -\rho ds$  (правая и левая части берутся в соответствующих точках  $\xi$  и  $\xi'$ , см. рис. 109). Предельное образование, которое получается из нашей системы при  $h \rightarrow 0$  и  $\rho(\xi) \rightarrow \infty$  так, что  $h\rho(\xi) \rightarrow \mu(\xi)$ , называется двойным слоем с плотностью моментов  $\mu$ .

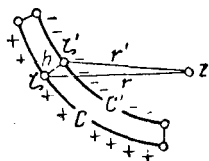


Рис. 109.

\*) Этому полю в пространстве соответствует поле цилиндра с направляющей  $C$  и образующими, перпендикулярными плоскости  $z$ . Цилиндр несет источники, поверхностная плотность которых постоянна на каждой образующей. Аналогично и в примере 6).

Найдем потенциал двойного слоя. При фиксированном  $h \neq 0$  по формуле (35) находим:

$$u_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \rho \ln r \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_C \rho' \ln r' \, ds',$$

где  $r' = |z - \zeta'|$ . Для малых  $h$ , пренебрегая малыми высшего, чем  $h$ , порядка, имеем:

$$r' = r - h \frac{\partial r}{\partial n},$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная в направлении нормали к  $C$  в сторону, противоположную  $C'$ . Отсюда

$$\ln r' = \ln r + \ln \left( 1 - \frac{h}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) = \ln r - h \frac{\partial}{\partial n} \ln r.$$

Учитывая еще, что  $\rho' \, ds' = -\rho \, ds$ , получаем:

$$u_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C h \rho(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln r \, ds.$$

Переходя здесь к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получаем потенциал двойного слоя:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \mu(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} \ln r \, ds, \quad (36)$$

где нормаль берется в сторону кривой, несущей источник с плотностью  $+\rho$  (рис. 109).

В заключение докажем, что любую гармоническую функцию можно трактовать как потенциал некоторого плоского поля. Для простоты ограничимся случаем односвязной области, ограниченной замкнутой кривой  $C$ , хотя утверждение верно и в общем случае. Пусть дана функция  $u(z)$ , гармоническая в такой области  $D$ ; построим сопряженную с ней функцию  $v(z)$  и к функции  $f(z) = u(z) + iv(z)$  применим интегральную формулу Коши \*) п. 14:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Положим  $\zeta - z = re^{i\varphi}$ , тогда дифференцируя по  $\zeta$  при постоянном  $z$ , находим:

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} = d \ln(\zeta - z) = d \ln r + i \, d\varphi.$$

\*) В случае надобности мы несколько отойдем от границы области  $D$ , чтобы формула Коши была применима.

Подставляя это выражение в формулу Коши и отделяя действительные части, получаем:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C u(\xi) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_C v(\xi) d \ln r. \quad (37)$$

На линии  $C$  имеем  $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds$ ; в силу условий Коши — Римана для аналитической на  $C$  функции  $\ln(\xi - z)$  можно написать соотношение  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \ln r}{\partial n}$ , где  $\frac{\partial}{\partial n}$  — дифференцирование по внутренней нормали к  $C$ . Поэтому первый интеграл в формуле (37):

$$u_1(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_C u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln r ds,$$

представляет собой потенциал двойного слоя с плотностью моментов  $-u(\xi)$ .

Пусть  $v(\xi)$  имеет непрерывную производную; интегрируя по частям второе слагаемое формулы (37), находим:

$$u_2(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial v}{\partial s} \ln r ds$$

(внеинтегральный член исчезает в силу замкнутости контура); таким образом, это слагаемое представляет собой потенциал простого слоя с плотностью  $-\frac{\partial v}{\partial s}$ . Доказана

**Теорема 2.** *Всякая функция  $u(z)$ , гармоническая в односвязной области  $D$ , может быть представлена в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя, распределенных по границе  $D$ .*

Если область  $D$  многосвязна, то к этим слагаемым могут добавиться еще потенциалы точечных источников, расположенных в концах граничных дуг (сравни вывод выражения для  $u_2(z)$ ) или в изолированных трюках границы.

**47. Физические представления.** Здесь мы рассмотрим различные физические интерпретации плоских векторных полей.

1) Поле скоростей течения жидкости. Пусть векторы поля  $V$  представляют собой скорости частиц в установившемся плоском течении идеальной несжимаемой жидкости. Поток вектора скорости

$$N = \int_C (V, n^0) ds \quad (1)$$

означает, очевидно, количество жидкости, протекающее за единицу времени через кривую  $C$ , циркуляция

$$\Gamma = \int_C (\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) ds = \int_C V_s ds \quad (2)$$

— интеграл от касательных составляющих  $V_s$  вектора скорости вдоль замкнутой кривой  $C$ . Источники и вихревые точки интерпретируются соответственно как точки, в окрестности которых отличны от нуля поток и циркуляция вдоль замкнутой кривой, окружающей точку (точнее, точки, в которых отличны от нуля плотности потока и циркуляции, т. е.  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$ ). Если в некоторой области  $D$  вихри и источники отсутствуют, то в этой области можно построить аналитическую функцию  $f(z) = u(z) + iv(z)$  — комплексный потенциал поля — такую, что

$$\mathbf{V} = \overline{f'(z)}. \quad (3)$$

Обратно, любую аналитическую в области  $D$  функцию можно интерпретировать как комплексный потенциал некоторого плоского безвихревого и без источников течения идеальной несжимаемой жидкости.

Рассмотрим гидродинамическую интерпретацию простейших особых точек аналитической функции  $f(z)$ . Из примера 3) предыдущего пункта видно, что логарифмическую точку ветвления  $a$ , в окрестности которой  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = c \operatorname{Ln}(z - a) + g(z),$$

где  $g(z)$  — правильная функция, можно интерпретировать как вихреисточник интенсивности  $N - i\Gamma = 2\pi c$ . Несколько обобщая пример 4), мы видим, что полюс  $a$  первого порядка с вычетом  $c_{-1}$ , в окрестности которого

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + g(z),$$

интерпретируется как диполь, полученный от слияния двух вихреисточников интенсивности  $\pm(N - i\Gamma)$ , расположенных в точках  $z_1 = a - h$ ,  $z_2 = a$ ; при этом  $c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} (N - i\Gamma) h$ .

Точно таким же образом можно интерпретировать полюсы высших порядков. Рассмотрим два диполя с моментами  $\mp 2\pi \frac{c_{-2}}{h}$ , расположенных в точках  $z_1 = a - h$ ,  $z_2 = a$ . Предельное образование, получаемое из этой системы при  $h \rightarrow 0$ , называется *квадруполем* с моментом  $2\pi c_{-2}$ . Комплексный потенциал поля квадруполя равен

$$\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{c_{-2}}{h} \left\{ \frac{1}{z - a + h} - \frac{1}{z - a} \right\} = -c_{-2} \frac{d}{dz} \frac{1}{z - a} = \frac{c_{-2}}{(z - a)^2}.$$

Таким образом, полюс второго порядка, в окрестности которого  $f(z) = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$  интерпретируется как совокупность диполя и квадруполь с моментами, зависящими от коэффициентов  $c_{-1}$  и  $c_{-2}$ .

Вообще полюс  $n$ -го порядка функции  $f(z)$  можно интерпретировать как совокупность мультиполей порядков 2, 4, ...,  $2n$  с моментами, зависящими от коэффициентов главной части разложения  $f(z)$  в окрестности этого полюса. При этом под мультиполем порядка  $2k$  понимается предельное образование, получаемое при  $h \rightarrow 0$  из системы мультиполей порядка  $2k-2$  с моментами  $\pm \frac{p_{2k-2}}{h}$ , расположенными в точках  $z_1 = a-h$ ,  $z_2 = a$  (мультиполь порядка 2 — диполь).

Кратные точки комплексного потенциала, в которых его производная обращается в нуль, служат точками разветвления линий тока и линий равного потенциала (см. теорему 8 п. 41, в которой в этом случае  $n > 1$ ). Такие точки называются *критическими точками потока*; в этих точках скорость потока равна нулю.

В заключение приведем вывод известной формулы С. А. Чаплыгина для подсчета вектора подъемной силы, действующей на цилиндрическое тело в плоско-параллельном потоке.

Рассмотрим движение крыла самолета с постоянной скоростью  $-V_\infty$ . При скоростях, не приближающихся к скорости звука, воздух можно считать идеальной несжимаемой жидкостью и пренебречь вихреобразованием вокруг крыла. Кроме того, мы представим крыло в виде бесконечно длинного цилиндра с образующими, перпендикулярными вектору скорости. Тогда поле скоростей частиц воздуха будет плоско-параллельным и можно ограничиться изучением плоского поля в любом сечении, перпендикулярном образующим цилиндра. Наконец, для удобства мы представим, что крыло покоится, а на него набегаёт воздух с постоянной скоростью в бесконечности  $V_\infty$  (рис. 110). Величина давления в установившемся безвихревом потоке определяется известной формулой Бернулли — Эйлера \*):

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2, \quad (4)$$

где  $A$  — некоторая постоянная,  $\rho$  — плотность и  $V = |V|$  — величина скорости потока (действием сил тяжести мы пренебрегаем).

\*) См. Н. Е. Кочин и И. А. Кибель [6], т. I, стр. 15.

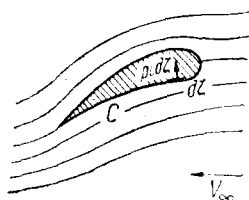


Рис. 110.



Пользуясь этой формулой, мы и вычислим полную силу, действующую на контур  $C$  сечения крыла (*подъемную силу*). Так как давление на  $C$  направлено внутрь по нормали, то сила, действующая на элемент  $d\zeta$  контура  $C$ , равна (векторно):

$$p i d\zeta = A i d\zeta - \frac{\rho}{2} V^2 i d\zeta,$$

а полная сила, действующая на  $C$ , равна векторной сумме  $p i d\zeta$ , т. е.

$$P = X + iY = \int_C p i d\zeta = -\frac{\rho i}{2} \int_C V^2 d\zeta \quad (5)$$

(интеграл по замкнутому контуру от постоянной  $A i$  исчезает). Так как поток обтекает контур  $C$ , то в точках  $C$  скорость потока направлена по касательной:

$$V = \overline{f'(\zeta)} = V e^{i\varphi},$$

где  $\varphi = \arg d\zeta$ . Отсюда величина скорости  $V = \overline{f'(z)} e^{-i\varphi}$  и формула (5) принимает вид

$$P = -\frac{\rho i}{2} \int_C \{\overline{f'(\zeta)}\}^2 e^{-2i\varphi} d\zeta = -\frac{\rho i}{2} \int_C \{\overline{f'(\zeta)}\}^2 \overline{d\zeta},$$

где  $e^{-2i\varphi} d\zeta = e^{-i\varphi} |d\zeta| = \overline{d\zeta}$ . Переходя к сопряженным величинам, получим вектор, комплексно сопряженный вектору подъемной силы:

$$\bar{P} = X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_C \{f'(\zeta)\}^2 d\zeta. \quad (6)$$

Это и есть классическая формула С. А. Чаплыгина (1910 г.).

2) Тепловое поле. Как известно, температура в плоском тепловом поле\*) без источников тепла удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

где  $t$  — время, а  $a^2$  — некоторый постоянный коэффициент. Ограничиваясь рассмотрением установившихся режимов, для которых температура не зависит от времени, мы придем к уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (8)$$

\*) В пространстве ему соответствует плоско-параллельное поле, в котором в каждой плоскости, параллельной плоскости  $xy$ , распределение температур совершенно одинаково.

т. е. температура оказывается гармонической функцией. Сопряженную к ней гармоническую функцию  $v(x, y)$  назовем *функцией тока тепла*, а аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  — *комплексным потенциалом*. Выясним физический смысл функции  $v(x, y)$ .

В теории теплопроводности принимается, что количество тепла, протекающее за единицу времени через элемент длины  $ds$ , пропорционально  $ds$  и нормальной производной температуры  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , т. е. равно

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} ds = (-k \operatorname{grad} u, n^0) ds = (Q, n^0) ds. \quad (9)$$

Здесь  $k$  — коэффициент внутренней теплопроводности, знак минус берется с учетом того, что тепло течет от высоких температур к низким; вектор

$$Q = -k \operatorname{grad} u \quad (10)$$

называется *вектором потока тепла*. Из (9) видно, что поток вектора  $Q$  через линию  $C$  означает количество тепла, протекающее через  $C$  за единицу времени.

По свойству градиента в каждой точке поля вектор потока тепла  $Q$  направлен по нормали к линии  $u(x, y) = \operatorname{const}$  (*изотермической линии*), проходящей через эту точку. Но это направление, очевидно, является касательным к линии уровня функции  $v(x, y)$ , следовательно, линии  $v(x, y) = \operatorname{const}$  служат векторными линиями  $Q$  (т. е. линиями, по которым «течет тепло»). Далее, из формулы (10) и уравнений Коши — Римана имеем:

$$Q = -k \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -k \frac{\partial v}{\partial y} + ki \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, поток тепла через произвольную линию с левой ее стороны на правую (по движению вдоль этой линии), так что  $n^0 ds = -i d\zeta = dy - i dx$ , равен

$$\begin{aligned} \int_C (Q, n^0) ds &= -k \int_C \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx = \\ &= -k \int_C dv = k \{v(z_1) - v(z_2)\} \quad (11) \end{aligned}$$

(мы считаем  $k$  постоянным;  $z_1$  и  $z_2$  — концы линии  $C$ ).

Отметим еще выражение вектора  $Q$  через комплексный потенциал  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ :

$$Q = -k \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -k \overline{f'(z)}. \quad (12)$$

Таким образом, между полем скоростей течения жидкости и тепловым полем имеется полная аналогия. Разница состоит лишь в том, что в первом случае могут быть многозначными обе компоненты комплексного потенциала, а во втором действительная часть — температура — всегда однозначна (мы не принимаем во внимание несущественного различия в формулах).

В качестве примера рассмотрим систему источника и стока тепла интенсивности  $\pm q$ , расположенных в точках  $\pm a$  (рис. 111). Комплексный потенциал поля этой системы равен

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \operatorname{Ln}(z - a) - \frac{q}{2\pi} \operatorname{Ln}(z + a) = \frac{q}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z - a}{z + a}. \quad (13)$$

Изотермические линии  $\left| \frac{z - a}{z + a} \right| = \text{const}$  — окружности, имеющие  $\pm a$  своими симметричными точками (прообразы окружностей

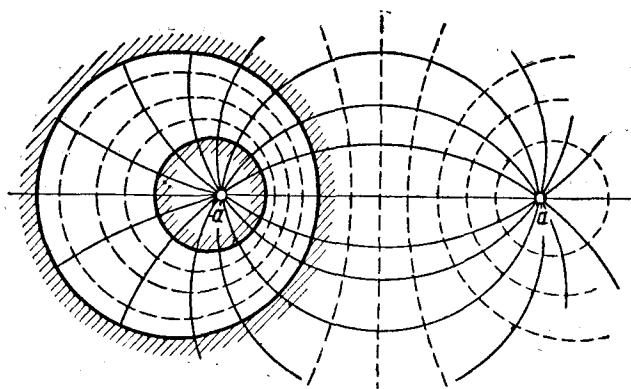


Рис. 111.

$|w| = \text{const}$  при дробно-линейном отображении  $w = \frac{z - a}{z + a}$ ), изображены на рис. 111 пунктиром. Линии тока тепла  $\arg \frac{z - a}{z + a} = \text{const}$  — окружности проходящие через точки  $\pm a$  (прообразы лучей  $\arg w = \text{const}$  при том же отображении), изображены сплошными линиями. Поток тепла через любую замкнутую кривую, окружающую лишь одну точку  $a$ , равен  $+q$ , через кривую, окружающую только точку  $-a$ , равен  $-q$ , через кривую, окружающую обе точки, равен 0. В этом проще всего убедиться с помощью формулы (11), следя за изменением какой-либо ветви функции  $v(z) = \frac{q}{2\pi} \operatorname{Arg}(z - a) - \frac{q}{2\pi} \operatorname{Arg}(z + a)$ .

То же самое поле возникает в эксцентрическом кольце между окружностями, нагретыми до постоянных температур  $u =$

$= u_1$  и  $u = u_2$ , служащими линиями уровня нашего поля (выделены на рис. 111 жирными линиями). В пространстве ему соответствует тепловое поле в трубе из двух цилиндров с параллельными осями. Возможность замены линии уровня  $u$  (или, что то же самое, линии тока в поле скоростей жидкости) твердыми стенками — так называемый *принцип отвердения* — следует из единственности решения соответствующих краевых задач (п. 48).

3) Электростатическое поле. Под электростатическим полем понимают область, с каждой точкой которой связан вектор напряженности  $\mathbf{E} = E_x + iE_y$ , т. е. сила, действующая на единичный заряд, помещенный в этой точке. Мы будем рассматривать плоские электростатические поля, соответствующие плоско-параллельным пространственным полям. Как известно из электростатики, поток вектора напряженности через произвольную замкнутую кривую  $C$  равен

$$N = \int_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) ds = 4\pi e, \quad (14)$$

где  $e$  — суммарный заряд, расположенный внутри контура  $C$ , и  $\mathbf{n}^0$  — внешняя нормаль. Следовательно, в любой точке  $z$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \lim_{C \rightarrow z} \frac{N}{S} = 4\pi\rho, \quad (15)$$

где  $\rho$  — поверхностная плотность заряда в этой точке, а  $S$  — площадь, ограниченная кривой  $C$ . Интеграл

$$A = \int_C (\mathbf{E}, \mathbf{s}^0) ds = \int_C E_s ds \quad (16)$$

означает, очевидно, работу сил поля вдоль пути  $C$ . Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  вдоль любого замкнутого контура равна 0, ибо для поддержания электростатического поля не требуется затраты энергии. В самом деле, если бы вдоль некоторого замкнутого пути  $C$  циркуляция была отлична от нуля, то, обходя этот контур в определенном направлении неограниченное число раз, мы получили бы неограниченный источник энергии (вечный двигатель). Отсюда следует, что в любой точке поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, электростатическое поле всегда потенциально, т. е. существует однозначная функция  $v(x, y)$  — *потенциал поля* — такая, что

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{grad} v. \quad (18)$$

Если в области  $D$  нет зарядов, то в  $D$  всюду  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ; отсюда следует, что существует *силовая функция*

$$u(x, y) = \int_{z_0}^z -E_y dx + E_x dy + \text{const} \quad (19)$$

(которая в односвязной области всегда однозначна, а в многосвязной может быть и многозначной). Так же, как и выше, легко убедиться в том, что любая линия уровня функции  $v(x, y)$  в каждой точке касается соответствующего вектора поля, т. е. является векторной или, иначе, силовой линией поля.

Сравнивая формулы (18) и (19), видим, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  удовлетворяют условиям Коши—Римана, т. е. являются сопряженными гармоническими функциями, а функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— аналитической функцией. Она называется *комплексным потенциалом* поля\*). Через комплексный потенциал выражается вектор напряженности

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial x} = \overline{if'(z)}, \quad (20)$$

а следовательно, и все величины, характеризующие поле. В частности, суммарный заряд, расположенный внутри замкнутого контура  $C$ , равен

$$e = \frac{1}{4\pi} \oint_C f'(z) dz. \quad (21)$$

Мы видим, таким образом, что и электростатическое поле вполне аналогично полю скоростей течения жидкости — разница между этими полями (не считая несущественного различия в формулах) состоит лишь в том, что в первом случае обе компоненты комплексного потенциала могут быть многозначными, а во втором действительная часть всегда однозначна.

Приведем простой пример. Рассмотрим плоское поле точечного заряда величины  $e$ , расположенного в начале координат  $z = 0$ . В пространстве ему соответствует поле бесконечной прямой  $L$ , перпендикулярной плоскости  $z$  в точке  $z = 0$  и несущей заряд постоянной линейной плотности  $e$  (рис. 112). Подсчитаем напряженность поля  $\mathbf{E} = E_x + iE_y$  в точке  $z = x + iy$ , т. е. силу, действующую на единичный заряд, помещенный в этой точке. Для этого введем на  $L$  координату  $h$  — длину, отсчитываемую

\*) Мы вводим комплексный потенциал так, как это принято в электротехнической литературе. Он, очевидно, отличается множителем  $i$  от принятого в гидродинамике.

от точки  $z=0$ , и заметим, что элементарная напряженность, создаваемая зарядом  $edh$ , расположенным на высоте  $h$ , равна по величине

$$|dE| = e \frac{dh}{r^2 + h^2},$$

где  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Так как вектор  $E$  лежит в плоскости  $z$ , то его величина равна сумме проекций на эту плоскость всех элементарных напряженностей  $dE$ , т. е.

$$|E| = \int \cos t |dE| = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{r^2 + h^2} dh = e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{r} dt = \frac{2e}{r},$$

где  $t$  — угол между  $dE$  и плоскостью  $z$ ,  $h = r \operatorname{tg} t$ ,  $dh = \frac{r dt}{\cos^2 t} = \frac{r^2 + h^2}{r} dt$  (рис. 112). Таким образом, в плоском поле точечного заряда величина напряженности обратно пропорциональна расстоянию между точками, а не квадрату расстояния, как в пространственном поле.

Учитывая направление вектора  $E$ , получим:

$$E = \frac{2e}{r} r^0 = \frac{2e}{z}. \quad (22)$$

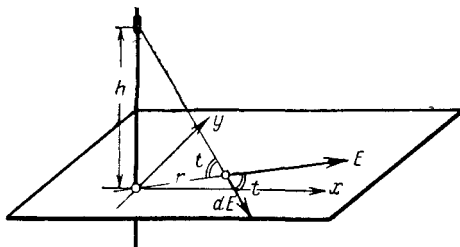


Рис. 112.

Отсюда видно, что наше поле полностью совпадает с плоским полем точечного источника интенсивности  $N = 4\pi e$  (ср. пример 1 предыдущего пункта; заметим, что формулу (22) можно было бы вывести точно так же, как в этом примере). Комплексный потенциал поля находим по формуле (20):

$$f(z) = -i \int_{z_0}^z \bar{E} dz + c = 2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z} + c. \quad (23)$$

4) Магнитное поле токов. Мы ограничимся случаем поля системы линейных токов  $I_h$ . По известному закону электротехники вектор  $H$  напряженности прямолинейного тока  $I$  на расстоянии  $r$  от него по величине равен  $2I/r$ , лежит в плоскости, перпендикулярной току, и направлен по нормали к кратчайшему отрезку, соединяющему точку поля с линией тока, в сторону, определяемую правилом буравчика. Следовательно, в соответствующем плоском поле этот вектор равен

$$H = \frac{2Ii}{z}. \quad (24)$$

Под комплексным потенциалом такого поля понимается функция

$$F(z) = U + iV = 2I \ln z + c, \quad (25)$$

где  $U$  — силовая функция поля,  $V$  — потенциал и  $c$  — произвольная постоянная.

Для системы токов  $I_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), пересекающих плоскость  $z$  в точках  $z_k$ , вектор напряженности и комплексный потенциал получаются сложением выражений (24) и (25) и соответственно равны

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{2I_k i}{z - z_k},$$

$$F(z) = \sum_{k=1}^n 2I_k \ln(z - z_k) + c. \quad (26)$$

Из сравнения формул (23) и (25) можно заключить, что сетка из силовых линий и линий равного потенциала электрического поля линейных зарядов, пересекающих плоскость  $z$  в точках  $z_k$ , полностью совпадает с такой же сеткой магнитного поля линейных токов, пересекающих плоскость в тех же точках.

При этом лишь меняются ролями силовые линии и линии равного потенциала.

В качестве примера приведем магнитное поле системы двух одинаково направленных и равных по величине линейных токов, пересекающих плоскость  $z$  в точках  $\pm a$ . Комплексный потенциал поля равен

$$F(z) = I \ln(z^2 - a^2), \quad (27)$$

силовые линии определяются уравнением

$$|z - a| |z + a| = \text{const}, \quad (28)$$

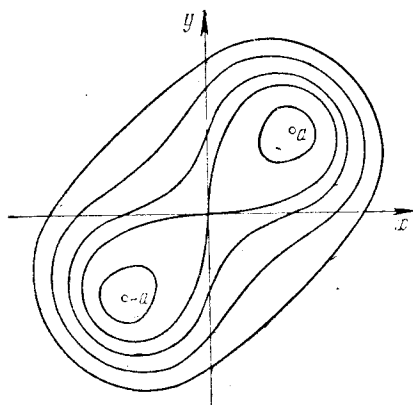


Рис. 113.

т. е. представляют собой так называемые лемнискаты (лемниской называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух точек, фокусов, постоянно, рис. 113).

**48. Краевые задачи.** В предыдущих пунктах мы видели, что для изучения плоского поля достаточно знать его комплексный потенциал. Прикладные задачи обычно сводятся к определению комплексного потенциала по заданным условиям на границах поля (они диктуются самими физическими условиями данной

задачи) или, как говорят, к решению заданной *краевой*, или *граничной задачи*. При этом, если задача физически правильно поставлена, то заданные условия должны полностью определять поле, т. е. комплексный потенциал поля должен определяться с точностью до постоянного слагаемого. Мы приведем здесь простейшие постановки краевых задач теории плоского поля, причем для определенности будем пользоваться гидродинамической терминологией. В примерах решения этих задач мы будем рассматривать и другие интерпретации. Начнем с трех задач на обтекание.

1) Поток во внешности замкнутой кривой. Мы предполагаем, что область поля  $D$  содержит внутри бесконечно удаленную точку и ограничена одним контуром  $C$  — границей тела, погруженного в жидкость ( $D$  — внешность контура  $C$ ). Пусть тело поступательно движется с постоянной скоростью —  $V_\infty$ , или, что то же самое, тело покоится и на него набегаёт поток со скоростью  $V_\infty$ . Тогда производная комплексного потенциала — функция, комплексно сопряженная скорости потока (см. формулу (3) предыдущего пункта), — должна быть правильной в бесконечности, однозначной в области  $D$  аналитической функцией. Ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки имеет, следовательно, вид

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \bar{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (1)$$

Из формулы (23) п. 46 следует тогда, что  $c_{-1} \cdot 2\pi i = \Gamma + iN$ , где  $\Gamma$  и  $N$  — циркуляция и поток вдоль любого замкнутого контура, охватывающего  $C$ . Но так как поток обтекает  $C$  и в области  $D$  нет источников, то  $N = 0$  и, интегрируя (1), мы получаем следующее разложение комплексного потенциала в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$w = f(z) = \bar{V}_\infty z + c + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{c_{-2}}{z} - \dots, \quad (2)$$

где  $c$  — произвольная постоянная. Величина циркуляции  $\Gamma$  должна быть задана — в этом состоит первое граничное условие задачи полного обтекания. Физический смысл этого условия мы выясним ниже (см. п. 49, примеры 2) и 3)). Второе граничное условие относится к контуру  $C$ ; в силу условия обтекания в любой точке контура  $C$  скорость потока должна быть направлена по касательной к  $C$ . Иными словами, контур  $C$  должен быть одной из линий тока, т. е. на контуре  $C$  должно выполняться условие

$$v(x, y) = \text{const.} \quad (3)$$

Докажем единственность решения задачи при заданной скорости в бесконечности  $V_\infty$  и заданной циркуляции  $\Gamma$ . Пусть



$f_1(z)$  и  $f_2(z)$  — комплексные потенциалы, соответствующие двум решениям задачи, и  $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ . Функция  $f(z)$ , очевидно, однозначна и аналитична всюду в  $D$ , включая бесконечно удаленную точку. Ее мнимая часть  $v(z)$  постоянна на  $C$  и гармонична всюду в  $D$  (включая бесконечно удаленную точку). По теореме единственности решения задачи Дирихле должно быть  $v(z) \equiv \text{const}$  и, следовательно,  $f(z) \equiv \text{const}$ . Таким образом, наши комплексные потенциалы отличаются лишь постоянным слагаемым, что не влияет на распределение скоростей.

Отметим, что в случае *бесциркуляционного обтекания*, когда  $\Gamma = 0$ , комплексный потенциал  $w = f(z)$  реализует взаимно-однозначное отображение области  $D$  на внешность некоторого отрезка, параллельного оси  $u$ . В самом деле, из разложения  $f(z)$  в окрестности бесконечности

$$w = f(z) = \bar{V}_\infty z + c - \frac{c-2}{z} - \dots$$

видно, что главный член разложения имеет вид  $\bar{V}_\infty z$ , следовательно, функция  $w = f(z)$  реализует взаимно-однозначное отображение окрестностей бесконечно удаленных точек плоскостей  $z$  и  $w$  (это следует также из того, что существует  $f'(\infty) = \bar{V}_\infty \neq 0$ ). Так как  $f(z)$  имеет в области  $D$  один полюс первого порядка (в бесконечности), то по принципу аргумента (п. 23) для достаточно больших  $a$  имеем:

$$1 - n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = 0,$$

где  $n(a)$  — число  $a$ -точек  $f(z)$  в области  $D$  и кривая  $C$  проходит против часовой стрелки. Но  $n(a)$  — целочисленная и непрерывная функция точки  $a$ , следовательно, она постоянна и  $1 - n(a) = 0$  для всех значений  $a$ , которые не принимаются функцией  $f(z)$  на контуре  $C$ . Таким образом,  $f(z)$  в области  $D$  принимает и притом только один раз любое значение, которое она не принимает на контуре  $C$ , а этот контур, как видно из граничного условия (3), она переводит в отрезок, параллельный оси  $u$ . Утверждение доказано.

Задача распространяется на случай обтекания системы контуров (полипланы). В этом случае, кроме скорости в бесконечности, следует задать значения циркуляций при обходе каждого контура.

2) Поток в криволинейной полосе. Пусть даны две линии  $C_0$  и  $C_1$ , имеющие общими лишь свои концы, расположенные в точке  $z = \infty$ , и пусть  $D$  — область, заключенная между этими кривыми. В области  $D$  требуется построить безвихревой поток, обтекающий  $C_0$  и  $C_1$  и имеющий заданный рас-

ход  $N$ , т. е. поток скорости  $V$  через произвольную кривую  $\gamma$ , соединяющую линии  $C_0$  и  $C_1$ .

Пусть  $w = f(z)$  — комплексный потенциал искомого поля. Условие обтекания  $C_0$  и  $C_1$  сводится к тому, что на этих кривых функция  $v = \operatorname{Im} f(z)$  должна принимать некоторые постоянные значения, например:

$$v(x, y) = \begin{cases} v_0 & \text{на } C_0, \\ v_1 & \text{на } C_1. \end{cases} \quad (4)$$

По формуле (11) п. 46 расход

$$N = \int_{\gamma} (V, n^\circ) ds = v_1 - v_0, \quad (5)$$

следовательно, разность  $v_1 - v_0$  известна. Так как  $f(z)$  определяется лишь с точностью до постоянного слагаемого, то всегда можно принять  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = N$ .

Без дополнительных ограничений на поведение  $f(z)$  в бесконечности задача неопределенна. Действительно, рассмотрим, например, полосу  $0 < y < N$ , где  $N$  — заданный расход; тогда всем поставленным условиям удовлетворяет функция

$$f_{n, \lambda}(z) = z + \lambda e^{\pi n z / N},$$

ибо при любом целом  $n$  и действительном  $\lambda$  ее мнимая часть  $y + \lambda e^{\pi n x / N} \sin \frac{\pi n y}{N}$  принимает на границах полосы постоянные значения  $v_0 = 0$ ,  $v_1 = N$ . Поэтому мы предположим дополнительно, что: 1) кривые  $C_0$  и  $C_1$  обладают гладкой кривизной, 2) при  $z \rightarrow \infty$  остается ограниченной ширина полосы  $D$ , а также кривизны кривых  $C_0$  и  $C_1$  и производные этих кривизн, 3) рассматриваются лишь течения с ограниченной в бесконечности скоростью.

Докажем, что в этих предположениях при заданном расходе  $N$  существует единственный безвихревой поток в области  $D$ , обтекающий  $C_0$  и  $C_1$ . В самом деле, пусть  $f(z)$  — комплексный потенциал любого потока, удовлетворяющего условиям задачи, и  $z = \varphi(w)$  — функция, реализующая конформное отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} w < N$  на область  $D$ , причем  $\varphi(\pm \infty) = \pm \infty$  \*). Очевидно, функция

$$F(w) = f[\varphi(w)] = U + iV \quad (6)$$

\*) Точка  $z = \infty$  является двойной точкой границы области  $D$ ; одну из этих точек мы обозначаем  $-\infty$ , а другую  $+\infty$ . При этом мы заботимся лишь о том, чтобы по отношению к обходу границы области  $D$  эти точки были расположены так же, как и на горизонтальной прямоугольной полосе.

будет служить комплексным потенциалом потока в полосе  $0 < v < N$ , обтекающего прямые  $v = 0$ ,  $v = N$  с заданным расходом  $N$ . В силу условия ограниченности скорости данного потока в бесконечности и теоремы 1 п. 29 о соответствии границ при конформных отображениях производная  $F'(w) = f'(z)\varphi'(w)$  также остается ограниченной в бесконечности. Рассмотрим гармоническую в полосе  $0 < v < N$  функцию  $\frac{\partial V}{\partial u} = \text{Im } F'(w)$ . Она, очевидно, равна 0 на границах полосы и ограничена в замкнутой полосе  $0 \leq v \leq N$ . По обобщенному принципу экстремума (теорема 5 п. 42) можно заключить, что всюду в полосе  $\frac{\partial V}{\partial u} \equiv 0$ , а значит,  $F'(w) = a$  — действительная постоянная. Отсюда  $F(w) = aw$  (мы отбрасываем несущественную постоянную), и так как функция  $V(w) = av$  должна быть равна 0 на прямой  $v = 0$  и  $N$  на прямой  $v = N$ , то  $a = 1$ ; окончательно  $F(w) \equiv w$ . Из формулы (6) получаем тогда:  $f[\varphi(w)] = w$ , т. е.  $f(z)$  должна быть функцией, обратной к  $\varphi(w)$ . Единственность решения задачи доказана.

Вместе с тем доказано, что искомый комплексный потенциал  $w = f(z)$  реализует взаимно-однозначное конформное отображение области  $D$  на полосу  $0 < v < N$  с соответствием бесконечно удаленных точек:  $f(\pm\infty) = \pm\infty$ .

3) Поток в криволинейной полуплоскости. Пусть дана линия  $C$  без точек самопересечения, содержащая бесконечно удаленную точку, и замкнутая на сфере комплексного переменного;  $D$  пусть обозначает одну из двух областей, ограниченных линией  $C$ . В области  $D$  требуется построить поток, обтекающий кривую  $C$  и обладающий заданной по величине скоростью в бесконечности  $|V_\infty|$ .

Если дополнительно предположить, что  $C$  во всех точках обладает непрерывно дифференцируемой кривизной, включая и бесконечно удаленную точку, и рассматривать лишь потоки с ограниченными скоростями, то единственность решения доказывается точно так же, как в предыдущей задаче (только полюсу надо заменить полуплоскостью).

Искомый комплексный потенциал  $w = f(z)$  реализует конформное отображение области  $D$  на верхнюю полуплоскость при условиях  $f(\infty) = \infty$ ,  $|f'(\infty)| = |V_\infty|$ .

В качестве примера укажем видоизменения, которые надлежит сделать в задачах 1)–3) при рассмотрении электростатических полей. Всюду термин «обтекаемый контур» заменяется термином «проводник» (точнее, след проводящего цилиндра, перпендикулярного плоскости  $z$ ), «скорость» заменяется «напряженностью поля», «функция тока» — «потенциалом», «потенциальная функция» — «силовой функцией», «расход» — «разно-

стью потенциалов» и т. д. В задаче 1) задание циркуляции заменяется заданием суммарного заряда  $e = \frac{1}{4\pi} \int_C f'(z) dz = \frac{ic_{-1}}{2}$  (см. формулу (21) п. 47), следовательно, в формуле (1)  $c_{-1} = -2ei$  и член с логарифмом в формуле (2) имеет вид  $2ei \operatorname{Ln} \frac{1}{z}$  (ср. (23) п. 47).

В заключение приведем два примера несколько более сложных краевых задач.

4) Ударные задачи. Значительная часть таких задач охватывается следующей схемой. В сосуде  $A$  находится покоящаяся или движущаяся жидкость, в которой плавают твердые тела  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. 114\*). В момент времени  $t = 0$  на тела подействовали импульсивные силы так, что тело  $B_k$  получило мгновенно приращение скорости  $V_k^{(i)}$  (удар). Требуется найти поле импульсивных скоростей  $V^{(i)}$  и распределение импульсивных давлений  $P^{(i)}$  в жидкости в момент, непосредственно следующий за ударом.

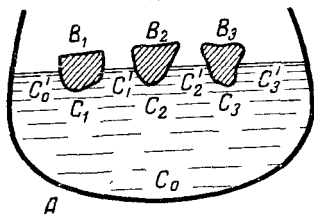


Рис. 114.

Перейдем к математической постановке задачи, причем для простоты ограничимся случаем, когда до удара жидкость покоится. Как известно, при отсутствии массовых импульсивных сил движение после удара потенциально, причем потенциал скоростей  $u(x, y)$  в момент, непосредственно следующий за ударом, удовлетворяет условию

$$\rho u = P^{(i)}, \quad (7)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости и  $P^{(i)}$  — импульсивное давление в ней. Обозначим через  $D$  область, занятую жидкостью, через  $C$  — ее границу.  $C$  состоит из дуги  $C_0$  — стенки сосуда, дуг  $C_k$  — поверхностей тел  $B_k$  и из дуг  $C'_k$  — участков свободной поверхности жидкости между двумя последовательными дугами  $C_k, C_{k+1}$  (рис. 114). Для потенциала скоростей  $u(x, y)$  имеем следующие граничные условия:

а) Вдоль стенки сосуда  $C_0$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (8)$$

\*) Сосуд и тела предполагаются, конечно, цилиндрическими, движение жидкости плоско-параллельно; на рис. 114 изображено сечение, перпендикулярное образующим цилиндров.

ибо из условия обтекания получаем  $v(x, y) = \text{const}$ , и тогда из условий Коши — Римана, записанных для направлений  $s^0$  и  $n^0$ , будем иметь:  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ .

б) Вдоль дуг  $C_h$  соприкосновения жидкости с телом

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (V^{(i)}, n^0), \quad (9)$$

где  $n^0$  — единичный вектор внутренней нормали к  $C_h$ . При этом мы считаем, что не происходит отставания жидкости от стенок (кавитации); (9) следует из известной связи между  $\text{grad } u = V^{(i)}$  и производной по направлению. Импульсивные скорости тел  $B_h$  считаются известными, так что в правой части формулы (9) имеем известную функцию.

в) Вдоль дуг  $C'_k$  (т. е. вдоль свободной поверхности)

$$u(x, y) = 0, \quad (10)$$

ибо давление на свободной поверхности конечно; следовательно  $P^{(i)} = 0$  и тогда (10) следует из (7).

Найдем  $u(x, y)$  в области  $D$ , мы получим распределение скоростей  $V = \text{grad } u$ , а давления определим по формуле (7).

Эта краевая задача является частным случаем смешанной краевой задачи теории гармонических функций, исследование и решение которой мы приведем в п. 55 (см. также пример 9) п. 49).

5) Обтекание со срывом струй. Так называют обтекание, при котором одна из линий тока идет из бесконечности к некоторой точке  $B$  обтекаемого тела, где она разделяется на две ветви, каждая из которых идет вдоль стенок тела до некоторых точек  $C_1$  и  $C_2$  и затем отрывается от стенок, снова уходя в бесконечность (рис. 115). При этом предполагается, что свободные струи  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$  отделяют зону движения  $I$  от зоны покоя  $II$  так, что вдоль этих струй происходит разрыв скоростей \*). В зоне  $I$  движение считается потенциальным; в зоне покоя  $II$  скорость везде равна нулю, следовательно,

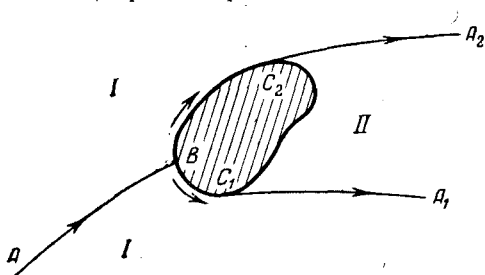


Рис. 115.

\*) Такая схема в известной мере отражает фактически наблюдаемый разрыв скоростей за движущимися в реальных жидкостях телами; однако в реальных жидкостях зона  $II$  является не зоной покоя, а зоной вихревого движения и не простирается в бесконечность.

давление постоянно (см. формулу Бернулли — Эйлера (4) п. 47) и струи  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$  можно рассматривать как свободные границы жидкости. Мы приходим к следующей краевой задаче:

а) на участке  $C_1BC_2$  тела (длина которого не известна) имеется обтекание, т. е.

$$v(x, y) = \text{const}; \quad (11)$$

б) на свободных струях  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$  (форма которых не известна) величина скорости постоянна:

$$|V| = |V_\infty|, \quad (12)$$

это следует на основании формулы Бернулли — Эйлера из постоянства давления в зоне покоя.

Методы решения этой краевой задачи будут приведены в п. 65.

В последующем изложении мы еще не раз будем встречаться с краевыми задачами различных типов.

**49. Примеры. Приложения.** 1) Формула Жуковского. В п. 47 мы получили формулу С. А. Чаплыгина для подъемной силы обтекаемого профиля:

$$\bar{P} = X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_C [f'(z)]^2 dz. \quad (1)$$

Учитывая разложение в бесконечности для производной комплексного потенциала в задаче обтекания замкнутой кривой, полученное в предыдущем пункте:

$$f'(z) = \bar{V}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} + \dots,$$

и применяя к интегралу (1) теорему о вычетах, находим:

$$\bar{P} = \frac{\rho i}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\Gamma \bar{V}_\infty}{\pi i} = i\rho \Gamma \bar{V}_\infty.$$

Перейдя к комплексно сопряженным величинам, получим знаменитую теорему Н. Е. Жуковского (1904 г.):

$$P = -i\rho \Gamma V_\infty, \quad (2)$$

т. е. подъемная сила, действующая на обтекаемый контур, по величине равна произведению из циркуляции, плотности и величины скорости в бесконечности и направление ее повернуто относительно  $V_\infty$  на прямой угол навстречу циркуляции (при  $\Gamma > 0$  — по часовой стрелке, при  $\Gamma < 0$  — против).

2) Обтекание кругового цилиндра. Найдем сначала бесциркуляционный поток, обтекающий окружность  $|z| = R$  с заданной скоростью на бесконечности  $V_\infty = v_\infty e^{i\theta}$ . По

доказанному в предыдущем пункте комплексный потенциал этого потока реализует конформное отображение внешности круга на внешность отрезка действительной оси. Такое отображение реализует функция Жуковского

$$w = k \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right),$$

где  $k$  — действительная постоянная. Однако для этой функции  $w'(\infty) = k/R$  вместо  $\bar{V}_\infty = v_\infty e^{-i\vartheta}$ . Поэтому, чтобы получить комплексный потенциал потока с заданной скоростью на бесконечности, мы заменяем в последней формуле  $z$  на  $ze^{-i\vartheta}$  и полагаем  $k = Rv_\infty$ ; мы получаем:

$$w = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z}. \quad (3)$$

Накладывая на полученный бесциркуляционный поток чисто циркуляционный поток  $\frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z$ , который также обтекает окружность  $|z| = R$ , найдем окончательное решение задачи

$$w = f(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z. \quad (4)$$

Критические точки потока, т. е. точки, в которых скорость потока равна 0 (см. п. 47), определяются из уравнения

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i \bar{V}_\infty} z - e^{2i\vartheta} R^2 = 0,$$

откуда

$$z_{\text{кр}} = \frac{1}{4\pi \bar{V}_\infty} \left( \Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 R^2 - \Gamma^2} \right).$$

Отсюда видно, что при  $|\Gamma| \leq 4\pi v_\infty R$  имеем  $|z_{\text{кр}}| = \frac{1}{4\pi v_\infty} \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 R^2}$ , и обе критические точки лежат на окружности  $|z| = R$ , при  $|\Gamma| > 4\pi v_\infty R$  имеем  $|z_{\text{кр}}| = \frac{1}{4\pi v_\infty} \left| \Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 v_\infty^2 R^2} \right| \neq R$  и так как произведение модулей корней квадратного уравнения равно  $R^2$ , то одна из точек лежит в круге  $|z| < R$ , а другая — вне его.

Рассмотрим подробнее первый случай. Полагая на окружности  $z = Re^{i\varphi}$ , имеем:

$$|f'(z)| = \left| v_\infty (e^{-i\vartheta} - e^{i(\vartheta-2\varphi)}) - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{-i\varphi} \right| = \left| 2v_\infty \sin(\varphi - \vartheta) - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right|, \quad (5)$$

откуда, принимая пока для простоты  $\vartheta = 0$ , получаем следующие соотношения для критических точек:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty}, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1. \quad (6)$$

В точке  $Re^{i\varphi_2}$  линия тока потока, проходящая к ней, разветвляется на две: одна обходит верхнюю, а другая нижнюю дугу окружности. В точке  $Re^{i\varphi_1}$  обе линии снова соединяются (рис. 116, а). Первая из этих точек называется *точкой разветвления*, а вторая — *точкой схода* потока.

Для бесциркуляционного потока критические точки совпадают с  $\pm R$ . Циркуляция стремится сблизить эти точки — при возрастании  $\Gamma$  обе точки поднимаются и при  $\Gamma = 4\pi v_\infty R$  сливаются в одну точку (рис. 116, б). Дальнейшее увеличение  $\Gamma$  приводит к образованию замкнутых линий тока (рис. 116, в) — мы имеем уже второй случай.

Если скорость в бесконечности имеет аргумент  $\vartheta$ , то вся картина потока лишь повернется. В частности, формула для точки схода (6) примет вид:

$$\Gamma = 4\pi R v_\infty \sin(\varphi_1 - \vartheta). \quad (7)$$

Заметим, что в нашей задаче вместо циркуляции  $\Gamma$  можно задаваться точкой схода потока  $Re^{i\varphi_1}$ , ибо они связаны между собой простой формулой (7). Через точку схода выражается величина подъемной силы в теореме Жуковского:

$$|P| = 4\pi \rho R v_\infty^2 |\sin(\varphi_1 - \vartheta)| \quad (8)$$

и скорость потока (ср. формулу (5)):

$$|V| = 2v_\infty |\sin(\varphi - \vartheta) - \sin(\varphi_1 - \vartheta)|. \quad (9)$$

3) Обтекание произвольного профиля. Условие Чаплыгина. Пусть дан произвольный профиль, ограниченный замкнутой кривой  $C$ , и функция

$$\xi = g(z), \quad g(\infty) = \infty, \quad g'(\infty) = 1 \quad (10)$$

реализует конформное отображение внешности  $C$  на внешность круга  $|\xi| > R$ . Тогда комплексным потенциалом потока, обтекающего профиль с заданной точкой схода  $z_1$  и заданной скоростью в бесконечности, будет, очевидно, служить функция

$$w = V_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} g(z), \quad (11)$$

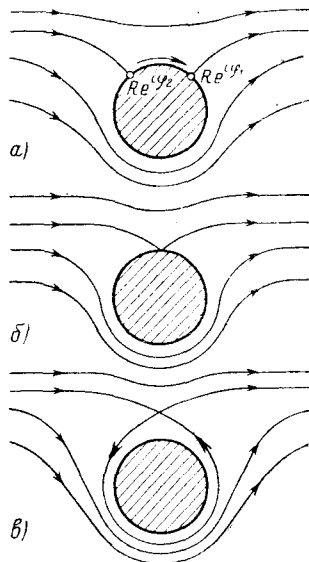


Рис. 116.



где  $R$  вполне определено условиями нормировки (10), а  $\Gamma$  находится по формуле (7) через образ  $\xi_1 = e^{i\varphi_1}$  точки схода потока.

Пусть обтекаемый цилиндр обладает острой кромкой, так что его профиль  $S$  имеет острие в некоторой точке  $z_0$  с углом между касательными  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ). Тогда, как явствует из поведения конформного отображения в угловых точках (см. п. 37), в окрестности этой точки

$$\xi = g(z) \approx A(z - z_0)^{1/(2-\alpha)} + \xi_0 \quad (12)$$

и, следовательно, производная

$$\frac{d\xi}{dz} \approx B(z - z_0)^{(a-1)/(2-a)} \quad (13)$$

обращается в точке  $z_0$  в бесконечность \*) ( $A$  и  $B$  — некоторые отличные от нуля постоянные,  $\xi_0 = g(z_0)$ ).

С. А. Чаплыгин предложил считать, что при обтекании профиля с острой точкой  $z_0$  в эту точку под влиянием вязкости и вихреобразования смещается точка схода потока (условие Чаплыгина). Тогда, согласно предыдущему примеру, в точке  $\xi_0 = g(z_0)$  производная  $\frac{dw}{d\xi}$  отображения (4) (мы заменили  $z$  на  $\xi$ ) имеет нуль первого порядка, т. е. в окрестности точки  $z_0$  имеем:

$$\frac{dw}{d\xi} \approx C(\xi - \xi_0) = D(z - z_0)^{1/(2-\alpha)} \quad (14)$$

(мы воспользовались выражением (12);  $C$  и  $D$  — постоянные).

Объединяя формулы (13) и (14), мы получаем, что в окрестности  $z_0$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dz} \approx BD(z - z_0)^{\alpha/(2-\alpha)},$$

т. е. что из условия Чаплыгина вытекает ограниченность скорости у острой кромки профиля.

Для контуров с одной острой кромкой условие Чаплыгина однозначно определяет значение циркуляции (ср. формулу (7)).

4) Обтекание профилей Жуковского. В п. 34 (пример 1) было доказано, что функция

$$\omega = z + \sqrt{z^2 - a^2} \quad (15)$$

отображает внешность профиля Жуковского с параметрами  $h$  и  $d$  на внешность круга  $C'$  с центром в точке  $\omega_0 = ih - de^{-\frac{\alpha}{2}i}$ , где  $\frac{\alpha}{2} = \arctg \frac{h}{a}$ , и радиуса  $R_0 = \sqrt{a^2 + h^2} + d$  (рис. 117 и 63).

\*) Строго говоря, в формулах (12) и (13) могут быть еще логарифмические множители, которые не меняют сделанного вывода (см. замечание на стр. 172).

Производная функции (15) в бесконечности равна 2, следовательно, функция  $\zeta = g(z)$  для профиля Жуковского имеет вид:

$$\zeta = \frac{1}{2}(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2}(z - \omega_0 + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

а радиус окружности, на которую отображается профиль, равен

$$R = \frac{R_0}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + h^2} + d).$$

Подставляя это в (11), получим комплексный потенциал потока, обтекающего профиль Жуковского.

Из рис. 62 видно, что аргумент образа острой точки профиля в плоскости  $\zeta$  равен  $-\frac{\alpha}{2}$  ( $\zeta_1 = Re^{-i\alpha/2}$ ), так что по условию Чаплыгина и формуле (7) циркуляция

$$\Gamma = -2\pi v_\infty (\sqrt{a^2 + h^2} + d) \sin\left(\vartheta + \frac{\alpha}{2}\right), \quad (16)$$

и тогда по теореме Жуковского величина подъемной силы равна

$$|P| = 2\pi \rho v_\infty^2 (\sqrt{a^2 + h^2} + d) \left| \sin\left(\vartheta + \frac{\alpha}{2}\right) \right|. \quad (17)$$

5) Электростатическое поле у краев плоского конденсатора. Если при изучении поля внутри плоского конденсатора это поле практически можно считать равномерным, то вблизи краев равномерность поля существенно нарушается и необходим специальный расчет. Рассматривая поле вблизи одного края конденсатора, мы для простоты пренебрежем влиянием второго края и будем представлять конденсатор в виде двух полуплоскостей, расположенных друг над другом. Расстояние между пластинами обозначим  $2h$ , их потенциалы  $\pm V$ .

Задача сводится к расчету плоского поля внешности двух параллельных полупрямых (следов пластин конденсатора в плоскости, перпендикулярной краям пластин), т. е. к краевой задаче 2) п. 48. Комплексный потенциал  $w = f(z)$  реализует отображение области поля на полосу  $-V < \text{Im } w < V$  с соответствием точек  $f(A) = -\infty$ ,  $f(C) = \infty$ . Обратное отображение мы получили в примере 3 п. 39:

$$z = \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V} w} + \frac{\pi}{V} w \right) \quad (18)$$

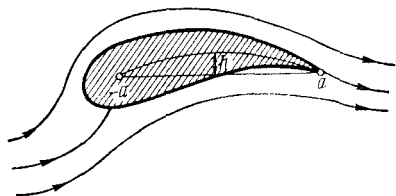


Рис. 117.

(см. там формулу (13), мы лишь переменили роли  $z$  и  $w$ , совершили подобное преобразование полосы и отбросили несущественное постоянное слагаемое).

На рис. 118 представлены линии равного потенциала и силовые линии поля; их параметрические уравнения получаются соответственно при  $v = \text{const}$  или  $u = \text{const}$ , из соотношений, которые дает разделение действительных и мнимых частей формулы (18):

$$x = \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V} u} \cos \frac{\pi}{V} v + \frac{\pi}{V} u \right), \quad y = \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V} u} \sin \frac{\pi}{V} v + \frac{\pi}{V} v \right) \quad (19)$$

(мы полагаем  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ). Напряженность поля по формуле (20) п. 47 равна

$$\mathbf{E} = -i \left( \frac{dw}{dz} \right) = - \frac{i}{\left( \frac{dz}{dw} \right)} = -i \frac{V}{h} \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi}{V} \bar{w}}}. \quad (20)$$

Внутри конденсатора, т. е. при  $z$ , близких к точке  $A$ ,  $\bar{w}$  близко к  $-\infty$ , следовательно, напряженность поля  $\mathbf{E} \approx -i \frac{V}{h}$  близка

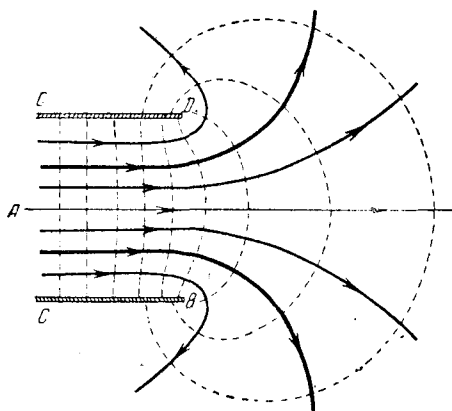


Рис. 118.

к напряженности равномерного поля. При приближении к краям конденсатора  $\bar{w} \rightarrow \pm Vi$ , следовательно, напряженность поля неограниченно возрастает.

Проследим изменение величины напряженности поля  $|\mathbf{E}| = \left| \frac{dw}{dz} \right|$  вдоль линий равного потенциала. Так как величина производной аналитической функции не зависит от направления, по которому эта производная вычисляется, то мы можем вычислять ее в направлении

силовой линии  $u = \text{const}$ . Тогда  $|dw| = |dv|$ ,  $|dz| = ds$ , где  $ds$  — дифференциал дуги силовой линии — находится из формулы (19) при  $u = \text{const}$ :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{h}{V} \sqrt{e^{\frac{2\pi}{V} u} + 2e^{\frac{\pi}{V} u} \cos \frac{\pi}{V} v + 1} dv$$

и, следовательно,

$$|\mathbf{E}| = \frac{dv}{ds} = \frac{V}{h} \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V} u} + 2e^{\frac{\pi}{V} u} \cos \frac{\pi}{V} v + 1}}. \quad (21)$$

Для нахождения максимума  $|E|$  вдоль линии равного потенциала достаточно найти минимум подкоренного выражения по  $u$  при фиксированном  $v$ . Необходимое условие экстремума  $e^{\frac{\pi}{V}u} + \cos \frac{\pi}{V}v = 0$  (которое получается приравниванием нулю производной по  $u$ ) заведомо не выполняется, когда косинус положителен, т. е. при  $\frac{\pi}{V}|v| < \frac{\pi}{2}$ , или  $|v| < \frac{V}{2}$ . Вдоль таких линий напряженность поля  $|E|$  меняется монотонно, не имея ни максимума, ни минимума. Для  $v = \pm \frac{V}{2}$  максимум

$$|E| = \frac{V}{h} \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi}{V}u} + 1}}$$

достигается при  $u = -\infty$ , т. е. на левом крае конденсатора. Если построить конденсатор, пластины которого имеют форму линий равного потенциала  $v = \pm \frac{V}{2}$  \*) (жирные линии на рис. 118), то для такого конденсатора напряженность поля убывает при подходе к краям, а не возрастает неограниченно, как для плоского конденсатора. Этот конденсатор называется *конденсатором Роговского*.

6) Магнитное поле в зазоре электрической машины. Рассмотрим магнитное поле в зазоре между ротором и статором машины вблизи паза ротора. Радиусы и ширину статора и ротора мы будем считать столь большими, что это поле мало отличается от плоскопараллельного (на рис. 119, а изображено сечение машины плоскостью, перпендикулярной к оси вращения). Через  $2H$  мы обозначим ширину паза ротора; так как практически лишь весьма небольшая часть силовых линий, проникших в паз, достигает его основания, то глубину этого паза можно считать бесконечно большой. Через  $h$  мы обозначим величину межжелезного пространства, т. е. расстояние между статором и ротором; пренебрегая влиянием других

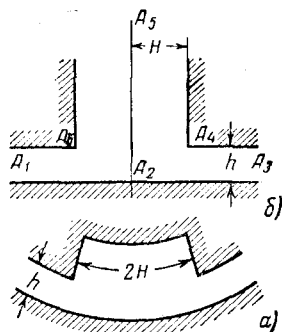


Рис. 119.

\*) Из формул (19) для этих линий имеем:  $x = \frac{h}{V} u$ ,  $y = \pm \frac{h}{\pi} \left( e^{\frac{\pi}{V}u} + \frac{\pi}{2} \right)$ , откуда  $y = \pm \left( \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi} e^{\frac{\pi}{h}x} \right)$ .

пазов, мы будем предполагать, что это пространство представляет собой бесконечную в обе стороны полосу. После сделанных упрощений область интересующего нас поля принимает вид пятиугольника, изображенного на рис. 119, б. Мы предполагаем, что след границы ротора  $A_1A_6A_5A_4A_3$  несет потенциал  $V$ , а след границы статора  $A_1A_2A_3$  — потенциал 0. (Предполагается, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика.)

Задача принадлежит к типу краевой задачи 2) п. 48 и сводится к конформному отображению  $w = f(z)$  области поля на полосу  $0 < \text{Im } w < V$ ,  $f(A_1) = -\infty$ ,  $f(A_3) = \infty$ . В п. 39 мы получили отображение верхней полуплоскости на область поля:

$$z = z(w) = \frac{2i}{\pi} \left( h \operatorname{arctg} \frac{h\omega}{H\sqrt{\omega^2 - a^2}} + H \operatorname{arth} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} \right), \quad (22)$$

где  $a^2 = \frac{H^2 + h^2}{H^2}$ , причем отрезок  $(-1, 1)$  действительной оси плоскости  $\omega$  переходит в прямую  $A_1A_2A_3$ , а остальная часть оси — в  $A_3A_4A_5A_6A_1$  (см. п. 39, формула (23); мы изменили лишь обозначения переменных). Применив дополнительное отображение полуплоскости  $\omega$  на полосу  $0 < \text{Im } w < V$  с нужным соответствием границ:

$$w = \frac{V}{\pi} \ln \frac{1 + \omega}{1 - \omega} = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arth} \omega, \quad (23)$$

и исключив  $\omega$  из уравнений (22) и (23), получим функцию, обратную искомому комплексному потенциалу.

Найдем величину вектора магнитной индукции  $B$ , который в нашем случае совпадает с  $H$

$$\begin{aligned} |B| &= \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{\frac{dw}{d\omega}}{\frac{dz}{d\omega}} \right| = \frac{2V}{\pi} \frac{1}{|1 - \omega^2|} \cdot \frac{1}{\frac{2H}{\pi} \left| \frac{\sqrt{\omega^2 - a^2}}{\omega^2 - 1} \right|} = \\ &= \frac{V}{H} \frac{1}{|\sqrt{\omega^2 - a^2}|} \quad (24) \end{aligned}$$

(при вычислении производных мы воспользовались выражениями (23) и (22)).

Для характеристики машины важно знать степень пульсации магнитного потока, т. е. отношение минимальной индукции на статоре к максимальной. Из физических соображений ясно, что минимальная индукция  $B_{\min}$  достигается против паза ротора, т. е. в точке  $A_2$ , а максимальная индукция  $B_{\max}$  — против середины выступа, т. е. в точке  $A_1$ . Так как точка  $A_2$  соответ-

ствуется  $\omega = 0$ , а точке  $A_1$  — точка  $\omega = -1$ , то искомое отношение равно\*)

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} = \frac{h}{\sqrt{H^2 + h^2}}. \quad (25)$$

7) Обтекание наклонного прямолинейного отрезка  $(0, he^{i\alpha\pi})$  бесконечно глубоким плоским потоком с заданной величиной скорости в бесконечности  $v_\infty$  (рис. 120). Задача принадлежит к типу краевой задачи 3) п. 48 и сводится к конформному отображению области потока на верхнюю полуплоскость. Обратное отображение было получено в п. 39

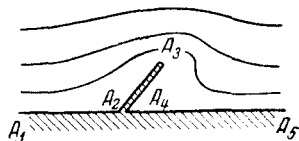


Рис. 120.

$$z = z(\omega) = h(\omega - 1)^\alpha (\beta\omega + 1)^{1-\alpha}, \quad (26)$$

где  $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$  (см. формулу (10) п. 39; мы переменили роли  $z$  и  $\omega$  и растянули плоскость  $z$ , чтобы получить отрезок длины  $h$ ). Очевидно,  $z(\infty) = \infty$ , но производная в бесконечности равна

$$\begin{aligned} \left. \frac{dz}{d\omega} \right|_{\omega=\infty} &= ah \left[ \left( \frac{\beta\omega + 1}{\omega - 1} \right)^{1-\alpha} + \left( \frac{\omega - 1}{\beta\omega + 1} \right)^\alpha \right]_{\omega=\infty} = \\ &= \frac{ah}{\beta^\alpha} (1 + \beta) = \frac{h}{\beta^{\alpha-1}} = \frac{1}{\gamma}. \end{aligned}$$

Заменяя в формуле (26)  $\omega$  на  $\gamma\omega/v_\infty$ , получим функцию, обратную комплексному потенциалу, ибо ее производная в бесконечности будет равна  $1/v_\infty$ , как и требуется. На рис. 120 изображены линии тока. Отметим, что, как видно из выражения для производной  $\frac{dz}{d\omega}$ , скорость потока  $|V| = \left| \frac{d\omega}{dz} \right|$  обращается в бесконечность в точке  $A_3$ , которой соответствует  $\omega = 0^{**}$ ), и в нуль в точках  $A_2$  и  $A_4$ , которым соответствуют  $\omega = -1/\beta$  и  $\omega = 1$ .

8) Распределение температур в канале, дно которого поддерживается при температуре  $t^0$ , а стенки — при

\*) Этот результат можно получить и из математических соображений. Границе статора  $A_1A_2A_3$  соответствует отрезок  $(-1, 1)$  действительной оси плоскости  $\omega$ , и тогда из (24) видно, что  $B_{\min} = \frac{V}{Ha}$ ,  $B_{\max} = \frac{V}{H} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$ .

\*\*) При этом следует заметить одно обстоятельство; если считать, что при  $\omega \rightarrow 0$  дробь  $\frac{\beta\omega + 1}{\omega - 1} \rightarrow -1 = e^{i\pi}$ , то вторая дробь  $\frac{\omega - 1}{\beta\omega + 1} \rightarrow e^{-i\pi}$ , поэтому  $\frac{dz}{d\omega} \rightarrow e^{i\pi(1-\alpha)} + e^{-i\pi\alpha} = 0$  при  $\omega \rightarrow 0$ .

температуре  $0^\circ$ ; между стенками и дном имеется теплоизоляция. Сечение канала плоскостью, перпендикулярной к дну, изображено на рис. 121. Задача сводится к обобщенной задаче Дирихле для полуполосы. Отообразим сначала эту полуполосу на верхнюю полуплоскость с помощью функции  $\zeta = \sin \frac{\pi z}{a}$ ; дно  $BC$  переходит при этом в отрезок  $(-1, 1)$ , а стенки — в лучи  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, \infty)$ . Остается воспользоваться формулой (9) п. 44:

$$u(\zeta) = -\frac{\varphi_1}{\pi} t + \frac{\varphi_2}{\pi} t = \frac{t}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{t}{\pi} \arg \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

(у нас  $n=2$ ,  $u_0=u_2=0$ ,  $u_1=t$ ,  $\varphi_{1,2} = \arg(\zeta \pm 1)$ ) и заменить  $\zeta = \sin \frac{\pi z}{a} = \sin \frac{\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} + i \cos \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a}$ . Мы получим:

$$u(z) = \frac{t}{\pi} \arg \frac{(\sin \cdot \operatorname{ch} - 1) + i \cos \cdot \operatorname{sh}}{(\sin \cdot \operatorname{ch} + 1) + i \cos \cdot \operatorname{sh}} = \frac{t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos \cdot \operatorname{sh}}{\sin^2 \cdot \operatorname{ch}^2 - 1 + \cos^2 \cdot \operatorname{sh}^2}$$

(мы освободились от мнимостей в знаменателе; аргументы круговых и гиперболических функций для простоты письма опускаем). После замены в знаменателе  $\operatorname{ch}^2 = 1 + \operatorname{sh}^2$  мы приведем его к виду  $\operatorname{sh}^2 - \cos^2$ ; если обозначить

$$\operatorname{arctg} \frac{2 \cos \cdot \operatorname{sh}}{\operatorname{sh}^2 - \cos^2} = \alpha, \quad \text{то будем иметь}$$

$$\frac{\operatorname{sh}^2 - \cos^2}{\operatorname{sh}^2 + \cos^2} = \cos \alpha, \quad \text{следовательно,}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\cos}{\operatorname{sh}},$$

и формула для температуры принимает окончательный вид

$$u(z) = \frac{2t}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{a}}. \quad (27)$$

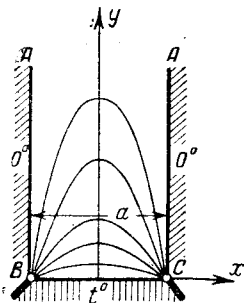


Рис. 121.

Пользуясь интегралом Шварца для полуплоскости, можно было бы найти и комплексный потенциал теплового потока.

9) Удар пластинки о воду. В заключение приведем простейший пример задачи об ударе. Пусть жидкость заполняет нижнее полупространство, а твердое тело представляет собой плоскую пластинку в форме полосы шириной  $2a$ , которая в момент удара  $t=0$  касается свободной поверхности и мгновенно приобретает скорость  $V_0$ , направленную вертикально вниз (рис. 122). Пусть  $(-a, a)$  будет след пластинки в плоскости, перпендикулярной ее ребрам, и  $f(z) = u(z) + iv(z)$  — комплексный потенциал плоского поля, описывающего скорости жидкости после удара.

Краевые условия задачи формулируются следующим образом: на отрезке  $(-a, a)$  имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -V_0, \quad (28)$$

а на оставшейся части оси  $x$ , соответствующей свободной поверхности,

$$u = 0. \quad (29)$$

По принципу симметрии мы продолжаем гармоническую функцию  $u$  в верхнюю полуплоскость через лучи  $(-\infty, -a)$  и  $(a, \infty)$  (это возможно на основании условия (29), см. п. 42); на верхнем берегу вместо (28) получаем тогда условие  $\frac{\partial u}{\partial y} = V_0$ . Задача свелась, таким образом, к задаче Неймана п. 44: найти гармоническую во внешности отрезка  $(-a, a)$  функцию  $u(z)$  по граничному условию  $\frac{\partial u}{\partial n} = V_0$  ( $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по нормали, направленной внутрь области).

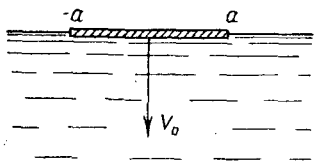


Рис. 122.

Для решения этой задачи воспользуемся конформным отображением внешности отрезка  $(-a, a)$  на внешность единичного круга плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ :

$$z = \frac{a}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (30)$$

Граничное условие при этом преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial n} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = V_0 \cdot \frac{a}{2} |1 - e^{-2i\varphi}| = \\ &= \frac{V_0 a}{2} \sqrt{(1 - \cos 2\varphi)^2 + \sin^2 2\varphi} = -V_0 a \sin \varphi, \end{aligned}$$

где  $\rho = |\zeta|$  и  $\varphi = \arg \zeta$  (знак минус объясняется тем, что у нас на нижней полуокружности, где  $\pi < \varphi < 2\pi$ , должно быть  $\frac{\partial u}{\partial \rho} > 0$ ). На основании условий Коши — Римана в полярных

координатах (см. п. 5) на окружности  $\rho = 1$  получаем  $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = -V_0 a \sin \varphi$ , следовательно,  $v = V_0 a \cos \varphi = V_0 a \operatorname{Re} \zeta$ .

Таким образом, мы находим комплексный потенциал в плоскости  $\zeta$ :  $\omega = iV_0 a \zeta$ . Подставляя выражение  $\zeta$  через  $z$  из (30), находим искомый комплексный потенциал в плоскости  $z$ :

$$f(z) = iV_0 \left\{ z - \sqrt{z^2 - a^2} \right\}. \quad (31)$$



По формуле (7) п. 48 находим импульсивное давление в произвольной точке  $x$  отрезка  $(-a, a)$

$$P^{(i)} = \rho \operatorname{Re} f(z) = \rho V_0 \sqrt{a^2 - x^2}; \quad (32)$$

в момент после удара скорости частиц на свободной поверхности ( $|x| > a$ ) нормальны к этой поверхности и равны по величине

$$V = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = V_0 \left| 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right|. \quad (33)$$

Формула (32) позволяет решить следующую задачу: тело массы  $m$  при свободном падении ударяется о воду вдоль плоской полосы ширины  $2a$ ; найти скорость  $V_2$  тела после удара, если скорость до удара равна  $V_1$ . По формуле (32) на тело в момент удара действует импульсивная сила

$$P = \rho V_2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \rho V_2 a^2. \quad (34)$$

С другой стороны, по теореме о количестве движения  $P = m(V_1 - V_2)$  и сравнивая это выражение с предыдущим, находим:

$$V_2 = \frac{mV_1}{m + \frac{\pi \rho a^2}{2}}. \quad (35)$$

$V_2$  есть также скорость, которую приобретает тело при неупругом ударе о тело массы  $\pi \rho a^2/2$ . В соответствии с этим  $\pi \rho a^2/2$  называется *присоединенной массой* пластинки, ударяющейся о жидкость.

Дальнейшие примеры решения прикладных задач мы приведем в § 4 этой главы.

**50. Плоская задача теории упругости.** Несколько особняком стоят приложения теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. Наметим вкратце основания, на которых строятся эти приложения — подробности читатель найдет в прекрасной книге Н. И. Мусхелишвили [10].

Плоская задача теории упругости применяется в следующих двух случаях: а) длинный цилиндр подвергается напряжениям, приложенным к его боковой поверхности, причем эти напряжения лежат в плоскостях, перпендикулярных к образующим цилиндра, и одинаковы во всех таких плоскостях (рис. 123, а); б) тонкая пластинка подвергается напряжениям, приложенным к ее периметру и лежащим в плоскости пластинки (рис. 123, б). В обоих случаях задача описывается плоским напряженным состоянием. Остановимся на этом подробнее.

В общей задаче теории упругости рассматривают силы двоякого рода — *массовые силы*, действующие на элементы объема или массы тела (такова, например, сила тяжести), и *поверхностные силы*, действующие по поверхности элементов, мысленно выделяемых в теле (таково, например, давление). В плоской задаче этим случаям соответствуют массовые силы, действующие на элементарные площадки, и линейные силы, действующие на границы элементов.

Мы предположим, что массовые силы отсутствуют. Линейную силу, действующую на элемент  $ds$ , мы обозначим  $Fds$ , где  $F$  — силу, отнесенную к единице длины, — будем называть *напряжением*. Напряжение  $F$  в данной точке зависит

от направления элемента (оно имеет тензорный характер). В частности, напряжения, отнесенные к элементам, перпендикулярным осям  $x$  и  $y$ , мы соответственно обозначим  $F_x$  и  $F_y$ . Величины  $F_x$  и  $F_y$  — векторные; для их компонент примем обозначения  $X_x, Y_x$  и  $X_y, Y_y$ , так что

$$\left. \begin{aligned} F_x &= X_x + iY_x, \\ F_y &= X_y + iY_y, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем  $X_x$  и  $Y_y$  будем называть *нормальными*, а  $Y_x$  и  $X_y$  — *касательными напряжениями*. В плоской задаче компоненты напряжения являются функциями двух действительных переменных  $x$  и  $y$ . Можно показать, что напряжение  $F_n = X_n + iY_n$ , отнесенное к элементу, нормаль которого  $n$  образует с осью  $x$  угол  $\alpha$ , выражается через напряжение (1) формулой

$$F_n = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha \quad (2)$$

(ср. [10], стр. 31).

В теории упругости выводятся следующие *уравнения равновесия*, связывающие компоненты напряжения:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

доказывается также, что

$$X_y = Y_x \quad (4)$$

(см. [10], стр. 20).

Под действием упругих сил тело подвергается *деформации*, т. е. изменяются расстояния между точками тела. Мы

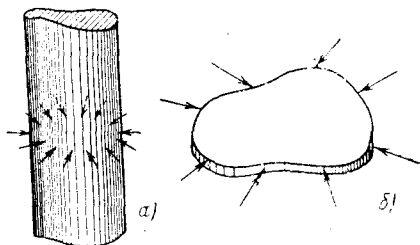


Рис. 123.

обозначим

$$x^* = f_1(x, y), \quad y^* = f_2(x, y)$$

новые (после деформации) координаты точки  $(x, y)$  тела и разности

$$u = x^* - x, \quad v = y^* - y \quad (5)$$

назовем *компонентами смещения*. Компоненты смещения в плоской задаче являются функциями двух действительных переменных  $x, y$ . В дальнейшем компоненты смещения, а также их производные по  $x$  и  $y$  предполагаются столь малыми, что их произведениями и квадратами можно пренебречь (малые деформации).

Далее, величины

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6)$$

называются *компонентами деформации*; величина

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7)$$

представляет собой поверхностное расширение при деформации (см. [10], стр. 47). По основному закону теории упругости (закон Гука) компоненты напряжения являются линейными однородными функциями компонент деформации.

Для изотропного тела \*) (мы ограничиваемся лишь такими телами) эта зависимость имеет вид

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda\theta + 2\mu e_{xx}, & Y_y &= \lambda\theta + 2\mu e_{yy}, \\ X_y &= Y_x = 2\mu e_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — некоторые постоянные неотрицательные коэффициенты (см. [10], стр. 64). Формулы (3) и (8) представляют собой *основные уравнения плоской задачи теории упругости*. Это — система пяти уравнений с частными производными первого порядка относительно пяти неизвестных функций  $X_x, Y_y, X_y, u$  и  $v$  двух независимых переменных  $x$  и  $y$  \*\*).

Из этой системы легко получить уравнения, содержащие одни лишь компоненты смещения. Для этого достаточно под-

\*) То есть тела, упругие свойства которого одинаковы по всем направлениям.

\*\*) В случае длинного цилиндра на частицы тела действует еще компонента напряжения  $Z_z$ , так же как и другие компоненты, зависящая лишь от  $x$  и  $y$ . Мы не включаем содержащее ее уравнение в основную систему, ибо она равна  $Z_z = \lambda\theta$  и может быть найдена после решения этой системы (см. [10], стр. 90). В случае плоской пластинки постоянную  $\lambda$  надо заменить постоянной  $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$  (см. [10], стр. 95). Такая замена не меняет характера уравнений (8), поэтому мы и не отмечаем это в основном тексте.

ставить выражения (8) для  $X_x$ ,  $Y_y$  и  $X_y$  в уравнения (3); тогда с учетом (6) и (7) получим систему двух уравнений второго порядка относительно двух неизвестных  $u$  и  $v$ :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v = 0, \quad (9)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. После решения системы (9) напряжения можно найти простым дифференцированием по формулам (8).

Легко получить и уравнения, содержащие одни лишь компоненты напряжений. Для этого продифференцируем первое уравнение (9) по  $x$ , второе — по  $y$  и сложим полученные уравнения. Учитывая еще выражение (7), будем иметь  $(\lambda + \mu)\Delta\theta + \mu\Delta\theta = 0$ , откуда

$$\Delta\theta = 0.$$

Заметим, что из первых двух уравнений (8) и формулы (7) вытекает соотношение

$$\theta = \frac{1}{2(\lambda + \mu)}(X_x + Y_y); \quad (10)$$

подставив это в предыдущее уравнение, найдем:

$$\Delta(X_x + Y_y) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) вместе с уравнениями (3) и дает искомую систему уравнений, содержащих лишь компоненты напряжений (три уравнения с тремя неизвестными функциями).

Введем так называемую функцию напряжений, особенно удобную для описания решения плоской задачи. На основании формул (3) выражения

$$-X_y dx + X_x dy = dB, \quad Y_y dx - Y_x dy = dA \quad (12)$$

являются дифференциалами некоторых функций. Равенство касательных напряжений  $X_y$  и  $Y_x$  приводит к равенству  $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$ , из которого следует, что выражение

$$A dx + B dy = dU \quad (13)$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ , которая и называется *функцией напряжений*. Эта функция была введена в 1862 г. английским астрономом Эри. Из (12) и (13) получаем следующие выражения компонент напряжений через функцию  $U(x, y)$ :

$$X_x = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad Y_y = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad X_y = Y_x = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (14)$$

Через функцию  $U(x, y)$  можно выразить и компоненты смещений. Подставив в формулы (8) выражения (14) для  $X_x$ ,  $Y_y$  и  $X_y$ , выражения (6) для  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  и  $e_{xy}$ , а также выражение  $\theta = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \Delta U$ , которое получается подстановкой значений (14) в (10), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta U, & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Delta U, \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из соотношений (14) следует, что  $X_x + Y_y = \Delta U$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа; из уравнения (11) видно теперь, что функция напряжений  $U$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \quad (16)$$

т. е., как говорят, является *бигармонической функцией*.

Мы докажем сейчас, что любую бигармоническую функцию можно представить с помощью аналитических функций комплексного переменного. Так как, с другой стороны, через бигармоническую функцию выражаются компоненты напряжения и смещения, то мы приходим, таким образом, к комплексному представлению решений плоской задачи теории упругости. На этом представлении и основываются развитые Г. В. Колосовым и Н. И. Мусхелишвили методы приложения функций комплексного переменного к теории упругости.

Пусть  $U$  будет произвольная бигармоническая функция. Функция  $\Delta U$  тогда, очевидно, гармоническая. Мы обозначим  $\Delta U$  через  $P$ , через  $Q$  обозначим сопряженную к  $\Delta U$  функцию и положим  $f(z) = P + iQ$ . Удобнее, однако, рассматривать функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{4} \int f(z) dz = p + iq, \quad (17)$$

так что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{1}{4} Q. \quad (18)$$

Простой подсчет показывает, что функция

$$p_1 = U - px - qy$$

является гармонической \*).

\*) Действительно, используя соотношения (18) и условия Коши — Римана для функции  $f(z)$ , находим:  $\Delta(px) = \Delta(qy) = \frac{1}{2} P$ , следовательно,  $\Delta p_1 = \Delta U - P = 0$ .

Обозначим через  $\chi(z)$  аналитическую функцию, имеющую  $p_1$  своей действительной частью, тогда будем, очевидно, иметь:

$$U = px + qy + p_1 = \operatorname{Re} \{ \bar{z}\varphi(z) + \chi(z) \}.$$

Переписав эту формулу в несколько ином виде, мы получим искомое комплексное представление бигармонической функции:

$$U = \frac{1}{2} (\bar{z}\varphi + z\bar{\varphi} + \chi + \bar{\chi}) \quad (19)$$

(Э. Гурса, 1898 г.).

Для дальнейшего полезно найти также представления частных производных функций  $U$ . Дифференцируя (19) по  $x$  и  $y$  ( $z$  и  $\bar{z}$  мы считаем при этом промежуточными переменными и пользуемся тем, что  $\frac{\partial}{\partial x} \bar{\varphi} = \overline{\frac{\partial}{\partial x} \varphi} = \bar{\varphi}'$  и  $\frac{\partial}{\partial y} \bar{\varphi} = \overline{\frac{\partial}{\partial y} \varphi} = -i\bar{\varphi}'$ ), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2} (\varphi + \bar{z}\varphi' + \bar{\varphi} + z\bar{\varphi}' + \chi' + \bar{\chi}'), \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{i}{2} (-\varphi + \bar{z}\varphi' + \bar{\varphi} - z\bar{\varphi}' + \chi' - \bar{\chi}'), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (21)$$

где положено  $\psi(z) = \chi'(z)$ . Дифференцируя (20), находим:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2(\varphi' + \bar{\varphi}') = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)]^* \quad (22)$$

Перейдем к комплексному представлению компонентов смещений и напряжений. Заменим в первых двух формулах (15)  $\Delta U = P$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ . Так как из (18) имеем:  $P = 4 \frac{\partial p}{\partial x} = 4 \frac{\partial q}{\partial y}$ , то

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k \frac{\partial q}{\partial y},$$

где  $k = 2 \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ . Интегрируя полученные соотношения, имеем:

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + kp + f_1(y), \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + kq + f_2(x). \quad (23)$$

\*) Между прочим, из выражения (22) вытекает, что для любой функции  $U$ , представимой по формуле (19),  $\Delta U$  является гармонической функцией, следовательно, такая функция  $U$  бигармонична.

Для определения функций  $f_1(y)$  и  $f_2(x)$  воспользуемся третьей формулой (15). Из формул (23) находим:

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} [f'_1(y) + f'_2(x)];$$

сравнив это с выражением (15), получим  $f'_1(y) + f'_2(x) = 0$ , или  $f'_1(y) = -f'_2(x)$ . Так как здесь слева стоит функция только от  $y$ , а справа — функция только от  $x$ , то обе части равны одной и той же постоянной. Обозначив эту постоянную через  $\alpha$ , будем иметь:

$$f_1(y) = \alpha y + \beta, \quad f_2(x) = -\alpha x + \gamma.$$

Нетрудно видеть, что смещение тела, обусловленное этими членами формул (23), является «жестким смещением», т. е. смещением тела как целого. (Действительно, вектор такого смещения  $f_1 + if_2 = -\alpha iz + \beta + i\gamma$ .) Отбрасывая в формулах (23) эти члены как несущественные, ибо они не влияют на напряженное состояние тела, получим:

$$u + iv = - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{k}{2\mu} \Phi(z),$$

или, используя соотношение (21), найдем в окончательном виде комплексное представление смещений:

$$u + iv = \frac{1}{2\mu} \{ \kappa \Phi(z) - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \}; \quad (24)$$

здесь  $\kappa = k - 1 = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$ . Это представление было получено Г. В. Колосовым в 1909 г.

Перейдем к представлению напряжений. По формулам (14) находим:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= X_x + iY_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ F_y &= X_y + iY_y = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = i \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

и, используя (21), получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= X_x + iY_x = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - z \overline{\Phi''(z)} - \overline{\Psi'(z)}, \\ -iF_y &= Y_y - iX_y = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z \overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Складывая уравнения (26), а также вычитая из второго первое, получим формулы, также принадлежащие Г. В. Колосову и дающие комплексное представление напряжений:

$$\left. \begin{aligned} X_x + Y_y &= 2 \{ \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} \} = 4 \operatorname{Re} \Phi'(z), \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2 \{ \bar{z} \Phi''(z) + \overline{\Psi'(z)} \} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(во второй формуле мы перешли к комплексно сопряженным величинам).

Мы видим, таким образом, что *напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости выражаются через две аналитические функции комплексного переменного  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ .*

В заключение выясним, насколько определяются эти функции заданием напряженного состояния и смещений. При заданном напряженном состоянии функция  $\varphi'(z)$  определяется из первой формулы (27) с точностью до чисто мнимой постоянной, ибо действительная часть этой функции задана. Отсюда следует, что все функции, которые могут играть роль функции  $\varphi$ , выражаются через одну из них формулой

$$\varphi(z) + \alpha iz + b, \quad (28)$$

где  $\alpha i$  — чисто мнимая и  $b = \beta + i\gamma$  — комплексная постоянная. Вторая из формул (27) определяет тогда  $\psi'(z)$ , следовательно, совокупность функций  $\psi$  описывается формулой

$$\psi(z) + b_1, \quad (29)$$

где  $b_1 = \beta_1 + i\gamma_1$  — комплексная постоянная.

Очевидно, и обратно, напряженное состояние не изменится, если, заменить  $\varphi$  и  $\psi$  соответственно через  $\varphi + \alpha iz + b$  и  $\psi + b_1$ .

Пусть теперь заданы компоненты смещения. Из формул (6) — (8) видно, что тогда определяются и компоненты напряжения. Поэтому допустимо заменять функции  $\varphi$  и  $\psi$  только с помощью формул (28) и (29). Но, как показывает формула (24), при такой замене  $u + iv$  изменяется на величину

$$\delta u + i\delta v = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \alpha iz + \frac{\kappa b - \bar{b}_1}{2\mu}, \quad (30)$$

следовательно, мы имеем дело лишь с жестким смещением всего тела, которое условились не учитывать.

Формула (30) показывает, что не изменяют смещений лишь такие замены функций  $\varphi$  и  $\psi$  вида (28) и (29), для которых

$$\alpha = 0, \quad \kappa b - \bar{b}_1 = 0. \quad (31)$$

Таким образом, при заданных смещениях постоянная  $\alpha$  определена вполне, а из двух постоянных  $b$  и  $b_1$  можно задавать произвольно лишь одну.

**51. Краевые задачи теории упругости.** Формулы Колосова (24) и (27) предыдущего пункта представляют общее решение основных уравнений (3) и (8) плоской задачи теории



упругости\*). Однако именно в силу своей общности эти формулы не дают непосредственного решения практически важных задач, которые всегда приводят к некоторым условиям, налагаемым на значения рассматриваемых величин на границе области, т. е. к *краевым задачам*.

Основные краевые задачи плоской теории упругости формулируются следующим образом:

Первая краевая задача (I). *Найти упругое равновесие области  $D$  при заданных внешних напряжениях  $X_n, Y_n$ , приложенных к границе  $C$  этой области.*

Вторая краевая задача (II). *Найти упругое равновесие области  $D$  при заданных смещениях  $u$  и  $v$  точек границы  $C$  этой области.*

Рассматривают также смешанную краевую задачу, в которой на одних частях границы области задаются напряжения, а на других — смещения.

Докажем единственность решения задач I и II, рассматривая для простоты случай, когда область  $D$  односвязна и ограничена. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_C (X_n u + Y_n v) ds, \quad (1)$$

распространенный по границе  $C$  области  $D$  (он означает физически работу упругих сил, действующих на контур  $C$ ). Заменяя  $X_n$  и  $Y_n$  по формуле (2) предыдущего пункта, мы запишем этот интеграл в виде

$$I = \int_C \{ (X_x u + Y_x v) \cos \alpha + (X_y u + Y_y v) \sin \alpha \} ds.$$

Но по двумерной формуле Остроградского\*\*) наш интеграл преобразуется в двойной, распространенный по области  $D$ :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (X_x u + Y_x v) + \frac{\partial}{\partial y} (X_y u + Y_y v) \right\} dx dy = \\ &= \iint_D \left\{ u \left( \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_x}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + X_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

\*) Можно было бы показать, что при любых аналитических функциях  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  функции  $X_x, Y_y, X_y$  и  $u, v$ , определяемые из (27) и (24), удовлетворяют основным уравнениям (3) и (8).

\*\*) Двумерная формула Остроградского имеет вид

$$\int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy,$$

где  $\alpha$  — угол, образованный нормалью к  $C$  с осью  $x$ .

В силу формулы (3) п. 50 первые два члена подынтегральной функции в интеграле (2) равны 0; заменяя еще  $X_x$ ,  $X_y$ ,  $Y_y$  по формулам (8), а  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$  — по формулам (6) п. 50 и используя обозначение (7) того же пункта, получаем:

$$I = \iint_D \{ \lambda \theta^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + 2e_{xy}^2 + e_{yy}^2) \} dx dy. \quad (3)$$

Пусть теперь в области  $D$  можно построить два решения  $X'_x, \dots, v'$  и  $X''_x, \dots, v''$  одной краевой задачи I. Так как основные уравнения (3) и (8) п. 50 линейны, то разности  $X_x = X'_x - X''_x, \dots, v = v' - v''$  также будут давать решение плоской задачи теории упругости, причем, в силу краевых условий, на линии  $C$  будет  $X_n = Y_n = 0$ . Поэтому интеграл (1), а следовательно, и (3), равен 0. Но под знаком интеграла (3) стоит неотрицательная функция, следовательно, этот интеграл может равняться 0 лишь в том случае, когда в области  $D$  тождественно  $\theta = e_{xx} = e_{xy} = e_{yy} = 0$ . Тогда из формул (8) п. 50 мы заключаем, что в области  $D$  тождественно  $X_x = Y_y = X_y = 0$ , т. е. что напряженные состояния  $X'_x, Y'_y, X'_y$  и  $X''_x, Y''_y, X''_y$  совпадают\*). Единственность решения краевой задачи I доказана.

Доказательство единственности решения краевой задачи II проводится совершенно аналогично\*\*), с той лишь разницей, что обращение в нуль интеграла (1) мотивируется обращением в нуль смещений  $u$  и  $v$  на линии  $C$ .

Покажем теперь, как решение задач I и II сводится к решению краевых задач теории аналитических функций. Так как, по доказанному в предыдущем пункте, напряженное состояние полностью определяется через две аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , то и решение наших задач должно выражаться через эти функции. Пусть по-прежнему область  $D$  односвязна и ее граница обозначается через  $C$ .

В задаче II граничное условие записывается непосредственно с помощью формулы (24) п. 50

$$\kappa \varphi(\zeta) - \overline{\zeta \varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu g(\zeta), \quad (4)$$

где  $\kappa$  и  $\mu$  — постоянные коэффициенты, а  $g(\zeta) = u + iv$  — заданное на контуре  $C$  смещение.

\*) Напомним, что при одинаковых напряженных состояниях смещения  $u$ ,  $v$  могут отличаться лишь «жестким смещением», которое мы условились считать несущественным (см. предыдущий пункт).

\*\*) Если на границе смещения заданы, то «жесткое смещение», о котором говорилось в предыдущей сноске, исчезает и  $u$ ,  $v$  определяются вполне.

Таким образом, решение задачи II плоской теории упругости для области  $D$  сводится к отысканию в этой области двух аналитических функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , связанных на ее границе  $C$  краевым условием (4).

Для задачи I заметим прежде всего, что из формул (2) и (25) предыдущего пункта вытекает формула для вектора напряжений, отнесенного к элементу, нормаль которого образует угол  $\alpha$  с действительной осью:

$$\begin{aligned} F_n &= -i \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \\ &= -i \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\frac{\partial}{\partial s} = \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y}$  — символ производной в направлении элемента.

Из этой формулы вытекает, что на контуре  $C$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = i \int_0^s F_n ds + A, \quad (6)$$

где  $s$  — длина дуги  $C$ , отсчитываемая в положительном направлении от некоторой фиксированной точки, и  $A$  — произвольная постоянная. В задаче I значения  $F_n$  на контуре  $C$  заданы, поэтому известна функция

$$i \int_0^s F_n ds = f(\zeta) = f_1(\zeta) + i f_2(\zeta). \quad (7)$$

Подставляя это в соотношение (6) и пользуясь формулой (21) предыдущего пункта, найдем краевое условие задачи I в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(\zeta) + \overline{\zeta \varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + A, \quad (8)$$

где  $f(\zeta)$  — известная функция и  $A$  — произвольная постоянная.

Таким образом, решение задачи I плоской теории упругости сводится к отысканию в области  $D$  двух аналитических функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , связанных на ее границе  $C$  краевым условием (8).

Выясним вопрос о числе параметров, остающихся свободными в рассматриваемых краевых задачах. Как мы видели в конце предыдущего пункта, при задании напряжений (задача I)  $\varphi$  определяется с точностью до слагаемого вида  $\alpha iz + b$ , а  $\psi$  — с точностью до постоянного слагаемого  $b_1$  ( $\alpha$  действительно,  $b$  и  $b_1$  комплексны), а при задании смещений (задача II)  $\varphi$  и  $\psi$  определяются с точностью до постоянных слагаемых  $b$  и  $b_1$ , связанных соотношением  $kb = \bar{b}_1$ .

Отсюда следует, что в задаче II эти функции вполне определяются заданием одной из них в какой-либо точке области, например условием

$$\varphi(0) = 0 \quad (9)$$

(мы предполагаем, что точка  $z = 0$  лежит внутри  $D$ ). В задаче I при допустимых изменениях  $\varphi$  и  $\psi$  функция  $\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}$ , как видно из (8), меняется на  $b + b_1$ , так что задание постоянной  $A$  накладывает одну связь на  $b$  и  $b_1$ . Поэтому в задаче I при заданной величине  $A$  остаются свободными один комплексный и один действительный параметры и можно, например, задать условия

$$\psi(0) = \operatorname{Im} \varphi'(0) = 0. \quad (10)$$

В заключение опишем изменения, которые вносятся в постановку краевых задач в случае неограниченных или многосвязных областей. Пусть сначала область  $D$  ограничена и ее граница состоит из замкнутого контура  $C_0$ , содержащего внутри контуры  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Из физических соображений ясно, что напряжения и смещения остаются в этом случае однозначными, однако функции  $\varphi$  и  $\psi$  могут оказаться многозначными. Выясним характер их многозначности.

Из формулы Колосова  $X_x + Y_y = 4\operatorname{Re} \varphi'(z)$  следует, что  $\operatorname{Re} \varphi'(z)$  однозначна, но  $\operatorname{Im} \varphi'(z)$  при обходе каждой из внутренних кривых  $C_k$  против часовой стрелки может получать приращение, которое мы обозначим  $2\pi a_k$  (см. п. 41). Отсюда следует, что функция  $\varphi'(z)$  будет при этом получать приращение  $2\pi i a_k$  и, значит, функция

$$\varphi'(z) - \sum_{k=1}^n a_k \operatorname{Ln}(z - z_k) = \tilde{\varphi}(z), \quad (11)$$

где  $z_k$  — точка, лежащая внутри  $C_k$ , будет однозначной в  $D$ . Интеграл

$\int_{z_0}^z \tilde{\varphi}(z) dz$  в области  $D$  также может оказаться многозначной функцией.

причем эта многозначность будет вызвана членами вида  $b_k \operatorname{Ln}(z - z_k)$ . Таким образом, интегрируя соотношение (11), мы получим, что

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^n a_k z \operatorname{Ln}(z - z_k) + \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \varphi^*(z). \quad (12)$$

где  $\varphi^*(z)$  — функция, однозначная в  $D$ ,  $a_k$  — действительные и  $b_k$  — комплексные постоянные.

Как видно из (11) или (12), функция  $\varphi''(z)$  однозначна в  $D$ . Из второй формулы Колосова (27) п. 50 мы заключаем тогда, что  $\psi'(z)$  — однозначная функция, и следовательно,

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n c_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \psi^*(z), \quad (13)$$

где  $\psi^*(z)$  однозначна в  $D$  и  $c_k$  — комплексные постоянные.

До сих пор мы пользовались только однозначностью напряжений. Из полученных формул (12) и (13) и из формулы (24) п. 50 видно, что при обходе  $C_k$  функция  $2\mu(u + iv)$  получает приращение, равное приращению функции  $\kappa a_k z \operatorname{Ln}(z - z_k) + \kappa b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) - z a_k \operatorname{Ln}(z - z_k) - \bar{c}_k \operatorname{Ln}(z - z_k)$ ,

т. е. равное  $2\pi i [(\kappa + 1)a_k z + \kappa b_k + \bar{c}_k]$ , где  $z$  — точка  $D$ , в которой начинается и кончается обход. Условие однозначности смещений приводит, следовательно, к условиям

$$a_k = 0, \quad c_k = -\kappa \bar{b}_k \quad (14)$$

и функции  $\varphi$  и  $\psi$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= -\kappa \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + \psi^*(z), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $\varphi^*$  и  $\psi^*$  — однозначные функции, а  $b_k$  — комплексные постоянные.

Коэффициенты  $b_k$  имеют простой механический смысл:

$$b_k = -\frac{F^{(k)}}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad (16)$$

где  $F^{(k)}$  — главный вектор внешних условий, приложенных к  $C_k$ . В самом деле, по формуле (6) этот вектор равен

$$F^{(k)} = - \int_{C_k} F_n ds = i\Delta_{C_k} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (17)$$

где  $\Delta_{C_k}$  — приращение при обходе  $C_k$  (знак — перед интегралом объясняется тем, что мы рассматриваем вектор внешних усилий). По формуле (21) п. 50 мы получаем отсюда

$$F^{(k)} = i\Delta_{C_k} \{ \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \} = -2\pi(1 + \kappa) b_k.$$

В задаче I коэффициенты  $b_k$  заданы, а в задаче II они остаются неизвестными.

Граничное условие (4), к которому приводится решение задачи II, для многосвязных областей не изменяется, в то время как условие (8), к которому приводится задача I, нуждается в некотором уточнении. В самом деле, значения постоянной  $A$  на различных граничных контурах могут оказаться различными, так что это условие следует теперь записывать в виде: на  $C_k$

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta) + A_k, \quad (8')$$

где  $A_k$  — постоянные ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Более подробный анализ показал бы, что одну из этих постоянных можно задавать произвольно, а остальные определяются условием однозначности смещений.

Отметим еще, что как явствует из физических соображений, решение задачи I может существовать лишь в том случае, когда главный вектор и главный момент всех внешних усилий, заданных на полной границе  $C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-$  области, равны нулю. Условие равенства нулю главного вектора по формуле (7) равносильно равенству нулю полного приращения заданной на границе функции  $f = f_1 + if_2$ :

$$\int_C F_n ds = i\Delta_C \{ f_1(\zeta) + if_2(\zeta) \} = 0 \quad (18)$$

(в случае односвязной области оно выполняется автоматически, если заданная функция непрерывна). Условие равенства нулю главного момента

$$\int_C (xY_n - yX_n) ds = 0$$

легко преобразовать, если заметить, что по формуле (7)  $X_n ds = d\tilde{f}_2$ ,  $Y_n ds = -d\tilde{f}_1$  и, следовательно, после интегрирования по частям это условие принимает вид:

$$\int_C (xY_n - yX_n) ds = -\Delta_C \{xf_1(\xi) + yf_2(\xi)\} + \int_C f_1 dx + f_2 dy = 0.$$

С учетом условия (18) это условие можно переписать в виде

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy = 0. \quad (19)$$

Если область неограниченная и содержит точку  $z = \infty$  внутри, то все наши рассуждения останутся в силе, если к рассматриваемым суммам добавить еще член вида  $b \operatorname{Ln} z$ , соответствующий обходу бесконечно удаленной точки. Коэффициент  $b$  выражается через главный вектор  $F$  внешних усилий, приложенных к границе области:

$$b = -\frac{F}{2\pi(1+\kappa)} \quad (16')$$

— в отличие от случая ограниченной области он не обязан равняться нулю. Этот вектор считается известным: в задаче II он должен быть задан, а в задаче I определяется по заданным внешним напряжениям.

Если предположить, что напряжения остаются ограниченными в бесконечности, то из формул Колосова (26) п. 50 видно, что главные части лорановских разложений  $\varphi^*(z)$  и  $\psi^*(z)$  в бесконечности могут содержать лишь первые степени  $z$ . Таким образом, в рассматриваемом случае выражения для функций  $\varphi$  и  $\psi$  принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{Ln}(z - z_k) + b \operatorname{Ln} z + \Gamma z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= -\kappa \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \operatorname{Ln}(z - z_k) - \kappa \bar{b} \operatorname{Ln} z + \Gamma' z + \psi_0(z), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где  $b_k$  и  $b$  определяются по формулам (16) и (16'), а  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  — функции, однозначные в  $D$  и правильные в бесконечности. Постоянные  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , как видно из формул Колосова (27) п. 50, выражаются через напряжения в бесконечности:

$$X_x^\infty + Y_y^\infty = 4 \operatorname{Re} \Gamma, \quad Y_y^\infty - X_x^\infty + 2iX_y^\infty = 2\Gamma'. \quad (21)$$

В случае задачи II они считаются заданными; в случае задачи I задаются  $\operatorname{Re} \Gamma$  и  $\Gamma'$  (можно доказать, что  $\operatorname{Im} \Gamma$  на распределение напряжений не влияет).

Случай, когда область  $D$  содержит бесконечно удаленную точку на границе, в общем виде мы рассматривать не будем, а ограничимся случаем, когда  $D$  представляет собой нижнюю полуплоскость. Мы принимаем здесь так же, как и в предыдущем случае, что в окрестности точки  $z = \infty$ :

$$\varphi(z) = b \operatorname{Ln} z + \varphi^*(z), \quad \psi(z) = c \operatorname{Ln} z + \psi^*(z),$$

где  $\varphi$  и  $\psi^*$  — однозначные функции, а  $b$  и  $c$  — комплексные постоянные. Отсюда, используя формулу (17), находим вектор внешних усилий, приложенных к большому отрезку  $C_R$ :  $-R_1 < x < R_2$ , оси  $x$

$$F_R = i\Delta_{C_R} \{ \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \} = i \left( b \ln \frac{R_2}{R_1} + b\pi i + \bar{c} \ln \frac{R_2}{R_1} - \bar{c}\pi i \right) + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ . Потребуем, чтобы это выражение оставалось ограниченным, когда  $R_1, R_2 \rightarrow \infty$  независимо друг от друга. Тогда

$$b + \bar{c} = 0$$

и предыдущая формула даст в пределе вектор внешних усилий, приложенных ко всей оси  $x$ :

$$F = \pi(\bar{c} - b).$$

Таким образом,

$$b = -\frac{1}{2\pi} F, \quad c = \frac{1}{2\pi} \bar{F};$$

предполагая еще, что напряжение и вращение в бесконечности равны 0 (т. е. что  $\Gamma = \Gamma' = 0$ ), вместо формул (15) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi} F \operatorname{Ln} z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \bar{F} \operatorname{Ln} z + \psi_0(z), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  — функции, однозначные в  $D$  и правильные в бесконечности.

### § 3. Интеграл типа Коши и краевые задачи

В этом параграфе излагаются основные свойства интеграла типа Коши и основанные на них эффективные методы решения различных краевых задач теории функций комплексного переменного. В конце параграфа приводятся приложения этих методов к некоторым задачам гидродинамики и теории упругости.

В основе этих методов лежат формулы для граничных значений интеграла типа Коши, которые получены в 1873 г. Юлианом Васильевичем Сохоцким\*), но затем были незаслуженно забыты и получены вновь Племельем в 1908 г. и в более общих предположениях И. И. Приваловым в 1918 г. В настоящее время методы решения краевых задач математической физики, основанные на интегралах типа Коши, наиболее успешно развиваются в работах Н. И. Muskhelishvili, И. Н. Векуа, А. В. Бицадзе и др.

**52. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого.** Интеграл Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (1)$$

\*) Ю. Сохоцкий, Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды, СПб., 1873.

представляет функцию, аналитическую внутри замкнутого контура  $C$ , через ее значения на границе (см. п. 14). Предположим теперь, что  $C$  — произвольная кривая без точек заострения (это существенно для дальнейшего), не обязательно замкнутая, и на ней задана произвольная функция  $f(\zeta)$ , непрерывная всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, где она имеет интегрируемый разрыв.

Интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2)$$

построенный так же, как и интеграл (1), называется *интегралом типа Коши*.

Повторяя в точности рассуждение п. 17, мы убедимся в том, что интеграл типа Коши представляет собой функцию, аналитическую в любой точке  $z$ , не лежащей на кривой  $C$ . При этом если  $C$  разбивает плоскость на несколько областей, то в этих областях интеграл типа Коши определяет, вообще говоря, различные аналитические функции. Например,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

равен 1 всюду в круге  $|z| < 1$  и 0 — вне круга.

Легко понять, что даже в случае замкнутого контура  $C$  интеграл типа Коши в общем случае не является интегралом Коши, т. е. значения функции  $f(\zeta)$  не будут предельными для значений  $F(z)$  при  $z \rightarrow \zeta$ . В самом деле, как мы видели в п. 43, задание на границе области одной лишь действительной части аналитической функции определяет действительную часть внутри. Тогда из уравнений Коши — Римана внутри области с точностью до постоянного слагаемого определяется мнимая часть функции, а следовательно, и ее предельные значения при  $z$ , стремящемся к границе области. Поэтому, когда на границе задаются две ничем не связанные между собой функции — действительная и мнимая части функции  $f(\zeta)$ , — то в общем случае нельзя и ожидать, что  $F(z)$  при  $z \rightarrow \zeta$  стремится к заданным значениям.

Чтобы изучить вопрос о граничных значениях интеграла типа Коши, мы прежде всего выясним смысл, который можно придать этому интегралу, когда точка  $z$  лежит на линии интегрирования  $C$ . Если точка  $z$  лежит на  $C$ , то интеграл (2), вообще говоря, расходится, ибо его подынтегральная функция обращается в бесконечность при  $\zeta \rightarrow z$ . Однако в некоторых дополнительных предположениях, наложенных на  $f(\zeta)$ , этому



интегралу можно придать вполне определенный смысл. Предположим, что в некоторой точке  $\zeta = \zeta_0$  контура  $C$  функция  $f(\zeta)$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ :

(H) Существует постоянная  $M$ , такая, что для всех точек  $\zeta$  на линии  $C$ , достаточно близких к  $\zeta_0$ , имеет место неравенство

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq M |\zeta - \zeta_0|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (3)$$

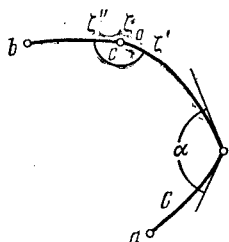


Рис. 124.

Условие Гёльдера, очевидно, выражает тот факт, что приращение функции является малой порядка не ниже  $\mu$  относительно приращения аргумента.

Покажем, что в принятом условии интеграл типа Коши существует и при  $z = \zeta_0$ , если его понимать в некотором особом смысле, и найдем его выражение через обычный интеграл. Предположим сначала, что  $\zeta_0$  не является угловой точкой линии  $C$ , и обозначим через  $\zeta'$  и  $\zeta''$  точки пересечения  $C$  с окружностью  $|z - \zeta_0| = r$ , через  $c$  — отрезок кривой  $C$  между  $\zeta'$  и  $\zeta''$ , через  $a$  и  $b$  — концы  $C$  (рис. 124). Имеем:

$$\int_{c-c} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \int_{c-c} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + f(\zeta_0) \int_{c-c} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0}. \quad (4)$$

Но

$$\int_{c-c} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} = \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_a^{\zeta'} + \ln(\zeta - \zeta_0) \Big|_{\zeta''}^b = \ln \frac{b - \zeta_0}{a - \zeta_0} - \ln \frac{\zeta'' - \zeta_0}{\zeta' - \zeta_0},$$

где под  $\ln$  на дугах  $a\zeta'$  и  $\zeta''b$  понимаются две какие-либо ветви логарифма, непрерывно изменяющиеся на этих дугах, причем для определенности принято, что значение  $\ln(\zeta'' - \zeta_0)$  получается непрерывным изменением из  $\ln(\zeta' - \zeta_0)$ , когда точка  $\zeta$  описывает дугу окружности  $|z - \zeta_0| = r$  слева от линии  $C$ . В силу последнего условия и того, что  $|\zeta' - \zeta_0| = |\zeta'' - \zeta_0|$ , имеем:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \ln \frac{\zeta'' - \zeta_0}{\zeta' - \zeta_0} = -i\pi. \quad (5)$$

С другой стороны, при достаточно малых  $r$ , в силу условия Гёльдера, имеем  $\left| \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \right| \leq \frac{M}{|\zeta - \zeta_0|^{1-\mu}}$ ; следовательно, существует

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{c-c} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad (6)$$

причем последний интеграл можно понимать в обычном смысле. Таким образом, формула (4) принимает вид:

$$\int_{c-c} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \xi_0} = \int_c \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi + f(\xi_0) \ln \frac{b - \xi_0}{a - \xi_0} + i\pi f(\xi_0) + O(r), \quad (7)$$

где  $O(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

Из формулы (7) видно, что существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{c-c} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \xi_0} = \int_c \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \xi_0};$$

этот предел называют *главным значением* интеграла, а сам интеграл, определяемый формулой (7) при таком предельном переходе, — *особым интегралом* (в смысле Коши). В нашем определении особого интеграла существенно, что дуга  $c$ , выбрасываемая из  $C$ , стягивается в точку  $\xi_0$  по вполне определенному закону (так, что ее концы при любом  $r$  лежат на окружности  $|z - \xi_0| = r$ ); если  $c$  стягивается в точку по другому закону, то предел (7) может и не существовать. Напомним, что в обычном определении несобственного интеграла требуется, чтобы предел (7) существовал при  $c \rightarrow \xi_0$  по любому закону. Отсюда ясно, что если интеграл существует в обычном смысле, то он существует и как особый, и его главное значение совпадает со значением обычного интеграла\*). Обратное, очевидно, не верно.

Поясним определение простым примером. Интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x},$$

взятый по отрезку  $(-1, 1)$  действительной оси, как известно, не существует. Однако он существует как особый интеграл в смысле Коши, ибо предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-r} \frac{dx}{x} + \int_r^1 \frac{dx}{x} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \ln r + \ln \frac{1}{r} \right\} = 0$$

существует (мы выбрасываем из отрезка  $(-1, 1)$  отрезок  $(-r, r)$  в соответствии с определением особого интеграла).

Переходя в формуле (7) к пределу при  $r \rightarrow 0$ , получаем следующую теорему:

**Теорема 1.** Если в точке  $\xi_0$ , которая является правильной точкой контура  $C$  и отлична от его концов, функция  $f(\xi)$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ , то интеграл

\*) Поэтому мы и сохраняем для особого интеграла символ обычного интеграла.

типа Коши существует в этой точке как особый, и его главное значение выражается через обычный интеграл по формуле

$$F(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \xi_0} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi + \frac{1}{2} f(\xi_0) + \frac{f(\xi_0)}{2\pi i} \ln \frac{b - \xi_0}{a - \xi_0}. \quad (8)$$

Если, в частности, кривая  $C$  замкнута, то можно принять  $a=b$ , тогда член с логарифмом исчезнет и формула (8) примет более простой вид

$$F(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - \xi_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi + \frac{1}{2} f(\xi_0). \quad (9)$$

Пусть теперь  $\xi_0$  — угловая точка кривой  $C$ ; обозначим через  $\alpha$  угол между касательными к  $C$  в этой точке, измеряемый слева от линии  $C$  (рис. 124). Вместо формулы (5), учитывая наше условие о связи ветвей логарифма, будем иметь:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \ln \frac{\xi'' - \xi_0}{\xi' - \xi_0} = -i\alpha.$$

Тогда вместо (8) получим формулу

$$F(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi + \frac{\alpha}{2\pi} f(\xi_0) + \frac{f(\xi_0)}{2\pi i} \ln \frac{b - \xi_0}{a - \xi_0}. \quad (10)$$

Перейдем к изучению предельных значений интеграла типа Коши при  $z$ , стремящемся к линии интегрирования  $C$ . Докажем предварительно следующую лемму:

**Лемма.** Пусть функция  $f(\xi)$  удовлетворяет в точке  $\xi_0$  условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$  и точка  $z$  стремится к  $\xi_0$  так, что отношение  $h = |z - \xi_0|$  к  $d$  — кратчайшему расстоянию  $z$  от точек  $C$  — остается ограниченным. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow \xi_0} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - z} d\xi = \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi. \quad (11)$$

Для доказательства оценим разность  $\Delta$  между интегралами в левой и правой части (11):

$$\Delta = \int_C (z - \xi_0) \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{(\xi - z)(\xi - \xi_0)} d\xi.$$

Разобьем интеграл  $\Delta$  на два, из которых первый распространен на дугу с кривой  $C$ , для точек которой  $|\xi - \xi_0| \leq \delta$ , где  $\delta$  — некоторое число, подбор которого мы уточним далее, а второй — на оставшуюся часть  $C' = C - c$ .

Для первого интеграла, пользуясь условием Гёльдера (мы считаем, что  $\delta$  достаточно мало) и тем, что  $|\xi - z| \geq d$ , получим:

$$|\Delta_1| \leq \int_C h \frac{M |\xi - \xi_0|^\mu}{d |\xi - \xi_0|} |d\xi| = \frac{hM}{d} \int_C \frac{|d\xi|}{|\xi - \xi_0|^{1-\mu}}.$$

Обозначим через  $t = |\xi - \xi_0|$  длину хорды, стягивающей дугу  $\widehat{\xi_0 \xi}$  кривой  $C$ . Так как  $C$  не имеет точек заострения, то отношение длины дуги к длине стягивающей ее хорды ограничено. Пусть это отношение не превосходит  $A$ , тогда  $|d\xi| = ds \leq A dt$ , и последняя оценка принимает вид

$$|\Delta_1| = 2 \frac{h}{d} MA \int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\mu}} = \text{const} \cdot \delta^\mu.$$

Отсюда видно, что  $\delta$  можно выбрать столь малым, чтобы величина  $|\Delta_1|$  не превосходила любого заданного числа  $\varepsilon/2$ .

Так как, далее, кривая  $C'$  не содержит точку  $\xi_0$ , то при фиксированном  $\delta$  интеграл

$$\int_{C'} \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - z} d\xi$$

как функция  $z$  непрерывен в точке  $\xi_0$ , следовательно, для достаточно малых  $h = |z - \xi_0|$  величина  $|\Delta_2|$  будет также не превосходить  $\varepsilon/2$ . Для таких  $h$  имеем  $|\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2| < \varepsilon$ , что и доказывает лемму.

С помощью этой леммы легко получить и формулы для предельных значений интеграла типа Коши.

**Теорема 2** (Ю. В. Сохоцкий). Пусть точка  $\xi_0$  является правильной точкой контура  $C$  и отлична от его концов, функция  $f(\xi)$  удовлетворяет в этой точке условно Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$  и  $z \rightarrow \xi_0$  так, что отношение  $h/d$  остается ограниченным. Тогда интеграл типа Коши обладает предельными значениями  $F^+(\xi_0)$  и  $F^-(\xi_0)$ , к которым он стремится при  $z \rightarrow \xi_0$  слева и соответственно справа от  $C$ , и

$$\left. \begin{aligned} F^+(\xi_0) &= F(\xi_0) + \frac{1}{2} f(\xi_0), \\ F^-(\xi_0) &= F(\xi_0) - \frac{1}{2} f(\xi_0), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $F(\xi_0)$  — особый интеграл (9)\*).

\*) Формулы (12) впервые доказаны Ю. В. Сохоцким (1873 г.), затем И. Племелем (1908 г.) и, наконец, в более общих предположениях И. И. Приваловым (1918 г.).

Пусть сначала  $C$  — замкнутая кривая, проходимая в положительном направлении. Имеем:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - z} d\xi + \frac{f(\xi_0)}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{\xi - z}, \quad (13)$$

причем по доказанной лемме первый интеграл в правой части при  $z \rightarrow \xi_0$  стремится к пределу

$$\int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi,$$

а второй интеграл равен  $2\pi i$ , или 0, смотря по тому, лежит ли точка  $z$  слева или справа от контура  $C$  (т. е. внутри или вне  $C$ ). Учитывая это, мы перейдем к формуле (13) к пределу при  $z \rightarrow \xi_0$  (слева или справа от  $C$ ):

$$F^+(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi + f(\xi_0);$$

$$F^-(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) - f(\xi_0)}{\xi - \xi_0} d\xi.$$

Подставляя сюда значение интеграла из формулы (9), получим искомые формулы Сохоцкого (12).

Если теперь  $C$  — незамкнутая кривая, то мы дополним ее произвольной линией  $C'$  до замкнутой кривой  $C_0 = C + C'$  и положим  $f(\xi) = 0$  на линии  $C'$ . Тогда, очевидно,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

и если  $\xi_0$  не совпадает с концом кривой  $C$ , то по только что доказанному будут справедливы формулы Сохоцкого (12), в которых интеграл  $F(\xi_0)$  берется вдоль  $C_0$ . Но так как  $f(\xi) = 0$  на кривой  $C'$ , то последний интеграл можно заменить интегралом вдоль  $C$ . Теорема доказана \*).

Если  $\xi_0$  является угловой точкой  $C$  с углом между касательными, равным  $\alpha$ , то, используя вместо (9) формулу (10) (в ней надо положить  $a = b$ ), получим формулу Сохоцкого в несколько

\*) Если  $f(z)$  во всех точках  $C$  удовлетворяет условию Гёльдера с одним и тем же показателем  $\mu > 0$ , то интеграл типа Коши стремится к  $F^+(\xi)$  или  $F^-(\xi)$  при любом стремлении  $z$  к  $\xi_0$  (соответственно справа или слева), а не только, когда  $h/d$  ограничено (см. [14]).

более общем виде:

$$\left. \begin{aligned} F^+(\zeta_0) &= F(\zeta_0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) f(\zeta_0), \\ F^-(\zeta_0) &= F(\zeta_0) - \frac{\alpha}{2\pi} f(\zeta_0). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из формул Сохоцкого (12), а для случая угловой точки — (14) заключаем, что при переходе через линию интегрирования  $C$  в точке  $\zeta_0$  интеграл типа Коши испытывает скачок:

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0). \quad (15)$$

Формула (15) содержит решение проблемы, поставленной в начале пункта, о нахождении условий, при которых интеграл типа Коши является интегралом Коши. Мы видим, что если кривая  $C$  замкнута и в каждой ее точке  $F^-(\zeta) = 0$ , то предельное значение  $F(z)$  изнутри  $C$ , т. е.  $F^+(\zeta)$ , равно  $f(\zeta)$ , а это и означает, что  $F(z)$  является интегралом Коши. С другой стороны, если  $F(z)$  является интегралом Коши, то  $F^+(\zeta) = f(\zeta)$  и, следовательно,  $F^-(\zeta) = 0$ . Таким образом, условие

$$F^-(\zeta) = 0, \quad (16)$$

выполняемое в каждой точке  $C$ , является необходимым и достаточным для того, чтобы интеграл (2) был интегралом Коши. Это условие, очевидно, одновременно является и условием того, что заданные на  $C$  значения  $f(\zeta)$  являются граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ . Его можно высказать в более удобной форме.

**Теорема 3.** Если функция  $f(\zeta)$  в каждой точке замкнутого контура  $C$  удовлетворяет условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ , то для того, чтобы ее значения являлись граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ , необходимо и достаточно выполнение следующих равенств:

$$\int_C \zeta^n f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

В самом деле, так как для больших  $|z|$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}},$$

то для интеграла типа Коши в окрестности бесконечно удаленной точки имеем разложение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}} \int_C \zeta^n f(\zeta) d\zeta. \quad (18)$$

Отсюда следует, что если выполнены все условия (17), то в окрестности бесконечно удаленной точки  $F(z) \equiv 0$ . Но так как интеграл типа Коши  $F(z)$  аналитичен всюду вне контура  $C$ , то по теореме единственности п. 20 отсюда вытекает, что  $F(z) \equiv 0$  всюду вне  $C$ . Таким образом, внешние предельные значения  $F^-(\zeta) \equiv 0$ , т. е.  $F^+(\zeta) = f(\zeta)$  и значения  $f(\zeta)$  являются граничными значениями аналитической внутри  $C$  функции.

Обратно, если значения  $f(\zeta)$  являются граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ , то для любой точки  $z$ , лежащей вне  $C$ , дробь  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  как функция точки  $\zeta$  будет аналитической внутри контура  $C$  и непрерывной на нем. Тогда по теореме Коши для всех таких  $z$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0$$

и, следовательно, в разложении (18) все коэффициенты равны 0. Это и есть условия (17); теорема доказана.

Очевидна также следующая

**Теорема 4.** В условиях предыдущей теоремы необходимым и достаточным условием того, чтобы значения  $f(\zeta)$  были граничными значениями функции, аналитической внутри  $C$ , является равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0 \quad (19)$$

для всех точек  $z$ , лежащих вне  $C$ .

Рассмотрим теперь условия того, что заданные на  $C$  значения являются граничными значениями функции, аналитической вне  $C$ . Прежде всего заметим, что если функция  $f(z)$  аналитична вне  $C$ , включая бесконечно удаленную точку, и непрерывна на самом контуре, то имеет место следующая формула Коши для неограниченных областей:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} -f(z) + f(\infty) & \text{для } z \text{ вне } C, \\ f(\infty) & \text{для } z \text{ внутри } C \end{cases} \quad (20)$$

(контур  $C$  обходится против часовой стрелки).

В самом деле, если точка  $z$  лежит вне  $C$ , то мы окружаем  $C$  замкнутым контуром  $C'$ , содержащим внутри эту точку, и к двусвязной области, ограниченной  $C$  и  $C'$ , применяем интегральную формулу Коши п. 14:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

(оба контура проходятся против часовой стрелки). Так как в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$f(\xi) = c_0 + \frac{c_1}{\xi} + \dots + \frac{c_n}{\xi^n} + \dots,$$

где  $c_0 = f(\infty)$ , то вычет функции  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  в бесконечно удаленной точке равен  $-c_0 = -f(\infty)$  и, следовательно (см. п. 24),  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(\infty)$ , что и требуется.

Если же  $z$  лежит внутри  $C$ , то функция  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  аналитична между  $C$  и  $C'$ , следовательно, то теореме Коши

$$\int_{C'} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = 0$$

и учитывая предыдущий результат, мы получаем вторую формулу (20).

На основании полученной формулы легко доказывается

**Теорема 5.** В условиях теоремы 3 необходимым и достаточным условием того, чтобы значения  $f(\xi)$  были граничными значениями функции  $f(z)$ , аналитической вне  $C$ , является равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = a = \text{const} \quad (21)$$

для всех точек  $z$ , лежащих внутри  $C$ , причем постоянная в правой части равна  $f(\infty)$ .

Необходимость условия содержится в формуле (20). Чтобы доказать его достаточность, заметим, что функция

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + a$$

аналитична вне  $C$ , причем из условия (21) следует, что ее предельные значения изнутри  $F^+(\xi) \equiv 0$ , а значит по формуле Сохоцкого  $F^-(\xi) = f(\xi)$ . Теорема доказана.

В заключение приведем несколько иную формулировку теорем 4 и 5, относящуюся к случаю, когда кривая  $C$  представляет собой единичную окружность.

**Теорема 6.** Для того чтобы значения функции  $f(\xi)$ , удовлетворяющей в каждой точке единичной окружности  $C$  условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ , были граничными значениями функции, аналитической соответственно а) внутри круга



$|z| < 1$  или б) вне его, необходимо и достаточно выполнение условий:

а) для всех  $z$  внутри  $C$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f(\xi)} d\xi}{\xi - z} = \bar{a} = \text{const}, \quad (22)$$

где  $a$  равна значению упомянутой функции при  $z = 0$ , или

б) для всех  $z$  вне  $C$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f(\xi)} d\xi}{\xi - z} = 0. \quad (23)$$

Для того чтобы свести эту теорему к предыдущим, достаточно заметить, что функция

$$F_1(z) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

аналитична вне круга  $|z| < 1$ , если  $F(z)$  аналитична внутри этого круга, и следовательно, на окружности  $|z| = 1$ , где  $\xi = = 1/\bar{\xi}$ , предельные значения функции  $F_1(z)$  извне комплексно сопряжены предельным значениям функции  $F(z)$  изнутри (и обратно).

**53. Краевая задача Гильберта — Привалова.** И. И. Привалов\*) в 1934 г. поставил и решил следующую краевую задачу:

На замкнутой кривой  $C$  заданы две комплексные функции  $a(\xi) \neq 0$  и  $b(\xi)$ , удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем  $\mu \leq 1$ . Требуется найти две функции, из которых одна,  $f^-(z)$ , аналитична вне  $C$ , включая точку  $z = \infty$ , а другая,  $f^+(z)$ , аналитична внутри  $C$ ; граничные значения  $f^-(\xi)$  и  $f^+(\xi)$  этих функций на  $C$  должны существовать и удовлетворять соотношению

$$f^-(\xi) = a(\xi) f^+(\xi) + b(\xi). \quad (1)$$

Частный случай этой задачи, когда  $b(\xi) \equiv 0$ , т. е. когда граничное соотношение имеет вид:

$$f^-(\xi) = a(\xi) f^+(\xi), \quad (2)$$

решил Д. Гильберт\*\*) в 1905 г. Краевая задача Гильберта — Привалова находит важные приложения в различных вопросах математической физики (см. п. 55). Следует отметить, что решения Гильберта и Привалова были неполными. Полное

\*) Иван Иванович Привалов (1891—1941) — советский математик, специалист по теории функций комплексного переменного.

\*\*) Давид Гильберт (1862—1943) — немецкий математик.

и весьма простое решение дал в 1938 г. Ф. Д. Гахов [13]. Это решение мы и приводим здесь.

Начнем с решения задачи Гильберта (2). Назовем *индексом* функции  $a(\zeta)$  целое число, равное деленному на  $2\pi$  полному изменению ее аргумента при обходе  $C$ :

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg a(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln a(\zeta). \quad (3)$$

Предположим сначала, что индекс равен 0, т. е. что функция  $\ln a(\zeta)$  однозначна на контуре  $C$ . В этом случае решение легко найти. Построим интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln a(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (4)$$

и обозначим  $F^-(z)$  и  $F^+(z)$  функции, которые этот интеграл определяет, соответственно, вне и внутри  $C$ , тогда решением будет

$$f^-(z) = A e^{-F^-(z)}, \quad f^+(z) = A e^{-F^+(z)}, \quad (5)$$

где  $A$  — произвольная постоянная (из формулы (18) предыдущего пункта следует, что  $F^-(\infty) = 0$ , следовательно,  $A = f^-(\infty)$ ).

Действительно, функции  $F^-(z)$  и  $F^+(z)$  аналитичны соответственно вне и внутри  $C$  и обладают предельными значениями \*). связанными формулами Сохоцкого

$$F^-(\zeta) = F(\zeta) - \frac{1}{2} \ln a(\zeta), \quad F^+(\zeta) = F(\zeta) + \frac{1}{2} \ln a(\zeta),$$

где  $F(\zeta)$  — главное значение интеграла (4). Потенцируя последние формулы и используя (5), найдем:

$$f^-(\zeta) = A \sqrt{a(\zeta)} e^{-F(\zeta)}, \quad f^+(\zeta) = \frac{A}{\sqrt{a(\zeta)}} e^{-F(\zeta)},$$

откуда  $\frac{f^-(\zeta)}{f^+(\zeta)} = a(\zeta)$ , что и требуется.

Докажем единственность построенного решения с точностью до постоянного множителя  $A$ . Если существует второе решение  $f_1^\pm(z)$ , то в силу того, что функции (5) не обращаются в 0, будут аналитическими (в соответствующих областях) функции

\*) Так как  $a \neq 0$  на  $C$ , то  $\ln a(\zeta)$  удовлетворяет условию Гёльдера вместе с  $a(\zeta)$ .

$\frac{f_1^\pm(z)}{f^\pm(z)} = g^\pm(z)$ . В силу граничного условия (2) на контуре  $C$

$$\frac{g^-(\zeta)}{g^+(\zeta)} = \frac{f_1^-(\zeta)}{f_1^+(\zeta)} \cdot \frac{f^+(\zeta)}{f^-(\zeta)} = a(\zeta) \cdot \frac{1}{a(\zeta)} = 1,$$

следовательно, по принципу непрерывного продолжения  $g^-(z)$  и  $g^+(z)$  образуют одну аналитическую в полной плоскости  $z$  функцию  $g(z)$ . По теореме Лиувилля  $g(z) \equiv \text{const}$ , что и доказывает утверждение.

Пусть теперь  $\ln a(\zeta)$  неоднозначная функция и ее индекс  $-n$  отрицателен; для простоты письма предположим еще, что  $C$  содержит начало координат внутри себя. Тогда индекс функции

$$a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta)$$

будет равен нулю, ибо

$$\Delta_C \arg a_1(\zeta) = \Delta_C \arg \zeta^n + \Delta_C \arg a(\zeta) = 2\pi n - 2\pi n = 0,$$

и краевое условие (2) запишется в виде

$$f^-(\zeta) = \frac{a_1(\zeta)}{\zeta^n} f^+(\zeta). \quad (6)$$

Будем искать решение задачи в виде произведения двух функций

$$f^\pm(z) = f_1^\pm(z) f_2^\pm(z). \quad (7)$$

Пользуясь произволом в выборе одной пары, подберем функции  $f_1^\pm(z)$  так, чтобы выполнялось соотношение

$$f_1^-(\zeta) = a_1(\zeta) f_1^+(\zeta). \quad (8)$$

Так как индекс функции  $a_1(\zeta)$  равен нулю, то можно воспользоваться уже полученным результатом, т. е. положить

$$f_1^-(z) = e^{-F_1^-(z)}, \quad f_1^+(z) = e^{-F_1^+(z)}, \quad (9)$$

где  $F_1(z)$  — интеграл типа Коши, построенный по граничным значениям  $\ln a_1(\zeta)$  (см. формулы (4) и (5); мы приняли  $A = 1$ ).

Остается выбрать функции  $f_2^\pm(z)$  так, чтобы на кривой  $C$  было

$$f_2^-(\zeta) = \frac{1}{\zeta^n} f_2^+(\zeta), \quad (10)$$

тогда произведения (7) будут удовлетворять условию (6) (чтобы в этом убедиться, достаточно перемножить (8) и (10)). Пусть такие функции  $f_2^\pm(z)$  подобраны, тогда в силу (10) функции

$f_2^+(z)$  и  $z^n f_2^-(z)$  совпадают на  $C$  и, следовательно, образуют одну аналитическую во всей конечной плоскости функцию. Эта функция имеет в бесконечности полюс не выше  $n$ -го порядка, так как  $f_2^-(z)$  правильна в бесконечности и, значит, является многочленом. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_2^-(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a^n}{z^n}, \\ f_2^+(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n; \end{aligned}$$

вспоминая формулы (7) и (9), мы можем написать окончательное решение задачи для рассматриваемого случая в виде

$$\left. \begin{aligned} f^-(z) &= \left( a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) e^{-F_1^-(z)}, \\ f^+(z) &= (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) e^{-F_1^+(z)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln [\xi^n a(\xi)]}{\xi - z} d\xi. \quad (12)$$

Постоянные  $a_0, a_1, \dots, a_n$  в формуле (11) произвольны, причем одна из них,  $a_0$ , определяется заданием значения  $f^-(\infty)$ .

Итак, если индекс функции  $a(\xi)$  равен  $-n$ , то задача Гильберта имеет  $n+1$  линейно независимых решений. Вводя обозначение

$$G^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)},$$

эти решения можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} G^-(z), \quad \frac{1}{z} G^-(z), \quad \dots, \quad \frac{1}{z^n} G^-(z); \\ G^+(z), \quad z G^+(z), \quad \dots, \quad z^n G^+(z). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда индекс  $n$  функции  $a(\xi)$  положителен. Оказывается, в этом случае задача не имеет решений, аналитических в соответствующих областях. Действительно, мы вводим имеющую нулевой индекс функцию

$$a_1(\xi) = \frac{1}{\xi^n} a(\xi).$$

Как и в предыдущем случае, ищем решение в виде произведений  $f^\pm(z) = f_1^\pm(z) f_2^\pm(z)$ . Первую пару функций подчиняем условию

$$f_1^-(\xi) = a_1(\xi) f_1^+(\xi);$$

$f_1^\pm(z)$  находятся с точностью до постоянного множителя, ибо индекс функции  $a_1(\zeta)$  равен нулю. Для второй пары функций получаем краевое условие в виде

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta).$$

Из него видно, что  $f_2^-(z)$  и  $z^n f_2^+(z)$  образуют одну аналитическую функцию, правильную во всей полной плоскости и, следовательно, постоянную. Так как в начале координат она равна нулю (ибо внутри  $S$  эта функция совпадает с  $z^n f_2^+(z)$ ), то она тождественно равна 0, что невозможно \*).

Резюмируем полученные результаты.

Теорема 1 (Ф. Д. Гахов). *Задача Гильберта*

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta)$$

имеет  $n+1$  линейно независимых решений вида (13), если индекс  $-n$  граничной функции  $a(\zeta)$  неположителен. Если же индекс  $n$  положителен, то задача не имеет решений, аналитических в соответствующих областях.

Перейдем к решению задачи Привалова:

$$f^-(\zeta) = a(\zeta) f^+(\zeta) + b(\zeta). \quad (1)$$

Пусть сначала индекс функции  $a(\zeta)$  равен нулю, т. е. соответствующая задача Гильберта, которая получается, если в условии (1) положить  $b(\zeta) \equiv 0$ , имеет единственное решение:

$$f_1^\pm(z) = e^{-F^\pm(z)}, \quad (14)$$

где  $F(z)$  определяется интегралом (4). Решение задачи Привалова снова ищем в виде произведения  $f^\pm(z) = f_1^\pm(z) f_2^\pm(z)$ , где функции  $f_1^\pm(z)$  определяются формулой (14). На контуре  $S$  должно выполняться соотношение

$$f_1^- f_2^- = a f_1^+ f_2^+ + b = f_1^- f_2^+ + b$$

(мы заменили  $a f_1^+$  по условию (2) на  $f_1^-$ ). После подстановки сюда  $f_1^-(\zeta)$  из (14) мы получаем краевое условие для  $f_2(z)$ :

$$f_2^+(\zeta) - f_2^-(\zeta) = -b(\zeta) e^{F^-(\zeta)}. \quad (15)$$

\*) Если допустить, что искомая функция может иметь полюс в некоторой точке, например точке  $z = \infty$ , то задача будет разрешимой. Если индекс  $a(\zeta)$  равен  $n$ , то существует единственное решение, имеющее в бесконечности полюс порядка  $\leq n$ , см. Гахов [13].

Это краевое условие сводится к заданию скачка функции  $f_2(z)$  на контуре  $C$ . Вспоминая формулу Сохоцкого (15) из предыдущего пункта, мы можем утверждать, что функция  $f_2(z)$  лишь постоянным слагаемым отличается от интеграла типа Коши

$$F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{b(\xi) e^{-F_1^-(\xi)}}{\xi - z} d\xi, \quad (16)$$

т. е.

$$f_2^\pm(z) = A + F_2^\pm(z), \quad (17)$$

где  $A$  — произвольная постоянная.

Таким образом, если индекс функции  $a(\xi)$  равен 0, то решение задачи Привалова представимо в виде

$$f^\pm(z) = e^{-F^\pm(z)} \{A + F_2^\pm(z)\}, \quad (18)$$

где  $F(z)$  и  $F_2(z)$  определяются формулами (4) и (16) и  $A$  — произвольная постоянная.

Докажем единственность полученного решения. Очевидно, разность двух решений задачи (1) удовлетворяет условию (2). Отсюда вытекает, что два решения задачи Привалова могут отличаться лишь на решение задачи Гильберта. Учитывая доказанную выше единственность решения задачи Гильберта, мы видим, что любое решение задачи Привалова получается из (18) изменением постоянной  $A$ .

Если индекс функции  $a(\xi)$  равен  $-n$ , мы вводим функцию  $a_1(\xi) = \xi^n a(\xi)$  с нулевым индексом и ищем  $f^\pm(z)$  в виде произведения  $f_1^\pm(z) f_2^\pm(z)$ , где  $f_1^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}$  и  $F_1(z)$  определяется интегралом (12), а  $f_2(z)$  удовлетворяет краевому условию

$$f_2^-(\xi) = \frac{1}{\xi^n} f_2^+(\xi) + b(\xi) \cdot e^{F_1^-(\xi)}.$$

Последнему условию, очевидно, удовлетворяют функции

$$f_2^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + F_2^-(z),$$

$$f_2^+(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n + z^n F_2^+(z),$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — произвольные постоянные, а  $F_2(z)$  определяется по формуле (16), в которой вместо  $F^-(\xi)$  подставлена  $F_1^-(\xi)$ . Окончательно решение задачи Привалова в случае отрицательного индекса  $-n$  представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} f^-(z) &= \left\{ a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + F_2^-(z) \right\} e^{-F_1^-(z)}, \\ f^+(z) &= \left\{ a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n + z^n F_2^+(z) \right\} e^{-F_1^+(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Как и выше, легко показать, что формула (19) содержит все решения задачи.

Если, наконец, индекс  $n$  функции  $a(\zeta)$  положителен, то тот же самый метод приводит для  $f_1(z)$  к условию

$$f_1^-(\zeta) = \frac{a(\zeta)}{\zeta^n} f_1^+(\zeta),$$

а для  $f_2(z)$  — к условию

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta) + b(\zeta) e^{F_1^-(\zeta)},$$

где  $F_1(z)$  означает интеграл типа Коши, построенный по граничным значениям  $\ln \frac{a(\zeta)}{\zeta^n}$ . Последнему условию удовлетворяют функции

$$f_2^-(z) = A + F_2^-(z), \quad f_2^+(z) = \frac{A + F_2^+(z)}{z^n},$$

где  $F_2(z)$  определяется формулой (16), в которой вместо  $F^-(\zeta)$  подставлена  $F_1^-(\zeta)$ . Как легко показать, нашему условию удовлетворяют только эти функции. Функция  $f_2^+(z)$  будет правильной в точке  $z=0$ , если эта точка является для  $A + F_2(z)$  нулем порядка не ниже  $n$ .

Последнее условие можно несколько преобразовать, если разложить  $F_2^+(z)$  в ряд Тейлора по степеням  $z$ . Для этого подставляем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \dots + \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} + \dots$$

в формулу (16) (в которой вместо  $F$  стоит  $F_1$ ), получаем:

$$\begin{aligned} F_2^+(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta} e^{F_1^-(\zeta)} d\zeta - \frac{z}{2\pi i} \int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta^2} e^{F_1^-(\zeta)} d\zeta - \dots \\ & \dots - \frac{z^n}{2\pi i} \int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta^{n+1}} e^{F_1^-(\zeta)} d\zeta - \dots \end{aligned}$$

Отсюда видно, что наше условие разрешимости имеет вид

$$\int_C \frac{b(\zeta)}{\zeta^{k+1}} e^{F_1^-(\zeta)} d\zeta = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

(постоянная  $A$  должна быть взята равной свободному члену разложения). Таким образом, в случае положительного индекса  $n$  задача Привалова имеет правильное решение лишь при соблюдении условий (20).

Резюмируем полученные результаты.

**Теорема 2** (Ф. Д. Гахов). *Задача Привалова*

$$f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) + b(\zeta)$$

имеет семейство решений (19), зависящее от  $n+1$  произвольных постоянных, если индекс  $-n$  граничной функции  $a(\zeta)$  не положителен. Если же индекс  $n$  функции  $a(\zeta)$  положителен, то эта задача разрешима лишь в том случае, когда функция  $b(\zeta)$  удовлетворяет дополнительным условиям (20).

В заключение укажем, что изложенные здесь методы решения задачи Гильберта — Привалова распространяются на случай незамкнутых контуров  $C$ . Чтобы получить такое распространение, достаточно дополнить кривую  $C$  до замкнутого контура  $C_0$  с помощью кривой  $C'$ , соединяющей концы  $C$  ( $C_0 \equiv C + C'$ ), и положить на  $C'$

$$a(\zeta) \equiv 1, \quad b(\zeta) \equiv 0.$$

Рассмотрим для простоты случай, когда  $b(\zeta) \equiv 0$  и индекс функции  $a(\zeta)$ , который определяется как изменение  $\arg a(\zeta)$  при полном обходе точкой  $\zeta$  обоих берегов разреза  $C$  в противоположных направлениях, равен нулю. Тогда решение  $f^\pm(z)$ , построенное по формулам (4) и (5) для контура  $C_0$ , причем в первой из этих формул интеграл берется лишь вдоль  $C$  (ибо на  $C'$  по нашему определению  $\ln a(\zeta) \equiv 0$ ), будет однозначным и аналитическим всюду во внешности кривой  $C$  (на  $C'$  краевое условие дает  $f^+(\zeta) = f^-(\zeta)$ ), а на двух берегах  $C$  принимать значения  $f^+(\zeta)$  и  $f^-(\zeta)$ , связанные условием (2). Отличие от случая замкнутого контура состоит лишь в том, что это решение будет, вообще говоря, неограниченным в концах линии  $C$ . Можно, однако, показать, что если  $a(\zeta)$  удовлетворяет условию Гёльдера, то это решение при приближении к концам  $C$  будет обращаться в бесконечность порядка, меньшего 1.

Если умножить решение  $f^\pm(z)$  на произвольную функцию  $g(z)$ , аналитическую в точках контура  $C$ , то произведение  $f^\pm(z)g(z)$  будет, очевидно, решать ту же однородную краевую задачу, что и  $f^\pm(z)$ . Пользуясь тем, что в случае незамкнутого контура  $C$  допускаются решения, обращающиеся в концах  $C$  в бесконечность порядка, меньшего 1, иногда можно умножать решения  $f^\pm(z)$  на функцию, правильную всюду, кроме какого-либо конца  $C$ . Этим замечанием мы воспользуемся в приложениях (см. п. 55).

Полное изложение вопросов, связанных с задачей Гильберта — Привалова для незамкнутых контуров, читатель найдет в гл. 4 монографии Н. И. Мусхелишвили [14]. В той же монографии приводится обобщение метода Ф. Д. Гахова на многосвязные области, данное в 1941 г. Б. В. Хведелидзе.



**54. Формула Келдыша — Седова.** Большой интерес для приложений представляет следующая *смешанная краевая задача* \*):

На границе  $S$  односвязной области  $D$  заданы точки  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ , расположенные в том порядке, в котором они выписаны. Требуется найти функцию  $f(z)$ , аналитическую в  $D$ , действительная часть которой принимает заданные значения на дугах  $\overline{a_k b_k}$ , а мнимая часть — заданные значения на дугах  $\overline{b_k a_{k+1}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n; a_{n+1} = a_1$ ).

М. В. Келдыш и Л. И. Седов в 1937 г. дали полное исследование этой задачи и доказали, что, вообще говоря, она не имеет решений, ограниченных вблизи всех концов дуг  $a_k$  и  $b_k$ . Если же отказаться от условия ограниченности  $f(z)$  и потребовать лишь ограниченности интеграла от  $f(z)$ , то задача будет решаться с точностью до  $(n+1)$ -го произвольного постоянного. Наконец, они доказали, что задача будет иметь единственное решение, если, кроме того, потребовать, чтобы  $f(z)$  была ограниченной вблизи каких-либо  $n$  из концов и задать ее значение в некоторой точке границы.

Мы рассмотрим подробно последний случай. Предположим еще, что область  $D$  представляет собой верхнюю полуплоскость, — к этому с помощью конформного отображения сводится, очевидно, случай произвольной односвязной области.

Итак, пусть на оси  $x$  заданы точки  $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < \infty$  и две действительные функции  $u(x)$ ,  $v(x)$ , имеющие конечное число точек разрыва первого рода, причем  $u(x)$  определена на всех отрезках  $(a_k, b_k)$ , а  $v(x)$  — на всех отрезках  $(b_k, a_{k+1})$  ( $k = 1, 2, \dots, n; a_{n+1} = a_1$ ). Предполагается еще, что на отрезках  $(-\infty, a_1)$  и  $(b_n, \infty)$  функция  $v(x)$  удовлетворяет условию вида  $|v(x)| \leq \text{const}/|x|^\mu$  для некоторого  $\mu > 0$ . Требуется найти аналитическую в верхней полуплоскости функцию  $f(z)$  такую, что на отрезках  $(a_k, b_k)$

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x),$$

а на отрезках  $(b_k, a_{k+1})$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x).$$

Как мы говорили выше, имеет место

**Теорема (М. В. Келдыш — Л. И. Седов).** Смешанная задача для верхней полуплоскости имеет единственное решение  $f(z)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1)  $f(z)$  ограничена вблизи всех точек  $a_k$ ;

2) вблизи всех точек  $b_k$  ограничен интеграл  $\int_z^z f(z) dz$ ;

\*) Задача представляет частный случай так называемой задачи Гильберта (см. п. 55).

3)  $f(z)$  имеет конечный предел  $f(\infty)$  при  $z \rightarrow \infty$ , который для простоты полагается действительным.

Для доказательства обозначим

$$g(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{z - b_k}{z - a_k}}, \quad (1)$$

где рассматривается та ветвь корня, которая положительна на отрезке  $(b_n, \infty)$ ,  $\prod$  — знак произведения. Пусть  $z$  — произвольная точка верхней полуплоскости; окружим ее замкнутым контуром  $C$ , состоящим из верхней полуокружности  $C_R$ :  $|\xi| = R$ ,  $\text{Im } \xi > 0$ , и отрезка  $(-R, R)$  действительной оси. Предположим, что функция  $f(z)$  найдена, тогда по формуле Коши будем иметь:

$$f(z) g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) g(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (2)$$

Но так как, очевидно,  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = 1$ , то существует и

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f(\xi) g(\xi)}{\xi - z} \xi = f(\infty).$$

Следовательно, функция  $\frac{f(\xi) g(\xi)}{\xi - z}$  имеет в окрестности точки  $\xi = \infty$  разложение вида

$$\frac{f(\xi) g(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\infty) + \varphi(\xi)}{\xi}, \quad (3)$$

где  $\varphi(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Интегрируя (3) по полуокружности  $C_R$  достаточно большого радиуса, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi) g(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2} f(\infty) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi.$$

Так как  $\varphi(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , то интеграл в правой части стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  и, следовательно, соотношение (2) в пределе дает:

$$f(z) g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) g(t)}{t - z} dt + \frac{1}{2} f(\infty), \quad (4)$$

где интеграл берется вдоль действительной оси. Заменяя здесь  $z$  на  $\bar{z}$ , аналогично получим:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) g(t)}{t - \bar{z}} dt + \frac{1}{2} f(\infty).$$

Перейдем в последней формуле к комплексно сопряженным величинам и сложим ее с предыдущей:

$$f(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)g(t) - \overline{f(t)}g(t)}{t-z} dt + f(\infty).$$

Заметим теперь, что на отрезках  $(a_k, b_k)$  произведение  $\prod_{k=1}^n \frac{t-b_k}{t-a_k}$  отрицательно, а на  $(b_k, a_{k+1})$  оно положительно, следовательно, функция  $g(t)$  принимает на  $(a_k, b_k)$  чисто мнимые, а на отрезках  $(b_k, a_{k+1})$  — действительные значения. Учитывая это, мы переписываем последнюю формулу в виде

$$f(z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{f(t) + \overline{f(t)}}{t-z} g(t) dt + \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{f(t) - \overline{f(t)}}{t-z} g(t) dt \right\} + f(\infty). \quad (5)$$

Правая часть здесь известна, ибо на отрезках  $(a_k, b_k)$  известна  $\operatorname{Re} f(t) = u(t)$ , а на  $(b_k, a_{k+1})$  известна  $\operatorname{Im} f(t) = v(t)$ . Таким образом, мы пришли к искомой формуле Келдыша — Седова:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t-z} dt + i \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{v(t)g(t)}{t-z} dt \right\} + \frac{f(\infty)}{g(z)}. \quad (6)$$

(входящий во вторую сумму несобственный интеграл по отрезку  $(b_n, a_{n+1})$  сходится в силу наложенного на  $v(x)$  дополнительного условия).

Остается показать, что функция, определяемая по этой формуле, действительно решает смешанную задачу. Для этого рассмотрим одно из слагаемых суммы (6)

$$f_k(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t-z} dt. \quad (7)$$

Произведение  $f_k(z)g(z)$  представляет собой интеграл типа Коши, построенный по функции  $\varphi(t) = 2u(t)g(t)$ . Предельное его значение  $f_k^+(t_0)g(t_0)$  при  $z$ , стремящемся сверху к точке  $t_0$  отрезка  $(a_k, b_k)$ , определяется по формуле Сохоцкого (12) п. 52:

$$f_k^+(t_0)g(t_0) = \Phi(t_0) + u(t_0)g(t_0), \quad (8)$$

где согласно формуле (8) того же пункта

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t) - u(t_0)g(t_0)}{t - t_0} dt + u(t_0)g(t_0) + \frac{u(t_0)g(t_0)}{\pi i} \ln \frac{b_k - t_0}{a_k - t_0}. \quad (9)$$

Учитывая, что при  $a_k < t_0 < b_k$  предельное значение логарифма при подходе к отрезку  $(a_k, b_k)$  сверху равно

$$\ln \frac{b_k - t_0}{a_k - t_0} = \ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k} - i\pi$$

(рассматривается ветвь логарифма, которая действительна на оси  $t$  справа от этого отрезка), мы можем переписать формулу (8) после подстановки в нее  $\Phi(t_0)$  из (9) и сокращения на  $g(t_0)$  в виде

$$f_k^+(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t) \frac{g(t)}{g(t_0)} - u(t_0)}{t - t_0} dt + u(t_0) + \frac{u(t_0)}{\pi i} \ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}. \quad (10)$$

Так как при  $t$  и  $t_0$ , лежащих на отрезке  $(a_k, b_k)$ , функция

$$g(t) = \prod_{v=1}^n \sqrt{\frac{t - b_v}{t - a_v}}$$

принимает чисто мнимые значения, то интеграл в последней формуле действителен, действителен также и член  $\ln \frac{b_k - t_0}{t_0 - a_k}$ .

Следовательно,  $\operatorname{Re} f_k^+(t_0) = u(t_0)$ . Если теперь  $z$  стремится сверху к точке  $t_1$ , лежащей на каком-либо отрезке  $(a_{k_1}, b_{k_1})$ ,  $k_1 \neq k$ , то предельное значение  $f_k^+(t_1)$  находится непосредственной подстановкой  $t = t_1$  в интеграл (7):

$$f_k^+(t_1) = \frac{1}{\pi i g(t_1)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t)g(t)}{t - t_1} dt.$$

Здесь значение  $g(t_1)$  — чисто мнимое, так же как и  $g(t)$ . Следовательно, значение  $f_k^+(t_1)$  — чисто мнимое и  $\operatorname{Re} f_k^+(t_1) = 0$ . Если, наконец,  $z$  стремится сверху к точке  $t_2$ , лежащей на

каком-либо отрезке  $(b_v, a_{v+1})$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$ , то предельное значение равно

$$f_k^+(t_2) = \frac{1}{\pi i g(t_2)} \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t) g(t)}{t - t_2} dt.$$

Здесь  $g(t_2)$  — действительно,  $g(t)$  — чисто мнимо, следовательно, значение  $f_k^+(t_2)$  — действительно и  $\text{Im } f_k^+(t_2) = 0$ .

Из наших рассуждений следует, что действительная часть функции

$$f_*(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{u(t) g(t)}{t - z} dt$$

на каждом отрезке  $(a_h, b_h)$  принимает заданные значения  $u(t)$ , а ее мнимая часть на каждом отрезке  $(b_h, a_{h+1})$  равна 0.

Совершенно аналогично мы докажем, что мнимая часть функции

$$f_{**}(z) = \frac{1}{\pi g(z)} \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{v(t) g(t)}{t - z} dt$$

на каждом отрезке  $(b_h, a_{h+1})$  принимает заданные значения  $v(t)$ , а ее действительная часть на каждом отрезке  $(a_h, b_h)$  равна 0.

Отсюда следует, что функция (6)

$$f(z) = f_*(z) + f_{**}(z) + \frac{f(\infty)}{g(z)}$$

в самом деле решает смешанную краевую задачу (наличие последнего члена ничего не меняет, ибо  $f(\infty)$  — действительное число, а  $g(z)$  на отрезках  $(a_h, b_h)$  принимает мнимые значения, а на отрезках  $(b_h, a_{h+1})$  — действительные). Из построения функций  $f_*(z)$  и  $f_{**}(z)$  следует, что при  $z \rightarrow \infty$  они стремятся к нулю; функция  $g(z)$  при этом стремится к 1, следовательно, условие на бесконечности также выполняется. Из вывода формулы (6) следует также, что она дает единственное решение смешанной задачи, удовлетворяющее условиям 1) — 3). Теорема доказана.

Покажем теперь, что если отказаться от условия ограниченности  $f(z)$  в точках  $a_h$  и требовать в них лишь ограниченности интеграла  $\int_z^z f(z) dz$  (как и в точках  $b_h$ ), то при заданном значении  $f(\infty)$  решение задачи будет содержать  $n$  произвольных

*постоянных.* В самом деле, при любых действительных постоянных  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  действительная часть функции

$$h(z) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1}}{\sqrt{\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k)}} \quad (11)$$

равна нулю на всех отрезках  $(a_k, b_k)$ , а ее мнимая часть равна нулю на всех отрезках  $(b_k, a_{k+1})$ . При  $z \rightarrow \infty$  эта функция, очевидно, стремится к нулю. Таким образом, мы можем добавить эту функцию к функции  $f(z)$ , определяемой формулой (6), и полученная сумма будет давать аналитическую в верхней полуплоскости функцию с ограниченным интегралом в окрестности точек  $a_k$  и  $b_k$ , принимающую в бесконечности заданное действительное значение  $f(\infty)$  и решающую смешанную краевую задачу.

Вводя обозначение

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{на отрезках } (a_k, b_k), \\ iv(t) & \text{на отрезках } (b_k, a_{k+1}) \end{cases} \quad (12)$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ ), мы можем записать формулу Келдыша — Седова в виде

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t) \varphi(t)}{t - z} dt + h(z) + \frac{f(\infty)}{g(z)}, \quad (13)$$

где  $g(z)$  и  $h(z)$  определяются формулами (1) и (11). Можно доказать, что формула (13) содержит все решения задачи, удовлетворяющие поставленным условиям (см. Мусхелишвили [14]).

В следующем параграфе мы будем применять формулу Келдыша — Седова, преобразованную к случаю, когда вместо верхней полуплоскости рассматривается круг  $\left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ . Для выполнения такого преобразования мы воспользуемся дробно-линейным отображением

$$z = \frac{iz_1}{1 - z_1} \quad (14)$$

круга  $\left| z_1 - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$  на верхнюю полуплоскость  $z$ . Подставляя (14) в формулу (13), где для простоты положено  $h(z) = f(\infty) = 0$ , и заменяя  $z_1$  снова через  $z$ , а  $t_1$  через  $\xi$ , получаем:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_C \frac{g(\xi) \varphi(\xi)}{\xi - z} \frac{1 - z}{1 - \xi} d\xi, \quad (15)$$

где  $C$  — окружность  $\left| \zeta - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ ,  $\varphi(\zeta)$  — заданная на окружности функция, равная  $u(\zeta)$  на  $(a_k, b_k)$  и  $iv(\zeta)$  на  $(b_k, a_{k+1})$ , а  $g(z)$  определяется по формуле (1) (точки  $a_k$  и  $b_k$  лежат на  $C$ ).

Совершенно аналогично формула (13) преобразуется и к случаю единичного круга  $|z| < 1$ . В этом случае она имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{\pi i g(z)} \int_{|\zeta|=1} g(\zeta) \varphi(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{2\bar{\zeta}} \right) d\zeta + \sqrt{\prod_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{(z - a_k)(z - b_k)}} (c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n), \quad (16)$$

где  $c_k$  — комплексные постоянные, удовлетворяющие условию  $c_{n-k} = \bar{c}_k$ . Вывод формулы (16) читатель может найти в книге Н. И. Мусхелишвили [14].

**55. Другие краевые задачи.** Здесь мы рассмотрим еще несколько краевых задач теории аналитических и гармонических функций.

1) Краевая задача Римана — Гильберта формулируется следующим образом.

Найти аналитическую в области  $D$  и непрерывную в  $\bar{D}$  функцию  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , удовлетворяющую на границе  $C$  области условию

$$a(\zeta) u(\zeta) - b(\zeta) v(\zeta) = c(\zeta), \quad (1)$$

где  $a, b, c$  — заданные на  $C$  действительные функции.

Мы приведем решение задачи Римана — Гильберта, данное Н. И. Мусхелишвили. Если  $D$  — односвязная область, то с помощью конформного отображения задача сводится к случаю, когда  $D$  есть единичный круг  $|z| < 1$ . Этот случай мы и рассмотрим, предполагая, кроме того, что функции  $a, b, c$  удовлетворяют условию Гёльдера, и что  $a^2 + b^2 \neq 0$  всюду на  $C$ . Краевое условие (1) мы перепишем в виде

$$2 \operatorname{Re}(a + ib) f(\zeta) = (a + ib) f(\zeta) + (a - ib) \bar{f}(\bar{\zeta}) = 2c. \quad (2)$$

Положим во внешности единичного круга

$$f_*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad (3)$$

и обозначим через  $F(z)$  — функцию, равную  $f(z)$  в круге  $|z| < 1$  и  $f_*(z)$  вне его. Предельное значение  $F(z)$  на  $C$  слева  $F^+(\zeta) = f(\zeta)$ , а предельное значение справа  $F^-(\zeta) = \bar{f}(\bar{\zeta})$  (последнее вытекает из определения (3) и того, что  $1/\bar{\zeta} = \zeta$  на  $C$ ).

Поэтому условие (2) можно переписать в виде

$$(a + ib) F^+(\zeta) + (a - ib) F^-(\zeta) = 2c, \quad (4)$$

или

$$F^-(\zeta) = A(\zeta) F^+(\zeta) + B(\zeta), \quad (5)$$

где

$$A(\zeta) = -\frac{a + ib}{a - ib}, \quad B(\zeta) = -\frac{2c}{a - ib}. \quad (6)$$

Таким образом, решение задачи Римана — Гильберта сводится к решению задачи Гильберта — Привалова п. 53.

Однако не любое решение  $F(z)$  задачи (5) будет давать решение задачи (2), ибо условие (3), связывающее значения  $F(z)$  в симметричных относительно окружности точках, вообще говоря, не выполняется. Тем не менее, имея произвольное решение  $F(z)$ , легко построить решение, удовлетворяющее этому условию. Для этого наряду с  $F(z)$  рассмотрим функцию

$$F_*(z) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

и заметим, что на  $S$  она также удовлетворяет условию (4)\*), а следовательно, и (5). Но тогда тому же условию будет удовлетворять и функция

$$\frac{1}{2} \{F(z) + F_*(z)\},$$

которая, очевидно, удовлетворяет и условию (3). Внутри единичного круга эта функция будет, следовательно, решать граничную задачу Римана — Гильберта.

2) Задача наклонной производной формулируется следующим образом.

Найти гармоническую в области  $D$  и непрерывную вместе со своими частными производными первого порядка в  $\bar{D}$  функцию  $u(z)$ , удовлетворяющую на границе  $S$  этой области условию

$$a(\zeta) \frac{\partial u}{\partial x} + b(\zeta) \frac{\partial u}{\partial y} = c(\zeta), \quad (7)$$

где  $a, b, c$  — заданные на  $S$  действительные функции.

Название задачи объясняется тем, что условие (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{c(\zeta)}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (7')$$

\*) В самом деле, на  $S$  имеем  $F_*(\zeta) = \overline{F(\bar{\zeta})}$ , и при приближении  $z$  к  $S$  слева  $1/\bar{z}$  приближается к ней справа. Следовательно, переходя в соотношении (4) к комплексно сопряженным величинам, мы получим такое же условие для  $F_*(\zeta)$ .



где  $\frac{\partial u}{\partial l}$  обозначает производную в направлении вектора  $l = a + ib$ , наклоненного по отношению к  $C$  под некоторым углом.

В предположениях, которые были введены в предыдущей задаче, задача наклонной производной сводится к ней. В самом деле, обозначим через  $f(z) = u + iv$  функцию, имеющую  $u$  своей действительной частью, и положим  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = u_1 + iv_1$ . Условие (7) переписывается теперь в виде

$$a(\xi) u_1(\xi) - b(\xi) v_1(\xi) = c(\xi)$$

и совпадает с условием (1). Таким образом,  $f'(z)$  можно найти методом, описанным в 1), а  $f(z)$  найдется простым интегрированием.

3) В некоторых вопросах, например при изучении дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа (об этих уравнениях мы будем говорить в следующем параграфе), встречается следующий вариант задачи наклонной производной \*):

Пусть область  $D$  ограничена отрезком  $(a, b)$  действительной оси и некоторой линией  $\gamma$  с концами в точках  $a$  и  $b$ , и пусть на  $(a, b)$  и  $\gamma$  заданы действительные непрерывные функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(\xi)$ . Требуется построить гармоническую в области  $D$  функцию  $u(z)$  такую, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi(x) \text{ на } (a, b), \\ u &= \psi(\xi) \text{ на } \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Очевидно,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial l}$  означает дифференцирование в направлении  $l$ , составляющем угол  $-\pi/4$  с осью  $x$ . Для решения этой задачи воспользуемся конформным отображением  $z = f(z_1)$  области  $D$  на сектор  $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$ , переводящим дугу  $\gamma$  в луч  $\gamma^*$ :  $\arg z_1 = 0$ , отрезок  $(a, b)$  — в луч  $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$  и точки  $a$  и  $b$  — в  $\infty$  и  $0$ . При нашем отображении направление, в котором задается производная на  $\gamma$ , переходит в направление отрицательной оси  $x$  (рис. 125). Поэтому для гармонической функции

$$u[f(z_1)] = u_1(z_1),$$

\*) См. М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, ДАН СССР, 1950, т. XX, № 3.

в которую преобразуется искомая функция  $u(z)$ , первое из условий (8) переписывается в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \left| \frac{dz}{dz_1} \right| = - \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi[f(\xi_1)] \cdot |f'(\xi_1)|. \quad (9)$$

Второе условие перейдет в соотношение  $u_1(x_1) = \psi[f(x_1)]$ , которое после дифференцирования по  $x_1$  принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \left| \frac{dz}{dz_1} \right| = \psi'[f(x_1)] \cdot |f'(x_1)|, \quad (10)$$

где  $\frac{\partial \psi}{\partial s} = \psi'$  означает производную вдоль контура  $\gamma$ . Так как правые части условий (9) и (10) — известные функции, то наша задача сводится к отысканию гармонической функции  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  по ее значениям на границе сектора  $0 < \arg z_1 < \frac{\pi}{4}$ , т. е. к задаче Дирихле.

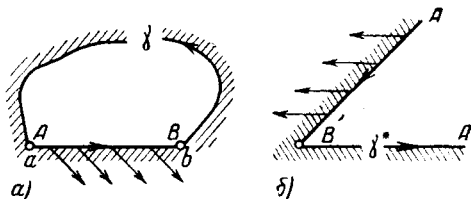


Рис. 125.

Аналогичным методом можно решить и более общую задачу. Пусть на части  $C_1$  границы  $S$  односвязной области  $D$  заданы действительные непрерывные функции  $\varphi(\xi)$ ,  $a(\xi)$  и  $b(\xi)$ , причем  $a^2 + b^2 \neq 0$ , а на остальной части  $C_2$  этой границы — такая же функция  $\psi(\xi)$ . Требуется построить гармоническую в области  $D$  функцию  $u(z)$ , удовлетворяющую на границе условию

$$a(\xi) \frac{\partial u}{\partial x} + b(\xi) \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(\xi) \text{ на } C_1, \quad u = \psi(\xi) \text{ на } C_2.$$

Первое из краевых условий можно интерпретировать как задание производной по направлению, составляющему известный угол с дугой  $C_1$ . Пользуясь формулой Чизотти из п. 44, можно построить конформное отображение  $z_1 = f(z)$  области  $D$  на область  $D_1$  так, чтобы дуга  $C_2$  перешла в вертикальную прямую, и направления, в которых известна производная — также в вертикальные направления; форма образа кривой  $C_1$  при этом определится. При этом на заданные функции следует наложить такие условия, чтобы образы дуг  $C_1$  и  $C_2$  ограничивали односвязную область  $D_1$ .

Как и в разобранный выше случае, задача сводится после этого к задаче Дирихле для частной производной  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

4) Смешанная задача для гармонических функций формулируется следующим образом.

На границе  $S$  односвязной области  $D$  заданы точки  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ , расположенные в том порядке, в котором они выписаны, и на дугах  $(a_k, b_k)$ ,  $(b_k, a_{k+1})$  ( $k = 1, 2, \dots, n; a_{n+1} = a_1$ ) заданы соответственно действительные функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$ . Требуется найти гармоническую и ограниченную в области

В функцию  $u(z)$ , удовлетворяющую граничным условиям:

$$u = \varphi(\zeta) \text{ на } (a_k, b_k), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi(\zeta) \text{ на } (b_k, a_{k+1}), \quad (11)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  обозначает производную в направлении внутренней нормали к  $S$ .

Докажем разрешимость и единственность решения смешанной задачи. Очевидно, с помощью дополнительного конформного отображения задача сводится к частному случаю, когда область  $D$  представляет собой верхнюю полуплоскость и граничные условия (11) имеют вид

$$u = \varphi(x) \text{ на } (a_k, b_k), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi(x) \text{ на } (b_k, a_{k+1}) \quad (12)$$

(способ сведения такой же, как обычно, см., например, 6) п. 44). Для этого же частного случая решение смешанной задачи дается с помощью формулы Келдыша — Седова.

В самом деле, пусть  $f(z) = u + iv$  будет аналитическая в верхней полуплоскости функция, имеющая  $u$  своей действительной частью, и

$$f_1(z) = f'(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y).$$

Имеем:  $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $v_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , следовательно, граничные условия (12) для функции  $f_1(z)$  принимают вид

$$u_1 = \varphi'(x) \text{ на } (a_k, b_k), \quad v_1 = -\psi(x) \text{ на } (b_k, a_{k+1}). \quad (13)$$

Решение  $f_1(z)$  задачи (13) дается формулой Келдыша — Седова (13) предыдущего пункта, причем принятое там условие

об ограниченности интеграла  $\int_a^z f_1(z) dz$  вблизи точек  $a_k$  и  $b_k$  обеспечивает ограниченность решения  $u(z)$  задачи (12), которое определяется через  $f_1(z)$  по формуле

$$u(z) = \operatorname{Re} \int_a^z f_1(z) dz. \quad (14)$$

При сведении задачи (12) к задаче (13) мы дифференцируем функцию  $\varphi(x)$ , заданную на совокупности  $n$  отрезков  $(a_k, b_k)$ , а затем, применяя формулу (14), интегрируем построенную функцию  $f_1(z)$ . Поэтому наш метод приводит к функции  $u(z)$ , совпадающей на отрезках  $(a_k, b_k)$  с заданной функцией  $\varphi(x)$ , лишь с точностью до постоянных слагаемых (различных для разных отрезков). Однако наличие в формуле Келдыша — Седова  $n$  произвольных постоянных позволяет выбрать эти сла-

гаемые так, чтобы значения  $u$  на  $(a_k, b_k)$  в точности совпадали с  $\varphi(x)$ . Таким образом, разрешимость смешанной задачи для гармонических функций доказана.

Докажем теперь единственность решения этой задачи в классе ограниченных гармонических функций. Пусть будут  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$  — две гармонические в верхней полуплоскости ограниченные функции, удовлетворяющие условию (12). Разность  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$  также ограничена и гармонична в верхней полуплоскости, причем

$$u = 0 \text{ на } (a_k, b_k), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ на } (b_k, a_{k+1}).$$

По принципу симметрии п. 42 гармоническая функция  $\frac{\partial u}{\partial y}$  допускает аналитическое продолжение через совокупность отрезков  $(b_k, a_{k+1})$ , следовательно, такое продолжение допускает и функция  $u$ . Продолженная функция  $u$  оказывается ограниченной и гармонической вне совокупности отрезков  $(a_k, b_k)$ , а на этих отрезках она принимает значения, равные нулю. Таким образом, функция  $u$  решает задачу Дирихле для плоскости с выброшенными отрезками  $(a_k, b_k)$  при нулевых граничных значениях. По теореме единственности решения задачи Дирихле  $u \equiv 0$ , что и требовалось доказать.

#### § 4. Приложения

В этом параграфе мы рассмотрим приложения методов теории функций комплексного переменного к некоторым вопросам теории уравнений с частными производными, а также к задачам механики сплошной среды и другим задачам из числа поставленных выше. Изложение будем вести на конкретных примерах, иллюстрируя ими частью уже изложенные, а частью новые приемы.

**56. Уравнения с частными производными.** Выше мы подробно выяснили связь теории функций комплексного переменного с уравнением Лапласа. Это — классическое направление в теории функций, восходящее к работам Эйлера и особенно Римана. Однако в последнее время усиливается внимание к связям теории функций с другими уравнениями с частными производными. Простейшие из таких связей мы и разберем в этом пункте.

1) Система Карлемана. В теории уравнений с частными производными за последние годы успешно используются методы, основанные на представлении решений в комплексной форме. Эти методы развиты главным образом в работах И. Н. Векуа, Л. Берса, С. Бергмана и др. В качестве примера мы приведем, следуя И. Н. Векуа, такое представление

для системы уравнений с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + au + bv, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + cu + dv, \quad (1)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  — непрерывные функции переменных  $x$  и  $y$  в некоторой области  $D$ .

Система (1) представляет собой обобщение условий Коши — Римана (при  $a = b = c = d = 0$  мы получаем эти условия); к ней приводятся некоторые задачи теории упругих оболочек, газовой динамики и других разделов механики сплошных сред. Эта система была впервые рассмотрена Т. Карлеманом\*), который доказал для ее решений теорему единственности, аналогичную теореме 1 п. 20. Подробное исследование системы (1) и ее приложений провел И. Н. Векуа [15]. Всюду в дальнейшем мы будем для простоты считать, что функции  $u$  и  $v$  обладают в области  $D$  непрерывными частными производными.

При выводе формул представления удобно пользоваться символами комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2)$$

Например, первый из них в применении к комплексной функции  $w = u + iv$  дает:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (u + iv)}{\partial x} + i \frac{\partial (u + iv)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) i.$$

В частности, условия аналитичности Коши — Римана записываются с помощью этого символа в виде  $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ .

Приведем сначала формулу представления произвольной функции  $w(z) = u + iv$ , обладающей в некоторой области  $D$  непрерывными частными производными. Для этого воспользуемся формулой Римана — Грина, которая с помощью символа (2) записывается в виде

$$\frac{1}{2i} \int_C w(\xi) d\xi = \iint_D \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} d\xi d\eta, \quad (3)$$

где  $\xi = \xi + i\eta$  и  $C$  — граница  $D$ . Для аналитических функций  $\frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \equiv 0$  и формула (3) выражает, очевидно, теорему Коши.

Поступая далее в точности так же, как и при выводе из теоремы Коши интегральной формулы Коши (п. 14), исключим из области  $D$  окрестность  $d$  фиксированной точки  $z$ , ограниченную

\*) Торстен Карлеман (1892—1949) — шведский математик.

окружностью с малого радиуса, и применим к области  $D - d$  и к функции  $\frac{w(\xi)}{\xi - z}$  формулу (3); мы получим:

$$\frac{1}{2i} \int_C \frac{w(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2i} \int_c \frac{w(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{D-d} \int \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\xi d\eta}{\xi - z}.$$

Устремляя радиус окрестности к нулю, увидим как и в п. 14, что предел интеграла  $\int_C \frac{w(\xi)}{\xi - z} d\xi$  равен  $2\pi i w(z)$  и, следовательно, получим искомую формулу представления:

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \int_D \int \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\xi d\eta}{\xi - z}. \quad (4)$$

Для аналитических функций двойной интеграл исчезает, и мы приходим к интегральной формуле Коши.

Применим эту формулу к решениям системы Карлемана (1). С помощью символа дифференцирования (2) эта система записывается в виде одного комплексного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w}, \quad (5)$$

где  $w = u + iv$ ,  $A = \frac{1}{4}(a + d + ic - ib)$  и  $B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)$ . Поэтому формула (4) дает следующее комплексное представление решений системы (1):

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{w(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{A(\xi) w(\xi) + B(\xi) \overline{w(\xi)}}{\xi - z} d\xi d\eta. \quad (6)$$

Приведем еще одну, более удобную формулу комплексного представления решений системы Карлемана (5). Пусть  $w = w(z)$  будет произвольное решение этой системы и  $N$  — совокупность точек  $D$ , в которых  $w = 0$ ; через  $M$  мы обозначим множество  $D - N$ . Положим

$$\chi(z) = \begin{cases} A(z) + B(z) \frac{\overline{w(z)}}{w(z)}, & \text{если } z \text{ принадлежит } M, \\ 0, & \text{если } z \text{ принадлежит } N; \end{cases}$$

функция  $\chi(z)$  непрерывна на  $M$  и на  $N$  в отдельности и, очевидно, ограничена, ибо для любой точки  $z$  из  $D$  мы имеем  $|\chi(z)| \leq |A(z)| + |B(z)|$ . Поэтому функция  $\chi(z)$  интегрируема по области  $D$ , т. е. имеет смысл интеграл

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \int \frac{\chi(\xi) d\xi d\eta}{\xi - z}. \quad (7)$$

Легко проверить (ср. п. 16), что функция  $\omega(z)$  аналитична вне замкнутой области  $\bar{D}$  и что  $\omega(\infty) = 0$ . Докажем, что в любой точке  $z$  непрерывности функции  $\chi(z)$  существует комплексная производная

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = -\chi(z). \quad (8)$$

В самом деле, выделим окрестность  $d$  точки  $z$ , ограниченную контуром  $c$ , и представим  $\omega(z)$  в виде суммы двух непрерывных во всей плоскости функций  $\omega_1(z)$  и  $\omega_2(z)$ :

$$\omega_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_d \int \frac{\chi(\xi) d\xi d\eta}{\xi - z}, \quad \omega_2(z) = \frac{1}{\pi} \int \int_{D-d} \frac{\chi(\xi) d\xi d\eta}{\xi - z}.$$

Функция  $\omega_1(z)$  аналитична вне  $\bar{d}$ , а  $\omega_2(z)$  — в  $d$ , поэтому

$$\frac{1}{2i} \int_c \omega(z) dz = \frac{1}{2i} \int_c \omega_1(z) dz + \frac{1}{2i} \int_c \omega_2(z) dz = \frac{1}{2i} \int_L \omega_1(z) dz,$$

где  $L$  — окружность достаточно большого радиуса, содержащая  $D$  (мы воспользовались теоремой Коши, по которой первый интеграл в средней части равенства можно заменить интегралом вдоль  $L$ , а второй равен нулю). Заменяя  $\omega_1(z)$  ее выражением и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\frac{1}{2i} \int_c \omega(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_d \int \chi(\xi) d\xi d\eta \int_L \frac{dz}{z - \xi} = -\int_d \int \chi(\xi) d\xi d\eta.$$

Если разделить обе части этого равенства на площадь  $s$  области  $d$  и воспользоваться предельным соотношением

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \lim_{d \rightarrow z} \frac{1}{2is} \int_c \omega(z) dz,$$

которое вытекает из формулы (3) на основании теоремы о среднем, то в пределе при  $d \rightarrow z$  мы получим искомую формулу (8).

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z) = \omega(z) e^{\omega(z)}, \quad (9)$$

которая, очевидно, непрерывна в  $D$ . Если  $z$  принадлежит множеству  $M$ , то, применяя правила комплексного дифференцирования произведения и показательной функции (которые легко проверяются), мы получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = e^{\omega(z)} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \right) = e^{\omega(z)} (A\omega + B\bar{\omega} - \omega\chi) \equiv 0;$$

таким образом, функция  $\varphi(z)$  аналитична на множестве  $M$ . Легко видеть, что она аналитична также и на множестве  $N$ .

Действительно, функция  $w(z)$  аналитична в каждой точке, где она равна нулю, ибо в таких точках согласно уравнению (5)  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ; поэтому для любой точки  $z_0$  из  $N$  отношение

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} = \frac{\varphi(z)}{z - z_0} = \frac{w(z)}{z - z_0} e^{\omega(z)}$$

имеет предел при  $z \rightarrow z_0$ , равный  $w'(z_0) e^{\omega(z_0)}$ , т. е.  $\varphi(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ .

Таким образом, функция  $\varphi(z)$  аналитична всюду в области  $D$ . Заметим, наконец, что согласно формуле (9) нули  $w(z)$  совпадают с нулями  $\varphi(z)$ , и по теореме единственности п. 20 множество  $N$  этих нулей не может иметь предельных точек внутри  $D$ . Это множество, следовательно, не влияет на величину интеграла в формуле (7), и эту формулу можно переписать в виде

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{A(\xi) w(\xi) + B(\xi) \overline{w(\xi)}}{w(\xi) (\xi - z)} d\xi d\eta.$$

Формула (9) дает теперь искомое комплексное представление решений системы Карлемана через аналитические функции  $\varphi(z)$ :

$$w(z) = \varphi(z) \exp \left\{ - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{A(\xi) w(\xi) + B(\xi) \overline{w(\xi)}}{w(\xi) (\xi - z)} d\xi d\eta \right\}^* \quad (10)$$

Эта формула была получена И. Н. Векуа и независимо от него (в более ограниченных предположениях) Л. Берсом. Из нее вытекает, что в отношении нулей и полюсов решения системы Карлемана ведут себя так же, как аналитические функции: на эти решения распространяется теорема п. 20 о нулях (что мы уже отмечали выше), принцип аргумента и теорема Руше п. 23 и другие теоремы. Заметим, однако, что геометрические свойства системы Карлемана существенно отличаются от свойств аналитических функций \*\*).

2) Линейные эллиптические системы. Рассмотрим так называемое плоско-меридианное электростатическое поле, т. е. пространственное поле, векторы которого расположены в плоскостях, проходящих через некоторую ось (мы примем ее за ось  $z$ ), и зависят лишь от расстояния  $r$  до этой оси и от координаты  $z$  вдоль нее. Это поле, очевидно, полностью описывается плоским полем, расположенным в плоскости декартовых координат  $(r, z)$ , но его уравнения отличаются от уравнений п. 47. В самом деле, пользуясь известными выражениями

\*) Символом  $\exp a$  обычно обозначается  $e^a$ .

\*\*) См. Б. В. Шабат, Об отображениях, осуществляемых решениями системы Карлемана, Успехи матем. наук, т. XI, вып. 3 (69), 1956, 203—206.



для дивергенции и ротора в цилиндрических координатах и обозначая через  $E_r$  и  $E_z$  соответствующие компоненты вектора напряженности  $\mathbf{E}$ , мы запишем условия отсутствия зарядов и потенциальности поля в виде:

$$\frac{\partial (rE_z)}{\partial r} + \frac{\partial (rE_r)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial r}. \quad (11)$$

Из этих условий, так же как в пп. 46 или 47, мы заключаем, что существуют две функции  $u(r, z)$  и  $v(r, z)$ , для которых

$$rE_z = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad rE_r = -\frac{\partial v}{\partial z}; \quad E_r = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

и которые связаны, следовательно, соотношениями

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad -r \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (12)$$

Эти функции полностью описывают плоско-меридианное поле.

Уравнения (12) представляют собой частный случай системы линейных уравнений с частными производными первого порядка эллиптического типа

$$\left. \begin{aligned} v_y &= au_x + bu_y, \\ -v_x &= du_x + cu_y, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $a, b, c, d$  — известные функции переменных  $x$  и  $y$ , для которых всюду в рассматриваемой области  $D$  выполняется условие эллиптичности:

$$A = ac - \left( \frac{b+d}{2} \right)^2 > 0 \quad (14)$$

(для простоты письма через  $u_x, \dots$  мы обозначим  $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ ). К таким системам приводят также некоторые задачи газовой динамики, теории пластичности, теории изгибания поверхностей и другие. Они рассмотрены в работах И. Н. Векуа, Л. Берса, Г. Н. Положего, Б. Боярского и других авторов, которые установили ряд фактов, роднящих решения этих систем с аналитическими функциями. Теория решений линейных систем входит как простейшая составная часть в общую теорию квазиконформных отображений\*). В работах перечисленных авторов доказано, что для систем (13) справедлива теорема существования отображений, обобщающая теорему Римана п. 28, и что решения этих систем обладают целым рядом геометрических

\*) См. работы М. А. Лаврентьева «Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей», Матем. сб. 21:2 (1947), 286—320, и «Основная задача теории квазиконформных отображений плоских областей», Изв. АН СССР, сер. матем., 12 (1948), 513—554, а также его книгу [16].

свойств, вполне аналогичных свойствам конформных отображений. Не имея возможности останавливаться в рамках настоящей книги на этих результатах \*), мы приведем лишь несколько простейших фактов.

Можно доказать \*\*), что система (13) геометрически выражает условие преобразования бесконечно малых эллипсов плоскости  $z = x + iy$  из семейства

$$\gamma(X-x)^2 - 2\beta(X-x)(Y-y) + \alpha(Y-y)^2 = ph^2 \quad (15)$$

с точностью до малых высших порядков в эллипсы плоскости  $w = u + iv$ :

$$\gamma_1(U-u)^2 - 2\beta_1(U-u)(V-v) + \alpha_1(V-v)^2 = p_1 h_1^2 \quad (15')$$

(рис. 126), причем коэффициенты уравнений эллипсов определяются через коэффициенты системы (13) по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{\sqrt{A}}, & \beta &= \frac{b+d}{2\sqrt{A}}, & \gamma &= \frac{c}{\sqrt{A}}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}, & \beta_1 &= \frac{b-d}{2\sqrt{A}}, & \gamma_1 &= \frac{B}{\sqrt{A}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(у нас  $p, p_1 \geq 1$  — отношения полуосей,  $h, h_1$  — малые полуоси эллипсов,  $\alpha\gamma - \beta^2 \equiv 1$ ,  $\alpha_1\gamma_1 - \beta_1^2 \equiv 1$ ,  $B = ac - bd \geq A > 0$ ) и,

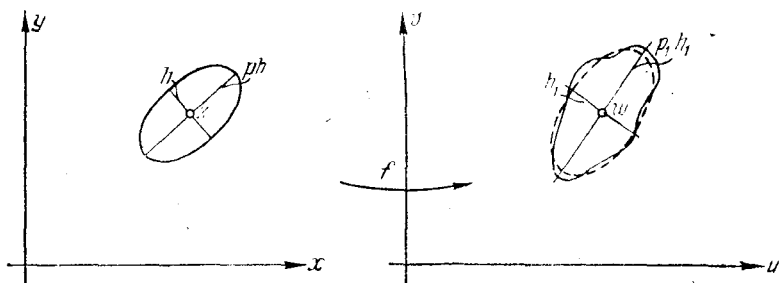


Рис. 126.

следовательно, являются известными функциями точки  $z$ . Из решения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  системы (13) мы составим функцию комплексного переменного  $f(z) = u + iv$  и отображение, ею осуществляемое, будем называть *квазиконформным отображением, связанным с этой системой*. В частности, когда эллипсы (15) и

\*) Изложение ряда результатов линейной теории квазиконформных отображений читатель может найти в книге Л. И. Волковыского [17].

\*\*) См. Б. В. Шаба т, Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных, Матем. сб., 17 (59) (1949), 193—210 или Л. И. Волковыский [17].

(15') представляют собой окружности, т. е.  $\alpha = \gamma = 1$ ,  $\beta = 0$  и  $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ , то, как легко видеть, система (13) переходит (при дополнительном условии сохранения ориентации, ср. п. 27) в систему Коши — Римана, т. е. квазиконформные отображения переходят в конформные \*).

Для решений системы (13) можно найти формулы, обобщающие теорему Коши п. 12 и интегральную формулу Коши п. 14 \*\*). Для доказательства перепишем систему (13) в виде

$$\left. \begin{aligned} L[u, v] &= au_x + bu_y - v_y = 0, \\ M[u, v] &= du_x + cu_y + v_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

и воспользуемся известной из анализа формулой Грина, которая для рассматриваемой системы запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int_C \{u^*v - (bu^* + cv^*)u\} dx + \{(au^* + dv^*)u + v^*v\} dy = \\ = \int_D \{u^*L[u, v] + v^*M[u, v] + u\tilde{L}[u^*, v^*] + v\tilde{M}[u^*, v^*]\} dx dy, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $C$  обозначает границу области  $D$  и

$$\tilde{L}[u, v] = (au + dv)_x + (bu + cv)_y, \quad \tilde{M}[u, v] = v_x - v_y$$

(эта формула имеет место для любой четверки функций  $u, v, u^*, v^*$ , обладающих непрерывными частными производными и выводятся интегрированием по частям так же, как обычная формула Римана — Грина).

В предположении о непрерывности вторых частных производных из системы (13) можно исключить функцию  $v$  так, что она сведется к одному уравнению второго порядка

$$\Delta[u] = (au_x + bu_y)_x + (du_x + cu_y)_y = 0 \quad (18)$$

(мы воспользовались условием равенства смешанных производных  $v_{xy}$  и  $v_{yx}$ ). Рассмотрим также сопряженное к (18) уравнение

$$\Delta^*[X] = (aX_x + dX_y)_x + (bX_x + cX_y)_y = 0. \quad (19)$$

Для каждого его решения  $X(x, y)$  существует, очевидно, функция  $Y(x, y)$ , связанная с  $X$  уравнениями

$$\left. \begin{aligned} L^*[X, Y] &= aX_x + dX_y - Y_y = 0, \\ M^*[X, Y] &= bX_x + cX_y + Y_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

\*) Ср. круговое свойство конформных отображений п. 27.

\*\*) См. Б. В. Ш а б а т, Теорема и формула Коши для квазиконформных отображений линейных классов, ДАН СССР, 49: 3 (1949), 305—308. Для частного случая эти результаты были ранее получены Г. Н. Положим.

Так как эта система отличается от (13) лишь перестановкой  $b$  и  $d$ , то эллипсы, связанные с ней, в плоскости  $z$  совпадают с эллипсами, связанными с системой (13), а в плоскости  $w$  получаются из них отражением относительно оси  $u$  (перемена знака  $\beta_1$ ); при  $b = d$  эти эллипсы совпадают.

Воспользуемся теперь формулой Грина (17), приняв в ней в качестве  $u$  и  $v$  решение системы (13) и положив  $u^* = X_x$ ,  $v^* = X_y$ , где  $X$  и  $Y$  — решение системы (20); мы получим:

$$\int_C v dX + u dY = 0. \quad (21)$$

Далее мы решаем систему (13) относительно  $u_y$  и  $u_x$ :

$$L_1[u, v] = -a_1 v_x - d_1 v_y - u_y = 0,$$

$$M_1[u, v] = -b_1 v_x - c_1 v_y + u_x = 0$$

(здесь  $a_1 = \frac{a}{B}$ , ...,  $d_1 = \frac{d}{B}$ ). Для этой системы имеет место формула (17), в которой всюду  $u$  заменено на  $v$ ,  $v$  на  $u$  и коэффициенты  $a$ , ...,  $d$  на  $-a_1$ , ...,  $-b_1$ . Для каждого решения уравнения

$$\Lambda_1^*[X^1] = -(a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1)_x - (d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1)_y = 0 \quad (19_1)$$

существует функция  $Y^1$ , связанная с ним уравнениями

$$\left. \begin{aligned} L_1^*[X^1, Y^1] &= a_1 X_x^1 + b_1 X_y^1 - Y_y^1 = 0, \\ M_1^*[X^1, Y^1] &= d_1 X_x^1 + c_1 X_y^1 + Y_x^1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20_1)$$

Эллипсы, связанные с этой системой, в плоскости  $z$  совпадают с эллипсами, связанными с системой (13), а в плоскости  $w$  получаются из них отражением относительно биссектрисы первого координатного угла; при  $B = 1$  эти эллипсы совпадают. Вместо формулы (20) мы будем иметь:

$$\int_C u dX^1 - v dY^1 = 0. \quad (21_1)$$

Введем, наконец, комплексные переменные  $Z = X + iY^1$ ,  $Z^* = X^1 + iY$ ; тогда формулы (21) и (21<sub>1</sub>) можно объединить в одной формуле

$$\int_C u dZ^* + iv dZ = 0, \quad (22)$$

которая и выражает обобщение теоремы Коши.

Если, в частности, эллипсы в плоскости  $w$  являются окружностями ( $b = d$ ,  $B = ac - b^2 = 1$ ), то системы (20) и (20<sub>1</sub>)

совпадают. Следовательно, в этом случае можно принять  $Z^* = Z$  и формула (22) упростится:

$$\int_C f(z) dZ = 0.$$

Если, кроме того, и эллипсы в плоскости  $z$  являются окружностями (система Коши — Римана), то можно принять  $Z = z$ , и мы возвращаемся к классической теореме Коши.

Чтобы получить обобщение формулы Коши, введем связанное с системой (13) «расстояние»

$$\rho(z, z_0) = \sqrt{c_0(x - x_0)^2 - (b_0 + d_0)(x - x_0)(y - y_0) + a_0(y - y_0)^2},$$

где  $a_0, \dots, d_0$  — значения коэффициентов в точке  $z_0$ , и будем рассматривать вместо  $X$  решение уравнения (19), имеющее в фиксированной точке  $z_0$  области  $D$  особенность типа  $\ln \rho(z, z_0)$ :

$$\Gamma(z, z_0) = \gamma'(z, z_0) \ln \rho(z, z_0) + \gamma''(z, z_0)$$

( $\gamma'$  и  $\gamma''$  — непрерывные функции), а также «сопряженную» с ним функцию

$$H(z, z_0) = \int_{z_0}^z -(b\Gamma_x + c\Gamma_y) dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y) dy.$$

В силу (19) этот интеграл не изменяется при непрерывной деформации пути интегрирования, если при этом не задевать точки  $z_0$ . При обходе же точки  $z_0$  (один раз против часовой стрелки)  $H$  получает приращение \*)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\rho(z, z_0)=h} -(b\Gamma_x + c\Gamma_y) dx + (a\Gamma_x + d\Gamma_y) dy &= \\ &= A(z_0) \gamma'(z_0, z_0) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a_0 \sin^2 t - (b_0 + d_0) \sin t \cos t + c_0 \cos^2 t} = \\ &= 2\pi \gamma'(z_0, z_0) \sqrt{A(z_0)}, \quad (23) \end{aligned}$$

\*) Чтобы получить (23) достаточно заметить, что при вычислении предела интеграла в последнем можно заменить  $a, \dots, d, \gamma'$  и  $\gamma''$  значениями  $a_0, \dots, d_0, \gamma'(z_0, z_0)$  и  $\gamma''(z_0, z_0)$ ; тогда мы вводим параметр  $t$  по формулам

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{h \cos t}{\sqrt{c_0 \cos^2 t - (b_0 + d_0) \sin t \cos t + a_0 \sin^2 t}}; \\ y - y_0 &= \frac{h \sin t}{\sqrt{c_0 \cos^2 t - (b_0 + d_0) \sin t \cos t + a_0 \sin^2 t}}. \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычисляется элементарно.

которое будет равным  $2\pi$ , если принять  $\gamma'(z_0, z_0) = 1/\sqrt{A(z_0)}$ . Таким образом, многозначная функция  $H(z, z_0)$  имеет в точке  $z_0$  особенность того же типа, что и  $\text{Arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}$ .

Применяя формулу (17), в которой положено  $u^* = \Gamma_x$ ,  $v^* = \Gamma_y$ , а  $u$  и  $v$  — решение (13), к области  $D$  с выброшенным эллипсом  $\rho(z, z_0) \leq h$ , получаем:

$$\int_C v d\Gamma + u dH = \int_{\rho(z, z_0)=h} v d\Gamma + u dH. \quad (24)$$

Так как  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\rho=h} v d\Gamma = 0$  и в силу (23)  $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\rho=h} u dH = 2\pi u(z_0)$ , то из (24) в пределе при  $h \rightarrow 0$  получим:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(z) d_z \Gamma(z, z_0) + u(z) d_z H(z, z_0). \quad (25)$$

Переходя к системе (20<sub>1</sub>), аналогично построим решение уравнения (19<sub>1</sub>) с особенностью типа логарифма:

$$\Gamma^1(z, z_0) = \gamma'_1(z, z_0) \ln \rho(z, z_0) + \gamma''_1(z, z_0)$$

и многозначную функцию

$$H^1(z, z_0) = \int_z - (d_1 \Gamma'_x + c_1 \Gamma'_y) dx + (a_1 \Gamma'_x + b_1 \Gamma'_y) dy,$$

приращение которой при обходе  $z_0$  будет равным  $2\pi$ , если принять  $\gamma'_1(z_0, z_0) = B(z_0)/\sqrt{A(z_0)}$ .

Тогда вместо (25) будем иметь:

$$v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C v(z) d_z H^1(z, z_0) - u(z) d_z \Gamma^1(z, z_0). \quad (25_1)$$

Вводя комплексные функции

$$I(z, z_0) = \Gamma(z, z_0) + iH^1(z, z_0), \quad I^*(z, z_0) = \Gamma^1(z, z_0) + iH(z, z_0),$$

мы объединим 25 и (25<sub>1</sub>) в одной формуле

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(z) d_z I^*(z, z_0) + i v(z) d_z I(z, z_0), \quad (26)$$

которая и обобщает формулу Коши.

Если эллипсы в плоскости  $w$  являются окружностями, то можно принять  $l^* = l$ , и формула (26) упростится:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz l(z, z_0).$$

Наконец, для системы Коши — Римана можно положить  $l = \ln(z - z_0)$ , и мы получим классическую формулу Коши.

В заключение отметим еще один элементарный факт, связанный с системой (13). Если ввести соответствующие системе «приращения»

$$\tilde{\Delta}z = \sqrt{c} \Delta x - \frac{b+d}{2\sqrt{c}} \Delta y + i \sqrt{\frac{A}{c}} \Delta y,$$

$$\tilde{\Delta}w = \sqrt{B} \Delta u - \frac{b-d}{2\sqrt{B}} \Delta v + i \sqrt{\frac{A}{B}} \Delta v,$$

то легко показать, что эта система будет выражать *необходимые и достаточные условия существования «производной»*

$$\tilde{f}'(\tilde{z}) = \lim_{\tilde{\Delta}z \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Delta}w}{\tilde{\Delta}z} = \frac{1}{\sqrt{c}} \left\{ \sqrt{B} u_x - \frac{b-d}{2\sqrt{B}} v_x + i \sqrt{\frac{A}{B}} v_x \right\}, \quad (27)$$

где предел не зависит от способа приближения  $\tilde{\Delta}z$  к 0. Этот факт обобщает теорему п. 5, по которой система Коши — Римана выражает необходимые и достаточные условия существования обычной производной — в частном случае, когда  $a = c = 1$ ,  $b = d = 0$  «производная» (27) совпадает с обычной производной.

3) **Задача Трикоми.** Дифференциальными уравнениями *смешанного типа* называют уравнения с частными производными второго порядка, которые в одной части области своего определения имеют эллиптический тип, а в другой — гиперболический. Изучение таких уравнений представляет весьма большой интерес для аэродинамики больших скоростей, ибо перемене типа уравнения физически соответствует переход скорости движения через скорость звука. Простейшим уравнением смешанного типа является уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (28)$$

где  $\theta(y) = 1$  при  $y > 0$  и  $\theta(y) = -1$  при  $y < 0$  (таким образом, уравнение (28) имеет эллиптический тип в верхней полуплоскости и гиперболический тип в нижней). **Задача Трикоми\*)**

\*) Франческо Трикоми — современный итальянский математик, который впервые поставил и решил такую задачу для уравнения

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

для такого уравнения в области  $D$ , ограниченной кривой  $C$ , лежащей в верхней полуплоскости и опирающейся на отрезок  $(0, 1)$ , и отрезками  $L$  и  $L_1$  характеристик уравнения, которые параллельны биссектрисам координатных углов (рис. 127), ставится следующим образом.

Найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (28) при  $y \neq 0$  непрерывную в замкнутой области  $\bar{D}$ , имеющую частные производные, непрерывные в  $D$  всюду, кроме точек  $z = 0$ ,  $z = 1$ , в которых они могут обращаться в бесконечность порядка, меньшего 1, и принимающую на кривых  $C$  и  $L$  заданные значения:

$$u = \begin{cases} \varphi(\xi) & \text{на } C, \\ \psi(x) & \text{на } L \end{cases} \quad (\varphi(0) = \psi(0)). \quad (29)$$

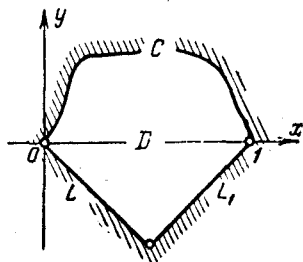


Рис. 127.

Мы приведем простое и изящное решение задачи, данное А. В. Бицадзе в 1950 г. С помощью конформного отображения эллиптической части  $D_1$  области  $D$  задача сводится к частному случаю, когда эта часть представляет собой верхний полукруг  $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ ,  $y > 0$ . Кроме того, можно предполагать, что  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ .

В гиперболической части  $D_2$  области  $D$ , где уравнение (28) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

решение  $u(x, y)$ , как известно, можно подставить в виде

$$u = \Phi(x + y) + \Psi(x - y),$$

где  $\Phi$  и  $\Psi$  — произвольные функции (см. И. Г. Петровский, [1]). На  $L$  мы имеем  $x + y = 0$ , поэтому подставив это выражение для  $u$  во второе из условий (29), найдем:

$$\Phi(0) + \Psi(2x) = \psi(x)$$

и, следовательно, наше выражение примет вид

$$u(x, y) = \Phi(x + y) - \Phi(0) + \psi\left(\frac{x - y}{2}\right). \quad (30)$$

Из условия непрерывности функции  $u(x, y)$  получаем, что на оси  $x$

$$u(x, 0) = \Phi(x) - \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right).$$



В эллиптической части  $D_1$  функция  $u(x, y)$  гармоническая; пусть  $v(x, y)$  — гармоническая в  $D_1$  функция, сопряженная с  $u(x, y)$  и равная нулю в точке  $(0, 0)$ . Как следует из выражения (30), в  $D_2$  имеем:  $\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'(x + y) - \frac{1}{2} \Psi'\left(\frac{x-y}{2}\right)$ , откуда, пользуясь непрерывностью  $\frac{\partial u}{\partial y}$  на оси  $x$ , находим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\Phi'(x) + \frac{1}{2} \Psi'\left(\frac{x}{2}\right).$$

Интегрируя, находим, что на оси  $x$

$$v(x, 0) = -\Phi(x) + \Phi(0) + \psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

и, складывая это с выражением для  $u(x, 0)$ , получаем:

$$u(x, 0) + v(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (31)$$

Положим теперь

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y),$$

где функции  $u_1$  и  $u_2$  решают соответственно краевые задачи

$$u_1 = \begin{cases} \varphi(\xi) & \text{на } C, \\ 0 & \text{на } L; \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} 0 & \text{на } C, \\ \psi(x) & \text{на } L. \end{cases} \quad (32)$$

Для первой из этих функций, в силу соотношения (31) на отрезке  $(0, 1)$  получаем:

$$u_1(x, 0) + v_1(x, 0) = 0,$$

но это означает, что аналитическая функция

$$f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$$

преобразует отрезок  $(0, 1)$  в отрезок прямой  $u_1 + v_1 = 0$  и, следовательно, по принципу симметрии продолжается через отрезок  $(0, 1)$ . При этом в точках нижнего полуокруга будем иметь:

$$f_1(z) = -v_1(x, -y) - iu_1(x, -y), \quad (33)$$

ибо симметрия относительно второй биссектрисы сводится к замене  $u_1$  на  $v_1$ ,  $v_1$  на  $u_1$  и перемене знаков обеих координат. Таким образом, функция  $f_1(z)$  (вместе со своим продолжением) аналитична в круге  $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ , причем в силу условий (32) на верхней полуокружности  $C$  известна ее действительная часть  $\operatorname{Re} f_1(\xi) = \varphi(\xi)$ , а на нижней полуокружности  $C_*$  в силу соотношения (33) известна ее мнимая часть  $\operatorname{Im} f_1(\xi) = -\varphi(\bar{\xi})$ . Поэтому функция  $f_1(z)$  восстанавливается по формуле Келдыша —

Седова (15), п. 54, которая для рассматриваемого случая принимает вид \*)

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\xi(1-\xi)}} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi-z} - i \int_{C^*} \sqrt{\frac{z(1-z)}{\xi(1-\xi)}} \frac{\varphi(\bar{\xi}) d\bar{\xi}}{\bar{\xi}-z} \right\}. \quad (34)$$

Заменим во втором интеграле переменную  $\xi = \bar{\omega}$ , получим:

$$-i \int_{C^*} = i \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\bar{\omega}(1-\bar{\omega})}} \frac{\varphi(\omega) d\bar{\omega}}{\bar{\omega}-z}.$$

Обозначим  $\arg \omega = t$ ; так как на  $C$  имеем  $\omega = e^{it} \cdot \cos t$ , то  $\bar{\omega} = e^{-2it} \omega$ . На  $e^{2it} = 2\cos^2 t - 1 + 2i \sin t \cos t = 2\omega - 1$ , следовательно,  $\bar{\omega} = \omega/(2\omega - 1)$ . Подставляя это в предыдущий интеграл, находим:

$$-i \int_{C^*} = \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\omega(1-\omega)}} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega - z(2\omega - 1)}.$$

Обозначая переменную интегрирования снова через  $\xi$  и объединяя полученный интеграл с первым интегралом (34), находим окончательно:

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \sqrt{\frac{z(1-z)}{\xi(1-\xi)}} \left\{ \frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi+z-2\xi z} \right\} \varphi(\xi) d\xi. \quad (35)$$

Рассмотрим теперь аналитическую функцию

$$f_2(z) = u_2(x, y) + i v_2(x, y).$$

По принципу симметрии она продолжается через полуокружность  $C$  на всю верхнюю полуплоскость, ибо в силу условия (32)  $u_2 = 0$  на  $C$ . Согласно этому принципу в точках  $x$  и  $x/(2x-1)$  действительной оси, симметричных относительно  $C$ , функция  $f_2$  принимает значения, симметричные относительно  $u_2 = 0$ , т. е. отличающиеся знаком  $u_2$ :

$$f_2(x) = -u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + i v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right).$$

Теперь учтем, что в точках отрезка  $(0, 1)$  известна

$$\operatorname{Re}(1-i)f_2(x) = u_2(x, 0) + v_2(x, 0) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right),$$

а в точках лучей  $(-\infty, 0)$  и  $(1, \infty)$  известна

$$\operatorname{Im}(1-i)f_2(x) = v_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) + u_2\left(\frac{x}{2x-1}, 0\right) = 2\psi\left(\frac{x}{4x-2}\right).$$

\*) Мы принимаем  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1$ ; тогда  $g(z) = \sqrt{(z-1)/z}$ .

Поэтому функция  $(1-i)f_2(z)$  восстанавливается по формуле Келдыша—Седова для полуплоскости (см. (6) п. 54). После простых преобразований найдем:

$$(1-i)f_2(z) = \frac{2}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz} \right) \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt. \quad (36)$$

Искомая функция в эллиптической части  $D_1$ , очевидно, равна

$$u(z) = \operatorname{Re}\{f_1(z) + f_2(z)\}, \quad (37)$$

где  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  определяются формулами (35) и (36). В гиперболической части  $D_2$ , как видно из (30), она равна

$$u(x, y) = u(x+y, 0) - \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (38)$$

Можно доказать, что найденное решение единственно.

Более подробно об этой и других задачах для уравнения смешанного типа (28) см. работу А. В. Бицадзе [19].

**57. Задачи гидродинамики и газовой динамики.** 1) Тонкое крыло. В п. 49 мы убедились в том, что задача обтекания произвольного профиля сводится к задаче конформного отображения внешности этого профиля на внешность круга. Однако фактическое построение такого конформного отображения часто бывает затруднительным и поэтому приходится довольствоваться приближенными решениями задачи.

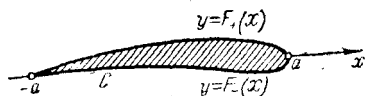


Рис. 128.

В качестве примера такого решения рассмотрим решение Л. И. Седова\*) задачи обтекания тонкого крыла.

Предположим, что контур крыла  $C$  определяется уравнениями  $y = F_{\pm}(x)$ ,  $-a \leq x \leq a$ , и близок к отрезку  $(-a, a)$  (рис. 128). Пусть крыло обтекается поступательным потоком, имеющим на бесконечности скорость  $v_{\infty}$  и наклоненным к оси  $x$  под малым углом атаки  $\alpha$ . Комплексный потенциал потока будем в соответствии с этим искать в виде

$$\omega = v_{\infty} e^{-i\alpha} z + W, \quad (1)$$

где  $W = U + iV$  — неизвестная функция. Мы имеем:

$$\operatorname{Im} \omega = v_{\infty} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + V(x, y),$$

\*) Л. И. Седов, Теория плоских движений идеальной жидкости, М., Оборонгиз, 1939; см. также его монографию [8].

и так как  $C$  совпадает с линией тока, то на нем  $\text{Im } \omega$  должна принимать постоянные значения, пусть равные нулю. Поэтому на  $C$

$$v_{\infty} \{F_{\pm}(x) \cos \alpha - x \sin \alpha\} + V[x, F_{\pm}(x)] = 0.$$

Пользуясь сделанными предположениями о близости  $C$  к отрезку  $(-a, a)$  и малости угла  $\alpha$ , мы заменяем в этом условии  $\cos \alpha$  на 1,  $\sin \alpha$  на  $\alpha$  и сносим условие на отрезок, заменяя, в частности,  $V[x, F_{\pm}(x)]$  на  $V(x, 0)$ ; мы получаем условия на двух берегах отрезка:

$$V(x, 0) = v_{\infty} \{x\alpha - F_{\pm}(x)\}. \quad (2)$$

Так как комплексный потенциал поля может оказаться многозначной функцией, удобнее рассматривать его производную  $\frac{dW}{dz} = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = u + iv$ , которая заведомо однозначна.

Задача, таким образом, свелась к следующей: найти аналитическую вне отрезка  $(-a, a)$  и равную нулю на бесконечности функцию, мнимая часть которой  $v(x, y)$  на верхнем и нижнем берегах этого отрезка принимает заданные значения:

$$v = \frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} v_{\infty} [\alpha - F'_+(x)] = v^+(x), \\ v_{\infty} [\alpha - F'_-(x)] = v^-(x). \end{cases} \quad (3)$$

Эта задача решается методом, аналогичным тому, которым выводится формула Келдыша — Седова п. 54. Положим

$$\frac{dW}{dz} = f_1(z) + f_2(z),$$

где  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  — аналитические во внешности отрезка  $(-a, a)$  и равные нулю на бесконечности функции, мнимые части которых удовлетворяют соответственно краевым условиям

$$v_1^+ = -v_1^- = \frac{v^+ - v^-}{2}, \quad v_2^+ = v_2^- = \frac{v^+ + v^-}{2}. \quad (4)$$

Рассмотрим далее ветвь функции  $g(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}$ , которая на оси  $x$ , при  $z = x > a$  принимает положительные значения (эта ветвь, очевидно, однозначна во внешности рассматриваемого отрезка). На берегах разреза эта функция принимает чисто мнимые значения, отличающиеся знаком:

$$g^+(x) = -g^-(x) = i \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \quad (5)$$

Построим окружность  $L$  с центром в начале координат достаточно большого радиуса  $R$ , и к двусвязной области, ограничен-

ной этой окружностью и кривой  $l$ , охватывающей отрезок, применением интегральную формулу Коши:

$$f_1(z) g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l+L} \frac{f_1(\xi) g(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (6)$$

Так как при  $z \rightarrow \infty$  функция  $f_1(z) \rightarrow 0$ , а  $g(z) \rightarrow 1$ , то интеграл вдоль  $L$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . На противоположных берегах разреза произведение  $vg(z)$  в силу условий (4) и (5) принимает одинаковые значения, следовательно, интегралы от него вдоль этих берегов сокращаются. Поэтому формула (6) в пределе, когда  $R \rightarrow \infty$  и  $l$  стягивается в отрезок, дает:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^a \frac{u_1^+ + u_1^-}{\xi - z} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi. \quad (7)$$

Из этой формулы видно, что на действительной оси при  $|z| > a$  функция  $f_1(z)$  принимает действительные значения. По принципу симметрии отсюда следует, что имеют место следующие условия симметрии:

$$u_1(x, -y) = u_1(x, y), \quad v_1(x, -y) = -v_1(x, y). \quad (8)$$

Применим теперь формулу Коши к тому же контуру  $L + l$  и к функции  $f_1(z)$ :

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L+l} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi;$$

на основании условий (8) и (4) в пределе, когда  $R \rightarrow \infty$  и  $l$  стягивается в отрезок  $(-a, a)$ , мы получим отсюда:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{v^+ - v^-}{\xi - z} d\xi. \quad (9)$$

Совершенно аналогично, применяя формулу Коши к функции  $f_2(z)$ , мы найдем, что на действительной оси при  $|z| > a$  эта функция принимает чисто мнимые значения и, следовательно, для нее имеют место условия симметрии

$$u_2(x, -y) = -u_2(x, y), \quad v_2(x, -y) = v_2(x, y). \quad (10)$$

Исходя из формулы

$$f_2(z) \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L+l} \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} \sqrt{\frac{\xi-a}{\xi+a}} d\xi,$$

мы, как и выше, получим на основании условий (10):

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^a \frac{v^+ + v^-}{\xi - z} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi. \quad (11)$$

Складывая (9) и (11), найдем решение задачи в виде

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{v^+ - v^-}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z+a}{z-a}} \int_{-a}^a \frac{v^+ + v^-}{\xi - z} \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi. \quad (12)$$

Эта формула дает приближенное распределение скоростей в потоке, обтекающем тонкое крыло. Из нее видно, в частности, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma + iN}{2\pi i} \frac{1}{z} + \dots,$$

где

$$\Gamma = \int_{-a}^a (v^+ + v^-) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi, \quad N = - \int_{-a}^a (v^+ - v^-) d\xi$$

соответственно физически означают циркуляцию и поток, вычисленные для любого контура, окружающего крыло (см. п. 46). Заметим, что, как видно из формул (3), здесь  $N = 0$ .

Метод обобщается на случай, когда граничные значения  $\text{Im} \frac{dW}{dz}$  заданы на берегах системы отрезков  $(a_k, b_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , действительной оси.

2) Обтекание тел газовыми потоками. При больших скоростях движения самолетов, сравнимых со скоростью распространения звука, существенное влияние начинает оказывать сжимаемость воздуха. Поэтому методы классической гидродинамики, в которой среду считают несжимаемой, становятся неприменимыми и мы вступаем в область газовой динамики.

Основные уравнения гидродинамики для этого случая существенно осложняются. Уравнение неразрывности  $\text{div } \rho \mathbf{V} = 0$  ( $\rho$  — плотность среды), которое в случае несжимаемой среды сводилось к условию  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  (см. п. 46), теперь записывается в полном виде

$$\text{div } \rho \mathbf{V} = \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V_y)}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

(мы ограничиваемся плоско-параллельными установившимися течениями). Из (13) следует существование функции тока

$v = v(x, y)$  такой, что

$$\rho V_x = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \rho V_y = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (14)$$

где  $\rho_0$  — некоторая постоянная.

Условие отсутствия вихрей  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ , которое мы дополнительно налагаем, запишется так же, как в п. 46 и приведет к существованию *потенциальной функции*  $u = u(x, y)$  такой, что

$$V_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), мы приходим к системе *уравнений газовой динамики*:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (16)$$

которая в случае несжимаемой среды  $\rho = \rho_0$  переходит в систему Коши — Римана.

Система (16) неполна, ибо неизвестно, как меняется величина  $\rho$ . К этой системе следует добавить *уравнения движения*, которые в дополнительных предположениях о том, что плотность  $\rho$  зависит лишь от давления  $p$  (*условие изэнтропичности*) и что внешние силы отсутствуют, имеют вид

$$\text{grad } \frac{1}{2} V^2 = -\frac{a^2}{\rho} \text{grad } \rho, \quad (17)$$

где  $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  — скорость распространения звука в среде \*). Уравнение (17) допускает интеграл (так называемый *интеграл Бернулли*)

$$\frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

Предположим наконец, что поток *адиабатный*, т. е. что

$$p = k\rho^\kappa, \quad (18)$$

где  $k$  и  $\kappa = c_p/c_v$  (отношение теплоемкостей) — постоянные, характеризующие газ. В этом предположении  $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k\kappa}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} = \frac{1}{\kappa-1} a^2$ , причем постоянную в правой части интеграла Бернулли можно записать в виде  $\frac{1}{2} V_{\text{max}}^2$ , где  $V_{\text{max}}$  — максимально

\*) Относительно вывода уравнений (17) и других соотношений см., например, Н. Е. Кочин и И. А. Кибель [6], т. II, гл. 1.

возможная скорость, соответствующая значению  $a = 0$ . Интеграл Бернулли принимает, следовательно, вид

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{\kappa-1} a^2 = \frac{1}{2} V_{\max}^2. \quad (19)$$

Подставляя  $a^2 = k\rho^{\kappa-1}$ , находим из (19)  $\rho^{\kappa-1} = \text{const} \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)$

или

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}\right)^{1/(\kappa-1)}, \quad (20)$$

где постоянная  $\rho_0$  — значение плотности при  $V = 0$ .

Таким образом,  $\rho$  зависит от  $V = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ , т. е. система (16) нелинейна, этим и объясняется сложность задач газовой динамики.

Систему (16) можно свести к одному уравнению второго порядка для функции  $u$ . Чтобы сделать это, перепишем уравнение неразрывности в виде

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = \rho \text{div} \mathbf{V} + (\mathbf{V}, \text{grad} \rho) = 0. \quad (13)$$

Заменим теперь  $\mathbf{V} = \text{grad} u$  и подставим  $\text{grad} \rho$  из уравнения (17); получим:

$$\Delta u - \frac{1}{2a^2} (\mathbf{V}, \text{grad} V^2) = 0,$$

где  $\Delta = \text{div grad}$  — оператор Лапласа. Подставляя  $V^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$  и раскрывая скалярное произведение, мы и получим искомое уравнение

$$\left(1 - \frac{u_x^2}{a^2}\right) u_{xx} - \frac{2u_x u_y}{a^2} u_{xy} + \left(1 - \frac{u_y^2}{a^2}\right) u_{yy} = 0 \quad (21)$$

(для простоты письма индексами внизу мы обозначаем частные производные). Это уравнение — квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка. Если считать, что скорость звука  $a = \infty$ , оно переходит в уравнение Лапласа; при дозвуковых скоростях ( $V < a$ ) оно эллиптического типа, при сверхзвуковых скоростях ( $V > a$ ) — гиперболического типа.

Мы приведем два приближенных метода решения задачи обтекания профилей газовыми потоками.

3) Метод Янсена — Рэлея, первый из этих методов, был создан в годы первой мировой войны и относится к случаю, когда скорость течения невелика по сравнению со скоростью звука. Перепишем уравнение (21) в виде

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} (u_{xx} u_x^2 + 2u_{xy} u_x u_y + u_{yy} u_y^2) \quad (22)$$



и примем скорость потока, набегающего на профиль,  $V_\infty = 1$ . Тогда интеграл Бернулли (19) даст один раз  $a_\infty^2 = \frac{\kappa-1}{2}(V_{\max}^2 - 1)$ , а другой:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{M_\infty^2}{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2 (u_x^2 + u_y^2 - 1)} = M_\infty^2 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^4 (u_x^2 + u_y^2 - 1) + \dots,$$

где  $M_\infty = \frac{1}{a_\infty}$ . Если подставить это разложение в уравнение (22), то последнее будет содержать  $M_\infty^2$  в качестве параметра. Имея это в виду, будем искать решение уравнения (22) в виде ряда

$$u = u^0 + M_\infty^2 u^1 + M_\infty^4 u^2 + \dots,$$

где  $u^h = u^h(x, y)$  — неизвестные функции.

Подставим это в (22) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $M_\infty^2$ ; получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_{xx}^0 + u_{yy}^0 &= 0, \\ u_{xx}^1 + u_{yy}^1 &= u_{xx}^0 (u_x^0)^2 + 2u_{xy}^0 u_x^0 u_y^0 + u_{yy}^0 (u_y^0)^2, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Первое из них является уравнением Лапласа, а остальные уравнениями Пуассона  $\Delta u^h = f_h(x, y)$ , правые части которых определяются при решении предыдущих уравнений (их сложность возрастает с увеличением номера). Краевое условие имеет вид

$$\frac{\partial u^0}{\partial n} = \frac{\partial u^1}{\partial n} = \dots = 0 \text{ на профиле}$$

и выражает условие обтекания профиля.

Функция  $u^0(x, y)$  представляет собой потенциал скоростей при обтекании профиля потоком несжимаемой жидкости. Мы будем считать ее известной и ограничимся тем, что укажем, как найти первый поправочный член  $u^1(x, y)$ .

Для этого представим гармоническую функцию  $u^0$  как действительную часть аналитической функции  $f(z)$ :  $u^0 = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ , откуда находим  $u_x^0 = \frac{1}{2}(f' + \bar{f}')$ ,  $u_y^0 = \frac{1}{2}(f' - \bar{f}')$ , ... Функцию  $u^1$  мы представим в виде  $u^1 = F(z, \bar{z})$  и, пользуясь символами

комплексного дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  (см. п. 56), найдем

$$u_x^1 = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \quad u_y^1 = i \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right), \dots$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (23), мы представим это уравнение в комплексной форме:

$$8 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = f'' \bar{f}'^2 + \bar{f}'' f'^2. \quad (24)$$

Общее решение уравнения (24) легко написать на том основании, что для аналитической функции  $f$  имеем  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$  (см. п. 56), а для сопряженной к аналитической  $\frac{\partial}{\partial z} \bar{f} = 0$ ; поэтому при интегрировании по  $z$  можно считать постоянной  $\bar{f}$ , а при интегрировании по  $\bar{z}$  — функцию  $f$ . На этом основании мы интегрируем (24) сначала по  $z$ , а затем по  $\bar{z}$ , и находим:

$$8u^1 = 8F = \bar{f}'g + f'\bar{g} + h + \bar{h}, \quad (25)$$

где  $g = \int f'^2 dz$ ,  $\bar{g} = \int \bar{f}'^2 d\bar{z}$  — известные функции, а  $h$  и  $\bar{h}$  — произвольные аналитические функции соответственно аргументов  $z$  и  $\bar{z}$ , причем  $\bar{h}(\bar{z}) = \overline{h(z)}$ .

Таким образом, функция  $h + \bar{h}$  — гармоническая; ее отыскание сводится к решению задачи Неймана (см. п. 44), ибо граничные значения ее нормальной производной определяются из краевого условия  $\frac{\partial u^1}{\partial n} = 0$ .

Метод Янсена — Рэлея в 40-х годах применялся и усовершенствовался многими авторами, которые, широко используя методы теории функций комплексного переменного, решили до конца задачу об обтекании газовыми потоками ряда важных профилей.

4) Метод С. А. Чаплыгина — второй приближенный метод решения задачи обтекания профилей дозвуковыми газовыми потоками, которой мы хотим описать — основан на идее, сформулированной в классической работе С. А. Чаплыгина «О газовых струях» (1904 г.), и состоит в замене адиабаты  $p = k\rho^\kappa$  ( $\kappa > 1$ ) гиперболой  $p = a + \frac{b}{\rho}$ , причем постоянные  $a$  и  $b$  подбираются так, чтобы гипербола касалась адиабаты в какой-либо точке. Этот прием соответствует замене истинного газа фиктивным, для которого  $\kappa = -1$ , что позволяет значительно упростить математический аппарат.

Для вывода нужных уравнений введем так называемую плоскость годографа ( $V_x, V_y$ ), а в ней — полярные координаты

$V$ ,  $\theta$  (модуль скорости и угол ее наклона к оси  $V_x$ ). Тогда будем иметь  $V_x = V \cos \theta$ ,  $V_y = V \sin \theta$  и на основании системы (16) получим

$$du + i \frac{\rho_0}{\rho} dv = (V_x dx + V_y dy) + i(-V_y dx + V_x dy) = V e^{-i\theta} dz,$$

где, как всегда  $dz = dx + i dy$ . Заменяя  $du = \frac{\partial u}{\partial V} dV + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta$  и аналогично  $dv$ , найдем отсюда:

$$\frac{\partial z}{\partial V} = \frac{e^{i\theta}}{V} \left( \frac{\partial u}{\partial V} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial v}{\partial V} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{e^{i\theta}}{V} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right).$$

Приравняем теперь смешанные производные  $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial V}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial V \partial \theta}$ ; после сокращений получим:

$$i \left( \frac{\partial u}{\partial V} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial v}{\partial V} \right) = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + i \frac{d}{dV} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Отделение действительных и мнимых частей приводит к так называемым *уравнениям годографа*

$$\frac{\partial u}{\partial V} = V \frac{d}{dV} \left( \frac{\rho_0}{\rho V} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\rho_0 V}{\rho} \frac{\partial v}{\partial V}, \quad (26)$$

которые линейны относительно  $V_1$  и  $\theta$  (полярных координат вектора скорости). Уравнения (26) были получены С. А. Чаплыгиным, который, пользуясь их линейностью, решил ряд важных задач теории газовых струй \*).

При  $\kappa = -1$  интеграл Бернулли (20) принимает вид  $\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$  и, подставляя это в уравнения годографа (26), найдем:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}} \frac{\partial v}{\partial V}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}} \frac{\partial u}{\partial V}.$$

Введем функцию от модуля скорости

$$W(V) = \int \frac{dV}{V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{V_{\max} - \sqrt{V_{\max}^2 - V^2}}{V_{\max}^2 + \sqrt{V_{\max}^2 - V^2}}; \quad (27)$$

\*) К сожалению, переход к плоскости годографа, дающий выигрыш в линейности уравнений, дает проигрыш в краевых условиях — эти условия в плоскости годографа имеют, вообще говоря, сложный вид. Поэтому метод годографа не является универсальным.

так как  $\frac{\partial v}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial V} \cdot \frac{1}{W'} = \frac{\partial v}{\partial V} V \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_{\max}^2}}$  и аналогично  $\frac{\partial u}{\partial W}$ , то последние уравнения принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial W}, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial W},$$

т. е. совпадают с уравнениями Коши — Римана.

Таким образом,  $u + iv$  в сделанных предположениях является аналитической функцией от  $W - i\theta$ , и любая такая функция определяет некоторый газовый поток.

Это обстоятельство дает возможность эффективно строить весьма широкие классы газовых потоков и, в частности, газовые потоки, обтекающие некоторые профили.

Однако задача определения газового потока, обтекающего заданный профиль, в терминах переменных годографа  $W$  и  $\theta$  представляет собой очень трудную нелинейную краевую задачу (см. предыдущую сноску). Поэтому для практических расчетов в сороковых годах были созданы (С. А. Христиановичем, Т. Карманом и Цянь Сюэ-сэнем) приближенные методы. В их основе лежит следующая идея — строится поток, обтекающий профиль, «близкий» к заданному, и даются правила пересчета потока, обтекающего некоторый профиль, на поток, обтекающий близкий профиль \*).

**58. Теория кумулятивно-го заряда.** За последние годы методы теории функций комплексного переменного нашли новое и неожиданное применение в теории весьма интересного явления — так называемой кумуляции.

Проведем следующий опыт. Поместим над стальной плитой толщиной в 20 см цилиндрические заряды одинаковой высоты (15 см) и диаметра (4 см). Заряды  $a$ ) и  $b$ ) — сплошные, остальные имеют коническую выемку со стороны, обращенной к плите, причем в зарядах  $d$ ) и  $e$ ) в выемку вставлены стальные конусы с толщиной стали в 1,5 мм. Заряды  $a$ ),  $b$ ) и  $d$ ) стоят на плите, а остальные приподняты на высоту  $1\frac{1}{2}$  диаметра заряда; инициирование зарядов производится в месте  $A$  (рис. 129).

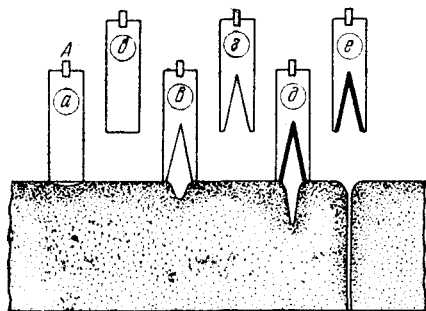


Рис. 129.

\*) См. С. А. Христианович, Обтекание тел газами при больших дозвуковых скоростях, Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940, а также [6], ч. II, стр. 122—139.

На рис. 129 изображено действие этих зарядов. Обращает на себя внимание парадоксальное увеличение пробивного действия в случае е), когда коническая выемка покрыта стальной оболочкой и заряд удален от пробиваемого тела.

Эффект увеличения бронебойного действия при наличии выемки (случай в)) был открыт еще во второй половине прошлого века и получил название *кумулятивного эффекта*. Однако его использование ограничивалось некоторыми техническими задачами в горном деле. Значительное повышение бронебойного действия при наличии металлической облицовки было обнаружено позже, а к 1914 г. относится первый патент применения этого эффекта в бронебойном снаряде. Широкое применение кумулятивный эффект нашел только в войне 1941—1945 гг. К этому же времени относится и создание теории явления кумуляции, которая за последнее десятилетие получила большое развитие во многих странах.

1) Физические предпосылки теории. Прежде чем сформулировать основные предпосылки теории, отметим несколько простых экспериментальных фактов, относящихся к взрыву и его метательной способности.

В описанных выше опытах имеются в виду заряды из так называемых *бризантных* (дробящих) взрывчатых веществ (тротил, гексоген, тэн и т. д.), которые характеризуются следующими свойствами. Если в малой зоне вещества создается достаточно высокое давление (*иницирование*), то от этой зоны начинает распространяться волна взрывчатого превращения этого вещества — *детонационная волна*. Перед фронтом такой волны имеется покой, а за фронтом — продукты разложения с давлением порядка 100 000—200 000 ат; скорость распространения волны имеет порядок 5—10 км/сек. В теоретических исследованиях толщиной фронта детонационной волны обычно пренебрегают — опыты показывают, что на практике толщина этого фронта действительно мала по сравнению с другими характерными размерами. Отметим, что полная теория детонации создана также сравнительно недавно и в настоящее время она входит в раздел газовой динамики, посвященный движениям с разрывами (см. [6], ч. II, стр. 258—266).

Приведем теперь краткое изложение основ теории первого приближения кумулятивного заряда типа е) с металлической оболочкой. В качестве предпосылок этой теории принимаем следующие гипотезы:

1°. Детонация происходит мгновенно, а действие взрывчатого вещества на оболочку сводится к импульсу, направленному перпендикулярно к поверхности конуса.

2°. Материя оболочки, а также пробиваемая сталь, считается идеальной жидкостью.

Обе эти гипотезы легко обосновать, хотя на первый взгляд представление бронебойной стали в виде идеальной жидкости и кажется совершенно неправомерным. Дело однако в том, что возникающие при кумулятивном взрыве давления имеют порядок 100 000 ат, а при таких давлениях прочностные и пластические силы составляют сотые доли от сил инерционных.

В принятых предположениях качественную картину явления можно представить следующим образом. В начальный момент все элементы жидкой конической оболочки приобретают скорость (порядка 2 км/сек) в направлении оси конуса, происходит обжатие конуса с утолщением его стенок. При подходе элемента к оси конуса часть этого элемента выжимается и выплескивается вперед подобно тому, как выплескивается морская волна при затекании в клинообразную бухту. В результате этого из конуса выжимается струя — «проволока» (рис. 130). Расчет показывает, что скорость такой проволоки тем больше, чем острее конус. Обычно наблюдаемые скорости имеют порядок от 2 до 10 км/сек; в отдельных экспериментах достигнута скорость до 90 км/сек.

Проволока при встрече с броней производит на нее давление порядка 1 000 000 ат, что и объясняет применимость схемы идеальной жидкости для построения теории пробивания. Качественная картина пробивания отличается от картины формирования струи лишь направлением изменения времени (заменой  $t$  на  $-t$ ). Характерным в этом процессе является то, что по мере его развития длина струи уменьшается, на каждый пробитый участок расходуется часть струи.

2) Гидродинамическая схема. Рассмотрим задачу о соударении двух идущих навстречу друг другу струй с общей осью симметрии, причем то, что мы будем говорить сначала, относится как к плоскому случаю, так и к случаю с осевой симметрией. Эта задача сводится к построению установившегося течения идеальной жидкости в среде с постоянным давлением, удовлетворяющего следующим условиям. Вдоль оси симметрии, которую мы принимаем за ось  $x$ , слева направо течет такой поток жидкости плотностью  $\rho_1$ , что при  $x \rightarrow -\infty$  диаметр потока приближается к  $2r_1$ , а скорость — к  $V_1$ ; справа налево вдоль той же оси течет поток жидкости плотностью  $\rho_2$ , диаметр которого стремится к  $2r_2$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Течение имеет свободные поверхности  $L_1$  и  $L_2$  и поверхность  $\gamma$  раздела двух жидкостей; эта поверхность симметрична относительно оси  $x$ , причем в точке ее

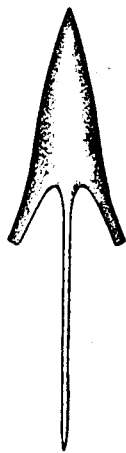


Рис. 130.

пересечения с осью, которую мы принимаем за точку  $x = 0$ , скорости обоих потоков равны нулю (рис. 131).

Так как течение установившееся, то для давления  $p$  по формуле Бернулли — Эйлера (1) п. 47 имеем соотношение

$$p = A - \frac{\rho}{2} V^2, \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная, равная давлению, соответствующему  $V = 0$ , т. е. в точке  $x = 0$ . Из условия постоянства давления во внешней среде на основании этого соотношения получаем, что вдоль свободной поверхности  $L_1$

$$V = \text{const} = V_1.$$

Вдоль поверхности раздела  $\gamma$  скорости  $V^+$  и  $V^-$  потоков жидкостей с плотностями соответственно  $\rho_1$  и  $\rho_2$  должны быть связаны соотношением

$$\rho_1 V_+^2 = \rho_2 V_-^2. \quad (2)$$

Удаляясь вдоль  $\gamma$  в  $+\infty$  мы видим, что  $V_+ \rightarrow V_1$ ; на основании (2) мы получаем, что  $V_- \rightarrow \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1$  при  $x \rightarrow +\infty$  вдоль  $\gamma$ . Отсюда аналогично предыдущему заключаем, что вдоль свободной поверхности  $L_2$

$$V = \text{const} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1.$$

Этим самым определяется предел при  $x \rightarrow +\infty$  скорости потока, идущего вдоль оси  $x$  справа налево:

$$V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1. \quad (3)$$

*Плоский случай.* Остановимся подробнее на случае плоскопараллельного течения и обозначим соответственно через

$$w = f_1(z) = u_1 + iv_1, \quad w = f_2(z) = u_2 + iv_2 \quad (4)$$

комплексные потенциалы встречных потоков. Пользуясь симметрией этих потоков относительно оси  $x$ , рассмотрим верхнюю их часть, где  $y > 0$ ; тогда функции (4) будут реализовать конформные отображения областей, занятых потоками, на полосы шириной  $q_1$  и  $q_2$ , где  $q_1 = V_1 r_1$  и  $q_2 = V_2 r_2$  — расходы в каждом из потоков. Отображения (4) определяются с точностью до постоянных слагаемых и эти постоянные, очевидно, можно выбрать так, чтобы полосами в плоскости  $w$  служили полосы

$$0 < v < q_1 \quad \text{и} \quad -q_2 < v < 0$$

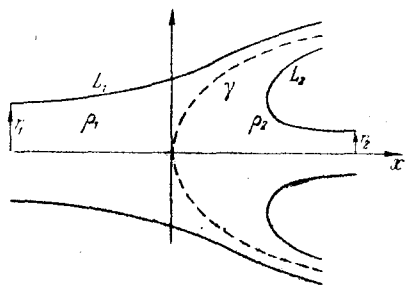


Рис. 131.

и чтобы точка разветвления потоков  $z = 0$  при обоих отображениях переходила в точку  $\omega = 0$ .

Для решения задачи требуется найти линии  $L_1$ ,  $L_2$  и  $\gamma$  и соответствующие отображения (4) так, чтобы вдоль линий  $L_1$  и

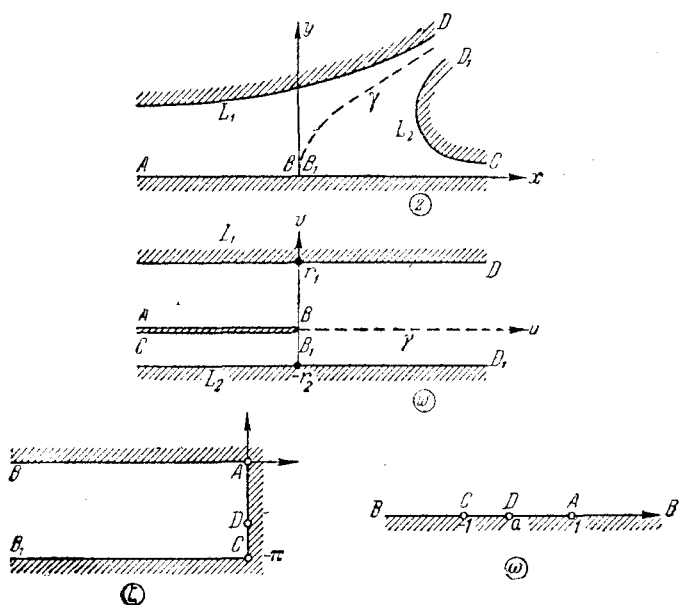


Рис. 132.

$L_2$ , переходящих в прямые  $v = q_1$  и  $v = -q_2$ , было соответственно

$$|f'_1(z)| = V_1 \quad \text{и} \quad |f'_2(z)| = V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1, \quad (5)$$

а вдоль линии  $\gamma$ , переходящей в положительную полуось  $u$ ,

$$|f'_2(z)| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} |f'_1(z)| \quad (6)$$

(рис. 132). Заметим еще, что при рассматриваемых отображениях отрицательная и положительная полуоси  $x$  переходят соответственно в верхний и нижний берега отрицательной полуоси, так что

$$\begin{aligned} \arg f'_1(z) &= 0 & \text{при } x < 0, \\ \arg f'_2(z) &= -\pi & \text{при } x > 0. \end{aligned} \quad (7)$$



Для упрощения постановки задачи рассмотрим функции

$$\xi = \ln f'_k(z) = \ln f'_k[z_k(w)] = F_k(w) \quad (k = 1, 2), \quad (8)$$

где  $z = z_k(w)$  — функции, обратные (4), в зависимости от переменной  $w$ . Эти функции должны удовлетворять следующим граничным условиям: соответственно вдоль прямых  $v = q_1$  и  $v = -q_2$

$$\operatorname{Re} F_1(w) = \ln V_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} F_2(w) = \ln V_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (5')$$

вдоль положительной полуоси  $u$

$$\operatorname{Re} F_2(w_2) = \operatorname{Re} F_1(w_1) + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \operatorname{Im} F_2(w_2) = \operatorname{Im} F_1(w_1), \quad (6')$$

где  $w_k = f_k(z)$ , а на верхнем и нижнем берегу отрицательной полуоси  $u$

$$\operatorname{Im} F_1(w) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} F_2(w) = -\pi. \quad (7')$$

Из (6) следует, что  $w_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} w_1$ , и тогда из (6') можно заключить, что функция  $F_2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} w\right) - \frac{1}{2} \log \frac{\rho_1}{\rho_2}$  является аналитическим продолжением  $F_1(w)$  через положительную полуось  $u$ . Таким образом, задача свелась к отысканию функции  $F(w) = F_1(w)$ , аналитической в полосе  $-q_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} < v < q_1$  с разрезом вдоль отрицательной полуоси  $u$ , которая на границах полосы удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} F = \ln V_1,$$

а на верхнем и нижнем берегах разреза соответственно — условиям

$$\operatorname{Im} F(w) = 0, \quad \operatorname{Im} F(\psi) = -\pi.$$

Далее, без ограничения общности можно принять  $V_1 = 1$ , тогда будем иметь  $q_1 = r_1$  и, в силу (5),  $q_2 \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = r_2$ . Так как, кроме того, согласно механическому смыслу задачи величина  $\operatorname{Re} F(w)$  ограничена сверху, то функция  $\xi = F(w)$  должна реализовать конформное отображение полосы  $-r_2 < v < r_1$  с разрезом вдоль отрицательной полуоси  $u$  на полуплоску с соответствием граничных точек, указанным на рис. 132. Эта функция находится элементарным образом. В самом деле, отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} \omega > 0$  на полосу с разрезом с соответствием точек, указанным на рис. 132, мы находим по формуле Шварца —

Кристоффеля в точности так же, как и в примере 2 п. 39\*):

$$\omega = \frac{r_1}{\pi} \ln(\omega - 1) + \frac{r_2}{\pi} \ln(\omega + 1) - \frac{r_1 + r_2}{\pi} \ln(\omega - a),$$

где  $a = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$ . Полуполоса отображается на эту полуплоскость с нужным соответствием точек по формуле  $\omega = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\zeta\right) = \operatorname{ch} \zeta$ , следовательно, функция, обратная функции  $\zeta = F(\omega)$ , имеет вид

$$\omega = \frac{r_1}{\pi} \ln(\operatorname{ch} \zeta - 1) + \frac{r_2}{\pi} \ln(\operatorname{ch} \zeta + 1) - \frac{r_1 + r_2}{\pi} \ln\left(\operatorname{ch} \zeta - \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right). \quad (9)$$

Зная функцию  $F(\omega)$ , по формуле (8) находим  $f'(z) = \frac{d\omega}{dz} = e^{F(\omega)}$ , откуда

$$z = \int_0^{\omega} e^{-F(\omega)} d\omega \quad (10)$$

(мы опускаем индекс 1 в обозначениях функций  $f$  и  $F$ ).

Пользуясь этой формулой, можно определить форму струй, а также распределение скоростей в потоке.

*Случай осевой симметрии.* В этом случае решение задачи о соударении струй в столь законченной форме, как в плоском случае получить не удастся. Если рассматривать рис. 131 как осевое сечение потока и через  $x$  обозначить координату вдоль оси, а через  $y$  — расстояние до оси, то вместо системы Коши — Римана мы получим систему

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = y \frac{\partial u}{\partial x} \quad (11)$$

(ср. уравнения (12) п. 56). Изучение свойств решений этой системы относится к общей теории квазиконформных отображений (см. п. 56), развитой еще недостаточно. Поэтому приходится ограничиваться общими качественными соображениями этой теории и на их основе получать факты, на которых можно построить теорию первого приближения.

Приведем несколько таких соображений и фактов.

1°. При  $y \rightarrow +\infty$  линии  $L_1$  и  $L_2$  имеют кривизну разных знаков и асимптотически приближаются к некоторой прямой  $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ . Таким образом, существует асимптотический конус, к которому приближаются свободные поверхности струйных потоков, ограничивающие так называемую «пелену» (рис. 133).

\*) В примере п. 39 соответствие точек иное, чем здесь.

2°. Ширина  $\delta$  полосы, заключенной между линиями  $L_1$  и  $L_2$ , стремится к 0 при  $y \rightarrow +\infty$ , причем

$$2\pi y\delta = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \eta, \quad (12)$$

где  $\eta$  — малая высшего порядка относительно  $\delta$ . Чтобы выяснить физический смысл этого соотношения заметим, что его левая часть выражает площадь сечения пелены, а  $\pi r_1^2$  и  $\pi r_2^2$  — пло-

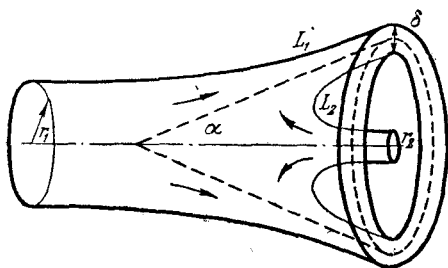


Рис. 133.

щади сечения струй при  $x \approx \mp\infty$  (см. рис. 133). Вдали от места встречи струй, т. е. при больших  $|x|$  скорости во всех точках сечений каждой из струй примерно одинаковы (равны  $V_1$  для первой струи и  $V_2$  для второй). Поэтому условие несжимаемости жидкости, которое выражается условием постоянства расхода, для каждой из струй

запишется в виде  $\pi r_k^2 \approx 2\pi y\delta_k$ , где  $\delta_k$  — ширина полосы, заключенной между  $L_k$  и  $\gamma$  ( $k = 1, 2$ ;  $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ ), складывая эти два соотношения, мы и приходим к (12).

3°. Из теоремы о постоянстве количества движения можно получить важную для дальнейшего связь между радиусами струйных потоков, их плотностями и углом  $\alpha$ . Рассмотрим два элемента струй вблизи оси  $x$  при  $x \approx \pm\infty$ , представляющие собою цилиндры высотой 1; их суммарное количество движения будет направлено по оси  $x$  и равно

$$I_1 = \pi \rho_1 r_1^2 V_1 - \pi \rho_2 r_2^2 V_2.$$

После соударения и по прошествии достаточно большого времени эти элементы будут находиться вблизи асимптотического конуса и проекция их суммарного количества движения на ось  $x$  будет равна

$$I_2 = (\pi \rho_1 r_1^2 V_1 + \pi \rho_2 r_2^2 V_2) \cos \alpha.$$

По теореме о постоянстве количества движения имеем  $I_1 = I_2$ , откуда, полагая

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \lambda, \quad \frac{r_2}{r_1} = k \quad (13)$$

и используя соотношение (3), найдем:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \lambda k^2}{1 + \lambda k^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (14)$$

Приведенных фактов достаточно для построения расчетных формул приближенной теории кумуляции.

3) Теория пробивания. Рассмотрим уже разобранный схему соударения двух жидких струй в системе координат, относительно которой левая (толстая) струя неподвижна. В этой системе координат скорость правой, подвижной, струи будет равна

$$w = V_1 + V_2 = (1 + \lambda) V_2.$$

Скорость места соударения струй  $V_1$ , которая в теории кумуляции будет являться *скоростью проникания* (мы обозначим ее через  $\omega$ ), равна, следовательно,

$$\omega = \lambda V_2 = \frac{\lambda}{1 + \lambda} w. \quad (15)$$

Таким образом, *скорость проникания кумулятивной струи всегда меньше скорости самой струи*. В частности, если струя и броня имеют одинаковую плотность ( $\lambda = 1$ ), то скорость проникания вдвое меньше скорости струи.

Из формулы (15) вытекает также следующий важный факт: если некоторое фиксированное сечение струи передвинется на расстояние  $H$ , то точка проникания струи передвинется на расстояние

$$h = H \frac{\omega}{w} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} H,$$

а струя при этом укоротится на величину

$$H - h = H \left( 1 - \frac{\omega}{w} \right) = \frac{1}{1 + \lambda} H.$$

Таким образом, *отношение длины израсходованной части струи  $h_2 = H - h$  к длине пробитого участка  $h$  равно*

$$\frac{h_2}{h} = \frac{H - h}{h} = \frac{1}{\lambda},$$

откуда

$$h = \lambda h_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} h_2. \quad (16)$$

В частности, *если плотность струи и брони одинакова, то  $h = h_2$ , т. е. глубина пробития равна длине, израсходованной на это пробитие струи*.

Формула (16) хорошо увязывается с предположением о том, что кумулятивная струя имеет конечную длину. Пусть цилиндрический жидкий стержень, диаметр которого мал в сравнении с его длиной, ударяется соосно в другой цилиндрический жидкий стержень. В период, близкий к моменту начала соударения, мы имеем резко выраженный неустойчивый процесс. Однако,

опираясь на общие принципы, о которых говорилось выше, можно показать, что явления, происходящие в голове струи, заметно влияют лишь на расстоянии 2—3 диаметров струи. Когда реальный процесс приближается к рассмотренному выше установившемуся, на эти явления израсходуется лишь небольшая часть струи (в несколько диаметров), которой можно пренебречь. Поэтому длину части струи  $h_2$ , израсходованной на пробитие, можно считать просто равной длине струи, и мы получим следующую приближенную формулу для *глубины проникания кумулятивной струи*:

$$h = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} a, \quad (17)$$

где  $a$  — длина струи,  $\rho_2$  — ее плотность и  $\rho_1$  — плотность брони.

4) Теория формирования кумулятивной струи. Рассмотренная выше схема соударения двух струй при  $\rho_1 = \rho_2$  может быть также положена в основу расчета параметров кумулятивной струи. Для этой цели введем новую, подвижную систему координат, которая движется вдоль оси  $x$  справа налево со скоростью  $V/\cos \alpha$ . В этой системе коническая пелена движется по нормали к своей поверхности со скоростью  $W = V \operatorname{tg} \alpha$ , скорость кумулятивной струи оказывается равной  $w = V + \frac{V}{\cos \alpha}$ . Подставляя  $V = W \operatorname{ctg} \alpha$ , мы получаем выражение, формулу для *скорости кумулятивной струи* в зависимости от угла  $\alpha$  и «скорости обжатия» конуса  $W$ :

$$w = W \left( 1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (18)$$

Легко получить также выражение для радиуса струи в зависимости от угла  $\alpha$  и толщины оболочки в одном из ее сечений \*). Примем толщину оболочки, например, при  $y = 1$  равной  $\delta$ . Тогда согласно (12) будем иметь приближенно:

$$2\delta = r_1^2 + r_2^2,$$

а согласно (14)

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

откуда для *радиуса кумулятивной струи* получим выражение

$$r_2 = \sqrt{\delta(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2\delta} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (19)$$

\*) Зная толщину одного сечения оболочки, можно определить всю оболочку, ибо геометрия оболочки определяется формой пелены, создаваемой двумя струями.

Как и в теории пробивания от рассмотрения идеальной схемы перейдем к расчету (в первом приближении) реального кумулятивного заряда. Рассмотрим случай, когда оболочка заряда представляет собой конус переменной толщины, определяемой по формуле (12), и когда заряд таков, что все элементы оболочки мгновенно получают скорость  $W$ , постоянную по величине и направленную нормально к асимптотическому конусу.

Если толщина конуса мала в сравнении с его высотой, то начальной неустановившейся фазой процесса можно пренебречь и, следовательно, считать, что формирование струи происходит по схеме, изображенной на рис. 130: обжимающийся конус выдавливает из себя проволоку, радиус которой определяется по формуле (19) и которая движется со скоростью, определяемой по формуле (18).

Согласно сказанному выше в рассматриваемом случае длина струи и глубина пробития равны длине образующей конуса.

В заключение отметим, что все приведенные факты и выводы теории первого приближения полностью подтвердились на опыте в достаточно широких пределах диаметров зарядов, форм и толщин оболочек, для материалов различных плотностей и прочностных свойств. Однако накопилось и достаточное количество фактов, не укладывающихся в изложенную теорию и требующих для своего даже косвенного объяснения существенных дополнений к этой теории. Некоторые такие факты и связанные с ними постановки задач читатель может найти в статье М. А. Лаврентьева [20]; см. также книгу М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [21].

**59. Задачи теории упругости.** Мы приведем здесь несколько примеров решения задач, поставленных в п. 51.

1) Решение основных задач для круга. Пусть область  $D$  представляет собой единичный круг, и требуется найти упругое равновесие при заданных на единичной окружности  $C$  внешних напряжениях  $F_n = X_n + iY_n$  (задача I) или смещениях  $g = u + iv$  (задача II).

Согласно результатам п. 51 решение этих задач сводится к отысканию двух аналитических в круге  $|z| < 1$  функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , связанных на окружности для случая задачи I условием

$$\varphi(\zeta) + \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \quad (1)$$

где  $f(\zeta) = i \int_{\zeta_0}^{\zeta} F_n ds$  — заданная на  $C$  функция (см. формулу (8) п. 51; в соответствии со сказанным там в этой формуле можно положить  $A = 0$ ), а для случая задачи II условием

$$\kappa \varphi(\zeta) - \zeta \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = 2\mu g(\zeta), \quad (2)$$

где  $\kappa$  и  $\mu$  — постоянные (см. формулу (4) п. 51).

Рассмотрим подробно решение задачи I. Для полной определенности задачи примем условия

$$\psi(0) = \operatorname{Im} \varphi'(0) = 0 \quad (3)$$

(ср. формулу (10) п. 51). Воспользуемся теперь тем, что значения  $\psi(\xi)$  являются предельными значениями функции  $\psi(z)$ , аналитической в круге  $|z| < 1$ . По формуле (22) п. 52 с учетом условий (1) и (3) мы получаем тогда для всех  $z$ ,  $|z| < 1$ , соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\psi(\xi)} d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\xi \varphi'(\xi)}}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Так как функция  $\varphi(z)$  аналитична в круге  $|z| < 1$ , то, пользуясь формулой Коши, это соотношение можно переписать в виде

$$\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\xi \varphi'(\xi)}}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (4)$$

Мы получили уравнение для определения функции  $\varphi(z)$ . Чтобы решить его, подставим тейлоровское разложение  $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  в интеграл в левой части (4):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\xi \varphi'(\xi)}}{\xi - z} d\xi = \frac{\bar{c}_1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi}{\xi - z} \sum_{k=2}^{\infty} k \bar{c}_k \bar{\xi}^{k-1} d\xi. \quad (5)$$

Выделенный член по интегральной формуле Коши равен  $\bar{c}_1 z$ ; чтобы преобразовать второй член, заметим, что на окружности  $\bar{\xi} = 1/\xi$ , и следовательно, подынтегральную функцию можно переписать в виде \*)

$$\frac{1}{\xi - z} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \bar{c}_k}{\xi^{k-2}} = \frac{2\bar{c}_2}{\xi} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c'_k}{\xi^k},$$

причем этот ряд сходится при  $|\xi| \geq 1$ . Интегрируя почленно, найдем, что второй член в правой части (5) равен  $2\bar{c}_2$ .

Таким образом, из формулы (4) мы находим следующее выражение для искомой функции  $\varphi(z)$ :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \bar{c}_1 z - 2\bar{c}_2. \quad (6)$$

Остается определить постоянные  $c_1 = \varphi'(0)$  и  $c_2 = \frac{\varphi''(0)}{2}$ , для чего достаточно продифференцировать (6) один и два раза по  $z$  и затем подставить  $z = 0$ ; мы получим:

$$c_1 + \bar{c}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi, \quad c_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^3} d\xi. \quad (7)$$

\*) Мы разложили  $1/(\xi - z)$  в ряд по степеням  $z/\xi$  и перемножили наши разложения.

Второе уравнение вполне определяет  $c_2$ , относительно первого заметим прежде всего, что оно разрешимо лишь при условии

$$\operatorname{Im} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = \operatorname{Im} \frac{i}{2\pi} \int_C f(\zeta) d\bar{\zeta} = 0$$

(мы воспользовались тем, что  $\bar{\zeta} = 1/\zeta$  на  $C$ ), которое после подстановки  $f = f_2 + if_1$  и  $d\bar{\zeta} = dx - idy$  переписывается в виде

$$\int_C f_1 dx + f_2 dy = 0 \quad (8)$$

и физически выражает условие равенства нулю главного момента внешних напряжений (ср. формулу (9) п. 51). При этом условии первая формула (7) определяет действительную часть  $c_1$ , а ее мнимую часть мы полагаем равной нулю в соответствии с принятым условием (3).

Итак, функция  $\psi(z)$  определяется формулой (6), в которой постоянные  $c_1$  и  $c_2$  находятся из формул (7). Зная эту функцию, мы находим из условий (1) граничные значения аналитической функции  $\psi(z)$  и по этим значениям при помощи формулы Коши восстанавливаем значения  $\psi(z)$  внутри круга:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{f}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\varphi(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\zeta} \varphi'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (9)$$

Второй интеграл справа по формуле (22) п. 52 равен  $\overline{\varphi(0)}$ ; третий интеграл легко вычисляется по теореме Коши о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\zeta} \varphi'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi'(\zeta) d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = -\frac{\varphi'(0)}{z} + \frac{\varphi'(z)}{z}$$

(мы воспользовались тем, что  $\bar{\zeta} = 1/\zeta$  на  $C$ , а также тем, что подынтегральная функция внутри  $C$  имеет два полюса первого порядка:  $\zeta = 0$  и  $\zeta = z$ ; вычеты в этих полюсах вычисляются по формуле (5) п. 23). Таким образом, формулу (9) можно переписать в виде

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{f}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{\varphi'(z)}{z} + \frac{\varphi'(0)}{z} - \overline{\varphi(0)}. \quad (10)$$

Согласно сказанному в п. 51 постоянные слагаемые в формулах (6) и (10) можно отбросить как несущественные, и с учетом формул (7) мы получим решение задачи I в окончательном виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{z}{4\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta, \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{f}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{4\pi i z} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta - \frac{\varphi'(z)}{z}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$



Задача II для единичного круга решается вполне аналогично, и вместо (11) мы приходим к формулам

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\mu}{\kappa \pi i} \int_C \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{c}_1}{\kappa} z, \\ \psi(z) &= -\frac{\mu}{\pi i} \int_C \frac{\overline{g(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} - \frac{\varphi'(z)}{z} + \frac{c_1}{z}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$c_1 = \frac{\mu}{\pi i (\kappa^2 - 1)} \left\{ \kappa \int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \int_C \overline{g(\zeta)} d\zeta \right\}. \quad (13)$$

2) Случай плоскости с круговым отверстием. Для этого случая основные задачи теории упругости решаются аналогично. Предположим сначала, что главный вектор внешних напряжений, приложенных к контуру, а также напряжения на бесконечности, обращаются в нуль, т. е. что

$$X = Y = 0 \quad \text{и} \quad \Gamma = \Gamma' = 0. \quad (14)$$

Как мы видели в п. 51, из этого предположения следует, что функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  правильны в бесконечно удаленной точке; мы предположим еще, что  $\varphi(\infty) = 0$ .

Так как значения  $\psi(z)$  на окружности  $C$ , которую мы по-прежнему будем считать единичной, являются предельными значениями функции, аналитической вне круга  $|z| > 1$ , то по формуле (23) п. 52 с учетом краевого условия (1) мы получаем для всех  $z$ ,  $|z| > 1$ , соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta \overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

или на основании формулы (20) п. 52 и условия  $\varphi(\infty) = 0$ ,

$$-\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta \overline{\varphi'(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Пользуясь лорановским разложением  $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$ , сходящимся при

$|z| > 1$ , мы в точности так же, как в случае круга, получим, что интеграл в левой части последней формулы равен нулю и таким образом

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (15)$$

Теперь можно определить граничные значения  $\varphi(\zeta)$ , найти по формуле (1) граничные значения  $\psi(\zeta)$  и по формуле (20) п. 52 построить с их помощью значения  $\psi(z)$  при  $|z| > 1$ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \psi(\infty).$$

Подставляя сюда значения  $\psi(\xi)$  из (1) и пользуясь легко доказываемыми соотношениями

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\varphi(\xi)} d\xi}{\xi - z} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{\xi(\xi - z)} = -\frac{\varphi'(z)}{z},$$

получаем окончательно:

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{f(\xi)} d\xi}{\xi - z} - \frac{\varphi'(z)}{z} \quad (16)$$

(мы бросили несущественное постоянное слагаемое).

Перейдем к общему случаю, когда условия (14) не выполняются. По формулам (20) п. 51 мы имеем тогда:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma z - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \operatorname{Ln} z + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma' z + \kappa \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)} \operatorname{Ln} z + \psi_0(z), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  — однозначные аналитические при  $|z| > 1$  функции, причем можно положить  $\varphi_0(\infty) = 0$  и считать, что вращение на бесконечности отсутствует, т. е. что  $\Gamma$  — действительная постоянная. Подставляя эти выражения в краевое условие (1), получим, что граничные значения функции  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  связаны условием точно такого же вида, в котором лишь в правой части вместо функции  $f(\xi)$  стоит

$$f_0(\xi) = f(\xi) - 2\Gamma\xi - \frac{\overline{\Gamma'}}{\xi} + \frac{X + iY}{2\pi} \operatorname{Ln} \xi + \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)} \xi^2 \quad (18)$$

(мы воспользовались тем, что  $\bar{\xi} = 1/\xi$  на  $C$  и что  $\Gamma$  — действительная постоянная). Заметим еще, что функция  $f_0(\xi)$  однозначна на  $C$ , ибо приращение  $f(\xi)$  при обходе  $C$ , равное  $X + iY$ , компенсируется приращением логарифмического члена.

Таким образом, отыскание функций  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  свелось к уже решенной задаче и, следовательно, эти функции найдутся по формулам (15) и (16), в которых функция  $f(\xi)$  заменена функцией  $f_0(\xi)$  из (18). Теперь остается найти по формулам (17) функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , т. е. задача будет решена и в общем случае.

Вторая основная задача решается вполне аналогично.

3) Случай полуплоскости. Пусть область  $D$  представляет собой нижнюю полуплоскость. В этом случае для решения основных задач мы продолжим функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , определенные в  $D$ , в верхнюю полуплоскость. Именно, для  $z$  в верхней полуплоскости мы положим по определению

$$\varphi(z) = -z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(\bar{z})} + \text{const}; \quad (19)$$

тогда

$$\varphi'(z) = -\overline{\varphi'(\bar{z})} - z\overline{\varphi''(\bar{z})} - \overline{\psi'(\bar{z})}. \quad (20)$$

Обозначив через  $\varphi'_-(x)$  и  $\psi'_+(x)$  предельные значения  $\varphi'(z)$  при  $z \rightarrow x$  соответственно справа и слева от оси  $x$  (т. е. из нижней и из верхней полуплоскости), мы будем иметь:

$$\varphi'_+(x) = -\overline{\varphi'_-(x)} - x\overline{\varphi''_-(x)} - \overline{\psi'_-(x)}. \quad (21)$$

С другой стороны, из формул (26) п. 50 получаем в нижней полуплоскости

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}. \quad (22)$$

Мы видим, что на ненагруженных участках оси  $x$ , где  $Y_y^- - iX_y^- = \varphi'_-(x) + \overline{\varphi'_-(x)} + x\overline{\varphi''_-(x)} + \overline{\psi'_-(x)} = 0$ , соотношение (21) принимает вид

$$\varphi'_+(x) = \varphi'_-(x).$$

Таким образом, продолжение (20) функции  $\varphi'(z)$  в верхнюю полуплоскость оказывается аналитическим продолжением этой функции через незагруженные участки оси  $x$ .

Через функцию  $\varphi'(z)$ , распространенную в верхнюю полуплоскость, выражается и функция  $\psi'(z)$ . Чтобы получить это выражение, заменим в формуле (20)  $z$  на  $\bar{z}$  (так что  $z$  будет лежать в нижней полуплоскости) и перейдем к комплексно сопряженным величинам; тогда найдем:

$$\psi'(z) = -\varphi'(z) - \overline{\varphi'(\bar{z})} - z\overline{\varphi''(z)}$$

( $\bar{z}$  лежит в верхней полуплоскости). Подставляя это выражение в (22), будем иметь выражение напряжений через функцию  $\varphi(z)$ :

$$Y_y - iX_y = \varphi'(z) - \overline{\varphi'(\bar{z})} + (z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)}. \quad (23)$$

Аналогично, из формулы (24) п. 50 получим выражение смещений через ту же функцию:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \text{const.} \quad (24)$$

Перейдем к решению краевых задач. В первой краевой задаче на действительной оси задаются внешние напряжения: давление  $P(t) = -Y_y^-$  и касательное напряжение  $T(t) = X_y^-$ ; мы предположим, что они удовлетворяют условию Гёльдера и равны нулю на бесконечности. Из формулы (23), в которой надо перейти к пределу при  $z \rightarrow t$ , получаем краевое условие для функции  $\varphi'(z)$ :

$$\varphi'_+(t) - \varphi'_-(t) = P(t) + iT(t). \quad (25)$$

Решение краевой задачи (25) на основании формулы Сохоцкого (15) п. 52 дается непосредственно в виде интеграла типа Коши

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t) + iT(t)}{t - z} dt. \quad (26)$$

При некоторых дополнительных условиях, наложенных на  $P(t)$  и  $T(t)$ , функция  $\varphi'(z)$ , определяемая формулой (26), будет удовлетворять нужным условиям на бесконечности, которые (как вытекает из формулы (22) п. 51) имеют вид

$$\varphi'(z) = -\frac{X + iY}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad (27)$$

где  $o\left(\frac{1}{z}\right)$  — малая высшего порядка по сравнению с  $\frac{1}{z}$ . При этих условиях, подставив найденное выражение  $\varphi'(z)$  в формулу (23), мы найдем напряжения, а из формулы (24) найдем смещения (с точностью до жесткого смещения).

Во второй краевой задаче на действительной оси задаются значения компонентов смещения:  $u_- = g_1(t)$ ,  $v_- = g_2(t)$ ; мы предположим, что производные  $g'_1(t)$  и  $g'_2(t)$  удовлетворяют условию Гёльдера и равны нулю на бесконечности.

Дифференцируя равенство (24) по  $x$ , переходя к пределу при  $z \rightarrow t$  из нижней полуплоскости и используя заданные смещения, найдем краевое условие задачи:

$$2\mu [g'_1(t) + ig'_2(t)] = \kappa \varphi'_-(t) + \varphi'_+(t). \quad (28)$$

Обозначим через  $\chi(z)$  функцию, равную  $\varphi'(z)$  в верхней полуплоскости и  $-\kappa \varphi'(z)$  в нижней. Тогда условие (28) переписывается в виде

$$\chi_+(t) - \chi_-(t) = 2\mu [g'_1(t) + ig'_2(t)],$$

и функция  $\chi(t)$  найдется в виде интеграла типа Коши

$$\chi(z) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'_1(t) + ig'_2(t)}{t - z} dt. \quad (29)$$

Зная  $\chi$ , найдем и искомую функцию  $\varphi'(z)$

$$\varphi'(z) = \begin{cases} \chi(z) & \text{при } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\frac{1}{\kappa} \chi(z) & \text{при } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \quad (30)$$

4) Задача о штампе. Пусть над участком  $(-l, l)$  действительной оси, которая представляет собой границу упругого тела, расположен жесткий штамп с прямолинейным горизонтальным основанием (рис. 134). Мы предполагаем, что точки участка  $(-l, l)$  соприкасаются и неизменно сцеплены со штампом и что штамп может перемещаться лишь вертикально. Задача представляет собой смешанную краевую задачу теории упругости: на отрезке  $(-l, l)$  заданы смещения

$$u_- + iv_- = g_1(t) + ig_2(t) = \text{const}, \quad (31)$$

а на остальной части границы, т. е. лучах  $(-\infty, -l)$  и  $(l, \infty)$  — напряжения

$$X_y^- = Y_y^- = 0. \quad (32)$$

Подставляя условие (32) в формулу (25), мы видим, что в точках лучей  $(-\infty, -l)$  и  $(l, \infty)$  выполняется соотношение  $\varphi'_+(t) = \varphi'_-(t)$ , т. е. что функция  $\varphi'(z)$  аналитически продолжается через эти лучи. Подставляя условие (31) в формулу (28), мы получаем связь граничных значений  $\varphi'(z)$  на берегах разреза  $(-l, l)$ :  $\kappa \varphi'_-(t) + \varphi'_+(t) = 0$ , или

$$\varphi'_+(t) = -\kappa \varphi'_-(t). \quad (33)$$

Таким образом, для определения функции  $\varphi'(z)$  мы приходим к краевой задаче Гильберта — Привалова в случае  $b=0$ ,  $a=-\frac{1}{\kappa}$  и незамкнутого контура  $C$  (см. конец п. 53). Индекс функции  $a$  равен нулю, поэтому задача

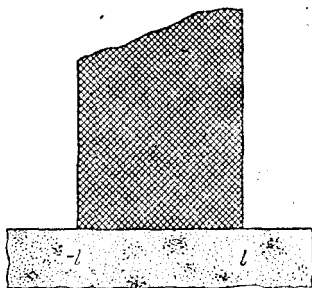


Рис. 134.

решается с помощью формул Гахова (4) и (5) п. 53, которые для нашего случая принимают вид

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\ln\left(-\frac{1}{\kappa}\right)}{\xi - z} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} (\ln \kappa + i\pi) \ln \frac{z-l}{z+l},$$

$$\varphi'_-(z) = A e^{-F^-(z)} = A \left( \frac{z-l}{z+l} \right)^{\frac{1}{2}-i\beta},$$

где  $\beta = \frac{\ln \kappa}{2\pi}$ . Однако найденная функция  $\varphi'_-(z)$  не удовлетворяет условиям на бесконечности — она принимает там конечное значение  $A$ , а искомая функция согласно условию (27) должна иметь там нуль первого порядка. Поэтому, используя замечание в конце п. 53, и умножив найденную функцию на  $\frac{1}{z-l}$ , получим \*):

$$\varphi'_-(z) = \frac{A}{z-l} \left( \frac{z-l}{z+l} \right)^{\frac{1}{2}-i\beta} = A \left( \frac{z+l}{z-l} \right)^{i\beta} \frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}.$$

Вычет нашей функции в точке  $z = \infty$  равен  $A$  (при соответствующем выборе ветвей многозначных функций, входящих в полученное выше выражение), поэтому, учитывая формулу (27), находим:  $A = -\frac{X+iY}{2\pi}$ , т. е. постоянная  $A$  равна равнодействующей сил, приложенных к штампу. В наших условиях  $X = 0$ ,  $Y = -P_0$ , и мы получаем окончательное выражение функции  $\varphi'_-(z)$ :

$$\varphi'_-(z) = \frac{iP_0}{2\pi} \left( \frac{z+l}{z-l} \right)^{i\beta} \frac{1}{\sqrt{z^2-l^2}}. \quad (34)$$

Вычислим давление  $P(t)$  и касательное напряжение  $T(t)$ , действующее на тело под штампом. По формулам (25) и (33) имеем:

$$P(t) + iT(t) = \varphi'_+(t) - \varphi'_-(t) = -(1+\kappa) \varphi'_-(t).$$

Подставив сюда выражение (34), найдем:

$$P(t) + iT(t) = \frac{P_0}{2\pi} \frac{1+\kappa}{\sqrt{\kappa}} \left( \frac{l+t}{l-t} \right)^{i\beta} \frac{1}{\sqrt{l^2-t^2}},$$

где в правой части следует брать предельное значение функции при  $z \rightarrow t$  по точкам верхней полуплоскости \*\*). После элементарных преобразований

\*) Множитель  $\frac{1}{z-l}$  выбран так, чтобы полученная функция имела особенности лишь в концах отрезка  $(-l, l)$ .

\*\*) При этом в знаменателе появится множитель  $e^{\pi\beta} = \sqrt{\kappa}$  (см. выше определение постоянной  $\beta$ ).

получим:

$$\left. \begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0}{2\pi \sqrt{l^2 - t^2}} \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\kappa}} \cos \left( \beta \ln \frac{l+t}{l-t} \right), \\ T(t) &= \frac{P_0}{2\pi \sqrt{l^2 - t^2}} \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\kappa}} \sin \left( \beta \ln \frac{l+t}{l-t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Эти формулы получены В. А. Абрамовым (см. Н. И. Мусхелишвили [10]).

### Литература к главе III

- [1] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
- [2] Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. 1, ГТТИ, 1933.
- [3] Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.
- [4] Д. Ю. Панов, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Гостехиздат, 1949.
- [5] П. Ф. Фильчаков и В. И. Панчишин, Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Изд-во АН УССР, Киев, 1961.
- [6] Н. Е. Кочин и И. А. Кибель, Теоретическая гидромеханика, ч. I, ч. II, Гостехиздат, 1948.
- [7] В. В. Голубев, Лекция по теории крыла, Гостехиздат, 1950.
- [8] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.
- [9] И. М. Аснин, Расчеты электромагнитных полей, издание ВЭТА, Л., 1939.
- [10] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, изд. 4-е, 1954.
- [11] Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, ОНТИ, 1935.
- [12] Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, Гостехиздат, 1947.
- [13] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, 1963.
- [14] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1963.
- [15] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.
- [16] М. А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд-во АН СССР, 1962.
- [17] Л. И. Волковыский, Квазиконформные отображения, Изд-во Львовского ун-та, 1954.
- [18] Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, Гостехиздат, 1947.
- [19] А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, Труды ин-та имени В. А. Стеклова, вып. XLI, Изд-во АН СССР, 1953.
- [20] М. А. Лаврентьев, Кумулятивный заряд и принципы его работы, Успехи матем. наук, т. XII, вып. 4 (1957), 41—56.
- [21] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Проблемы гидродинамики и их математические модели, «Наука», 1973.

## Вариационные принципы конформных отображений

Эта глава посвящена «динамике» конформных отображений. В ней излагаются качественные и количественные предложения, позволяющие судить о том, как изменяются отображения при изменении границ отображаемых областей. Такого рода предложения представляют собой интерес для практики, ибо они дают простые методы пересчета при переходе от данной конструкции к конструкции близкой. Предположим, что при расчете запроектированной конструкции оказалось, что некоторые величины превышают допустимые размеры. Тогда, естественно, возникает вопрос о том, где и насколько надо изменить конструкцию. В некоторых случаях ответ на этот вопрос можно получить на основании излагаемых здесь вариационных принципов.

В конце главы даются примеры применения вариационных принципов к конкретным прикладным задачам.

### § 1. Основные вариационные принципы

Пусть в плоскости  $z$  заданы две односвязные области  $D$  и  $\bar{D}$ , ограниченные кривыми  $C$  и  $\bar{C}$ , и пусть  $\omega = f(z)$  и  $\omega = \bar{f}(z)$  — функции, реализующие конформные отображения  $D$  и  $\bar{D}$  на одну из канонических областей (круг, полуплоскость, полосу) и одинаково нормированные. Задача, о которой мы только что говорили, ставится следующим образом: *Считая отображение  $\omega = f(z)$  известным, а контур  $\bar{C}$  близким к  $C$ , найти главную часть  $\delta f$  приращения*

$$\bar{f}(z) - f(z) = \delta f + r(f, \bar{f})$$

*при переходе от области  $D$  к  $\bar{D}$ .*

Мы имеем два типа результатов, относящихся к решению этой задачи, — качественные теоремы и методы приближенных подсчетов  $\delta f$  с оценками для остаточного члена  $r(f, \bar{f})$ . Начнем с качественных принципов.

**60. Основной вариационный принцип.** Условимся о некоторых обозначениях. Область, ограниченную кривой  $C$ , мы будем

обозначать  $D(C)$ . Функцию, реализующую конформное отображение  $D(C)$  на единичный круг, при котором фиксированная внутренняя точка  $z_0$  области переходит в начало координат, мы обозначим:

$$\omega = f(z, C); \quad f(z_0, C) = 0. \quad (1)$$

Функций, удовлетворяющих указанным условиям, бесконечно много, но все они отличаются друг от друга множителем вида  $e^{i\theta}$ , где  $\theta$  — действительное число. Мы будем понимать под  $f(z, C)$  любую из них, но в тех вопросах, где величина  $\theta$  существенна, будем определять ее дополнительным условием. Замкнутую линию, переходящую при отображении (1) в окружность  $|\omega| = \rho < 1$ , будем обозначать через  $C_\rho$  и называть *линией уровня*.

*Деформацией* контура  $C$  мы будем называть замену его контуром  $\tilde{C}$ . Предположим, что области  $D(C)$  и  $D(\tilde{C})$  звездны относительно точки  $z_0$ , т. е. что их границы  $C$  и  $\tilde{C}$  в системе полярных координат с полюсом в  $z_0$  можно представить уравнениями  $r = r(\varphi)$  и  $r = \tilde{r}(\varphi)$  с помощью одних и тех же функций  $r$  и  $\tilde{r}$ . Точку  $z_2 = z_0 + r_2 e^{i\varphi_2}$  контура  $C$ , где достигает экстремума отношение  $\tilde{r}(\varphi)/r(\varphi)$ , и соответствующую точку  $\tilde{z}_2 = z_0 + \tilde{r}_2 e^{i\varphi_2}$  контура  $\tilde{C}$  мы будем называть *точками наибольшей деформации*, а число  $\lambda = \tilde{r}_2/r_2$  — *наибольшей деформацией* контура.

Основной качественный вариационный принцип, так называемый *принцип Линделёфа*, утверждает, что если ограничиться отображениями на единичный круг областей, содержащих фиксированную точку  $z_0$  (образ точки  $\omega = 0$  при каждом таком отображении), то при сдавливании внутрь границы области: 1) все линии уровня сжимаются; 2) растяжение в точке  $z_0$  увеличивается; 3) растяжение в точках границы, оставшихся неподвижными (и, в частности, длина образа недеформированной части границы), уменьшается; 4) в точках наибольшей деформации растяжение увеличивается более чем в  $1/\lambda$  раз.

Иными словами, имеет место

**Теорема 1.** Если область  $D(\tilde{C})$  содержится в  $D(C)$ , то:

1) при любом  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ) область  $D(\tilde{C}_\rho)$  содержится в  $D(C_\rho)$ , причем соприкосновение  $\tilde{C}_\rho$  и  $C_\rho$  возможно лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ ;

2) в точке  $z_0$

$$|f'(z_0, \tilde{C})| \geq |f'(z_0, C)|, \quad (2)$$

причем знак равенства возможен лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ ;



3) если контуры  $\tilde{C}$  и  $C$  имеют общую точку  $z_1$ , то в этой точке

$$|f'(z_1, \tilde{C})| \leq |f'(z_1, C)|, \quad (3)$$

причем знак равенства возможен лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ ;

4) если области звездны относительно  $z_0$ , то в точках наибольшей деформации

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|, \quad (4)$$

где  $\lambda < 1$  — наибольшая деформация контура.

Мы приведем прямое геометрическое доказательство принципа, которое ясно показывает его существо и позволяет получить количественные оценки. Для этого заметим, что теорему достаточно доказать для случая, когда контур  $\tilde{C}$  отличается от  $C$  только на малом участке  $(a, b)$ , где он представляет собой дугу кривизны, близкой к кривизне  $C$  на  $(a, b)$ , так что  $D(\tilde{C})$  получается удалением из  $D(C)$  малой площадки  $\sigma$  (рис. 135). В самом деле, любую вариацию  $C$  можно получить последовательным применением этой простейшей вариации, и если теорема будет доказана для нее, то она будет доказана и в общем случае.

Введем теперь вспомогательную плоскость  $\xi$  и отображим конформно область  $D(C)$  на единичный круг  $|\xi| < 1$ :

$$\xi = f(z, C), \quad f(z_0, C) = 0.$$

Пусть при этом  $\tilde{C}$  переходит в кривую  $\tilde{C}'$  и площадь, заключенная между  $\tilde{C}'$  и окружностью  $|\xi| = 1$ , равна  $\sigma'$  (рис. 135). Отобразим конформно область  $D(\tilde{C}')$  на единичный круг плоскости  $w$ :

$$w = g(\xi), \quad g(0) = 0.$$

С точностью до малых высших порядков площадку  $\sigma'$  можно считать круговой луночкой\*), следовательно, в качестве  $g$  можно взять отображение (9) п. 34

$$w = g(\xi) = \xi \left\{ 1 + \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \xi e^{-ia}}{1 - \xi e^{-ia}} \right\}, \quad (5)$$

\*) Это утверждение может быть обосновано в случае, когда кривизна  $k$  контура  $C$  как функция длины дуги  $s$  этого контура удовлетворяет условию Гельдера

$$|k(s+h) - k(s)| < A |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Для обоснования приходится пользоваться еще рядом граничных свойств отображений  $w = f(z)$ . Ниже мы приведем доказательство принципа, не использующее граничных свойств  $f(z)$ .

где  $\alpha$  — аргумент какой-либо точки площадки  $\sigma'$ . Найдем отображение, обратное  $g$ . Для этой цели перепишем формулу (5) в виде

$$\xi \approx w \left\{ 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \xi e^{-i\alpha}}{1 - \xi e^{-i\alpha}} \right\}$$

(мы воспользовались тем, что при малых  $\eta$  с точностью до малых высшего порядка  $\frac{1}{1+\eta} \approx 1 - \eta$ ). Так как  $w$  отличается

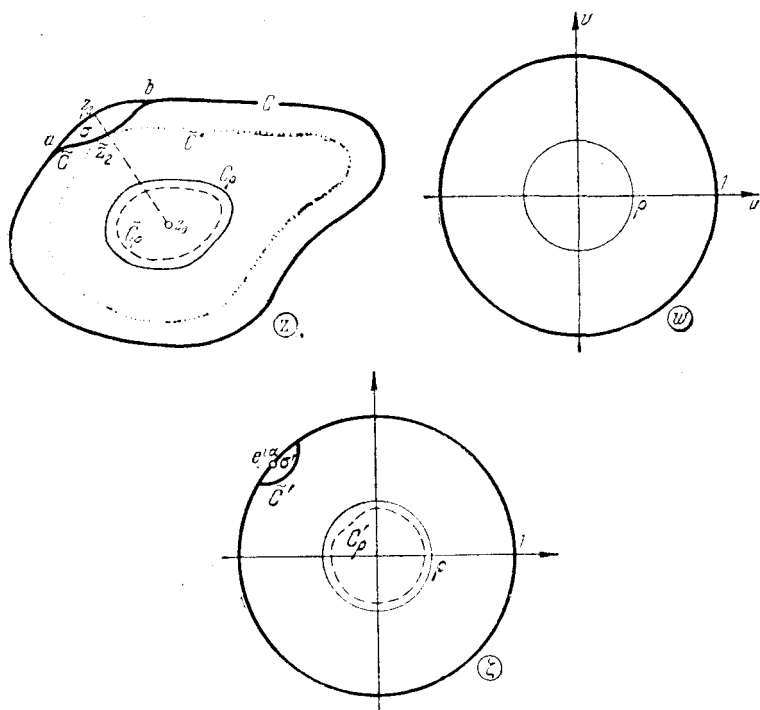


Рис. 135.

от  $\xi$  на величину порядка  $\sigma'$ , то в членах, содержащих множитель  $\sigma'$ , не меняя порядка точности, можно заменить  $\xi$  через  $w$ , так что

$$\xi \approx w \left\{ 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + w e^{-i\alpha}}{1 - w e^{-i\alpha}} \right\}. \quad (6)$$

Обозначим через  $C'_\rho$  кривую плоскости  $\xi$ , соответствующую окружности  $|w| = \rho$  при отображении  $w = g(\xi)$ . Чтобы получить параметрические уравнения  $C'_\rho$ , мы положим  $\xi = r e^{i\varphi}$ ,

$w = \rho e^{i\theta}$ , прологарифмируем выражение (6):

$$\ln \frac{\xi}{w} = \ln \frac{r}{\rho} + i(\varphi - \theta) \approx -\frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \rho e^{i(\theta-\alpha)}}{1 - \rho e^{i(\theta-\alpha)}},$$

и разделим затем действительные и мнимые части:

$$\left. \begin{aligned} r &\approx \rho \left( 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} \right), \\ \varphi &\approx \theta - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{2\rho \sin(\theta - \alpha)}{1 - 2\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из этих уравнений можно получить все утверждения доказываемой теоремы. Очевидно, имеем:

$$w = f(z, \tilde{C}) = g[f(z, C)]; \quad (8)$$

следовательно, при отображении  $\xi = f(z, C)$  область  $D(\tilde{C}_\rho)$  переходит в  $D(C'_\rho)$ . Так как  $D(C_\rho)$  переходит при этом в круг  $|\xi| < \rho$ , то для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что  $D(C'_\rho)$  содержится в круге  $|\xi| < \rho$ . Но так как  $1 - 2\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2 \leq (1 + \rho)^2$ , то по формуле (7) для всех точек контура  $C'_\rho$  имеем:

$$|\xi| = r \leq \rho \left( 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right) < \rho. \quad (9)$$

Таким образом, первое утверждение теоремы полностью доказано.

Деля неравенство (9) на  $\rho$  и устремляя  $\rho$  к нулю, получим в пределе

$$\left| \frac{d\xi}{dw} \right|_{w=0} \leq 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} < 1.$$

Но тогда  $|g'(0)| > 1$ , и согласно формуле (8)

$$|f'(z_0, \tilde{C})| = |g'(0)| \cdot |f'(z_0, C)| > |f'(z_0, C)|,$$

что и доказывает второе утверждение.

Пусть теперь точка  $\xi = \rho e^{i\varphi}$  приближается к точке  $e^{i\varphi}$  окружности  $|\xi| = 1$  по радиусу этой окружности, причем  $e^{i\varphi}$  расположена вне  $\sigma'$ . Тогда в силу конформности отображения соответствующая точка  $w = \rho e^{i\theta}$  приближается к точке  $e^{i\theta}$  по направлению, также касательному к радиусу окружности  $|w| = 1$ , и мы имеем:  $|\Delta \xi| = |\xi - e^{i\varphi}| = 1 - \rho$ ,  $|\Delta w| = |w - e^{i\theta}| \approx 1 - \rho$ . Но из неравенства (9) следует:

$$\frac{1 - \rho}{1 - r} \leq \frac{1 - \rho}{1 - \rho + \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \approx 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{\rho}{1 + \rho},$$

и, переходя здесь к пределу при  $r \rightarrow 1$ , получаем:

$$\left| \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=e^{i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-\rho}{1-r} \leq 1 - \frac{\sigma'}{4\pi}.$$

Отсюда вытекает утверждение 3) теоремы.

Для доказательства последнего утверждения обозначим через  $\tilde{C}^*$  контур, который получается из  $C$  преобразованием подобия  $\xi = z_0 + \lambda(z - z_0)$  (рис. 135). Очевидно, функция

$$w = f(\xi, \tilde{C}^*) = f\left(z_0 + \frac{\xi - z_0}{\lambda}, C\right) \quad (10)$$

реализует конформное отображение области  $D(\tilde{C}^*)$  на единичный круг. Но  $D(\tilde{C}^*)$  содержится в  $D(\tilde{C})$  и точка  $\tilde{z}_2$  принадлежит как  $\tilde{C}$ , так и  $\tilde{C}^*$ . Поэтому согласно утверждению 3) теоремы

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*)| < |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})|.$$

Но так как из (10) имеем  $f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*) = \frac{1}{\lambda} f'(z_2, C)$ , то

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|,$$

и теорема доказана полностью.

Простым следствием доказанной теоремы является так называемый принцип Монтеля:

**Теорема 2.** Пусть области  $D(C)$  и  $D(\tilde{C})$  содержат точку  $z_0$  и  $C = C_1 + C_2$ ,  $\tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ , причем  $\tilde{C}_1$  лежит в  $D(C)$ ,  $\tilde{C}_2$  — вне  $D(C)$ ,  $C_1$  — вне  $D(\tilde{C})$  и  $C_2$  — в  $D(\tilde{C})$  (рис. 136). Пусть, кроме того, при отображениях

$$w = f(z, C), \quad w = f(z, \tilde{C})$$

дуги  $C_1$  и  $\tilde{C}_1$  переходят соответственно в дуги  $\Phi_1$  и  $\tilde{\Phi}_1$ , тогда длины этих дуг связаны соотношением \*)

$$\tilde{\Phi}_1 \geq \Phi_1, \quad (11)$$

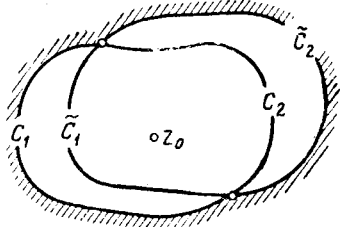


Рис. 136.

причем знак равенства достигается лишь при совпадении  $C$  и  $\tilde{C}$ .

Для доказательства введем вспомогательную область  $D(C')$ , ограниченную кривой  $C' = \tilde{C}_1 + C_2$ , и обозначим через  $\Phi'$  образ  $C_2$  при отображении  $w = f(z, C')$ . Так как  $D(C')$  принадлежит  $D(\tilde{C})$  и дуга  $\tilde{C}_1$  принадлежит и  $C'$  и  $\tilde{C}$ , то по третьему утверждению

\*) Длины дуг мы обозначаем теми же буквами, что и сами дуги.

принципа Линделёфа в каждой точке  $\tilde{C}_1$

$$|f'(z, \tilde{C})| \geq |f'(z, C')|.$$

Следовательно, учитывая геометрический смысл модуля производной, будем иметь:

$$\tilde{\vartheta}_1 \geq 2\pi - \vartheta'. \quad (12)$$

С другой стороны,  $D(C')$  лежит внутри области  $D(C)$  и дуга  $C_2$  принадлежит кривым  $C'$  и  $C$ , поэтому на основании тех же соображений

$$\vartheta' \leq 2\pi - \vartheta_1. \quad (13)$$

Объединяя неравенства (12) и (13), получим искомое неравенство (11).

В заключение заметим, что доказанные вариационные принципы Монтеля и Линделёфа можно получить также на основании леммы Шварца (п. 15). В самом деле, эти принципы вытекают из утверждения, что область  $D(C'_\rho)$ , в которую преобразует круг  $|w| < \rho$  функция  $\zeta = h(w)$ , обратная к функции  $w = g(\zeta)$ , принадлежит кругу  $|\zeta| < \rho$  (мы придерживаемся обозначений, введенных при доказательстве теоремы 1). Но так как функция  $\zeta = h(w)$ ,  $h(0) = 0$ , отображает круг  $|w| < 1$  на область  $D(C')$ , принадлежащую кругу  $|\zeta| < 1$ , то по лемме Шварца для любого  $w$ ,  $|w| < 1$ , имеем  $|h(w)| < |w|$ . Отсюда и вытекает утверждение о том, что при любом  $\rho$  область  $D(C'_\rho)$  принадлежит кругу  $|\zeta| < \rho$ .

Эти принципы можно получить также непосредственно из принципа максимума для гармонических функций (п. 42). Такой метод имеет особое значение при распространении вариационных принципов на отображения более общие, чем конформные и, в частности, на квазиконформные отображения (п. 56), для которых принцип максимума остается справедливым.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть  $w = f(z)$ ,  $f(z_0) = 0$  и  $w = \tilde{f}(z)$ ,  $\tilde{f}(z_0) = 0$ , соответственно реализуют конформные отображения областей  $D(C)$  и  $D(\tilde{C})$  на единичный круг. Функция

$$P(x, y) = \ln |f(z)|$$

гармонична в области  $D(C)$  всюду, кроме точки  $z = z_0$ , причем  $P(x, y) - \ln |z - z_0|$  правильна в этой области. Так как  $|f(z)| = 1$  на  $C$ , то  $P(x, y)$  обращается на  $C$  в нуль. Вдоль линии  $C_\rho$  имеем:

$$P(x, y) = \ln \rho, \quad (14)$$

так что (14) можно рассматривать как уравнение  $C_\rho$ .

Нам нужно доказать, что при деформации контура  $C$  внутри области  $D(C)$  для любого  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , область  $D(\tilde{C}_\rho)$  содержится внутри  $D(C_\rho)$ . Но всюду внутри  $D(C)$  по принципу максимума мы имеем  $P(x, y) < 0$ , а так как на части  $\tilde{C}$ , не совпадающей с  $C$ ,  $\tilde{P}(x, y) = \ln |\tilde{f}(z)| = 0$ , в то время как на общей части  $C$  и  $\tilde{C}$  обе эти функции равны нулю, то всюду внутри  $D(\tilde{C})$

$$P(x, y) < \tilde{P}(x, y).$$

На основании уравнения (14) и аналогичного уравнения для линии  $\tilde{C}_\rho$  можно утверждать, что  $D(\tilde{C}_\rho)$  содержится в  $D(C_\rho)$  при любом  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ .

**61. Распространение принципа.** Основной вариационный принцип, доказанный в предыдущем пункте, распространяется и на функции, реализующие конформные отображения на канонические области других типов.

1) Внешность круга. Обозначим через  $\Delta(C)$  область, внешнюю к замкнутому контуру  $C$ ; пусть функция

$$w = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty \quad (1)$$

реализует конформное отображение области  $\Delta(C)$  на внешность единичного круга  $|w| > 1$ . Сохраняя обозначения, принятые в предыдущем пункте, мы можем формулировать следующую теорему:

**Теорема 1.** Если область  $\Delta(\tilde{C})$  содержится в  $\Delta(C)$ , то

1) при любом  $\rho > 1$  область  $\Delta(\tilde{C}_\rho)$  содержится в области  $\Delta(C_\rho)$ ; соприкосновение контуров  $\tilde{C}_\rho$  и  $C_\rho$  для какого-нибудь  $\rho$  возможно лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ ;

2) в бесконечно удаленной точке

$$|F'(\infty, \tilde{C})| \leq |F'(\infty, C)|; \quad (2)$$

3) в точке  $z_1$ , общей контурам  $\tilde{C}$  и  $C$ ,

$$|F'(z_1, \tilde{C})| \leq |F'(z_1, C)|; \quad (3)$$

4) если контуры звездны относительно точки  $z = 0$ , то в точках наибольшей деформации  $z_2$  и  $\tilde{z}_2$

$$|F'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |F'(z_2, C)|. \quad (4)$$

Знаки равенства достигаются лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ .

Доказательство может быть проведено так же, как в предыдущем пункте, если вместо (5) использовать отображение внешности единичного круга с выкинутой из нее луночкой на

внешность круга. Проще всего получить эту теорему, сводя ее к доказанной при помощи замены переменных

$$z - z_0 = \frac{1}{\zeta}, \quad w = \frac{1}{\omega}.$$

2) Случай полуплоскости. Пусть линия  $C$  проходит через бесконечно удаленную точку и обладает в бесконечности касательной и конечной кривизной\*); тогда окружность  $|z| = R$  при достаточно большом  $R$  будет пересекать  $C$  в двух точках с аргументами, разность которых будет сколь угодно близка к  $\pi$ .

Предположим еще, что положительная мнимая полуось в своей достаточно удаленной части не пересекается с  $C$ , и обозначим через  $D(C)$  область с границей  $C$ , содержащую эту часть. Через

$$\begin{aligned} w = f(z, C), \quad f(\infty, C) = \infty, \\ |f'(\infty, C)| = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

условимся обозначать функцию, реализующую конформное отображение области  $D(C)$  на верхнюю полуплоскость  $v > 0$ . Со-

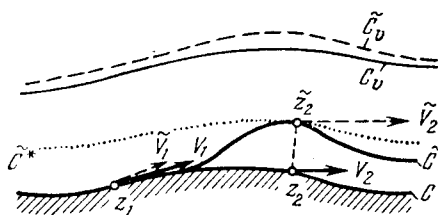


Рис. 137.

гласно теореме существования в условиях, наложенных на кривую  $C$ , функция  $f$  существует и определяется с точностью до действительного постоянного слагаемого. Так как в дальнейшем это слагаемое не играет роли, то под  $f$  мы будем понимать любую из таких функций. Пусть, наконец,

$C_v$  и  $\tilde{C}_v$  — соответственно линии, переходящие при отображениях  $w = f(z, C)$ ,  $w = f(z, \tilde{C})$  в прямую  $v = \text{const}$  (рис. 137). При этих обозначениях имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть линия  $\tilde{C}$  проходит через точку  $\infty$  и имеет там общую касательную с  $C$ . Если, кроме того, область  $D(\tilde{C})$  содержится в области  $D(C)$ , то:

1) при любом  $v > 0$  область  $D(\tilde{C}_v)$  содержится в области  $D(C_v)$ , причем соприкосновение  $\tilde{C}_v$  и  $C_v$  возможно лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ ;

2) если  $C$  и  $\tilde{C}$  имеют общую правильную точку  $z_1$ , то в этой точке

$$|f'(z_1, \tilde{C})| \leq |f'(z_1, C)|, \quad (6)$$

причем знак равенства достигается лишь при совпадении  $\tilde{C}$  и  $C$ ;

\*) Это означает, что линия  $C^*$ , получаемая из  $C$  преобразованием  $\zeta = 1/z$ , обладает в точке  $\zeta = 0$  касательной и конечной кривизной.

3) если кривые  $C$  и  $\tilde{C}$  задаются однозначными функциями  $y = y(x)$ ,  $y = \tilde{y}(x)$ , а  $z_2$  и  $\tilde{z}_2$  соответственно — точки этих кривых, в которых  $\tilde{y}(x) - y(x)$  достигает максимума, то

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq |f'(z_2, C)|, \quad (7)$$

причем знак равенства достигается лишь в том случае, когда  $\tilde{C}$  получается из  $C$  сдвигом, параллельным оси  $y$ .

В силу соображений, приведенных в предыдущем пункте, достаточно рассмотреть случай, когда  $C$  совпадает с осью  $x$ , а  $\tilde{C}$  отличается от  $C$  на бесконечно малом участке  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , на котором  $\tilde{C}$  есть дуга окружности малой кривизны. Но в этом случае  $f(z, C) \equiv z$ , и согласно формуле (7) п. 34

$$f(z, \tilde{C}) \approx z + \frac{\sigma}{\pi} \cdot \frac{1}{z - a} \quad (8)$$

с точностью до малых высшего порядка. Обратная функция находится так же, как в предыдущем пункте, и имеет вид

$$z \approx w - \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{w - a}.$$

Полагая здесь  $w = u + iv$  и отделяя действительную и мнимую части, при фиксированном  $v$  получим параметрические уравнения линии  $\tilde{C}_v$ :

$$\left. \begin{aligned} x &\approx u - \frac{\sigma}{\pi} \frac{u - a}{(u - a)^2 + v^2}, \\ y &\approx v + \frac{\sigma}{\pi} \frac{v}{(u - a)^2 + v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из второго уравнения (9) видно, что  $\tilde{C}_v$  лежит в области  $y > v$ , т. е. в области  $D(C_v)$ , — этим доказано первое утверждение теоремы.

Для доказательства утверждения 2) возьмем любую точку оси  $x$ , далекую от  $a$  сравнительно с  $\sigma$ , и найдем в этой точке производную функции (8); имеем:

$$f'(x, \tilde{C}) \approx 1 - \frac{\sigma}{\pi} \frac{1}{(x - a)^2} < 1,$$

что и требуется.

Для доказательства утверждения 3) обозначим через  $\tilde{C}^*$  кривую, которая получается из  $C$  параллельным сдвигом на вектор  $\tilde{z}_2 - z_2$  (вверх). Имеем, очевидно,  $f(z, \tilde{C}^*) = f(z - \tilde{z}_2 + z_2, C)$ , откуда

$$f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*) = f'(z_2, C).$$



С другой стороны,  $D(\tilde{C}^*)$  принадлежит области  $D(\tilde{C})$  и  $\tilde{z}_2$  — общая точка  $\tilde{C}$  и  $\tilde{C}^*$ ; следовательно, по уже доказанному утверждению 2)

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*)| \leq |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})|.$$

Сравнивая два последних соотношения, получим искомое неравенство (7). Теорема доказана.

Доказанная теорема допускает простую гидродинамическую интерпретацию. Пусть профиль дна весьма глубокого канала с плоскими вертикальными стенками, по которому движется идеальная несжимаемая жидкость, имеет форму кривой  $C$ . Тогда,

*если в каком-либо месте канала приподнять дно, то все линии тока поднимутся и скорости в точках дна, оставшихся недеформированными, уменьшатся, а в точках наибольшей деформации возрастут (см. рис. 137).*

3) Случай полос. Пусть  $C_0$  и  $C$  — две дуги, не имеющие общих точек, кроме своих концов  $a_1, a_2$ . При этом мы не исключаем случай, когда одна из точек  $a$  или обе точки совпадают с точкой  $z = \infty$ . Обозначим через  $D(C_0, C)$  область, ограниченную линиями  $C_0$  и  $C$ , а через

$$w = f(z, C_0, C); \quad f(a_1, C_0, C) = -\infty, \quad f(a_2, C_0, C) = \infty \quad (10)$$

— функцию, реализующую конформное отображение области  $D(C_0, C)$  на полосу  $0 < v < 1$ . Функция  $f(z, C_0, C)$  определена с точностью до действительного слагаемого, которое пока нас не интересует. Через  $C_v$  мы будем обозначать линию, переходящую при отображении (10) в прямую  $v = \text{const}$  ( $0 < v < 1$ ).

Предположим еще, что линии  $C_0$  и  $C$  задаются с помощью однозначных функций  $y = y_0(x)$  и  $y = y(x)$  таких, что  $|y'_0(x)|$  и  $|y'(x)|$  не превосходят положительной постоянной  $m$ . Рассмотрим пучок параллельных прямых  $y = kx + b$ , где  $|k| < \frac{1}{m}$ , каждая из которых пересекает  $C_0$  и  $C$  не более чем в одной точке. Точку  $z_2$  контура  $C_0$ , в которой отрезок прямой пучка заключенный между  $C_0$  и  $\tilde{C}_0$ , достигает наибольшего значения и соответствующую точку  $\tilde{z}_2$  контура  $\tilde{C}_0$  мы будем называть *точками наибольшей деформации* (в направлении  $k$ ).

Имеет место

**Теорема 3.** Если область  $D(\tilde{C}_0, C)$  содержится в области  $D(C_0, C)$ , то:

1) при любом  $v$  ( $0 < v < 1$ ) область  $D(\tilde{C}_v, C)$  содержится в области  $D(C_v, C)$ , причем соприкосновение линий  $\tilde{C}_v$  и  $C_v$  возможно лишь при совпадении  $\tilde{C}_0$  и  $C_0$ ;

2) если линии  $\tilde{C}_0$  и  $C_0$  имеют общую точку  $z_1$ , то в этой точке

$$|f'(z_1, \tilde{C}_0, C)| \leq |f'(z_1, C_0, C)|; \quad (11)$$

3) в любой точке  $z$  линии  $C$

$$|f'(z, \tilde{C}_0, C)| \geq |f'(z, C_0, C)|; \quad (12)$$

4) в точках наибольшей деформации

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0, C)| \geq |f'(z_2, C_0, C)|. \quad (13)$$

Знаки равенства в (11)–(13) достигаются лишь при совпадении линий  $\tilde{C}_0$  и  $C$ .

Как и в ранее разобранных случаях доказательство можно провести в предположении, что  $D(C_0, C)$  является единичной полосой  $0 < y < 1$  ( $C_0$  — осью  $x$ ,  $C$  — прямой  $y = 1$ ), а  $\tilde{C}_0$  совпадает с  $C_0$  всюду, кроме малого участка ( $a - \epsilon, a + \epsilon$ ), где она является дугой окружности малой кривизны. В этом предположении функция  $f(z, \tilde{C}_0, C)$  на основании формулы (13) п. 34 имеет вид:

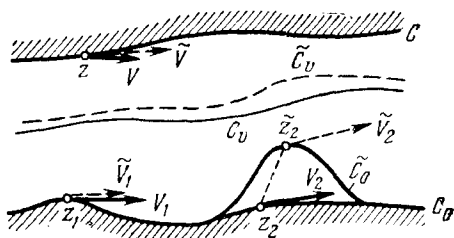


Рис. 138.

$$w = f(z, \tilde{C}_0, C) \approx z + \frac{\sigma}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-a)}{2}, \quad (14)$$

где  $\sigma$  — площадь выброшенной луночки. Утверждение 1) теоремы проверяется так же, как и раньше, и на его проверке мы останавливаться не будем. Для доказательства утверждений 2) и 3) рассмотрим производную функции (14). На оси  $x$  имеем:

$$f'(x, \tilde{C}_0, C) \approx 1 - \frac{\pi\sigma}{4} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x-a)}{2}} < 1,$$

откуда следует неравенство (11). На прямой  $y = 1$

$$f'(x+i, C_0, C) \approx 1 + \frac{\pi\sigma}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(x-a)}{2}} > 1,$$

откуда следует (12) (мы воспользовались тем, что  $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi i}{2} + z\right) = i \operatorname{ch} z$ ).

Для доказательства утверждения 4) обозначим через  $\tilde{C}_0^*$  и  $\tilde{C}^*$  линии, которые получаются из  $C_0$  и  $C$  поступательным сдвигом

на вектор  $\tilde{z}_2 - z_2$ . Очевидно, функция

$$w = f(z, \tilde{C}_0^*, \tilde{C}^*) = f(z + z_2 - \tilde{z}_2, C_0, C) \quad (15)$$

реализует отображение  $D(\tilde{C}_0^*, \tilde{C}^*)$  на полосу  $0 < v < 1$ . Так как  $D(C_0, C)$  содержит область  $D(\tilde{C}_0^*, C)$  и  $\tilde{C}_0^*$  имеет общую точку  $\tilde{z}_2$  с  $\tilde{C}_0$ , то по (11)

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0^*, C)| \leq |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0, C)|. \quad (16)$$

С другой стороны, так как  $D(\tilde{C}_0^*, C)$  содержится в  $D(\tilde{C}_0^*, \tilde{C}^*)$ , то по (12) в любой точке недеформированной границы  $\tilde{C}_0^*$  и, в частности, в точке  $\tilde{z}_2$

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0^*, \tilde{C}^*)| \leq |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0^*, C)|. \quad (17)$$

Объединяя неравенства (16) и (17), получаем:

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0^*, \tilde{C}^*)| \leq |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0, C)|,$$

но из (15) имеем  $f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}_0^*, \tilde{C}^*) = f'(z_2, C_0, C)$ , и неравенство (13) доказано, а вместе с ним и теорема 3.

Теорема 3 также допускает гидродинамическую интерпретацию. Пусть стенки канала с горизонтальным дном имеют форму цилиндрических поверхностей с вертикальными образующими, и в канале движется идеальная несжимаемая жидкость с фиксированным расходом. Тогда (см. рис. 138):

*при вдавливании одной стенки все линии тока приближаются к противоположной стенке, скорости в недеформированных частях первой стенки уменьшаются, а скорости в точках наибольшей деформации и во всех точках второй стенки возрастают.*

**62. Граничные производные.** Установленные выше вариационные принципы допускают различные количественные уточнения. Прежде чем переходить к таким уточнениям, отметим одно простое приложение принципов к оценкам граничной производной. Вернемся к случаю отображений односвязных областей  $D(C)$  на единичный круг  $|w| < 1$  при условии, что некоторая фиксированная их точка  $z_0$  переходит в центр круга  $w = 0$ .

Пусть  $z_1$  — произвольная правильная точка  $C$ ; проведем через точку  $z_1$  два замкнутых контура  $C_1$  и  $C_2$ , касающихся  $C$  в точке  $z_1$  и таких, что область  $D(C_1)$  содержит точку  $z_0$  и содержится в области  $D(C)$ , а область  $D(C_2)$  содержит область  $D(C)$ . В силу теоремы 1 п. 60 будем иметь:

$$|f'(z_1, C_1)| < |f'(z_1, C)| < |f'(z_1, C_2)|. \quad (1)$$

Если за  $D(C_1)$  и  $D(C_2)$  принять области, отображаемые на единичный круг с помощью известных функций, то полученные

неравенства дадут конкретные числовые оценки сверху и снизу для  $|f'(z, C)|$ .

Применим это общее соображение к оценке  $|f'(z, C)|$  для случая, когда кривая  $C$  близка к единичной окружности.

**Теорема 1.** Пусть линия  $C$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $C$  принадлежит кольцу  $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$ ;
- 2) углы между касательной к  $C$  и касательной к окружности  $|z| = 1$  в точках с одинаковым аргументом не больше  $\mu$ ;
- 3) кривизна  $k$  линии  $C$  отличается от единицы не больше чем на  $\varepsilon_1$ .

При этих условиях для граничной производной функции  $w = f(z, C)$ ,  $f(0, C) = 0$ , реализующей отображение  $D(C)$  на единичный круг, имеем оценки:

$$\frac{1 - \varepsilon - 2\varepsilon_1 - \mu^2}{1 + \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1} < |f'(z, C)| < \frac{1 + \varepsilon + 2\varepsilon_1 - \mu^2}{1 - \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon\varepsilon_1}, \quad (2)$$

или, более грубые,

$$1 - 2\varepsilon - \varepsilon_1 - \eta < |f'(z, C)| < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta, \quad (3)$$

в которых  $\eta$  — малая выше первого порядка по отношению к  $\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \mu^2}$ .

Для получения искомых оценок достаточно воспользоваться описанным выше общим приемом.

Пусть  $z_1 = re^{i\varphi}$  — произвольная точка  $C$ ; проведем через  $z_1$  окружность  $C_1$  радиуса  $r_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon_1}$ , касающуюся линии  $C$ , и будем считать для простоты, что точке  $z_1$  при рассматриваемом отображении соответствует точка  $w = 1$ . Рассмотрим еще функцию  $z = g(w)$  ( $g(0) = 0$ ,  $g(1) = z_1$ ), реализующую конформное отображение круга  $|w| < 1$  на круг  $C_1$ . В силу основного вариационного принципа (см. п. 60)

$$|f'(z_1, C)| > \frac{1}{|g'(1)|}. \quad (4)$$

Подсчет  $g'(1)$  упрощает следующее замечание. Рассмотрим семейство всех отображений круга  $|w| < 1$  на круг  $C_1$ , преобразующих  $w_1$  в фиксированную точку  $z_1$  окружности  $C_1$  и имеющих в этой точке фиксированное растяжение. Это семейство, очевидно, зависит от одного действительного параметра. Покажем, что образ любой точки круга  $|w| < 1$  при всех отображениях этого семейства описывает некоторую окружность  $C_0$ , касающуюся  $C_1$  в точке  $z_1$ . Для доказательства отобразим конформно круги  $|w| < 1$  и  $C_1$  на верхние полуплоскости  $\text{Im } \omega > 0$  и  $\text{Im } \xi > 0$  так, чтобы точки  $w_1$  и  $z_1$  переходили в бесконечно удаленные точки. Рассматриваемое семейство перейдет при

этом в семейство отображений верхней полуплоскости на себя, оставляющих неподвижной точку  $\infty$  и имеющих в ней фиксированное растяжение, т. е. отображений вида  $\zeta = \alpha_0 \omega + \beta$ , где  $\alpha_0$  — фиксированный и  $\beta$  — переменный действительные параметры. При различных отображениях семейства образ фиксированной точки  $\omega$  описывает, очевидно, прямую, параллельную оси  $\text{Im } \zeta = 0$ , и, возвращаясь к старым переменным  $\omega$  и  $z$ , мы получим то, что хотели.

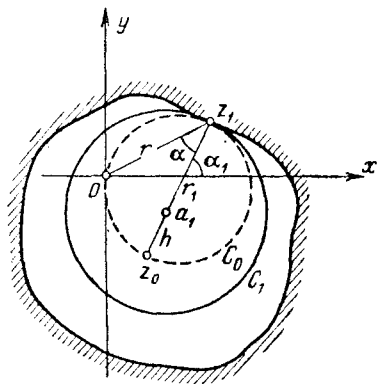


Рис. 139.

Учитывая это замечание, мы проведем окружность  $C_0$ , касающуюся  $C$  в точке  $z_1$  и проходящую через начало координат, и заменим условие  $g(0) = 0$  условием  $g(0) = z_0$ , где  $z_0$  означает точку  $C_0$ , диаметрально противоположную  $z_1$ . Обозначим через  $a_1$  центр окружности  $C_1$ ,  $h = |z_0 - a_1|$  и  $\alpha_1 = \arg(z_1 - a_1)$ . Имеем (рис. 139):  $z_0 = a_1 - h e^{i\alpha_1}$ ,  $z_1 = a_1 + r_1 e^{i\alpha_1}$ , и функция

$$z = r_1 e^{i\alpha_1} \zeta + a_1$$

осуществляет отображение круга  $|\zeta| < 1$  на круг  $C_1$  так, что точки  $\zeta = 0, 1$  и  $-h/r_1$  переходят соответственно в точки  $z = a_1, z_1$  и  $z_0$ . С другой стороны, функция

$$\zeta = \frac{w - \frac{h}{r_1}}{1 - \frac{h}{r_1} w}$$

отображает круг  $|w| < 1$  на круг  $|\zeta| < 1$  так, что точки  $w = 0, 1$  переходят в точки  $\zeta = -h/r_1, 1$ .

Отсюда для искомой функции  $z = g(w)$  ( $g(0) = z_0$ ,  $g(1) = z_1$ ) получаем выражение

$$z = g(w) = \frac{r_1 w - h}{r_1 - h w} r_1 e^{i\alpha_1} + a_1$$

и

$$|g'(1)| = \frac{r_1^2 - h^2}{(r_1 - h)^2} r_1 = \frac{r_1 + h}{r_1 - h} r_1. \quad (5)$$

Обозначим через  $\alpha$  угол между векторами  $z_1$  и  $z_1 - z_0$ ; из прямоугольного треугольника  $z_0 O z_1$  получим:  $r = (r_1 + h) \cos \alpha$ , откуда  $\frac{h}{r_1} = \frac{r}{r_1 \cos \alpha} - 1$ , и по (5)

$$|g'(1)| = \frac{1}{\frac{2}{r} \cos \alpha - \frac{1}{r_1}}.$$

Вспоминая (4), получим:

$$|f'(z_1, C)| > \frac{2}{r} \cos \alpha - \frac{1}{r_1}. \quad (6)$$

Согласно условиям теоремы имеем  $1 - \varepsilon < r < 1 + \varepsilon$ ,  $|\alpha| < \mu$ , следовательно,  $\frac{2}{r} \cos \alpha \geq \frac{2}{1 + \varepsilon} \left(1 - \frac{\mu^2}{2}\right)$ , а так как  $\frac{1}{r_1} < 1 - \varepsilon_1$ , то с точностью до малых порядка выше второго получаем:

$$|f'(z_1, C)| > \frac{(2 - \mu^2)(1 - \varepsilon_1) - (1 + \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon_1)} \approx \frac{1 - \varepsilon - 2\varepsilon_1 - \mu^2}{1 + \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1} =$$

$$= 1 - 2\varepsilon - \varepsilon_1 - \eta,$$

где  $\eta$  — малая порядка выше первого.

Заменяя круг  $C_1$  кругом  $C_2$  радиуса  $r_2 = \frac{1}{1 - \varepsilon_1}$ , получим аналогичную оценку сверху

$$|f'(z_1, C)| < \frac{2}{r} \cos \alpha - \frac{1}{r_2} \approx \frac{1 + \varepsilon + 2\varepsilon_1 - \mu^2}{1 - \varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon\varepsilon_1} = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta,$$

и теорема 1 доказана.

Из оценок для модуля граничной производной при дополнительном предположении  $f'(0, C) > 0$  можно получить оценку на границе и для  $|\arg f(z, C) - \arg z|$ . Докажем предварительно следующую лемму:

**Лемма.** Для любого отображения  $w = f(z, C)$ ,  $f(0, C) = 0$ ,  $f'(0, C) > 0$ , на кривой  $C$  найдется точка  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$  с неподвижным аргументом, т. е. такая, что

$$f(r_0 e^{i\varphi_0}, C) = e^{i\varphi_0}.$$

Для доказательства обозначим через  $g(w)$  функцию, обратную  $f$ , и рассмотрим в единичном круге  $|w| < 1$  функцию  $\frac{g(w)}{w}$ . Она аналитична в этом круге и всюду отлична от нуля,

ибо  $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} = g'(0) > 0$ , поэтому там гармонична функция

$h(w) = \arg \frac{g(w)}{w} = \operatorname{Im} \ln \frac{g(w)}{w}$ . Имеем  $h(0) = \operatorname{Im} \ln g'(0) = 0$ , а на окружности  $h(w) = \varphi - \theta$ , где  $\varphi = \arg g(\rho e^{i\theta})$ . По теореме о среднем для гармонических функций

$$0 = h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi - \theta) d\theta;$$

следовательно, существует хотя бы одна точка, в которой  $\varphi - \theta = 0$ . Лемма доказана.

Докажем теперь теорему:

**Теорема 2.** В условиях предыдущей теоремы и при дополнительном условии  $f'(0, C) > 0$  в любой точке  $z = re^{i\varphi}$  границы  $C$  имеем:

$$|\arg f(z, C) - \arg z| < \pi(3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta), \quad (7)$$

где  $\eta$  — малая второго порядка по отношению к  $\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \mu^2}$ .

Пусть  $\varphi_0$  — неподвижный аргумент,  $\theta = \arg f(re^{i\varphi}, C)$  и  $ds$  — элемент дуги  $C$  в точке  $re^{i\varphi}$ ; имеем:

$$\theta - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} |f'(re^{i\varphi}, C)| ds.$$

В наших условиях  $\frac{1}{1+\varepsilon} d\varphi < ds < \frac{1}{1-\varepsilon} d\varphi$ ; следовательно, учитывая левую часть неравенства (3), получим:

$$\theta - \varphi_0 > \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1 - 2\varepsilon - \varepsilon_1 - \eta}{1 + \varepsilon} d\varphi = (\varphi - \varphi_0) - (3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta)(\varphi - \varphi_0),$$

или

$$\theta - \varphi > -(3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta)(\varphi - \varphi_0). \quad (8)$$

Аналогично, используя правую часть (3), будем иметь:

$$\theta - \varphi < (3\varepsilon + \varepsilon_1 + \eta)(\varphi - \varphi_0). \quad (9)$$

Объединяя полученные неравенства и замечая, что можно рассматривать лишь те  $\varphi$ , для которых  $|\varphi - \varphi_0| < \pi$ , получим искомую оценку (7).

Оценки для  $|\theta - \varphi|$  можно получать и без использования неравенств (3) и притом в менее ограничительных предположениях, например без гипотезы малости  $\varepsilon_1$ . Укажем вкратце путь получения таких оценок.

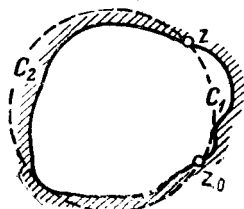


Рис. 140.

Как и выше, достаточно оценить длину дуги  $\theta$  окружности  $|\omega| = 1$ , соответствующей дуге  $z_0 z$  кривой  $C$  с концом в точке  $z_0$  с неподвижным аргументом. Для этого соединим точки  $z_0$  и  $z$  дугой окружности  $C_1$ , лежащей в  $D(C)$  и касающейся  $z_0 z$ , и дугой окружности  $C_2$ , лежащей вне  $D(C)$

и касающейся  $C$  в точке, вне  $z_0 z$  (рис. 140). По принципу Монтеля (п. 60) при отображении  $\omega = f(z, C_1 + C_2)$ , которое реализуется элементарными функциями (см. п. 34), дуга  $C_1$  перейдет в дугу окружности  $|\omega| = 1$  длины, большей  $\theta$ ; отсюда мы получим оценку для  $\theta$  сверху. Меняя ролями  $C_1$  и  $C_2$ , получим

оценку снизу. При  $\varepsilon < \mu < 0,1$  такой путь приводит к неравенству

$$|\arg f(z, C) - \arg z| < 1,6\mu. \quad (10)$$

Доказанные две теоремы дают оценки для вариации модуля производной и аргумента отображающей функции в зависимости от вариации границы области. Эти теоремы доказаны для граничных точек, но в силу принципа максимума они остаются справедливыми и внутри области.

## § 2. Отображения близких областей

В этом параграфе даются приближенные формулы для конформных отображений областей, мало отличающихся от областей, отображения которых на канонические области известны. Полученные в предыдущем пункте результаты позволят нам оценить точность таких приближенных формул. Мы начинаем с областей, мало отличающихся от единичного круга.

**63. Области, близкие к кругу.** Будем по-прежнему считать замкнутую линию  $C$  близкой к единичной окружности  $|z| = 1$  по положению и кривизне, т. е. в ее полярном уравнении

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (1)$$

будем считать

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Главную часть  $f(z, C)$  мы получим, отправляясь от формулы (9) п. 34 для отображения круга с выброшенной луночкой площади  $\sigma_t$ , угловые точки которой близки к  $e^{it}$ ,

$$\omega \approx z \left\{ 1 + \frac{\sigma_t}{2\pi} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \right\} = z + \frac{\sigma_t}{2\pi} \eta_t(z) \quad (3)$$

$$(\omega(0) = 0, \quad \omega'(0) > 0).$$

Предположим, что из круга  $|z| < 1$  выброшены две луночки,  $\sigma_{t_1}$  и  $\sigma_{t_2}$ , угловые точки которых близки соответственно к  $e^{it_1}$  и  $e^{it_2}$ . По формуле (3) находим отображение круга  $|z| < 1$  с выброшенной луночкой  $\sigma_{t_1}$  на круг  $|\omega| < 1$ :

$$\omega \approx z + \frac{\sigma_{t_1}}{2\pi} \eta_{t_1}(z). \quad (4)$$

С принятой степенью точности можно считать, что луночка  $\sigma_{t_2}$  переходит в луночку той же площади и с угловыми точками, близкими к  $\omega = e^{it_2}$ . Теперь снова воспользуемся формулой (3), согласно которой функция

$$\omega \approx \omega + \frac{\sigma_{t_2}}{2\pi} \eta_{t_2}(\omega) \quad (5)$$



реализует отображение круга  $|\omega| < 1$  с выброшенной луночкой  $\sigma_{t_1}$  на круг  $|\omega| < 1$ . Подставляя в (5) выражение  $\omega$  из (4) и замечая, что благодаря наличию множителя  $\sigma_{t_1}$  под знаком функции  $\eta_{t_1}(\omega)$  с принятой степенью точности можно заменить  $\omega$  на  $z$ , получим отображение круга  $|z| < 1$  с выброшенными двумя луночками на единичный круг

$$w \approx z + \frac{\sigma_{t_1}}{2\pi} \eta_{t_1}(z) + \frac{\sigma_{t_2}}{2\pi} \eta_{t_2}(z). \quad (6)$$

Формула (6) остается в силе, если выбрасываемые участки круга по форме отличны от луночек.

Перейдем к общему случаю области  $D$ , ограниченной кривой (1). Заменим эту кривую ломаной, состоящей из дуг окружностей и отрезков радиусов (рис. 141). Площадь выброшенного сектора  $\sigma_k = (1 - r(t_k)) \Delta t_k = \delta(t_k) \Delta t_k$ , где  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ , поэтому, применяя обобщенную на случай  $n$  выброшенных секторов формулу (6), получим:

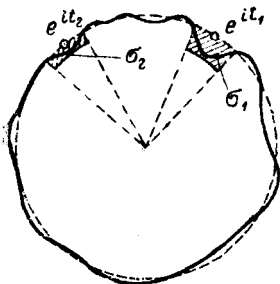


Рис. 141.

$$f(z, C) \approx z + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \delta(t_k) \eta_{t_k}(z) \Delta t_k.$$

Заменяя сумму интегралом и подставляя вместо  $\eta_t(z)$  ее выражение из (3), найдем окончательную приближенную формулу для конформного отображения на круг области, близкой к кругу:

$$f(z, C) \approx z \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right\} \quad (7)$$

$$(f(0, C) = 0, \quad f'(0, C) > 0).$$

Изложенный вывод формулы (7) геометрически нагляден, однако он не является достаточно строгим и не дает оценки погрешности, допускаемой этой формулой. Поэтому мы приведем еще, следуя Г. В. Сирьку\*), аналитический вывод этой формулы, основанный на интеграле Шварца (4) п. 44.

Обозначим через  $z = g(w)$  функцию, обратную функции  $w = f(z, C)$ . Тогда  $g(w)/w$  будет правильной аналитической в круге  $|w| < 1$  функцией, отличной от нуля, и поэтому  $\operatorname{In} \frac{g(w)}{w}$

\*) Г. В. Сирьку, О конформном отображении близких областей, Успехи матем. наук, т. XI, вып. 5 (71), 1956, 57—60.

можно представить интегралом Шварца. Если считать известным соответствие  $\varphi = \varphi(\theta)$  аргументов точек  $w = e^{i\theta}$  единичной окружности и точек  $z = re^{i\varphi}$  кривой  $C$  и учесть, что на окружности  $\operatorname{Re} \ln \frac{g(w)}{w} = \ln r [\varphi(\theta)]$ , где  $r = r(\varphi)$  — полярное уравнение  $C$ , то этот интеграл запишется в виде

$$\ln \frac{g(w)}{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln r [\varphi(\theta)] \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\theta \quad (8)$$

(в формуле (4) п. 44 мы полагаем  $C = 0$ , ибо в силу принятого условия нормировки у нас  $g'(0) > 0$  и, следовательно, левая часть (8) действительна при  $w = 0$ ).

Для оценки интеграла (8) воспользуемся следующей леммой.

*Лемма. Если непрерывно дифференцируемая действительная функция  $u(t)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  удовлетворяет условиям  $u(0) = u(2\pi)$ ,*

$$|u(t)| < \varepsilon, \quad |u'(t)| < \varepsilon, \quad (9)$$

*то интеграл Шварца*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \quad (10)$$

*для всех  $z$ ,  $|z| < 1$ , удовлетворяет неравенству*

$$|F(z)| < M\varepsilon, \quad (11)$$

*где  $M$  — некоторая постоянная.*

Для доказательства заметим прежде всего, что как следует из свойств интеграла Шварца для всех  $z$ ,  $|z| < 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = 1,$$

поэтому

$$F(re^{i\varphi}) - u(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(t) - u(\varphi)] \frac{e^{it} + re^{i\varphi}}{e^{it} - re^{i\varphi}} dt.$$

Но по условиям леммы и по теореме о среднем  $|u(t) - u(\varphi)| < \varepsilon |t - \varphi|$ , следовательно, по теореме об оценке интеграла

$$|F(re^{i\varphi}) - u(\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} |t - \varphi| \cdot \left| \frac{e^{it} + re^{i\varphi}}{e^{it} - re^{i\varphi}} \right| dt.$$

Очевидно, что интеграл в правой части ограничен для всех  $r$ ,  $0 \leq r \leq 1$ , и для всех  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , а так как у нас по условию  $|u(\varphi)| < \varepsilon$ , то

$$|F(re^{i\varphi})| \leq |F(re^{i\varphi}) - u(\varphi)| + |u(\varphi)| < M\varepsilon,$$

где  $M$  — некоторая постоянная. Лемма доказана.

Вернемся к выводу формулы (7). В силу условия  $|\delta(\varphi)| < \varepsilon$  мы имеем:

$$\ln r[\varphi(\theta)] = \ln\{1 - \delta[\varphi(\theta)]\} = -\delta[\varphi(\theta)] + O(\varepsilon^2),$$

кроме того, как видно из доказательства теоремы 2 предыдущего пункта, в условиях (2)  $\varphi'(\theta) = 1 + O(\varepsilon)$ , поэтому

$$\{\delta[\varphi(\theta)]\}' = \delta'[\varphi(\theta)]\varphi'(\theta) = O(\varepsilon)$$

и

$$\{\ln r[\varphi(\theta)]\}' = -\frac{\{\delta[\varphi(\theta)]\}'}{1 - \delta[\varphi(\theta)]} = -\{\delta[\varphi(\theta)]\}' + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, по доказанной лемме замена в интеграле (8)  $\ln r[\varphi(\theta)]$  на  $-\delta[\varphi(\theta)]$  приведет к погрешности порядка  $O(\varepsilon^2)$ .

Далее по теореме 2 предыдущего пункта  $\theta - \varphi = O(\varepsilon)$ , поэтому в наших условиях

$$\delta(\varphi) = \delta(\theta) + \delta'(\varphi^*)(\theta - \varphi) = \delta(\theta) + O(\varepsilon^2)$$

$$\{\delta[\varphi(\theta)]\}' - \delta'(\theta) = \delta'(\varphi)[1 + O(\varepsilon)] - \delta'(\theta) =$$

$$= \delta'(\varphi) - \delta'(\theta) + O(\varepsilon^2) = \delta''(\varphi^{**})(\varphi - \theta) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2)$$

( $\varphi^*$ ,  $\varphi^{**}$  — точки, заключенные между  $\theta$  и  $\varphi$ ). Таким образом, по лемме в рассматриваемом интеграле с принятой степенью точности можно заменить еще  $\delta[\varphi(\theta)]$  на  $\delta(\theta)$ , и мы получим:

$$\ln \frac{g(w)}{w} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\theta + O(\varepsilon^2). \quad (12)$$

Так как по той же лемме в наших условиях  $\ln \frac{g(w)}{w} = O(\varepsilon)$ , то  $\frac{g(w)}{w} = e^{\ln \frac{g(w)}{w}} = 1 + \ln \frac{g(w)}{w} + O(\varepsilon^2)$  и вместо (12) можно написать

$$z = g(w) = w \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\theta \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (13)$$

Из этой формулы легко получить и формулу для обратного отображения  $w = f(z, C)$  — для этого достаточно переписать (13) в виде

$$w = \frac{z}{1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\theta} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= z \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\theta \right\} + O(\varepsilon^2)$$

и на основании соотношений  $\delta(\theta) = O(\varepsilon)$ ,  $w - z = O(\varepsilon)$  заметить, что с принятой степенью точности под знаком интеграла можно заменить  $w$  на  $z$ . Таким образом доказана

**Теорема.** Если кривая  $C$  с полярным уравнением

$$r = r(\varphi) = 1 - \delta(\varphi)$$

удовлетворяет условиям

$$|\delta(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta'(\varphi)| < \varepsilon, \quad |\delta''(\varphi)| < \varepsilon,$$

то функцию  $w = f(z, C)$ ,  $f(0, C) = 0$ ,  $f'(0, C) > 0$ , реализующую конформное отображение области  $D(C)$  на единичный круг, можно представить в виде

$$w = f(z, C) = z \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (14)$$

Для практических целей полезно отметить еще соотношения между полярными координатами точек  $z = re^{i\varphi}$  и  $w = \rho e^{i\theta}$ , соответствующих друг другу при рассматриваемом отображении:

$$\left. \begin{aligned} r &\approx \rho \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - t) + \rho^2} dt \right\}, \\ \varphi &\approx \theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{2\rho \sin(\theta - t)}{1 - 2\rho \cos(\theta - t) + \rho^2} dt. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Эти соотношения получаются отделением действительных и мнимых частей в формуле (13) (ср. п. 44) и справедливы с точностью до малых порядка  $\varepsilon^2$ . При  $\rho = \text{const}$  они дают параметрические уравнения прообразов окружностей  $|w| = \rho$ .

Вторая из формул (15) справедлива и при  $\rho = 1$

$$\varphi \approx \theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) \sin(\theta - t)}{1 - \cos(\theta - t)} dt = \theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta - t}{2} dt,$$

откуда

$$\Delta\theta \approx \varphi - \theta \approx -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} dt. \quad (16)$$

Интеграл в формуле (16) следует понимать как особый, ибо в точке  $t = \theta$  подынтегральная функция обращается в бесконечность первого порядка. Замечая, что по свойству интеграла от периодической функции пределы интегрирования в (16) можно взять от  $\theta - \pi$  до  $\theta + \pi$ , и пользуясь нечетностью котангенса, получим, что главное значение интеграла равно

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} d\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} \right\} = 0.$$

Поэтому формулу (16) можно переписать в виде

$$\Delta\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\delta(t) - \delta(\theta)\} \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} dt, \quad (17)$$

где интеграл понимается уже в обычном смысле (ср. п. 52; функция  $\delta(t)$  удовлетворяет условию Гёльдера, ибо она дважды дифференцируема).

Наиболее важной для практических применений является формула (16). По этой формуле можно вычислять не только значения  $\varphi$  по  $\theta$ , но при условиях (2) также и значения граничной производной. В самом деле, представляя разность  $\Delta\theta = \varphi - \theta$  по формуле (17) и дифференцируя по параметру  $\theta$ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} &\approx 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{2 \sin^2 \frac{t - \theta}{2}} - \delta'(\theta) \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} \right\} dt = \\ &= 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} dt, \end{aligned}$$

ибо, как мы отмечали выше, интеграл  $\operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2}$  от 0 до  $2\pi$  равен нулю.

Но с точностью до малых второго порядка относительно  $\varepsilon$  величина  $|g'(e^{i\theta})|$  равна отношению длин дуг, соответствующих друг другу при отображении (13), т. е.

$$|g'(e^{i\theta})| \approx \{1 - \delta(\varphi)\} \frac{d\varphi}{d\theta}. \quad (18)$$

Отсюда, окончательно,

$$|g'(e^{i\theta})| \approx 1 - \delta(\varphi) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} dt, \quad (19)$$

или, переходя к обратной функции,

$$|f'(z, C)| \approx 1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} dt. \quad (20)$$

Применяя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно оценить погрешность в формуле (19) и, в частности, показать, что эта погрешность есть малая высшего порядка сравнительно с  $\varepsilon$ .

При практических вычислениях функции  $f(z, C)$  по вариации  $\delta(\varphi)$  проще всего задавать  $\delta$  с помощью тригонометрической суммы:

$$\delta(\varphi) = \varepsilon (a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots). \quad (21)$$

Подставляя это разложение в формулу (14), мы придем к вычислению интегралов вида

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin nt \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt.$$

Чтобы вычислить их, заметим, что на единичной окружности, где  $\zeta = e^{it}$ , имеем  $\cos nt = \operatorname{Re} \zeta^n$  и  $\sin nt = \operatorname{Re}(-i\zeta^n)$ . Поэтому, пользуясь интегралом Шварца п. 44, можно утверждать, что для  $|z| < 1$  эти интегралы соответственно равны  $I_1 = z^n$  и  $I_2 = -iz^n$ .

Учитывая эти результаты, мы найдем из (14) приближенное выражение функции, реализующей отображение области  $D(C)$  на единичный круг:

$$f(z, C) = z + \varepsilon z [a_0 + (a_1 - ib_1)z + (a_2 - ib_2)z^2 + \dots] + O(\varepsilon^2). \quad (22)$$

Приближенное выражение обратной функции находится обычным образом и имеет вид

$$g(w) = w - \varepsilon w [a_0 + (a_1 - ib_1)w + (a_2 - ib_2)w^2 + \dots] + O(\varepsilon^2),$$

откуда легко находится

$$g'(w) = 1 - \varepsilon [a_0 + 2(a_1 - ib_1)w + 3(a_2 - ib_2)w^2 + \dots] + O(\varepsilon^2)$$

и, в частности, растяжение на границе

$$|g'(e^{i\theta})| = e^{\operatorname{Re} \ln g'(e^{i\theta})} = 1 - \varepsilon [a_0 + 2(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + 3(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \dots] + O(\varepsilon^2), \quad (23)$$

а также соответствие аргументов граничных точек

$$\varphi = \theta + \operatorname{Im} \ln \frac{g(w)}{w} = \theta - \varepsilon (a_1 \sin \theta - b_1 \cos \theta + a_2 \sin 2\theta - b_2 \cos 2\theta + \dots) + O(\varepsilon^2). \quad (24)$$

В случае задания  $\delta(\varphi)$  в виде тригонометрического многочлена формулы (22)–(24) весьма удобны для расчетов.

**Пример.** Рассмотрим отображение на единичный круг эллипса с полуосями  $a = 1 + \varepsilon$  и  $b = 1$ . Так как уравнением эллипса служит  $x = (1 + \varepsilon) \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ , то  $\rho = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 + \varepsilon \cos^2 \varphi + O(\varepsilon^2)$ , следовательно,  $\delta(\varphi) = -\varepsilon \cos^2 \varphi = -\frac{\varepsilon}{2}(1 + \cos 2\varphi)$  и по формуле (22)

$$f(z, C) = z - \frac{\varepsilon}{2} z (1 + z^2) + O(\varepsilon^2). \quad (25)$$

В заключение отметим, что все формулы этого пункта остаются в силе и для конформных отображений

$$w = F(z, C), \quad F(\infty, C) = \infty$$

внешности близких к кругу областей на внешность единичного круга. При этом  $\delta(\varphi)$  следует определять не из уравнения (1), а из полярного уравнения кривой  $C$  в виде

$$r = r(\varphi) = 1 + \delta(\varphi). \quad (26)$$

Это замечание следует из того, что формула (3), на которой основаны все дальнейшие формулы пункта, справедлива также и для отображения внешности единичного круга плоскости  $z$  с выброшенной луночкой на внешность единичного круга плоскости  $w$ . В последнем проще всего убедиться, совершая дополнительные преобразования  $z = \frac{1}{\zeta}$ ,  $w = \frac{1}{\omega}$  плоскостей  $z$  и  $w$ .

**64. Области, близкие к данной.** В этом пункте дается приближенное решение следующей важной для приложений задачи.

Пусть задана односвязная область  $D(C)$  с границей  $C$ , удовлетворяющей условию Ляпунова (см. п. 29), и пусть известна функция

$$\omega = f(z, C), \quad f(z_0, C) = 0, \quad f'(z_0, C) > 0, \quad (1)$$

реализующая отображение  $D(C)$  на единичный круг ( $z_0 \in D$  — фиксированная точка). Требуется найти конформное отображение на тот же круг

$$\omega = f(z, \tilde{C}), \quad f(z_0, \tilde{C}) = 0, \quad f'(z_0, \tilde{C}) > 0 \quad (2)$$

области  $D(\tilde{C})$ , близкой к  $D(C)$ .

Простое решение этой задачи можно дать, пользуясь полученными в предыдущем пункте формулами. Пусть  $z_1$  — точка  $C$ , переходящая при отображении (1) в точку  $\omega = 1$ . Через  $s$  мы обозначим длину дуги  $C$  между  $z_1$  и произвольной точкой  $z$  этого контура; при движении  $z$  по  $C$  от точки  $z_1$  в положительном направлении число  $s$  меняется от 0 до  $l$ , где  $l$  — длина контура  $C$ .

Так как  $C$  удовлетворяет условию Ляпунова, то отображение (1) конформно на границе (см. п. 29), поэтому, если обозначить через  $\theta$  аргумент точки

$$\omega = f(z, C) \text{ на окружности } |\omega| = 1, \text{ то мы будем иметь } \frac{d\theta}{ds} = |f'(z, C)| \text{ и}$$

$$\theta(s) = \int_0^s |f'(z, C)| ds. \quad (3)$$

Допустим теперь, что контур  $\tilde{C}$  близок к  $C$  в следующем смысле.

Обозначим через  $\delta(s)$  длину отрезка нормали к  $C$  в точке  $z$ , заключенного между  $C$  и  $\tilde{C}$ , взятую со знаком «+», если этот отрезок принадлежит  $D(C)$  и со знаком «−» в противоположном случае (рис. 142); мы предполагаем, что

$$|\delta(s)| < \varepsilon, \quad |\delta'(s)| < \varepsilon, \quad |\delta''(s)| < \varepsilon, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — фиксированное малое число.

В плоскости  $\omega = re^{i\theta}$  построим кривую  $\tilde{C}^*$ , близкую к единичной окружности, которая определяется полярным уравнением

$$\rho = 1 - |f'(z, C)| \delta(s) = 1 - \delta^*(s),$$

где  $s$  есть функция  $\theta$ , определяемая формулами (3). Пусть

$$\omega = f(\omega, \tilde{C}^*); \quad f(0, \tilde{C}^*) = 0, \quad f'(0, \tilde{C}^*) > 0, \quad (5)$$

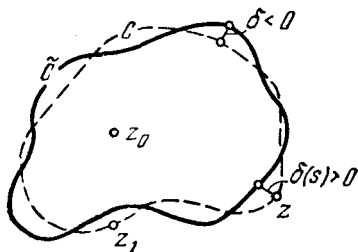


Рис. 142.



будет функция, определенная по формуле (7) предыдущего пункта, в которой вместо  $\delta(t)$  подставлена  $\delta^*(t)$ ; тогда искомое отображение области  $D(\tilde{C})$  на единичный круг может быть, очевидно, построено по следующей формуле \*):

$$w = f(z, \tilde{C}) \approx f[f(z, C), \tilde{C}^*] \approx f(z, C) \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta^*(t) \frac{e^{it} + f(z, C)}{e^{it} - f(z, C)} dt \right\}. \quad (6)$$

Используя формулы (16) и (19) предыдущего пункта, можно найти также вариацию соответствия границ и вариацию производной при переходе от данного отображения к близкому отображению.

Остановимся еще на одном важном частном случае только что разобранный задачи, когда контур  $\tilde{C}$  отличается от  $C$  только на малой дуге с центром в точке  $a$  контура (так называемый случай *локальной вариации*).

Обозначим через  $\sigma$  площадь, заключенную между  $C$  и  $\tilde{C}$ ;  $\sigma$  мы будем брать со знаком «+», если  $C$  расположена внутри  $D(C)$ , и со знаком «—» в противном случае. Для локальной вариации формула (6) принимает вид:

$$f(z, \tilde{C}) \approx f(z, C) \left\{ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} |f'(a, C)|^2 \frac{e^{i\theta_0} + f(z, C)}{e^{i\theta_0} - f(z, C)} \right\}, \quad (7)$$

где  $\theta_0$  — аргумент точки окружности  $|\omega| = 1$ , соответствующей центру вариации  $a$  при отображении  $\omega = f(z, C)$ . Действительно, в этом случае вместо формулы (7) предыдущего пункта можно воспользоваться формулой (3) того же пункта, причем вместо  $\sigma$  в нем надо взять  $\sigma^* = |f'(a, C)|^2 \sigma$ . Из формулы (7) непосредственно следует, что *вариация отображения  $f$  пропорциональна площади  $\sigma$  и вблизи места вариации контура обратно пропорциональна расстоянию до этого места*.

В случае локальной вариации, когда функция  $\delta(\varphi)$  отлична от нуля лишь на участке длины  $\eta$  вблизи точки  $e^{i\theta_0}$  окружности  $|\omega| = 1$ , формула (19) п. 63 для растяжения на границе принимает вид:

$$\left| \frac{d\omega}{dw} \right| \approx 1 + \frac{\delta^*(\theta_0)}{4\pi} \frac{\eta}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_0}{2}} \approx 1 + \frac{\sigma^*}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_0}{2}} \quad (8)$$

\*) Для возможности применения формулы (6) мы должны предположить малыми не только  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\delta''$ , но также  $\delta^*$ ,  $\delta^{*'}$ ,  $\delta^{*''}$ , что всегда имеет место, если исходный контур достаточно гладок, например обладает дважды дифференцируемой кривизной.

(мы считаем, что  $\omega = e^{i\theta}$  лежит на недеформированной части границы, т. е.  $\delta(\theta) = 0$ ). Далее, по формуле производной сложной функции

$$|f'(z, \tilde{C})| = \left| \frac{dw}{d\omega} \right| \cdot \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \frac{|f'(z, C)|}{\left| \frac{d\omega}{dw} \right|},$$

подставляя сюда (8), найдем окончательно граничную производную

$$|f'(z, \tilde{C})| \approx |f'(z, C)| \left\{ 1 - \frac{\sigma}{4\pi} |f'(a, C)|^2 \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right\}, \quad (9)$$

где  $\theta_0$  и  $\theta$  — аргументы точек окружности  $|\omega| = 1$ , соответствующих при отображении  $\omega = f(z, C)$  точкам  $a$  и  $z$  контура  $C$ .

Из формулы (9) видно, что *вариация граничной производной функции  $f$  пропорциональна площади  $\sigma$  и вблизи места вариации обратно пропорциональна квадрату расстояния до этого места.*

**65. Распространение результатов.** Все изложенные выше предложения и формулы могут быть перенесены на случай конформного отображения на другие канонические области. Этот перенос можно осуществить или при помощи вспомогательного конформного отображения круга на такую область, или непосредственно с помощью вариационных принципов п. 60.

Приведем наиболее интересные из относящихся сюда формул.

1) Случай полуплоскости. Сохраним обозначения, принятые в п. 60, и допустим, что линия  $C$  определяется уравнением  $y = y(x)$ , причем

$$|y| < \varepsilon, \quad |y'| < \varepsilon, \quad |y''| < \varepsilon, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} xy(x) = 0. \quad (1)$$

При этих условиях функция

$$w = f(z, C), \quad f'(\infty, C) = 1,$$

реализующая отображение области  $D(C)$  на верхнюю полуплоскость, может быть представлена следующей приближенной формулой:

$$w = f(z, C) \approx z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) dt}{z - t} \quad (2)$$

(ср. формулу (7) п. 34). Для функции  $g(w)$ , обратной к  $f(z, C)$ , получаем отсюда:

$$g(w) \approx w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) dt}{w - t}. \quad (3)$$

Последняя формула справедлива для всех значений  $w$ ,  $\operatorname{Im} w \geq 0$ ; в частности, полагая  $w = u$ , мы получим соответствие между точками линии  $C$  и оси  $u$ ,

$$x \approx u - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) dt}{u-t}, \quad (4)$$

а также приближенную формулу для производной

$$|g'(u)| \approx 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t) - y(u)}{(t-u)^2} dt \quad (5)$$

(ср. вывод формулы (19) в предыдущем пункте).

Все приведенные формулы справедливы с точностью до малых высшего порядка сравнительно с  $\varepsilon^*$ ).

2) Случай полосы. Вполне аналогично, опираясь на вариационные принципы п. 58 и формулу (13) п. 34, легко получить приближенные формулы для конформного отображения областей, близких к полосе  $0 < y < 1$ , на полосу  $0 < v < 1$ . Допустим, что нам даны две линии,  $C_0$  и  $C$ :  $y = y_0(x)$  и  $y = y(x)$ , где  $y_0(x)$  и  $y(x)$  — однозначные функции, причем

$$\left. \begin{aligned} |y_0| < \varepsilon, \quad |y'_0| < \varepsilon, \quad |y''_0| < \varepsilon, \\ |y - 1| < \varepsilon, \quad |y'| < \varepsilon, \quad |y''| < \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При этих условиях функция

$$w = f(z, C_0, C); \quad f(\pm \infty, C_0, C) = \pm \infty$$

с точностью до малых второго порядка относительно  $\varepsilon$  может быть определена следующей формулой:

$$\begin{aligned} f(z, C_0, C) &\approx \\ &\approx z + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(z-t)}{2} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th} \frac{\pi(z-t)}{2} dt, \end{aligned} \quad (7)$$

а функция  $z = g(w)$ , обратная к  $f$ , — формулой

$$\begin{aligned} z = g(w) &\approx w - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(w-t)}{2} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th} \frac{\pi(w-t)}{2} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

\*) Интегралы (4) и (5), а также (2) и (3) при действительных  $z$  и  $w$  надо понимать как особые.

Последняя формула справедлива в замкнутой полосе  $0 \leq v \leq \leq 1$ . В частности, полагая  $w = u$ , мы получим соответствие точек оси  $u$  и линии  $C_0$ :

$$x \approx u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(u-t)}{2} dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th} \frac{\pi(u-t)}{2} dt. \quad (9)$$

Для того чтобы продифференцировать особый интеграл (9), поступим следующим образом. Замечая, что главное значение интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth} \frac{\pi(u-t)}{2} dt &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} \left\{ \left[ \ln \left| \operatorname{sh} \frac{\pi(u-t)}{2} \right| \right]_{-M}^{u-\alpha} + \left[ \ln \left| \operatorname{sh} \frac{\pi(u-t)}{2} \right| \right]_{u+\alpha}^M \right\} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(u-M)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi(u+M)}{2}} \right| = 2u, \end{aligned}$$

мы переписываем формулу (9) в виде

$$\begin{aligned} x \approx u - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{y_0(t) - y_0(u)\} \operatorname{cth} \frac{\pi(u-t)}{2} dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - y(t)\} \operatorname{th} \frac{\pi(u-t)}{2} dt - y_0(u) u. \end{aligned}$$

Теперь, дифференцируя по  $u$ , найдем:

$$|g'(u)| \approx 1 - y_0(u) + \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0(t) - y_0(u)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(t-u)}{2}} dt - \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - y(t)}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(t-u)}{2}} dt \quad (10)$$

(член  $-y'_0(u)u$  сокращается с тем, который получается при дифференцировании первого интеграла \*).

Отметим еще две формулы для случая, когда вариация носит локальный характер. Пусть,  $y(x) \equiv 1$ , а  $y_0(x) = 0$  во всех точках оси  $x$ , кроме малого интервала с центром в точке  $a$ , и

\*) В первом издании этой книги формула (10) была приведена с ошибкой, которую нам любезно указал Г. Ю. Степанов.

пусть  $\sigma$  — площадь, заключенная между осью  $x$  и кривой  $y = y_0(x)$  с соответствующим знаком (интеграл от  $y_0(x)$  по оси  $x$ ).  
При этих условиях вне окрестности точки  $a$  будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} |f'(x, C)| &\approx 1 - \frac{\pi}{4} \frac{\sigma}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(x-a)}{2}}, \\ |f'(x+i, C)| &\approx 1 + \frac{\pi}{4} \frac{\sigma}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(x-a)}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из формул (11) мы видим, что в случае полосы влияние локальной вариации затухает, как  $e^{-l}$ , где  $l$  — расстояние до места вариации.

Производя описанную локальную вариацию достаточное число раз, можно доказать, что имеет место более общий

Принцип локализации. Пусть  $d(z)$  обозначает диаметр наибольшего круга, который касается в точке  $z$  линии  $C_0$  и целиком содержится в полосе  $D(C_0, C)$ , и пусть для всех точек  $z$  этой линии

$$d = \theta d_{\text{ср}}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (12)$$

где  $d_{\text{ср}}$ ,  $\theta_1 > 0$  и  $\theta_2 < \infty$  — некоторые постоянные. Тогда для любой вариации полосы  $D(C_0, C)$  вне круга  $|z - z_0| \leq l$  вариация растяжения в точке  $z_0$  конформного отображения полосы  $D(C_0, C)$  на полосу  $0 < v < h$  удовлетворяет неравенству

$$\delta |f'(z_0, C_0, C)| < M e^{-m \frac{l}{d_{\text{ср}}}}, \quad (13)$$

где  $M$  и  $m$  — постоянные.

Можно подсчитать, что если место вариации расположено от точки  $z_0$  на расстоянии, большем, чем четырехкратная ширина полосы, то вариация  $\ln |f'(z_0, C_0, C)|$  составляет менее 1%.

Из формулы (13) следует также возможность применения формулы (10) при условиях более широких, чем те, при которых она была выведена. Так, если

$$\max \{ |y_0|, |y-1|, |y'_0|, |y'|, |y''_0|, |y''| \} < \varepsilon \{ |x-x_0|^\mu + 1 \}, \quad (14)$$

где  $\mu$  — произвольное положительное число, то в точке  $z_0 = x_0 + iy_0(x_0)$

$$|f'(z_0, C_0, C)| =$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0(t) - y_0(x_0)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi(t-x_0)}{2}} dt + \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-y(t)}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi(t-x_0)}{2}} dt + R, \quad (15)$$

причем остаточный член  $R$  оценивается формулой

$$|R| < k\varepsilon^2, \quad (16)$$

где  $k$  — постоянная, зависящая только от  $\mu$  и от  $\max |y(z) - y_0(x)|$ .

3) Узкие полосы. Значение производной конформного отображения данной полосы на прямолинейную полосу в какой-нибудь граничной точке зависит от положения этой точки и от всей границы полосы. В случае узких полос или полос с медленно меняющейся кривизной для граничных значений  $|f'(z, C_0, C)|$  можно дать приближенную формулу, в которой участвуют лишь ширина полосы, угол между  $C_0$  и  $C$  и кривизны этих линий, причем все эти величины берутся в данной граничной точке  $z$  одной линии и в некоторой точке (определяемой точкой  $z$ ) другой граничной линии. Мы остановимся на случае узких полос.

Пусть дана полоса  $D(C_0, C)$  и пусть  $z_0$  — произвольная точка линии  $C$ . По аналогии с луночками (см. п. 34) обозначим через  $n = n(z_0)$  отрезок  $z_0 z'_0$  нормали к  $C$  в точке  $z_0$ ;  $\vartheta = \vartheta(z_0)$  — угол между нормалью к  $C_0$  и  $C$  в точках  $z_0$  и  $z'_0$ ,  $k(z_0)$  и  $k_0(z'_0)$  — кривизны  $C$  и  $C_0$  в этих точках.

Пусть еще функция

$$w = f(z, C_0, C, h); \quad f(\pm \infty, C_0, C, h) = \pm \infty$$

осуществляет отображение  $D(C_0, C)$  на узкую полосу  $0 < v < h$ . В этих обозначениях имеет место

**Теорема.** Если  $h$  — малое положительное число, а линии  $C_0$  и  $C$  удовлетворяют условиям

$$a_1 h < n < a_2 h; \quad |\vartheta| < a_3 h, \quad \left\{ \left| \frac{k - k_0}{h} \right|, |k|, |k_0| \right\} < a_4, \quad (17)$$

$$\left\{ \left| \frac{dk}{ds} \right|, \left| \frac{dk_0}{ds} \right| \right\} < a_5, \quad \left\{ \left| \frac{d^2 k}{ds^2} \right|, \left| \frac{d^2 k_0}{ds^2} \right| \right\} < a_6,$$

где  $a_v$  — постоянные, не зависящие от  $h$ , то

$$|f'(z; C_0, C, h)| = \frac{h}{n} \left\{ 1 + \frac{n}{6} k_0 + \frac{n}{3} k + \frac{n^2}{12} k^2 + \frac{1}{3} \vartheta^2 \right\} + R, \quad (18)$$

причем остаточный член  $R$  оценивается формулой

$$|R| < A h^3, \quad (19)$$

где  $A$  — постоянная, зависящая только от постоянных  $a_v$ .

Проведем через точки  $z_0$  и  $z'_0$  окружности  $\tilde{C}$  и  $\tilde{C}_0$ , соприкасающиеся соответственно с линиями  $C$  и  $C_0$ ; через  $D(\tilde{C}_0, \tilde{C})$  обозначим луночку, ограниченную этими окружностями

(рис. 143). Так как по формуле (18) п. 34 растяжение в точке  $z_0$  при отображении  $D(\tilde{C}_0, \tilde{C})$  на полосу шириной  $h$

$$|f'(z_0, \tilde{C}_0, \tilde{C}; h)| = \frac{h}{n} \left\{ 1 + \frac{n}{6} k_0 + \frac{n}{3} k + \frac{n^2}{12} k^2 + \frac{1}{3} \theta^2 \right\} + O(h^3), \quad (20)$$

то для доказательства достаточно показать, что  $|f'(z_0, \tilde{C}_0, \tilde{C}; h)|$  отличается от  $|f'(z_0, C_0, C; h)|$  на малые порядка не ниже  $h^3$ .

В условиях доказываемой теоремы кривизны линий  $C_0$  и  $C$  конечны, а их разность — малая порядка  $h$ . Отсюда на основании элементарных вычислений можно заключить, что угловые

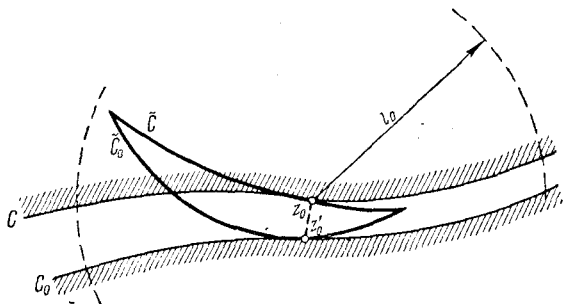


Рис. 143.

точки луночки  $D(\tilde{C}_0, \tilde{C})$  находятся на конечном расстоянии от точки  $z_0^*$ ). Согласно принципу локализации из раздела 2) этого пункта любая деформация области вне круга  $|z - z_0| \leq l$  дает изменение растяжения  $|f'(z_0, C_0, C)|$  на малые порядка не ниже  $h^3$ , если  $e^{-\frac{l}{h}} \leq Mh^3$ , т. е.  $l \geq \frac{h}{m} (3 \ln \frac{1}{h} - \ln M)^{**}$ ). Поэтому в наших оценках мы можем считать, что вне круга  $|z - z_0| \leq l_0 = \frac{3h}{m} \ln \frac{1}{h}$  область  $D(C_0, C)$  совпадает с луночкой  $D(\tilde{C}_0, \tilde{C})$ . Предположим сначала, что в круге  $|z - z_0| \leq l_0$  линия  $\tilde{C}_0$  совпадает с  $C_0$ . Совершим конформное отображение луночки  $D(\tilde{C}_0, \tilde{C})$  на полосу  $0 < \eta < h$  плоскости  $\xi = \xi + i\eta$ , переводящее  $\tilde{C}_0$  в нижний берег полосы  $\tilde{\Gamma}_0$ ,  $\tilde{C}$  — в верхний берег  $\tilde{\Gamma}$  и точку  $z_0$  — в точку  $\xi_0 = ih$ . Линия  $C$  переходит при этом в некоторую кри-

\*) Подсчет показывает, что квадрат половины основания луночки

$$d^2 = \frac{\alpha}{1 + k_0 k \alpha} \left( 1 - \frac{kh}{2} \right) (2 + k_0 h) \left( 1 + \frac{k_0 k \alpha}{2} \right),$$

где  $\alpha = \frac{h}{k - k_0}$  — ограниченная величина.

\*\*) В наших условиях принцип, очевидно, применим, причем можно принять  $d_{cp} = h$ .

вую  $\Gamma$ , соприкасающуюся с прямой  $\bar{\Gamma}$  в точке  $\xi_0 = ih$ . Согласно (20) растяжение при нашем отображении будет ограничено сверху и снизу, поэтому достаточно показать, что при  $|\xi| < l_0$  растяжение в точке  $\xi_0$  отображения полосы  $D(\Gamma_0, \Gamma)$  на полосу  $0 < v < h$  отличается от 1 (растяжения при отображении полосы  $D(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma})$  на себя) на малые порядка не ниже  $h^3$ .

В окрестности точки  $\xi = 0$  мы представляем уравнение  $\Gamma$  по формуле Тейлора

$$\eta = h + \alpha \xi^3 + \beta \xi^4 + o(\xi^4)$$

(коэффициенты при  $\xi$  и  $\xi^2$  исчезают, так как  $\Gamma$  соприкасается с прямой  $\bar{\Gamma}$ ). Для  $|\xi| < l_0$  остаточный член формулы представляет собой малую высшего порядка относительно  $h^4 \ln^4 \frac{1}{h}$ , т. е. с принятой степенью точности им можно пренебречь.

Попытаемся подобрать постоянные  $a$  и  $b$  так, чтобы функция

$$\zeta = w + a w^2 + b w^4 \quad (21)$$

реализовала отображение полосы  $0 < v < h$  на полосу плоскости  $\zeta$ , ограниченную осью  $\xi$  и (по крайней мере для  $|\xi| < l_0$ ) кривой  $\eta = h + \alpha \xi^3$ . Если  $a$  и  $b$  — действительны, то при действительных  $w = u$  значения  $\zeta$  также будут действительными, т. е. нижние берега полос соответствуют друг другу. При  $w = u + ih$  имеем:

$$\eta = h + 2ahu + 4bhu(u^2 - h^2),$$

$$\xi = u + a(u^2 - h^2) + b(u^4 - 6h^2u^2 + h^4);$$

следовательно, положив  $a = 2bh^2$ ,  $4bh = \alpha$ , получим:

$$\eta = h + \alpha u^3, \quad \xi = u + \frac{\alpha}{4h}(u^4 - 4h^2u^2 - h^4).$$

Из второго уравнения видно, что  $u = \xi + O\left(h^3 \ln^3 \frac{1}{h}\right)$ ; следовательно, с принятой степенью точности в первом уравнении можно принять  $u = \xi$ , и мы получим  $\eta = h + \alpha \xi^3$ , что и требуется. Подставляя в (21) найденные значения  $a$  и  $b$ , получим искомое отображение

$$\zeta = w + \frac{\alpha h}{2} w^2 + \frac{\alpha}{4h} w^4. \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что соответствующая  $\xi_0 = ih$  точка  $w_0 = ih + o\left(h^3 \ln^3 \frac{1}{h}\right)$ ; следовательно, растяжение отображения (22) в этой точке

$$\left[ \left| \frac{d\zeta}{dw} \right| \right]_{w_0} = \left[ \left| 1 + \alpha h w + \frac{\alpha}{h} w^3 \right| \right]_{w_0} = 1 + o\left(h^4 \ln^3 \frac{1}{h}\right),$$

что и требуется.



Аналогично можно подобрать постоянные  $c$  и  $d$  так, чтобы функция

$$\zeta = w + cw^3 + dw^5$$

реализовала отображение полосы  $0 < v < h$  на полосу, ограниченную осью  $\xi$  и кривой  $\eta = h + \beta \xi^4$ . При  $w = u + ih$  имеем:

$$\eta = h + ch(3u^2 - h^2) + dh(5u^4 - 10h^2u^2 + h^4),$$

$$\xi = u + cu(u^2 - 3hu) + du(u^4 - 10h^2u^2 + 5h^4);$$

следовательно, положив  $3c = 10dh^2$ ,  $5dh = \beta$ , получим:

$$\eta = h + \beta u^4 - \frac{7}{15} \xi h^4, \quad \xi = u + O\left(h^4 \ln^4 \frac{1}{h}\right),$$

откуда с принятой степенью точности  $\eta = h + \beta \xi^4$ .

Таким образом, искомое отображение имеет вид:

$$\zeta = w + \frac{2}{3} \beta h w^3 + \frac{\beta}{5h} w^5 \quad (23)$$

и его растяжение в точке  $w_0 = ih + o\left(h^4 \ln^4 \frac{1}{h}\right)$  равно

$$\left[ \left| \frac{d\zeta}{dw} \right| \right]_{w_0} = \left[ \left| 1 + 2\beta h w^2 + \frac{\beta}{h} w^4 \right| \right]_{w_0} = 1 + O(h^3).$$

Ясно, что отображение

$$\zeta = w + \frac{\alpha h}{2} w^2 + \frac{\alpha}{4h} w^4 + \frac{2}{3} \beta h w^3 + \frac{\beta}{5h} w^5$$

с нужной степенью точности совпадает с отображением полосы  $0 < v < h$  на полосу  $D(\Gamma_0, \Gamma)$  и его растяжение в точке  $w_0$ , соответствующей  $\zeta_0 = ih$ , равно  $1 + O(h^3)$ . Для случая, когда линия  $C_0$  в круге  $|z - z_0| < l_0$  совпадает с  $\bar{C}_0$ , теорема доказана.

Совершенно аналогично рассматривается случай, когда совпадают линии  $C$  и  $\bar{C}$ , а общий случай сводится к двум рассмотренным, ибо сначала можно перейти от области  $D(C_0, C_0)$  к  $D(C_0, \bar{C})$ , а затем от  $D(C_0, \bar{C})$  к  $D(\bar{C}_0, \bar{C})$ . Теорема доказана полностью.

В заключение приведем результат, который получается из формулы (18) элементарными оценками.

Пусть линия  $C_0$  совпадает с осью  $x$ , а линия  $C$ :  $y = y(x)$ , удовлетворяет следующим условиям:

$$a_1 h < y(x) < a_2 h, \quad |y'| < a_3 h^{3/2}, \quad |y''| < a_4 h, \quad |y'''| < a_5 h^{1/2}. \quad (24)$$

При этих условиях в любой точке линии  $C$  имеем:

$$|f'(z, C_0, C, h)| = \frac{h}{y(x)} \left\{ 1 + \frac{1}{3} y y'' \right\} + R, \quad |R| < A h^{5/2}, \quad (25)$$

где  $A$  зависит только от постоянных  $a_v$ .

Для доказательства достаточно заметить, что в принятых условиях и с принятой степенью точности в формуле (18) можно заменить

$$\vartheta = \arctg y' \approx y', \quad n = \frac{y}{\cos \vartheta} \approx y, \quad k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx y'',$$

а также пренебречь членами, содержащими  $n^2 k^2$  и  $\vartheta^2$ .

### § 3. Приложения

Здесь будут даны приложения вариационных принципов к некоторым задачам механики сплошных сред.

**66. Пересчет подъемной силы.** Модель идеальной жидкости является лишь первым приближением при описании движения реальной жидкости или газа. Поэтому, например формулы для величины подъемной силы, полученные в п. 49, оказываются неточными: при учете вязкости, сжимаемости и т. п. наряду с подъемной силой появляются вредные сопротивления, неравномерности потока и другие факторы, причем эти факторы в значительной степени зависят от характера распределения скорости потока вдоль крыла. В соответствии с этим при решении проблемы об улучшении качества крыла большое значение приобретают простые способы пересчета распределения скоростей при переходе от данного профиля  $C$  к близкому профилю  $\tilde{C}$ .

Мы приходим, таким образом, к следующей задаче:

*определить вариацию скорости и подъемной силы профиля  $C$  в зависимости от вариации формы этого профиля.*

Можно дать простое решение этой задачи, основанное на приближенных формулах конформных отображений близких областей. Пусть дан контур  $C$  с одной угловой точкой  $a$  и близкий к нему по положению и кривизне контур  $\tilde{C}$ . Мы будем предполагать, кроме того, что  $a$  принадлежит  $\tilde{C}$  и что обе касательные к  $\tilde{C}$  в точке  $a$  являются также касательными и к  $C$  (рис. 144).

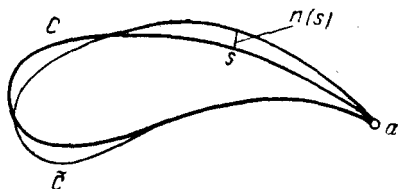


Рис. 144.

Допустим далее, что известен поток, обтекающий  $C$ ; тогда мы можем считать известной и скорость потока  $V$ , как функцию длины дуги  $s$  контура  $C$ . За начало отсчета  $s$  примем точку  $a$ , возрастание  $s$  пусть соответствует положительному обходу  $C$  ( $0 \leq s \leq l$ ). Кроме того, мы считаем известным конформное отображение

$$\xi = F(z, C); \quad F(\infty, C) = \infty \quad (1)$$

внешности контура  $C$  на внешность единичного круга  $|\zeta| > 1$ , в частности, соответствие точек  $C$  и точек окружности  $\zeta = e^{i\theta}$ :

$$\theta = \theta(s); \quad s = s(\theta). \quad (2)$$

Обозначим через  $n(s)$  длину отрезка нормали к  $C$ , заключенного между  $C$  и  $\tilde{C}$ , взятую со знаком «—» или «+», смотря по тому, расположена эта нормаль внутри или вне  $C$ . При отображении (1) кривая  $\tilde{C}$  перейдет в кривую  $\tilde{C}^*$ , полярное уравнение которой с точностью до малых высшего порядка относительно  $\max |n(s)|$  будет иметь вид:

$$\rho = 1 + n[s(\theta)] \frac{d\theta}{ds} = 1 + \delta(\theta) \quad (3)$$

(мы полагаем  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ). Отображение внешности  $\tilde{C}$  на внешность единичного круга  $|w| > 1$  можно, очевидно, представить в виде

$$w = F(z, \tilde{C}) = F[F(z, C), \tilde{C}^*], \quad F[\infty, \tilde{C}] = \infty, \quad (4)$$

где  $w = F(\zeta, \tilde{C}^*)$ ,  $F(\infty, \tilde{C}^*) = \infty$  — отображение внешности  $\tilde{C}^*$  на  $|w| > 1$ . Отсюда по формуле дифференцирования сложных функций

$$|F'(z, \tilde{C})| = |F'(\zeta, \tilde{C}^*)| \cdot |F'(z, C)|, \quad (5)$$

причем в правой части функция  $|F'(z, C)|$  известна, а  $|F'(\zeta, \tilde{C}^*)|$  определяется приближенным выражением (20) п. 63

$$|F'(\zeta, \tilde{C}^*)| \approx 1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t - \theta}{2}} dt \quad (6)$$

(см. замечание в конце п. 63). Если заметить, что отображение (4) сводит задачу обтекания  $\tilde{C}$  к задаче обтекания круглого цилиндра, то величину скорости в точке  $z$  контура  $\tilde{C}$  можно определить по формуле (9) п. 49:

$$|\tilde{V}| = \frac{2v_\infty}{|F'(\infty, \tilde{C})|} |\sin \tilde{\theta} - \sin \tilde{\theta}_0| \cdot |F'(z, \tilde{C})|,$$

где  $v_\infty$  — скорость потока в бесконечности\*), а  $\tilde{\theta} = \theta + \Delta\theta$  и  $\tilde{\theta}_0 = \theta_0 + \Delta\theta_0$  — аргументы образов точек  $z$  и  $a$  при отображении (4). Сравним эту формулу с такой же формулой для скорости в точках  $C$

$$|V| = \frac{2v_\infty}{|F'(\infty, C)|} |\sin \theta - \sin \theta_0| \cdot |F'(z, C)|,$$

\*) Мы считаем, что скорость в бесконечности направлена вдоль действительной оси, т. е. в обозначениях п. 49  $\vartheta = 0$ .

а также воспользуемся формулами (5) и (6); получим:

$$|\tilde{V}| \approx \frac{|V|}{|F'(\infty, \tilde{C}^*)|} \left| \frac{\sin \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} \right| \left\{ 1 + \delta(\theta) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t-\theta}{2}} dt \right\}. \quad (7)$$

Но дифференцируя формулу (7) п. 63 по  $z$  и переходя затем к пределу при  $z \rightarrow \infty$ , получим:

$$|F'(\infty, \tilde{C}^*)| \approx 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt. \quad (8)$$

С другой стороны,

$$\frac{\sin \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} \approx \frac{\sin \theta + \cos \theta \Delta\theta - \sin \theta_0 - \cos \theta_0 \Delta\theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} = 1 + \frac{\cos \theta \Delta\theta - \cos \theta_0 \Delta\theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0},$$

причем  $\Delta\theta$  и  $\Delta\theta_0$  определяются по формулам (16) п. 63

$$\Delta\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta-t}{2} dt, \quad \Delta\theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{\theta_0-t}{2} dt \quad (9)$$

(мы меняем в этих формулах знак, ибо нас интересуют величины в обозначениях п. 63, имеющие вид  $\theta - \varphi$  и  $\theta_0 - \varphi$ ). Подставляя найденные значения в формулу (7) и пренебрегая малыми высших порядков, получим окончательно

$$|\tilde{V}| = |V| \left\{ 1 + \delta(\theta) + \frac{\cos \theta \Delta\theta - \cos \theta_0 \Delta\theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) - \delta(\theta)}{\sin^2 \frac{t-\theta}{2}} dt \right\}. \quad (10)$$

Формула (10) связывает скорости точек контуров  $\tilde{C}$  и  $C$ , находящихся на одной нормали к  $C$ .

Заметим, что в соответствии со сказанным в п. 63 практические вычисления по формуле (10) целесообразнее всего вести, аппроксимируя  $\delta(t)$  тригонометрическим многочленом

$$\delta(t) = \varepsilon (a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots). \quad (11)$$

В этом случае вместо формулы (6) удобнее воспользоваться формулой (23) п. 63 (имея в виду, что  $F'(\zeta, \tilde{C}^*) = \frac{1}{g'(e^{i\theta})}$ ), и

мы получим вместо (10):

$$|\tilde{V}| = |V| \left\{ 1 + \frac{\cos \theta \Delta \theta - \cos \theta_0 \Delta \theta_0}{\sin \theta - \sin \theta_0} + \varepsilon [2a_0 + 2(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + \right. \\ \left. + 3(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \dots] \right\}, \quad (12)$$

где

$$\Delta \theta = \varepsilon (a_1 \sin \theta - b_1 \cos \theta + a_2 \sin 2\theta - b_2 \cos 2\theta + \dots), \\ \Delta \theta_0 = \varepsilon (a_1 \sin \theta_0 - b_1 \cos \theta_0 + a_2 \sin 2\theta_0 - b_2 \cos 2\theta_0 + \dots) \quad (13)$$

(ср. формулы (23) и (24) п. 63).

Формулами (12) и (13) можно пользоваться также и для решения обратной задачи:

*по заданной вариации скорости на крыле найти соответствующую вариацию профиля крыла.*

Рассмотрим частный случай вариации контура  $C$ , когда  $\tilde{C}$  отличается от  $C$  лишь на малой дуге с центром в точке  $s_1$  (локальная вариация). В этом случае мы положим:

$$\theta_1 = \theta(s_1), \quad \int_0^{2\pi} \delta(t) dt = \sigma,$$

и вне места вариации с точностью до малых высшего порядка относительно  $\sigma$  будем иметь вместо формул (9) и (10)

$$\Delta \theta = \frac{\sigma}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_1}{2}, \quad \Delta \theta_0 = \frac{\sigma}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}, \quad (14)$$

$$|\tilde{V}| = |V| \left\{ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} \left[ \frac{\cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_1}{2} - \cos \theta_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}}{\sin \theta - \sin \theta_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + 1 - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta - \theta_1}{2}} \right] \right\}.$$

Перейдем к вычислению вариации подъемной силы. Для этого проще всего использовать формулу Жуковского (8) п. 49, по которой величина подъемной силы, действующей на контур  $C$ , равна

$$P = 4\pi\rho \frac{v_\infty^2}{|F'(\infty, C)|} \sin \theta_0. \quad (15)$$

Применяя эту формулу к контурам  $C$  и  $\tilde{C}$ , найдем:

$$\tilde{P} = P \frac{\sin \tilde{\theta}_0}{\sin \theta_0} \left| \frac{F'(\infty, C)}{F'(\infty, \tilde{C})} \right| = P \frac{\sin \tilde{\theta}_0}{\sin \theta_0} \cdot \frac{1}{|F'(\infty, \tilde{C})|} \quad (16)$$

или, пользуясь формулой (8) и заменяя  $\sin \tilde{\theta}_0 = \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \Delta \theta_0$ ,

$$\tilde{P} = P \left\{ 1 + \operatorname{ctg} \theta_0 \Delta \theta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) dt \right\}. \quad (17)$$

Для случая локальной вариации формула (17) принимает вид

$$\tilde{P} \approx P \left\{ 1 + \frac{\sigma}{2\pi} \left[ \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} + 1 \right] \right\}. \quad (18)$$

Из формулы (18) получается следующий качественный результат.

Пусть  $a_0$  и  $a_1$  будут точки схода и разветвления потока, обтекающего профиль  $C$  с положительной подъемной силой  $P$ . При замене  $C$  профилем  $\tilde{C}$  подъемная сила: 1) увеличивается, если  $\tilde{C}$  совпадает с  $C$  на нижней дуге  $\widehat{a_0 b a_1}$  и лежит над верхней дугой  $\widehat{a_0 b' a_1}$ ; 2) уменьшается, если  $\tilde{C}$  совпадает с  $C$  на верхней дуге и лежит под нижней дугой (рис. 145).

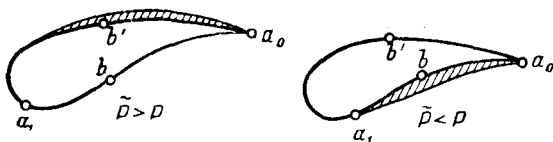


Рис. 145.

Для доказательства будем рассматривать вариацию контура  $C$  как последовательность локальных вариаций. Так как в наших условиях  $P > 0$  и  $\sigma > 0$  \*), то согласно (18) знак вариации  $\delta P = \tilde{P} - P$  подъемной силы совпадает со знаком выражения

$$\Delta = 1 + \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}, \quad (19)$$

причем  $\theta_0$  лежит в IV четверти (для определенности будем считать  $-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < 0$ ); следовательно,  $\operatorname{ctg} \theta_0 < 0$ .

Рассмотрим сначала случай 1). При отображении (4) центру локальной вариации в этом случае соответствует точка  $\theta_1$  окружности, лежащая на верхней дуге  $\widehat{\theta_0 \theta'_0}$ , где  $\theta'_0$  — точка окружности, соответствующая точке разветвления потока  $a_1$ , т. е.  $0 < \theta_1 - \theta_0 < \pi + 2|\theta_0|$  (ср. пример 2) п. 49). Для  $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq \pi$

\*) Положительность  $\sigma$  следует из того, что контур  $\tilde{C}$  лежит во внешности  $C$  (см. принятое выше условие).

имеем  $\operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} \leq 0$  и, следовательно,  $\Delta \geq 1$ . Для  $\pi < \theta_1 - \theta_0 < \pi + 2|\theta_0|$  положим  $\frac{\theta_1 - \theta_0}{2} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ , где  $0 < \alpha < |\theta_0|$ ; тогда  $\operatorname{ctg} \frac{\theta_0 - \theta_1}{2} = \operatorname{tg} \alpha$ , модуль второго слагаемого формулы (19), равный  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} |\theta_0|}$ , не превосходит 1 и, следовательно,  $\Delta > 0$ .

Таким образом, в случае 1) вариация подъемной силы  $\delta P > 0$ .

Аналогично, в случае 2) будем иметь  $0 < \theta_0 - \theta_1 < \pi - |\theta_0|$ ; положим  $\frac{\theta_0 - \theta_1}{2} - \frac{\pi}{2} = \alpha$ , тогда  $|\theta_0| < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Модуль второго слагаемого в формуле (19), равный  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} |\theta_0|}$ , больше 1, а знак этого слагаемого, очевидно, отрицателен. Следовательно, в случае 2) вариация подъемной силы  $\delta P < 0$ . Сформулированное предложение доказано полностью.

**67. Волны в тяжелой жидкости.** Рассмотрим открытый канал бесконечной длины с прямоугольным сечением и горизонтальным дном. Пусть канал заполнен тяжелой жидкостью, движения которой подчинены следующим условиям: 1) движение плоскопараллельное — поле скоростей параллельно вертикальным стенкам и одинаково во всех течениях, параллельных этим стенкам; 2) пусть прямоугольная система координат  $(x, y)$  (ось  $x$  принадлежит дну и параллельна стенкам; ось  $y$  направлена вертикально вверх) перемещается с постоянной скоростью  $v_0$  в направлении оси  $x$ ; мы будем предполагать, что в системе координат  $(x, y)$  свободная поверхность и поле скоростей жидкости не зависят от времени  $t$ .

Движения жидкости, подчиненные указанным условиям, мы будем называть *установившимися волновыми движениями* жидкости в канале; число  $v_0$  будем называть скоростью распространения волнового движения. Согласно нашему определению, с точки зрения наблюдателя, связанного с системой  $(x, y)$ , это поле дает установившееся движение жидкости в обычном смысле.

Общая задача теории установившихся волн в канале ставится следующим образом: предполагая жидкость идеальной, определить все возможные ее установившиеся волновые движения.

Поставленная задача сводится к некоторой задаче теории конформных отображений. С этой целью введем несколько дополнительных параметров. Пусть  $C: y = y(x)$ , есть сечение свободной поверхности плоскостью  $(x, y)$ ; назовем средней глубиной канала число

$$H = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l y(x) dx. \quad (1)$$

Пусть далее  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность жидкости,

$$h = v_0 H.$$

Приняв это, перейдем к математической постановке задачи. В силу п. 48 из условий, что жидкость идеальна и движение в плоскости  $(x, y)$  установившееся, следует, что комплексный потенциал

$$\zeta = f(z, C, h), \quad f(\pm \infty, C, h) = \pm \infty \quad (2)$$

есть функция, реализующая конформное отображение области  $D(C): 0 < y < y(x)$ , на прямолинейную полосу; ширина полосы должна равняться  $h$ , ибо расход потока по условию равен  $v_0 H = h$ . На свободной (волновой) поверхности давление должно оставаться постоянным, равным атмосферному; следовательно, по известной из гидродинамики теореме Бернулли в каждой точке линии  $C$  должно иметь место соотношение

$$p = A - \frac{1}{2} \rho |f'(z, C, h)|^2 - g \rho y = \text{const}, \quad (3)$$

где  $p$  — давление и  $A$  — некоторая постоянная.

Таким образом, наша задача свелась к следующей: *построить все кривые  $C: y = y(x)$ , такие, что конформные отображения  $f(z, C, h)$  области  $D(C): 0 < y < y(x)$ , на полосу  $0 < y < h$  заданной ширины  $h$  в каждой точке  $C$  удовлетворяют соотношению (3).*

Вследствие нелинейности условия (3) решение этой задачи во всей полноте вызывает большие трудности и не получено до настоящего времени. Мы изложим ниже приближенное ее решение, основанное на приближенных формулах теории конформных отображений. В наших частных задачах мы будем искать периодические четные кривые  $y = y(x)$ , мало отклоняющиеся от прямой  $y = H$ .

Для удобства дальнейших вычислений совершим подобные преобразования плоскостей потока и комплексного потенциала, положив  $z = H z_1$  и  $\zeta = h \zeta_1$ . Соотношение (3) перейдет при этом в соотношение

$$\left| \frac{d\zeta_1}{dz_1} \right|^2 + 2\nu y_1 = c, \quad (4)$$

где  $c$  — некоторая постоянная и

$$\nu = g \frac{H^3}{h^2} = \frac{gH}{v_0^2} \quad (5)$$

— безразмерный параметр.

Мы будем рассматривать случай, когда  $\alpha = \nu - 1$  — малое положительное число. Введем переменные  $z_2 = \alpha z_1$ ,  $\zeta_2 = \alpha \zeta_1$  и



предположим, что в плоскости  $z_2$  образ кривой  $C$  удовлетворяет условиям

$$a_1\alpha < y_2 < a_2\alpha, \quad |y_2'| < a_3\alpha^{1/2}, \quad |y_2''| < a_4\alpha, \quad |y_2'''| < a_5\alpha^{1/2}, \quad (6)$$

где  $a_k$  — некоторые постоянные. По формуле (25) п. 65 мы получаем тогда приближенное выражение

$$\left| \frac{d\xi_2}{dz_2} \right| = \frac{\alpha}{y_2} \left( 1 + \frac{1}{3} y_2 y_2'' \right) + O(\alpha^{5/2})$$

или после перехода к переменным  $z_1$  и  $\xi_1$ :

$$\left| \frac{d\xi_1}{dz_1} \right| = \frac{1}{y_1} \left( 1 + \frac{1}{3} y_1 y_1'' \right) + O(\alpha^{5/2}).$$

Подставляя это выражение в формулу (4), мы получим с учетом условий (6) приближенное уравнение, справедливое с точностью до малых порядка  $O(\alpha^{5/2})$  вдоль кривой, соответствующей  $C$  в плоскости  $z_1$ :

$$\frac{1}{y_1^2} \left( 1 + \frac{2}{3} y_1 y_1'' \right) + 2\nu y_1 = c. \quad (7)$$

Примем еще за новую действительную ось плоскости  $z$  прямую  $y = H$ , т. е. положим  $y = H(1 + \eta)$ , или, что то же самое,  $y_1 = 1 + \eta$ ; тогда уравнение (7) перейдет в уравнение

$$\frac{2}{3} \eta'' + 2\nu(1 + \eta)^2 + \frac{1}{1 + \eta} - c(1 + \eta) = 0.$$

Если выбрать постоянную  $c$  так, чтобы  $\eta = 0$  было решением последнего уравнения ( $c = 2\nu + 1$ ) и воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{1 + \eta} = 1 - \eta + \eta^2 - \frac{\eta^3}{1 + \eta},$$

то это уравнение можно будет переписать в виде:

$$\eta'' + 3(\nu - 1)\eta + \frac{3}{2}(2\nu + 1)\eta^2 - \frac{3}{2} \frac{\eta^3}{1 + \eta} = 0. \quad (8)$$

Так как мы ищем решения, мало отклоняющиеся от прямой  $y = H$ , то  $\eta$  можно считать малой величиной. Мы предположим, что  $\max|\eta|$  имеет порядок  $\alpha$ , тогда с принятой степенью точности в левой части (8) последний член можно отбросить. Вводя вместо  $\nu$  величину  $\alpha = \nu - 1$  и пренебрегая членом  $\alpha\eta^2$ , мы получим окончательно \*):

$$\eta'' + 3\alpha\eta + \frac{9}{2}\eta^2 = 0. \quad (9)$$

\*) При выводе уравнения (9) в первом издании книги был допущен ряд погрешностей, на которые нам любезно указал Н. Н. Моисеев.

Дальнейшее изложение мы будем вести в двух различных предположениях.

1°. Линейная теория. Предположим сначала, что число  $\max|\eta|$  мало в сравнении с  $\alpha$  (волны малой амплитуды). Тогда уравнение (9) можно линеаризовать, отбросив в нем нелинейный член

$$\eta'' + 3\alpha\eta = 0. \quad (10)$$

Так как по принятому ранее условию  $\alpha > 0$ , то в качестве решений этого уравнения мы получаем линейные волны:

$$\eta = \frac{a}{H} \cos \sqrt{3\alpha} x_1,$$

где  $a$  — произвольная постоянная. В переменных  $x$  и  $y$  уравнение этих волн имеет вид

$$y = H + a \cos \frac{\sqrt{3\alpha}}{H} x. \quad (11)$$

Период волн после подстановки значения  $v = \alpha + 1$  из формулы (5) записывается в виде

$$T = \frac{2\pi H}{\sqrt{3\alpha}} = \frac{2\pi H}{\sqrt{3\left(g\frac{H}{v_0^2} - 1\right)}},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{gH}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi H}{T}\right)^2}}. \quad (12)$$

Таким образом, при данной скорости распространения  $v_0$  и данном периоде  $T$  существует бесчисленное множество решений задачи, зависящих от одного параметра — амплитуды волны.

При этом средняя глубина канала  $H$  определяется соотношением (12). Из этого соотношения следует также, что скорость распространения линейных волн возрастает вместе с их длиной, но никогда не превышает  $\sqrt{gH}$ . Пренебрегая в (12) членом  $\left(\frac{2\pi H}{T}\right)^2$ , мы получим формулу Лагранжа  $v_0 = \sqrt{gH}$ .

2°. Длинные волны. Займемся теперь случаем, когда  $\max|\eta|$  имеет тот же порядок, что и  $\alpha$ . В этом случае приходится рассматривать уравнение (9) в полном виде, и задача становится нелинейной.

Уравнение (9) допускает, очевидно, первый интеграл

$$\left(\frac{d\eta}{dx_1}\right)^2 = A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3, \quad (13)$$

где  $A$  — произвольная постоянная. Приняв, что в вершине волны, т. е. при  $x_1 = 0$ , имеем  $\eta = \eta_0 > 0$ , получим для  $A$  значение

$$A = 3\eta_0^2(\alpha + \eta_0).$$

Для существования периодических решений уравнения (9) необходимо, чтобы нашлось еще значение  $\eta = \eta_1 < \eta_0$  (впадина волны), для которого  $\frac{d\eta}{dx_1} = 0$ . В силу (13) это значение должно быть корнем уравнения

$$\eta^3 + \alpha\eta^2 - \eta_0^2(\alpha + \eta_0) = 0.$$

Это уравнение имеет корень  $\eta = \eta_0$ ; деля обе части на  $\eta - \eta_0$ , найдем:

$$\eta^2 + (\alpha + \eta_0)\eta + \eta_0(\alpha + \eta_0) = 0,$$

откуда

$$\eta_{1,2} = -\frac{\alpha + \eta_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha + \eta_0)^2 - 4\eta_0(\alpha + \eta_0)}. \quad (14)$$

Таким образом, для существования периодических решений необходимо, чтобы было  $(\alpha + \eta_0)^2 - 4\eta_0(\alpha + \eta_0) \geq 0$ , т. е.  $-\alpha \leq \eta_0 \leq \frac{\alpha}{3}$ . Так как у нас принято, что  $\eta_0 > 0$ , то это условие имеет вид

$$\eta_0 \leq \frac{\alpha}{3}. \quad (15)$$

При этом условии из соотношения (13), которое можно переписать в виде

$$\frac{d\eta}{dx_1} = H \frac{d\eta}{dx} = \sqrt{A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3},$$

находим полупериод рассматриваемых волн

$$\frac{T}{2} = H \int_{\eta_1}^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3}}. \quad (16)$$

При  $\eta_0 < \alpha/3$  подкоренное выражение имеет в концах  $\eta_0$  и  $\eta_1$  отрезка интегрирования простые корни, следовательно, величина  $T$  конечна. Легко написать и уравнение половины волны (на участке  $0 \leq x \leq \frac{T}{2}$ );

$$x = H \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta}{\sqrt{A - 3\alpha\eta^2 - 3\eta^3}}. \quad (17)$$

Непосредственно видно, что условие  $\eta_0 < \alpha/3$  является достаточным для существования решений уравнения (9), имеющих волновой характер. В отличие от линейного случая амплитуда волн не может считаться произвольной, а при фиксированной скорости  $v_0$  она зависит от периода  $T$ .

Отметим еще несколько качественных свойств полученных решений; эти свойства вытекают из приведенных выше формул.

а) Период  $T$  волны возрастает при увеличении ординаты  $\eta_0$ , а также при увеличении амплитуды  $\eta_0 - \eta_1 = 2a$ . Минимальное значение  $T = \frac{2\pi H}{\sqrt{3\alpha}}$

соответствует линейному случаю, когда  $\eta_0$  бесконечно мало. Когда  $\eta_0$  приближается к значению  $\frac{\alpha}{3}$ , величина  $T$  неограниченно растет и при  $\eta_0 = \frac{\alpha}{3}$  периодическое решение вырождается в линию с единственным максимумом при  $x = 0$  и с асимптотой  $\eta = -\frac{2}{3}\alpha$  (рис. 146).

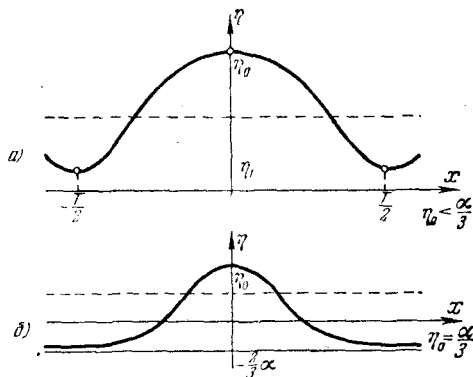


Рис. 146.

В последнем случае решение легко выписать в явном виде, если заметить, что при  $\eta_0 = \frac{\alpha}{3}$  из (14) мы получаем  $\eta_{1,2} = -\frac{2}{3}\alpha$  и, следовательно, уравнение (13) принимает вид

$$\frac{d\eta}{dx_1} = \sqrt{3(\eta_0 - \eta)(\eta_1 - \eta)}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными интегрируется в элементарных функциях и его решение, которое при  $x_1 = 0$  принимает значение  $\eta = \eta_0 = \frac{\alpha}{3}$ , имеет вид

$$\eta = \alpha \left( \frac{1}{3} - \text{th}^2 \frac{\sqrt{3\alpha}}{2} x_1 \right),$$

или, в переменных  $x$  и  $y$

$$y = H + \alpha H \left( \frac{1}{3} - \text{th}^2 \frac{\sqrt{3\alpha}}{2H} x \right). \quad (18)$$

Построенное аperiodическое решение носит название *уединенной волны*.

б) *Кривизна волны в вершине всегда больше, чем кривизна волны во впадине.*

в) *Скорость распространения волны убывает при возрастании  $\alpha$ .*

Посмотрим в заключение, в какой мере построенное решение удовлетворяет условиям, при которых принятое приближенное выражение для  $|f'|$  мало отклоняется от истинного (см. п. 65). Для этой цели мы должны оценить функцию  $\eta$  и ее первые три производные. Имеем:

$$-\alpha^* < \eta < \frac{1}{2}\alpha^*.$$

Но тогда в силу (14) и (9)

$$|\eta'| < k_1\alpha^{5/2}, \quad |\eta''| < k_2\alpha^{*2}, \quad |\eta'''| < k_3\alpha^{5/2},$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — числовые постоянные. Таким образом, при замене  $|f'|$  его приближенным выражением мы допускаем ошибку порядка  $\alpha^{5/2}$ .

Используя построенное приближенное решение и общие вариационные теоремы, можно строго доказать существование всей описанной системы волн и показать, что наши приближенные решения отклоняются от точного на малые высших порядков.

**68. Обтекание со срывом струй.** Задача обтекания со срывом струй была поставлена в п. 48. Здесь мы приведем приближенное ее решение и результаты качественного исследования, основанного на развитых выше вариационных принципах (см. М. А. Лаврентьев [1]). Для простоты мы ограничимся случаем потоков с осью симметрии, обтекающих тела, симметричные относительно этой оси. Сначала остановимся на задаче обтекания симметричных дужек. Согласно п. 48 эта задача приводится к следующей задаче теории конформных отображений:

*Пусть в верхней полуплоскости  $z$  задана дуга  $\gamma_1$ , соединяющая точку  $x_1 \leq 0$  оси  $x$  с точкой  $ib$  оси  $y$ . Требуется соединить точку  $ib$  с  $z = \infty$  кривой  $\gamma_2$ , лежащей в верхней полуплоскости и такой, чтобы функция*

$$w = f(z, \gamma); \quad f(\infty, \gamma) = \infty, \quad f'(\infty, \gamma) = 1, \quad (1)$$

*реализующая конформное отображение области  $D(\gamma)$ , лежащей выше кривой  $\gamma = (-\infty, x_1) + \gamma_1 + \gamma_2$ , на верхнюю полуплоскость  $^*$ ), на дуге  $\gamma_2$  удовлетворяла условию*

$$|f'(z, \gamma)| = c = \text{const} \quad (2)$$

(рис. 147).

Наметим приближенный метод решения задачи. Обозначим через  $z = g(w)$  функцию, обратную к искомой функции (1); так как (1) реализует конформное

\*) Как видно из (1), мы ограничиваемся рассмотрением потоков со скоростью в бесконечности, равной единице и направленной вдоль оси  $x$ . Общий случай легко приводится к этому.

отображение на верхнюю полуплоскость, то  $g'(w)$  аналитична и не равна нулю в этой полуплоскости и, следовательно, там аналитична функция

$$\ln g'(w) = \ln |g'(w)| + i \arg g'(w). \quad (3)$$

Очевидно, на луче  $(-\infty, A)$  оси  $u$ , соответствующем лучу  $(-\infty, x_1)$  оси  $x$ , имеем  $\arg g'(u) = 0$ , а на луче  $(B, \infty)$ , соответствующем  $\gamma_2$ , имеем  $\ln |g'(u)| = c_1$ , где  $c_1$  — некоторая постоянная (см. рис. 147). На отрезке  $(A, B)$ , соответствующем  $\gamma_1$ ,  $\arg g'(u)$  неизвестен, ибо неизвестно соответствие точек  $(A, B)$  и  $\gamma_1$ . Однако мы сами задаемся каким-либо соответствием  $\xi = \xi(u)$  точек  $(A, B)$  и  $\gamma_1$  и тогда находим:

$$\arg g'(u) = \arg \xi'(u) = \varphi(u). \quad (4)$$

Теперь отыскание функции  $\ln g'(w)$  сводится к смешанной краевой задаче для верхней полуплоскости, ибо на луче  $(-\infty, A)$  известна  $\operatorname{Im} \ln g'(w)$ , а на луче  $(A, \infty) - \operatorname{Re} \ln g'(w)$ . Решая эту задачу, например, с помощью формулы Келдыша — Седова п. 54, находим функцию

$$z = \bar{g}(w), \quad (5)$$

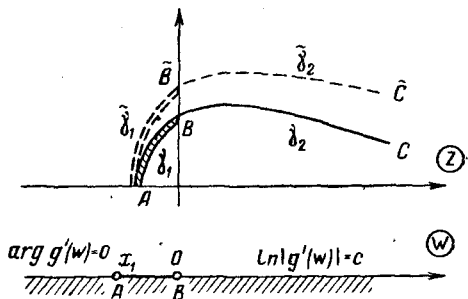


Рис. 147.

реализующую конформное отображение верхней полуплоскости на область  $D(\bar{y})$ , где  $\bar{y} = (-\infty, x_1) + \bar{y}_1 + \bar{y}_2$  (см. рис. 147).

По построению обратная к (5) функция  $w = f(z, \bar{y})$  решает задачу обтекания со срывом струй дужки  $\bar{y}_1$ . Если последняя сильно отличается от  $\gamma_1$  мы должны изменить задание функции  $\varphi(u)$  из (4). Чтобы целесообразнее проводить это изменение, мы должны иметь качественные сведения о том, как меняется функция (1) при деформировании дуги  $\gamma_1$ . Приведем без доказательства основные из относящихся сюда результаты.

1) Если  $\gamma_1$  состоит из конечного числа дуг с ограниченной кривизной и каждая прямая  $x = x_0$  ( $x_1 < x_0 \leq 0$ ) пересекает  $\gamma_1$  либо в точке, либо по отрезку, то решение задачи о струях существует и единственно.

При этом допускается, что кривая  $\gamma_2$ , начиная с некоторой точки  $x = \xi > 0$ , совпадает с осью  $x$ ; уравнение такой кривой мы обозначим:

$$y = y(x; \xi). \quad (6)$$

В этом случае условие постоянства скорости (2) на луче  $(\xi, \infty)$  заменяется условием совпадения скоростей при подходе к лучу сверху и снизу, т. е. условием однозначности комплексного потенциала (1) потока, обтекающего со срывом струй дугу  $\Gamma_1$ , состоящую из  $\gamma_1$ , и дуги, симметричной с  $\gamma_1$  относительно оси  $x$ . Иными словами, допускается смыкание струй за обтекаемой дугой.

2) Если при некотором значении  $x = x_2$  ордината точки  $\gamma_2$  обращается в нуль, то при  $x > x_2$  дуга  $\gamma_2$  совпадает с осью  $x$  (иными словами,  $x_2 = \xi$ ).

3) На участке  $(0, \xi)$  дуга  $\gamma_2$  аналитична.

4) На  $\gamma_2$  угловой коэффициент касательной не может достигать экстремума.

5) При  $\xi < \infty$  кривая  $\gamma_2$  не может иметь точек с ординатами большими, чем максимальная ордината точек кривой  $\gamma_1$ .

6) Если максимальная ордината точки кривой  $\gamma_1$  соответствует  $x = 0$ , то  $\xi = \infty$ , т. е.  $\gamma_2$  обладает бесконечной ветвью.

7) Пусть при одинаковых абсциссах ординаты точек кривой  $\tilde{\gamma}_1$  больше ординат или равны ординатам точек  $\gamma_1$  и эти кривые имеют общие концы. Тогда  $\tilde{\xi} \leq \xi$  и

$$y(x, \tilde{\xi}) \leq y(x, \xi), \tag{7}$$

причем при  $0 < x < \xi$  знак равенства может достигаться лишь в случае совпадения  $\gamma_1$  и  $\tilde{\gamma}_1$  (рис. 148).

Все эти результаты получаются методами теории функций комплексного переменного и, в частности, с помощью вариационных принципов п. 61. Их доказательство читатель найдет в статье М. А. Лаврентьева [5].

Из 7) вытекает, что  $y(x, \xi)$  всегда меньше  $y_b(x)$  — ординаты струи,

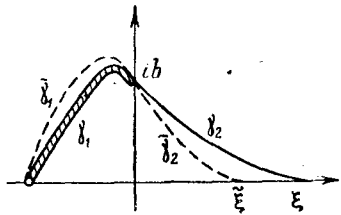


Рис. 148.

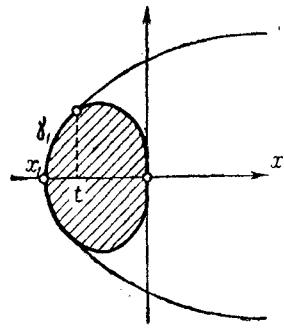


Рис. 149.

обтекающей вертикальный отрезок  $(0, ib)$  — случай, рассматриваемый Кирхгофом. Из того же предложения 7) следует, что в его условиях равнодействующая сил давления на дугу  $\Gamma_1 = \gamma_1 + \gamma'_1$ , где  $\gamma'_1$  — зеркальное отображение  $\gamma_1$  относительно оси  $x$ ,  $P(\Gamma_1) \leq P(\tilde{\Gamma}_1)$ , где  $\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}'_1$ .

В заключение приведем, также без доказательства, некоторые результаты, относящиеся к симметричному обтеканию выпуклых контуров. Пусть дан замкнутый, выпуклый и симметричный относительно оси  $x$  контур  $C$ , пересекающий ось  $x$  в точках  $x_1 < 0$  и  $x = 0$ . Пусть  $\gamma_t$  — часть контура  $C$ , расположенная над отрезком  $(x_1, t)$  оси  $x$  ( $x_1 < t < 0$ ). Очевидно, решение

$$y = y_t(x, \xi) \tag{8}$$

разобранной выше задачи для дуги  $\gamma_t$  дает свободную струю потока, обтекающего со срывом струй замкнутый контур  $C$ , если кривая (8) лежит целиком вне  $C$ .

Имеют место следующие предложения:

- 1) Множество точек контура  $C$ , в которых при симметричном обтекании возможен отрыв струй, есть дуга  $C_0$  с центром в точке  $x_1$  и концами, расположенными левее точек контура  $C$  с экстремальными ординатами (рис. 149).
- 2) Свободные струи, соответствующие двум различным обтеканиям  $C$ , не имеют общих точек.
- 3) При двух различных обтеканиях  $C$  со срывом струй давление жидкости на  $C$  будет большим для того течения, которое соответствует более раннему отрыву струй.

Доказательства этих предложений имеются в цитированной работе М. А. Лаврентьева [5].

**69. Движение грунтовых вод.** Как показывает опыт, движение грунтовых вод в однородном грунте достаточно точно следует законам движения идеальной жидкости. Ограничиваясь,

как раньше, плоским случаем, допустим, что через область  $D$ , заполненную грунтом, просачивается жидкость, и предположим, что движение установившееся. Обозначим через  $p(z)$  давление в произвольной точке  $z$  области  $D$ . Имеет место следующий опытный закон (Дарси): *скорость частиц жидкости в точке  $z$  пропорциональна градиенту давления и направлена в сторону, противоположную градиенту  $p$ :*

$$\mathbf{V} = -\kappa \operatorname{grad} p. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности  $\kappa$  зависит только от характера грунта и называется *коэффициентом фильтрации*. Добавляя к закону Дарси условие несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

мы получим, что поле скоростей движения просачивающейся через область  $D$  жидкости обладает потенциалом  $u$ :

$$u(z) = -\kappa p(z), \quad (3)$$

который является гармонической функцией, правильной в области  $D$ .

При проектировании плотин одним из существенных элементов их расчета является решение следующей задачи.

Дана область  $D$ , граница  $S$  которой состоит из следующих прямолинейных участков:

- 1) прямая  $y = -h_0$  (основание),
- 2) луч  $(-\infty, 0)$  оси  $x$ ,
- 3) отрезок  $(0, l)$  (флютбет),
- 4) луч  $(l, \infty)$  оси  $x$ ,
- 5) вертикальные отрезки (шпунты)  $c_j$ , выходящие из точек  $x_1 = 0, x_2, \dots, x_n$  флютбета и имеющие длины  $l_j (j = 1, \dots, n)$ .

Область  $D$  заполнена водопроницаемым грунтом с коэффициентом фильтрации  $\kappa$ . Над флютбетом  $(0, l)$  расположено сооружение  $A$ ; слева от  $A$  над осью  $x$  расположен слой свободной жидкости толщины  $H_2$ , а справа от  $A$  — слой свободной жидкости толщины  $H_1$  ( $H_1 < H_2$ ). Стенки сооружения  $A$ , флютбет, шпунты и основание считаются водонепроницаемыми (рис. 150).

При перечисленных условиях требуется определить установившееся движение жидкости в области  $D$ , причем проектировщиков интересуют в основном следующие три величины: 1) расход жидкости, 2) максимальное и общее давление на флютбет, 3) максимальная «выходная» скорость на луче  $(l, \infty)$ .

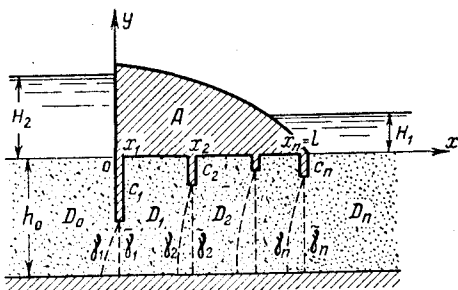


Рис. 150.



Найдем граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал скоростей  $u$ . В силу водонепроницаемости основания  $y = -h_0$ , флютбета и шпунтов на всех участках  $C$ , соответствующих этим элементам, должно иметь место обтекание, т. е. должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

Кроме того, на участках  $(-\infty, 0)$  и  $(l, \infty)$  давление  $p$  должно быть постоянным: на левом участке  $p = \rho H_2 + p_0$ , на правом участке  $p = \rho H_1 + p_0$ , где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p_0$  — давление атмосферы. Следовательно, вдоль  $(-\infty, 0)$

$$u = -\kappa(\rho H_2 + p_0) = u_2, \quad (5)$$

а вдоль  $(l, \infty)$

$$u = -\kappa(\rho H_1 + p_0) = u_1. \quad (6)$$

Таким образом, задача движения грунтовых вод под сооружением привелась к частному случаю смешанной краевой задачи для гармонических функций п. 55.

Отметим два приема решения этой задачи, учитывающих специфику граничных условий (4), (5) и (6).

а) обозначим через  $v$  функцию тока течения; в силу условия (4)  $v$  сохраняет постоянное значение  $v_0$  вдоль  $y = -h_0$  и постоянное значение  $v = v_1$  вдоль флютбета и шпунтов. Комплексный потенциал  $u + iv$  реализует конформное отображение области  $D$  на прямоугольник, ограниченный прямыми  $u = u_2$ ,  $u = u_1$ ,  $v = v_0$ ,  $v = v_1$ , причем точки  $-\infty, 0, l, \infty$  переходят в вершины прямоугольника. Имея в виду, что прямоугольник отображается на верхнюю полуплоскость с помощью эллиптического синуса (см. п. 39, пример 1), можно ограничиться отображением

$$\xi = f(z) \quad (7)$$

области  $D$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \xi > 0$ . Пусть при этом отображении точки  $0, -\infty, \infty, l$  переходят в точки  $a_1, a_2, a_3, a_4$ ; применяя дополнительное линейное преобразование, мы можем перевести эти точки в точки  $-1/k, -1, 1, 1/k$ . Иными словами, можно заранее считать, что

$$f(\pm \infty) = \pm 1, \quad f(0) = -\frac{1}{k}, \quad f(l) = \frac{1}{k}.$$

Тогда искомый потенциал примет вид

$$u + iv = \frac{u_1 - u_2}{2K} \text{sn}^{-1}(\zeta, k) + \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (8)$$

где  $\text{sn}^{-1}$  — функция, обратная к эллиптическому синусу (см. п. 39).

Стороны прямоугольника равны  $u_1 - u_2$  и  $v_1 - v_0 = \frac{K'}{2K} (u_1 - u_2)$ , где

$$2K = 2 \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)}, \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)},$$

его высота  $v_1 - v_0 = \frac{K'}{2K} \kappa p (H_2 - H_1)$  дает расход жидкости под сооружением.

б) При отображении (7) функции  $u(z)$  и  $v(z)$  перейдут в функции

$$u|g(\xi) = U(\xi), \quad v|g(\xi) = V(\xi), \quad (9)$$

где  $z = g(\xi)$  — функция, обратная (7), причем  $U$  правильна всюду вне отрезков  $(-1/k, -1)$  и  $(1, 1/k)$  и принимает на этих отрезках, соответственно, значения  $u_2$  и  $u_1$ , а  $V$  правильна вне отрезков  $(-\infty, -1/k)$ ,  $(-1, 1)$  и  $(1, \infty)$  и принимает на этих отрезках значения  $v_1$ ,  $v_0$ ,  $v_1$ . Поэтому выражение для  $U(\xi) + iV(\xi)$  можно получить по формуле Келдыша — Седова п. 54.

Применяя к разбираемой задаче вариационные принципы, легко можно получить ряд заключений относительно характера изменений расхода, выходной скорости и давления при изменениях в размерах элементов сооружения.

1) Если увеличить длину одного или нескольких шпунтов, то все линии тока снизятся, расход уменьшится, выходная скорость уменьшится. Если стремиться уменьшить выходную скорость, то наиболее эффективным является удлинение крайнего правого шпунта.

2) Если увеличить длину одного шпунта, то давление на флутбет слева от этого шпунта увеличится, а справа — уменьшится; в частности, увеличение длины крайнего правого шпунта увеличит давление на флутбет всюду.

Те же теоремы и соответствующие формулы дают также возможность обосновать и уточнить различные приближенные приемы для численного решения задачи.

Одним из наиболее распространенных приемов для приближенного определения потенциала  $u$  является так называемый метод фрагментов, предложенный академиком Н. Н. Павловским в 1922 г. (см. [8]). Мы изложим сущность этого метода.

Проведем через концы шпунтов  $c_j$  линии  $\gamma_j$  равного потенциала  $u = u_j$ , соединяющие эти концы с основанием так, что  $c_j$  вместе с  $\gamma_j$  образуют гладкую линию, ортогональную основанию. Линии  $\gamma_j$  разрезают область  $D$  на  $n+1$  частей — «фрагментов»  $D_0, D_1, \dots, D_n$  (рис. 150). Во фрагменте  $D_0$  потенциал  $u$  удовлетворяет условиям  $u = \begin{cases} U_0 & \text{на } (-\infty, 0), \\ u_1 & \text{на } \gamma_1, \end{cases}$

на остальных участках границы  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ; во фрагменте  $D_n$

$$u = \begin{cases} U_n & \text{на } (l, \infty), \\ u_n & \text{на } \gamma_n, \end{cases}$$

на остальных участках границы  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Для фрагмента  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) граничные условия имеют вид

$$u = \begin{cases} u_j & \text{на } \gamma_j, \\ u_{j+1} & \text{на } \gamma_{j+1}, \end{cases}$$

на остальных участках границы  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

Заметим теперь, что если расстояния между соседними шпунтами значительны по сравнению с их длиной, то линии  $\gamma_j$  мало отклоняются от прямолинейных отрезков  $\tilde{\gamma}_j$  перпендикулярных к основанию. Обозначим через  $\tilde{D}_j$  прямоугольник, получаемый из  $D_j$  заменой  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$  отрезками  $\tilde{\gamma}_j$  и  $\tilde{\gamma}_{j+1}$ ; области  $\tilde{D}_0$  и  $\tilde{D}_n$  будут при этом полуполосами (рис. 150).

Перейдем к конструкции приближенного выражения для потенциала  $u$ . Прежде всего строим в каждом прямоугольнике  $\tilde{D}_j$  гармоническую функцию  $\tilde{u}_j(z)$  по следующим граничным данным:

$$\tilde{u}_j(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } \tilde{\gamma}_j \text{ для } j = 1, \dots, n \text{ и на } (-\infty, 0) \text{ для } j = 0, \\ 1 & \text{на } \tilde{\gamma}_{j+1} \text{ для } j = 0, \dots, n-1 \text{ и на } (l, \infty) \text{ для } j = n, \end{cases} \quad (10)$$

$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial n} = 0$  на остальных участках границы  $\tilde{D}_j$  для  $j = 0, \dots, n$ .

Построение  $\tilde{u}_j$ , очевидно, сводится к отображению прямоугольника на полуплоскость и применению формулы Келдыша — Семенова, причем последняя имеет весьма простой вид в силу простоты граничных данных.

За искомого приближенного значения для  $u$  в области  $\tilde{D}_j$  принимается:

$$\tilde{u} \approx (u_{j+1} - u_j) \tilde{u}_j(z) + u_j \quad (j = 0, 1, \dots, n; u_0 = U_0, u_{n+1} = U_n). \quad (11)$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет граничным условиям в прямоугольнике  $\tilde{D}_j$  и тем меньше отличается от своего точного значения, чем меньше  $\tilde{\gamma}_j$  и  $\tilde{\gamma}_{j+1}$  отличаются от  $\gamma_j$  и  $\gamma_{j+1}$ .

Формулы (11) содержат  $n$  неизвестных параметров  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , которые можно определить из условия совпадения расходов жидкости в соседних сегментах. Пусть  $\tilde{v}_j(z)$  будет

функция, сопряженная с  $\tilde{u}_j(z)$ , и

$$m_j = \int_{-h_0}^{-l_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x} dy, \quad m_j = \int_{-h_0}^{-l_{j+1}} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x} dy \quad (12)$$

— ее приращения на отрезках  $\tilde{\gamma}_j$  и  $\tilde{\gamma}_{j+1}$ . Тогда функция  $v(z)$ , сопряженная с  $u(z)$ , в области  $\tilde{D}_j$  будет приближенно равна  $(u_{j+1} - u_j)\tilde{v}_j(z)$  и, следовательно, условие равенства расходов в сегментах  $\tilde{D}_{j-1}$  и  $\tilde{D}_j$  запишется в виде \*)

$$m_{j-1}(u_j - u_{j-1}) = m_j(u_{j+1} - u_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Система (13) есть система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $u_j$ . Определяя из нее  $u_j$  и подставляя их значения в (11), мы получим искомое приближенное выражение для  $u(z)$  во всех фрагментах.

Как уже отмечалось выше, точность метода фрагментов зависит от величины отклонений линий  $\gamma_j$  от отрезков  $\tilde{\gamma}_j$ . Укажем путь для числовой оценки погрешности. Возьмем  $j$ -й шпунт; пусть  $D'$  есть часть  $D$ , расположенная слева от этого шпунта  $c_j$ , а  $D''$  — часть  $D$ , расположенная справа от него. Заменим часть  $D''$  областью  $D''_1$ , симметричной с  $D'$  относительно  $c_j$ . Для области  $D_1 = D' + D''_1$  линия  $\gamma_j$ , очевидно, будет совпадать с отрезком  $\tilde{\gamma}_j$ . Используя вариационные теоремы, мы можем оценить вариацию функции  $f(z)$ , реализующей конформное отображение области  $D_1$  на полуплоскость при переходе от  $D_1$  к  $D$  и получить тем самым оценку отклонения  $\tilde{\gamma}_j$  от  $\gamma_j$ . Наша задача свелась к оценке разности  $u$  и  $\tilde{u}$  в зависимости от отклонения  $\tilde{\gamma}_j$  от  $\gamma_j$  или области  $D_j$  от прямоугольника  $\tilde{D}_j$ , но эту оценку можно получить, используя формулы п. 64 для конформных отображений близких областей.

Опираясь на формулы для конформных отображений близких областей, можно также дать существенное уточнение метода фрагментов. Примем за  $\tilde{\gamma}_j$  полуволну синусоиды с амплитудой  $b_j$ , соединяющую конец  $c_j$  с прямой  $y = -h_0$ . Считая области  $\tilde{D}_j$  близкими к прямоугольнику, мы сможем эффективно построить отображение области  $\tilde{D}_j$  на полуплоскость и тем самым построить функцию  $\tilde{u}_j$ , равную единице на  $\tilde{\gamma}_{j+1}$ , нулю на  $\tilde{\gamma}_j$  и обладающую нулевой нормальной производной на остальных участках границы. Функция  $u_j$  линейно зависит от параметров синусоид  $b_j, b_{j+1}$ . По функции  $\tilde{u}_j(z)$ , мы, как раньше, строим искомый потенциал

$$u \approx (u_{j+1} - u_j)\tilde{u}_j + u_j.$$

\*) Положим еще  $u_0 = 0, u_{n+1} = 2u_n$ .

В построенном выражении для  $u$  имеется  $2n$  числовых параметров  $u_j$  и  $b_j$ . Система (13) дает  $n$  уравнений; еще  $n$  уравнений мы получим, если потребуем, чтобы расход жидкости, вытекающий из  $\tilde{D}_{j-1}$  через верхнюю половину  $\tilde{y}_j$ , равнялся расходу жидкости, втекающей в  $\tilde{D}_j$  через ту же часть  $\tilde{y}_j$ .

Применяя формулы п. 65 для отображений близких областей на полуплоскость, можно дать методы пересчета значений  $u$  при переходе от данной конструкции к конструкции близкой.

В заключение укажем еще метод *последовательного отображения* шпунтов, наиболее полно проведенной в работе П. Ф. Фильчакова [10].

Для простоты рассмотрим случай флютбета длины  $l$  с двумя шпунтами, хотя метод аналогично, а в смысле точности даже лучше проводится в случае большого числа шпунтов.

Пусть длина флютбета будет  $l$ , а длины шпунтов:  $l_1 = 1$  и  $l_2$  (рис. 151).

Совершим конформное отображение

$$z_1 = \sqrt{1 + z^2} \quad (14)$$

нижней полуплоскости  $z$  с выброшенным шпунтом  $l_1$  на нижнюю полуплоскость  $z_1$ . Шпунт  $l_2$  перейдет при этом в криволинейный шпунт  $l'_2$ , выходящий из точки  $l' = \sqrt{1 + l^2}$  действительной оси  $x_1$ ; уравнение  $l'_2$  будет:

$$x_1 = l \sqrt{\frac{l'^2 + y_1^2}{l^2 + y_1^2}}. \quad (15)$$

Так как отсюда  $l \leq x_1 \leq \sqrt{1 + l^2}$ , то при больших  $l$  кривая  $l'_2$  будет мало отличаться от прямолинейного отрезка. Обозначим через  $(\bar{l}, \bar{l}_2)$  координаты конца криволинейного шпунта  $l'_2$  (рис. 151). Применяя формулу Тейлора, можно получить приближенное уравнение для абсцисс точек  $l'_2$ :

$$x_1 - \bar{l} \approx (l' - \bar{l}) \left\{ 1 - \left( \frac{y}{l_2} \right)^2 \right\} (1 - y^2 k_1), \quad (16)$$

где  $y$  ( $0 > y > -l_2$ ) — параметр — ордината точки шпунта  $l_2$ , и

$$k_1 = \frac{l'^2 (3\bar{l}_2 + 2l') - \bar{l}_2^3}{\bar{l}_2^3 (l + \bar{l}_2)^2}$$

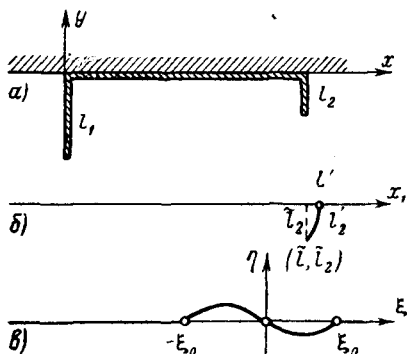


Рис. 151.

— постоянная, малая при больших  $l$ , ибо  $k_1 \approx \frac{1}{l^2}$  (см. [10]).  
Формула (16) точна на обоих концах шпунта, т. е. при  $y = 0$  и  $y = l_2$ .

Заменим теперь криволинейный шпунт  $l'_2$  прямолинейным  $\bar{l}_2$ , проходящим через точку  $(\bar{l}, \bar{l}_2)$  \*), и отображим конформно нижнюю полуплоскость  $z$  с выброшенным отрезком  $\bar{l}_2$  на нижнюю полуплоскость  $\xi$ :

$$\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{z_1 - \bar{l}}{\bar{l}_2}\right)^2}. \quad (17)$$

Полуплоскость с выброшенным криволинейным шпунтом  $l'_2$  переходит при этом в область рис. 151, в, мало отличающуюся от полуплоскости: ее граница отличается от оси  $\xi$  лишь на отрезке  $(-\xi_0, \xi_0)$  \*\*), где уравнение границы приближенно представляется в виде

$$\eta = \pm \frac{\bar{l}(l' - \bar{l})l_2}{l} \xi \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2} \quad (18)$$

(знак «+» относится к отрицательным  $\xi$  и знак «-» — к положительным). Замечая, что максимум ординаты (18) достигается при  $\xi = \xi_0/\sqrt{2}$  и равен

$$\eta_{\max} = \frac{\bar{l}(l' - \bar{l})}{2l} l_2 \xi_0^2,$$

мы можем представить (18) в виде

$$\eta \approx \pm \frac{2\eta_{\max}}{\xi_0^2} \xi \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}. \quad (19)$$

Пользуясь формулой для отображения областей, близких к полуплоскости (см. (2) п. 65), П. Ф. Фильчаков показал, что погрешность метода последовательного отображения (при котором криволинейный шпунт  $l'_2$  заменяют прямолинейным  $\bar{l}_2$ ) пропорциональна кубу длины шпунта  $l_2$ , обратно пропорциональна кубу расстояния  $l$  между шпунтами и абсциссе  $\xi$ .

Именно, разность точного значения абсциссы  $\xi$  и ее приближенного значения, найденного по формулам (14) и (17), не превосходит

$$\delta = \frac{\sqrt{2} l_2^3}{2\pi l (l^2 + 1) \xi} \quad (20)$$

(см. [10]).

\*) Обозначен пунктиром на рис. 151, в.

\*\*)  $\pm \xi_0$  — образы точки  $z_1 = l'_2$  при отображении (17).

## Литература к главе IV

- [1] М. А. Лаврентьев, К теории конформных отображений, Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова, 1934.
- [2] М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2, ОНТИ, 1935 (см. Дополнение II «О некоторых экстремальных задачах в теории конформных отображений»).
- [3] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
- [4] Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности (см. Приложение: М. Шиффер, Некоторые новые результаты в теории конформных отображений), ИЛ, 1953.
- [5] М. А. Лаврентьев, О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй, Матем. сб., т. 4 (46), вып. 3, 1938, стр. 391—458.
- [6] М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, Гостехиздат, 1946.
- [7] М. А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Изд-во АН СССР, 1962.
- [8] Л. И. Седов, Приложение теории функций комплексного переменного к некоторым задачам плоской гидродинамики, Успехи матем. наук, вып. VI, 1939.
- [9] Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод при гидротехнических сооружениях и ее основные приложения, Издание Научно-мелиорационного ин-та, Петроград, 1922.
- [10] П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидродинамическими сооружениями, тт. I, II, Изд-во АН УССР, Киев, 1959, 1960.
- [11] П. Ф. Фильчаков, Приближенные методы конформных отображений, «Наукова думка», 1964.

## Приложения теории функций к анализу

В этой главе рассматриваются некоторые из приложений теории функций к анализу, имеющие наибольший интерес для физиков.

Первый параграф посвящен представлению функций бесконечными рядами и произведениями, которые постоянно используются в самых различных вопросах. Во втором параграфе даны методы вычисления интегралов от функций действительного и комплексного переменного, а также важные для теории колебаний методы подсчета числа нулей аналитических функций в заданных областях. Наконец, в третьем параграфе указываются методы получения приближенных выражений функций для больших значений аргументов, так называемых асимптотических формул, весьма полезных для приложений.

### § 1. Разложение в ряды и бесконечные произведения

Начнем с того, что напомним читателю основные положения относительно разложения функций в ряды Тейлора и Лорана и на ряде примеров проиллюстрируем методы фактического отыскания таких разложений.

**70. Ряды Тейлора и Лорана.** В первой главе было доказано, что всякая функция, аналитическая в круге  $|z - a| < R$ , представляется в этом круге своим рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Коэффициенты его определяются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где  $C$  — любой простой замкнутый контур, охватывающий точку  $a$  и принадлежащий кругу (см. п. 18).



Ряды Лорана являются обобщением рядов Тейлора. С их помощью можно представлять функции, аналитические в кольцах  $r < |z - a| < R$  ( $r \geq 0$ ,  $R \leq \infty$ ):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Коэффициенты ряда Лорана определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2)$$

где  $C$  — простой замкнутый контур, лежащий в кольце и охватывающий его внутреннюю окружность (п. 21).

Формулы (1) и (2) редко используются для получения конкретных разложений. Обычно тейлоровские и лорановские разложения функций находят косвенным путем с помощью операций над степенными рядами. При этом иногда сравнение коэффициентов, найденных косвенным путем и непосредственным применением формул, приводит к интересным соотношениям.

Приведем несколько примеров разложений функций в ряды Тейлора и Лорана.

1) Весьма просто получаются разложения в ряд Тейлора некоторых неэлементарных функций, выражаемых посредством интегралов.

Функция вероятности ошибок определяется интегралом

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad (3)$$

который не выражается через элементарные функции. Чтобы получить разложение  $\operatorname{erf} z$  в ряд Тейлора с центром в точке  $a = 0$ , достаточно подставить  $-\xi^2$  вместо  $\xi$  в разложение  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\xi}$  и последнее проинтегрировать почленно:

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \quad (4)$$

Полученное разложение сходится для всех конечных  $z$ . При  $x \rightarrow \infty$  по положительной полуоси функция стремится к пределу \*)

$$\operatorname{erf} \infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 1,$$

причем весьма быстро:  $\operatorname{erf} 2$  отличается от  $\operatorname{erf} \infty$  на 0,5%.

\*) Этот интеграл, так называемый интеграл Пуассона, вычисляется в курсах анализа. См., например, Фихтенгольц, т. III, стр. 279.

Однако при произвольном стремлении  $z$  к  $\infty$  предел  $\operatorname{erf} z$  не существует, ибо, как видно из полученного разложения,  $z = \infty$  является существенно особой точкой  $\operatorname{erf} z$ . График функции  $\operatorname{erf} x$  для действительных значений аргумента изображен на рис. 152; пунктиром показан график ее производной.

Наряду с функцией  $\operatorname{erf}$  часто рассматривается ее дополнение до 1:

$$\operatorname{Erf} z = 1 - \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (5)$$

Аналогично получается разложение *интегрального синуса*

$$\operatorname{si} z = \int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (6)$$

сходящиеся также для всех конечных  $z$ . График  $\operatorname{si} x$  для действительных

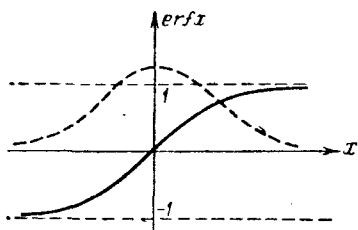


Рис. 152.

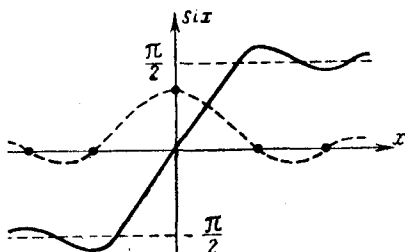


Рис. 153.

значений аргумента изображен на рис. 153; пунктиром показан график производной. При  $x \rightarrow \infty$  по положительной полуоси  $\operatorname{si} x$  стремится к пределу \*)

$$\operatorname{si} \infty = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

но  $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{si} z$  не существует, ибо  $z = \infty$  является существенно особой точкой  $\operatorname{si} z$ . Наряду с функцией  $\operatorname{si}$  рассматривается функция

$$\operatorname{Si} z = \int_{-\infty}^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = \operatorname{si} z - \frac{\pi}{2},$$

а также *интегральный косинус*

$$\operatorname{Ci} z = \int_{-\infty}^z \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi.$$

\*) Интеграл (7), так называемый интеграл Эйлера, вычисляется в курсах анализа, см. также пример 2 п. 73.

2) Многочлен Лежандра  $P_n(z)$  определяется как коэффициент при  $w^n$  в тейлоровском разложении

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zw+w^2}} = 1 + P_1 w + P_2 w^2 + \dots + P_n w^n + \dots \quad (8)$$

Для определения этих коэффициентов дифференцируем (8) по  $w$ :

$$\frac{z-w}{\sqrt{(1-2zw+w^2)^3}} = P_1 + 2P_2 w + \dots + nP_n w^{n-1} + \dots,$$

и сравниваем полученное разложение с (8):

$$(1-2zw+w^2)(P_1 + 2P_2 w + \dots + nP_n w^{n-1} + \dots) = \\ = (z-w)(1 + P_1 w + P_2 w^2 + \dots + P_n w^n + \dots).$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $w$ ; найдем:

$$P_1 = z, \quad 2P_2 - 2zP_1 = -1 + zP_1 \quad \text{или} \quad P_2 = \frac{3z^2 - 1}{2},$$

и, далее,

$$(n+1)P_{n+1} - 2nzP_n + (n-1)P_{n-1} = zP_n - P_{n-1},$$

или

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)zP_n + nP_{n-1} = 0. \quad (9)$$

С помощью этой рекуррентной формулы по известным двум первым многочленам  $P_1$  и  $P_2$  можно найти остальные.

3) Многочлен Чебышева  $T_n(z)$  определяется как коэффициент при  $w^n$  в разложении

$$\frac{4-w^2}{4-4zw+w^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z) w^n. \quad (10)$$

Покажем, что для любого натурального  $n$

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z). \quad (11)$$

Для доказательства положим  $z = \cos \zeta$ ; разлагая левую часть в (10) на простейшие дроби, имеем:

$$\frac{4-w^2}{4-4w \cos \zeta + w^2} = -1 + \frac{1}{1 - \frac{w}{2} e^{-i\zeta}} + \frac{1}{1 - \frac{w}{2} e^{i\zeta}}.$$

Обе дроби при любом фиксированном  $\zeta$  и достаточно малом по модулю  $w$  можно разложить в геометрическую прогрессию по степеням  $w$ ; будем тогда иметь:

$$\frac{4-w^2}{4-4w \cos \zeta + w^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\zeta}{2^{n-1}} w^n.$$

Сравнивая это разложение с выражением (10), получим  $T_n(\cos \zeta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\zeta$ , что и требуется.

4) Цилиндрическая функция первого рода  $J_n(z)$  целого порядка  $n$  определяется как коэффициент при  $w^n$  в разложении Лорана

$$e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n. \quad (12)$$

Функцию  $J_n(z)$  можно представить в виде степенного ряда. Для этого достаточно перемножить ряды для  $e^{\frac{z}{2}w}$  и  $e^{-\frac{z}{2}\frac{1}{w}}$ ; имеем:

$$e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n w^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{w^n}.$$

Отсюда коэффициент при  $w^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) равен

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)! k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \quad (13)$$

а коэффициент при  $\frac{1}{w^n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) равен

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Найдем теперь выражение для  $J_n(z)$  непосредственно с помощью формулы (2) для коэффициентов ряда Лорана:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega^{n+1}}. \quad (14)$$

Преобразуем это выражение; для этого выберем в качестве  $C$  окружность  $|\omega|=1$  и положим  $\omega = e^{it}$ , получим:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin t} e^{-nit} i dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - z \sin t) dt - \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt - z \sin t) dt. \end{aligned}$$

Но второй интеграл равен нулю, ибо по свойству интеграла от периодических функций промежутки интегрирования  $(0, 2\pi)$  можно заменить промежутком  $(-\pi, \pi)$ , а подынтегральная функция нечетна. Таким образом,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - z \sin t) dt. \quad (15)$$

Полученное соотношение, так называемый *интеграл Бесселя*, дает представление цилиндрической функции в виде интеграла и оказывается полезным в некоторых задачах математической физики (см. также гл. VII).

5) *Деление степенных рядов.* Пусть даны два степенных ряда

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad (16)$$

причем  $f_2(0) = b_0 \neq 0$  (для простоты письма мы считаем, что центры рядов (16) совпадают с началом координат). В круге  $|z| < R$ , где  $R$  — наименьший из модулей особых точек  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  и нулей  $f_2(z)$ , частное этих рядов, очевидно, снова представляется в виде степенного ряда

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (17)$$

Для фактического определения  $c_n$  лучше всего пользоваться соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

из которого, сравнивая коэффициенты, найдем:

$$\left. \begin{aligned} b_0 c_0 &= a_0, & b_0 c_1 + b_1 c_0 &= a_1, \dots, \\ b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0 &= a_n, \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Система (18) последовательно разрешается относительно  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ , ибо в каждом новом уравнении новый коэффициент  $c_n$  входит с множителем  $b_0 \neq 0$ .

Для  $f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ , например, имеем  $a_{2k} = 0$ ,  $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ ,  $b_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ ,  $b_{2k+1} = 0$  и из (18) найдем:

$$w = \operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \frac{17}{315} z^7 + \dots \quad (19)$$

(общий закон построения коэффициентов довольно сложен).

Отметим, что ряды Лорана связаны с известными из анализа рядами Фурье. Пусть функция  $f(z)$  аналитична в кольце  $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$ ; тогда в этом кольце она может быть представлена своим рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad (20)$$

В частности, для точек  $z = e^{it}$  единичной окружности мы получим:

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (21)$$

Ряд (21) представляет собой *ряд Фурье* функции  $\varphi(t)$ , записанный в комплексной форме. В самом деле, мы имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \end{aligned} \quad (22)$$

где положено  $c_0 = a_0/2$ ,  $a_n = c_n + c_{-n}$ ,  $b_n = i(c_n - c_{-n})$ , и, следовательно, на основании (20)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, на единичной окружности ряд Лорана для  $f(z)$  является рядом Фурье для функции  $\varphi(t) = f(e^{it})$ .

**Пример.** Найдем разложение в ряд Фурье функции

$$\varphi(t) = \frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} \quad (|a| < 1);$$

для этого положим  $e^{it} = z$  и найдем разложение в ряд Лорана полученной функции

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{2i \left\{ z^2 - \left( a + \frac{1}{a} \right) z + 1 \right\}}.$$

Корни знаменателя равны  $z_1 = a$ ,  $z_2 = \frac{1}{a}$ ; разлагая  $f(z)$  на простейшие дроби, получим:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left\{ -1 + \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} + \frac{1}{1 - az} \right\}.$$

Представляя  $\frac{1}{1-az}$  и  $\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{-1}{\frac{z}{a}\left(1-\frac{a}{z}\right)}$  в виде суммы геометрических прогрессий, сходящихся при  $|z|=1$  в силу условия  $|a|<1$ , будем иметь:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left( z^n - \frac{1}{z^n} \right).$$

Подставляя  $z = e^{it}$ , получим искомое разложение Фурье

$$\frac{a \sin t}{1 - 2a \cos t + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt. \quad (24)$$

Вообще любой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \quad (25)$$

с комплексными коэффициентами и комплексным переменным  $z$  после подстановки  $e^{iz} = \xi$  переходит в ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^n, \quad (26)$$

где  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ ,  $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Так как по доказанному в п. 21 ряд Лорана сходится в некотором кольце  $r < |\xi| < R$ , то *тригонометрический ряд (25) сходится в полосе  $\ln r < -y < \ln R$ , параллельной действительной оси* (мы полагаем  $z = x + iy$ , тогда  $|\xi| = e^{-y}$ ). В этой полосе сумма ряда (25) является аналитической функцией.

Наиболее важным для практики является случай, когда  $r = R = 1$ , т. е. когда полоса вырождается в прямую — действительную ось. В этом случае, как известно из анализа, ряд (25), если он сходится, может представлять не только неаналитическую, но даже и разрывную функцию.

В заключение укажем полезное для приложений обобщение рядов Тейлора, так называемые *ряды Бурмана — Лагранжа*. Эти ряды получаются при разложении аналитической функции по степеням другой аналитической функции  $\omega(z)$ :

$$f(z) = d_0 + d_1 \omega(z) + \dots + d_n \omega^n(z) + \dots \quad (27)$$

Получим формулы для коэффициентов ряда Бурмана — Лагранжа, обобщающие формулы для коэффициентов ряда Тейлора. Пусть  $f(z)$  и  $\omega(z)$  правильны в некоторой точке  $a$ , причем  $\omega(z)$  имеет в этой точке нуль первого порядка. Выберем замкнутый контур  $C$ , ограничивающий область  $D$ , так, чтобы  $D$

содержала точку  $a$ , обе функции были правильными в  $\bar{D}$  и чтобы  $w(z)$  в  $\bar{D}$  принимала свои значения лишь один раз. Фиксируем внутри  $D$  произвольную точку  $z$  и рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) w'(\zeta)}{w(\zeta) - w(z)} d\zeta.$$

По нашим предположениям подынтегральная функция, рассматриваемая в зависимости от  $\zeta$ , имеет в  $\bar{D}$  одну особую точку  $\zeta = z$  — полюс первого порядка с вычетом  $\frac{f(z) w'(z)}{w'(z)} = f(z)$  (см. п. 23). По теореме о вычетах рассматриваемый интеграл равен, следовательно,  $f(z)$  и мы получаем формулу

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) w'(\zeta)}{w(\zeta) - w(z)} d\zeta, \quad (28)$$

обобщающую интегральную формулу Коши.

Предположим еще, что точка  $z$  выбрана столь близкой к  $a$ , что  $\left| \frac{w(z)}{w(\zeta)} \right| \leq q < 1$  для всех точек  $\zeta$  на  $C$  (этого всегда можно достигнуть на основании сделанных выше предположений). Тогда подынтегральную функцию в (28) можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta) w'(\zeta)}{w(\zeta)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w(z)}{w(\zeta)}} &= \\ &= \frac{f(\zeta) w'(\zeta)}{w(\zeta)} \left\{ 1 + \frac{w(z)}{w(\zeta)} + \dots + \frac{w^n(z)}{w^n(\zeta)} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

интегрируя который почленно, мы получаем ряд Бурмана — Лагранжа (27) и видим, что его коэффициенты

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) w'(\zeta)}{w^{n+1}(\zeta)} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (29)$$

Эти формулы обобщают формулы Коши для коэффициентов ряда Тейлора.

Их легко преобразовать, заметив, что подынтегральная функция, по нашим предположениям, имеет внутри  $C$  единственную особую точку  $\zeta = a$  — полюс порядка  $n+1$ . Вычисляя вычет по формуле п. 23, находим выражения для коэффициентов ряда Бурмана — Лагранжа

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ \frac{f(z) w'(z) (z-a)^{n+1}}{w^{n+1}(z)} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (30)$$

обобщающие известные формулы Тейлора.



При  $n \geq 1$  формулы (29) можно преобразовать интегрированием по частям:

$$d_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{1}{w^n(\zeta)} \right\} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(\zeta)}{w^n(\zeta)} d\zeta$$

и тогда вместо (30) аналогичным образом получим:

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ f'(z) \frac{(z-a)^n}{w^n(z)} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (31)$$

В качестве примера рассмотрим разложение  $f(z) = e^{bz}$  по степеням  $w = ze^{-z}$ ; примем  $a = 0$ , получим:  $d_0 = f(0) = 1$  и по формуле (31):

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ be^{bz} \left( \frac{z}{ze^{-z}} \right)^n \right\} = \frac{b(b+n)^{n-1}}{n!}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$e^{bz} = b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b+n)^{n-1}}{n!} z^n e^{-nz}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим применение ряда Бурмана — Лагранжа к задаче *обращения степенных рядов*. Пусть задан ряд

$$w = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad c_1 \neq 0, \quad (32)$$

сходящийся в некоторой окрестности точки  $z = 0$ , и требуется разложить функцию  $z(w)$ , определяемую из этого ряда, по степеням  $w$ :

$$z = d_1 w + d_2 w^2 + \dots + d_n w^n + \dots \quad (33)$$

Это частный случай задачи, которую решает ряд Бурмана — Лагранжа. По формуле (31) получаем коэффициенты ряда (33)

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{z}{w} \right)^n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (34)$$

ибо в нашем случае  $f(z) \equiv z$  и  $f'(z) = 1$ . Формулы (34) и решают поставленную задачу.

**Пример.** Требуется найти разложение в ряд решения  $z(w)$  трансцендентного уравнения

$$w = ze^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} z^{n+1}.$$

По формулам (34) находим:

$$d_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{anz} = \frac{(an)^{n-1}}{n!},$$

и искомое разложение имеет вид

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} w^n.$$

# 71. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби.

В п. 22 мы называли *мероморфной* функцию  $f(z)$ , все конечные особые точки которой являются полюсами. Так как в любой ограниченной области такая функция может иметь лишь конечное число полюсов (см. п. 22), то все ее полюсы можно перенумеровать, например, в порядке неубывания модулей:  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ,

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$$

Будем обозначать через  $g_n(z)$  главную часть  $f(z)$  в точке  $a_n$ :

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_{-k}^{(n)}}{(z - a_n)^k} \quad (1)$$

и через

$$g(z) = \sum_{k=1}^m c_k z^k \quad (2)$$

ее главную часть в бесконечно удаленной точке (если последняя также является полюсом). Функции  $g_n(z)$  называются в анализе *простейшими дробями*, а  $g(z)$  — *целой частью*  $f(z)$ . В анализе доказывается, что любую дробно-рациональную функцию можно разложить на целую часть и простейшие дроби. Приведем несколько более сильную теорему:

**Теорема 1.** Если мероморфная функция  $f(z)$  имеет лишь конечное число полюсов  $a_1, a_2, \dots, a_l$  и, кроме того,  $a_{l+1} = \infty$  является либо правильной ее точкой, либо полюсом, то эта функция представляется в виде суммы своих главных частей\*)

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{n=1}^l g_n(z) \quad (3)$$

и, следовательно, дробно-рациональна.

Для доказательства рассмотрим разность

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{n=1}^l g_n(z).$$

Функция  $\varphi(z)$  правильна в любой точке  $a_n$ , ибо из разложения Лорана  $f(z)$  в окрестности  $a_n$  главная часть устранена вычитанием  $g_n(z)$ , а остальные члены  $\varphi(z)$  аналитичны в этой точке. То же рассуждение относится к точке  $z = \infty$ , а в точках  $z \neq a_n, \neq \infty$  все члены  $\varphi(z)$  аналитичны. Итак, функция  $\varphi(z)$  аналитична в замкнутой плоскости  $z$  и по теореме Лиувилля п. 24

\*) Функция  $g(z)$  входит в разложение (3) лишь в том случае, если  $z = \infty$  является полюсом.

является постоянной. Формула (3) доказана, а из нее вытекает после приведения всех дробей к общему знаменателю, что  $f(z)$  является отношением двух многочленов, т. е. дробно-рациональной функцией.

Такого рода разложение можно построить и для произвольной мероморфной функции. Однако в общем случае имеется бесконечное множество главных частей, а конечная сумма (3) заменяется рядом и возникает вопрос о сходимости этого ряда. Вообще говоря, ряд (3) оказывается расходящимся, и для обеспечения сходимости к главным частям приходится добавлять некоторые выражения \*).

Мы ограничимся доказательством этого утверждения для случая, который имеет наибольшее практическое значение. Для удобства формулировки условимся понимать под *правильной системой контуров*  $\{C_n\}$  совокупность замкнутых кривых, удовлетворяющих следующим условиям: 1)  $C_1$  содержит внутри себя точку  $z = 0$ , каждый контур  $C_n$  находится внутри области, ограниченной контуром  $C_{n+1}$ ; 2) кратчайшее расстояние  $d_n$  от точек  $C_n$  до начала координат неограниченно возрастает с ростом  $n$ ; 3) отношение длины  $l_n$  кривой  $C_n$  к  $d_n$  остается ограниченным:

$$\frac{l_n}{d_n} \leq A. \quad (4)$$

Имеет место

**Теорема 2 (О. Коши).** Пусть мероморфная функция  $f(z)$  на некоторой правильной системе контуров  $\{C_n\}$  растет не быстрее, чем степень  $z^p$ , т. е. на всех  $C_n$

$$|f(z)| \leq M|z|^p, \quad (5)$$

где  $M$  — постоянная и  $p \geq 0$  — целое число; пусть еще  $z = 0$  не является полюсом  $f(z)$ . В этих условиях  $f(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\}, \quad (6)$$

где  $g_n(z)$  — главные части  $f(z)$  и ее полюсах  $a_n$  и

$$h(z) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad h_n(z) = \sum_{k=0}^p \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (7)$$

— многочлены степени не выше  $p^{**}$ ). Ряд (6) сходится при надлежащем порядке суммирования в любой правильной точке

\*) В формуле (6) такими выражениями служат многочлены  $h_n(z)$ .

\*\*) Многочлены  $h(z)$  и  $h_n(z)$  представляют собой отрезки длины  $p$  тейлоровских разложений  $f(z)$  и  $g_n(z)$  с центром в точке  $z = 0$  (см. замечание в конце этого пункта). Если  $z = 0$  является полюсом  $f(z)$  с главной частью  $g_0(z)$ , то разложение (6) справедливо для функции  $f(z) - g_0(z)$ .

$f(z)$ , причем сходимость его равномерна в любой ограниченной области, если отбросить в нем конечное число членов, имеющих полюсы в этой области.

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

где  $z$  — любая точка, лежащая внутри контура  $C_N$  и отличная от полюса  $f(z)$ , и обозначим через  $\varphi(z)$  сумму главных частей  $g_n(z)$  по всем полюсам, лежащим внутри  $C_N$ ,

$$\varphi(z) = \sum_{(C_N)} g_n(z).$$

Подынтегральная функция  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ , рассматриваемая в зависимости от  $\xi$ , имеет своими особенностями точки  $a_n$  и еще точку  $\xi = z$  — полюс первого порядка с вычетом  $f(z)$ . Вычеты  $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$  в точках, лежащих внутри  $C_N$ , равны, очевидно, вычетам в тех же точках функции  $\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}$ ; подсчитаем их сумму  $s$ . Функция  $\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}$  дробно-рациональна, и так как кроме точек  $a_n$  она имеет лишь одну особую точку  $\xi = z$  с вычетом  $\varphi(z)$ , то по теореме о полной сумме вычетов  $s + \varphi(z) + c_{-1} = 0$ , где  $c_{-1}$  — вычет  $\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}$  в бесконечности (см. п. 24). Но так как степень числителя  $\varphi(\xi)$  ниже степени знаменателя, то в окрестности  $\xi = \infty$  имеем  $\frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} = \frac{c_{-2}}{\xi^2} + \frac{c_{-3}}{\xi^3} + \dots$ ; следовательно,  $c_{-1} = 0$  и

$$s = -\varphi(z) = -\sum_{(C_N)} g_n(z).$$

Таким образом, по теореме о вычетах наш интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_N)} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = f(z) - \sum_{(C_N)} g_n(z). \quad (8)$$

Если бы интеграл (8) стремился к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , то функция  $f(z)$  представлялась бы сходящимся рядом простейших дробей  $\sum g_n(z)$ . Однако, так как в силу наших условий  $f(z)$  на системе контуров  $C_n$  может возрастать как  $|z|^p$ , то интеграл (8), вообще говоря, не стремится к нулю. Излагаемый ниже остроумный прием получения из (8) стремящегося к нулю интеграла принадлежит Коши. Так как по условию точка  $z = 0$

является правильной точкой  $f(z)$  и лежит внутри  $C_N$ , то в равенстве (8) и его последовательных производных по  $z$  можно положить  $z = 0$ , и мы получим систему уравнений

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{(C_N)} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \quad (k=0, 1, \dots, p) \quad (9)$$

(см. формулу для высших производных в п. 17). Умножая равенства (9) на  $z^k$  и вычитая их сумму из (8), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_N} \left\{ \frac{1}{\xi - z} - \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{\xi^{k+1}} \right\} f(\xi) d\xi = \\ = f(z) - h(z) - \sum_{(C_N)} \{g_n(z) - h_n(z)\}. \end{aligned}$$

Просуммировав геометрическую прогрессию, стоящую под знаком интеграла в последней формуле, мы представим этот интеграл в виде

$$R_N = \frac{z^{p+1}}{2\pi i} \int_{C_N} \frac{f(\xi)}{\xi^p} \frac{d\xi}{\xi(\xi - z)}.$$

Оценим величину  $R_N$ . Принимая во внимание, что  $|\xi| \geq d_N$ ,  $|\xi - z| \geq d_N - |z|$ , будем иметь в силу условий, наложенных на систему  $\{C_N\}$  и на  $f(z)$ ,

$$|R_N(z)| \leq \frac{|z|^{p+1}}{2\pi} M \frac{I_N}{d_N(d_N - |z|)} \leq \frac{MA}{d_N - |z|} \cdot \frac{|z|^{p+1}}{2\pi}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что  $R_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ; следовательно, формула (6) действительно имеет место при надлежащем порядке\*) следования членов ряда, в нее входящего.

Остается показать, что ряд сходится равномерно в любой ограниченной области  $D$ , если отбросить в нем члены, соответствующие полюсам, лежащим в  $D$ . Пусть для всех точек  $D$  будет  $|z| < R$ . Тогда согласно (10) имеем:

$$|R_N(z)| \leq \frac{MAR^{p+1}}{(d_N - R)2\pi},$$

\*) Именно, ряд (6) нужно суммировать, объединяя в один член слагаемые, относящиеся к полюсам, лежащим между контурами  $C_n$  и  $C_{n+1}$ , и располагая полученные члены в порядке возрастания  $n$ . Это следует из приведенного доказательства теоремы. В случае абсолютной сходимости ряда (6) порядок следования членов не существен.

откуда видно, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $N_0$ , не зависящее от  $\varepsilon$ , начиная с которого для всех  $N$  будет  $|R_N(z)| < \varepsilon$ , а это и означает равномерную сходимость ряда (6). Теорема доказана.

**Замечание.** Доказанная теорема обобщается на случай произвольной мероморфной функции  $f(z)$  в следующем виде:

**Теорема (Миттаг — Леффлер \*).** Пусть

$$h_n(z) = \sum_{k=0}^{p_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (11)$$

есть отрезок тейлоровского разложения главной части  $g_n(z)$  произвольной мероморфной функции  $f(z)$ , правильной в точке  $z = 0$ . Тогда существует такая последовательность целых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  и такая целая функция  $h(z)$ , для которых остается справедливым разложение (6).

Справедлива и следующая, обратная

**Теорема (Миттаг — Леффлер).** Для любой последовательности комплексных чисел  $a_n \rightarrow \infty$  и для любой последовательности главных частей  $g_n(z)$  существует последовательность целых чисел  $p_n$  такая, что ряд

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{g_n(z) - h_n(z)\},$$

где  $h_n(z)$  определяется по формулам (11), равномерно сходится в любой ограниченной области, если отбросить в нем члены, относящиеся к полюсам, принадлежащим этой области. Функция  $f(z)$  мероморфна, имеет своими полюсами точки  $a_n$  и только эти точки, причем ее главная часть в полюсе  $a_n$  равна  $g_n(z)$ .

Приведем несколько примеров разложения мероморфных функций в ряд главных частей.

**Мероморфная функция**

$$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

имеет полюсы первого порядка в точках  $z = 0, \pm \pi i, \pm 2\pi i, \dots$ . Покажем, что на системе окружностей  $C_n: |z| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ , эта функция ограничена. В силу периодичности функции достаточно доказать ее ограниченность в полосе  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$  с исключенными полукругами  $|z - \pi| < r$ ,  $|z| < r$ . Имеем:

$$|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{e^{-y} + e^y}{|e^{-y} - e^y|};$$

\*) Магнус Миттаг — Леффлер (1846—1927) — шведский математик. Доказательство сформулированных теорем можно найти, например, в книге Б. В. Шабата [10].

следовательно, при  $y > 1$   $|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}} < \frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}$ , а при  $y < -1$   $|\operatorname{ctg} z| \leq \frac{1+e^{2y}}{1-e^{2y}} < \frac{1+e^{-2}}{1-e^{-2}}$ . В той же части области, где  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $|\operatorname{ctg} z|$  ограничен в силу свойств непрерывных функций. Наше утверждение доказано и, следовательно, в теореме Коши можно принять  $\rho = 0$ .

В точке  $z = 0$  главная часть  $\operatorname{ctg} z$  равна  $\frac{1}{z}$ , причем функция

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$$

при  $z \rightarrow 0$  стремится к пределу 0 (это следует из нечетности  $f(z)$  и ее непрерывности в точке  $z = 0$ ). Вычет  $f(z)$  в полюсе  $z_n = n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) равен 1, следовательно,  $g_n(z) = \frac{1}{z - n\pi}$ . Формула (6), которая для нашего случая имеет  $\rho = 0$  имеет вид:

$$f(z) = f(0) + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \{g_n(z) - g_n(0)\}^*,$$

дает

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right). \quad (12)$$

Ряд (12) оказывается абсолютно и равномерно сходящимся в любой ограниченной части плоскости  $|z| < R$  после удаления из него членов, которые имеют полюсы в этой части. В самом деле, для общего члена ряда справедлива оценка

$$\left| \frac{z}{(z - n\pi)n\pi} \right| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|}{\pi \left| \pi - \frac{z}{n} \right|} \leq \frac{R}{\pi \left( \pi - \frac{R}{n} \right)} \cdot \frac{1}{n^2},$$

где коэффициент при  $\frac{1}{n^2}$  стремится к конечному пределу  $\frac{R}{\pi^2}$ , а ряд  $\sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится. Отсюда, в частности, следует, что в ряде (12) можно произвольно менять порядок членов. Объединяя члены с индексом  $n$  и  $-n$ , получим:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad (13)$$

Отметим еще формулы, которые получаются из (12) и (13) заменой  $z$  на  $\pi z$ :

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}. \quad (14)$$

\*) Штрих над знаком суммы показывает, что при суммировании исключается индекс  $n = 0$ .

Заменяя в (13)  $z$  через  $iz$  и сокращая все на  $\frac{1}{i}$ , получим:

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}. \quad (15)$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4n^2\pi^2}. \quad (16)$$

Из формулы  $\operatorname{tg} z = -\operatorname{ctg} \left( z - \frac{\pi}{2} \right)$  и из (13) получаем также:

$$\operatorname{tg} z = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{z + \frac{2n-1}{2}\pi} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}. \quad (17)$$

Аналогично из формулы  $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right)$  выводим:

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}. \quad (18)$$

Дифференцируя ряд (12), — это возможно по теореме Вейерштрасса (п. 19), — будем иметь \*):

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(z - n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \quad (19)$$

**72. Разложение целых функций в бесконечные произведения.** По теореме Лиувилля (п. 17), всякая ограниченная целая функция является постоянной. Если целая функция  $f(z)$  имеет в бесконечности полюс  $n$ -го порядка, то она является многочленом степени  $n$ . В самом деле, если  $g(z) = c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$  — главная часть разложения  $f(z)$  в бесконечности, то в силу той же теоремы  $f(z) - g(z) = c_0$  является постоянной.

Как известно из алгебры, любой многочлен  $n$ -й степени имеет  $n$  нулей и представляется в виде произведения линейных множителей, соответствующих этим нулям:

$$f(z) = A'(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) = A \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{z}{a_k} \right), \quad (1)$$

\*) Разложения (13) — (19) были получены еще Л. Эйлером; он указал их в 1742 г. в письме к И. Бернулли.



где  $a_k$  — нули многочлена  $f(z)$ ,  $A$  и  $A'$  — некоторые постоянные\*). Целая функция может вовсе не иметь нулей (например,  $e^z$ ), может иметь и бесчисленное их множество (например,  $\sin z$ ). Целую функцию  $f(z)$ , не имеющую нулей, можно представить в виде

$$f(z) = e^{g(z)}, \quad (2)$$

где  $g(z)$  — целая функция. В самом деле, если целая функция  $f(z)$  не имеет нулей, то  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \{\ln f(z)\}'$  также является целой, а тогда, интегрируя эту целую функцию, получим целую функцию  $\ln f(z) = g(z)$ .

Если целая функция  $f(z)$  имеет лишь конечное число нулей  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (каждый выписывается столько раз, какова его кратность), то частное от деления  $f(z)$  на  $(z - a_1) \dots (z - a_n)$  будет целой функцией, не имеющей нулей. Следовательно, его можно будет представить в виде (2), и мы получим:

$$f(z) = e^{g(z)} (z - a_1) \dots (z - a_n) = A e^{g(z)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_k}\right). \quad (3)$$

Для целых функций, имеющих бесконечное число нулей, можно построить аналогичные формулы, в которых, однако, вместо конечных будут участвовать *бесконечные произведения* и возникает вопрос об их сходимости.

Приведем сначала основные определения и факты, относящиеся к числовым бесконечным произведениям. Пусть дана последовательность комплексных чисел  $\{1 + c_k\}$ , ни один член которой не равен нулю. Если произведение

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n (1 + c_k)$$

при  $n \rightarrow \infty$  стремится к пределу, отличному от нуля, то говорят, что *сходится бесконечное произведение*

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + c_k), \quad (4)$$

а предел  $\Pi$  называют *величиной произведения*.

Очевидно, условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  есть необходимое условие сходимости, ибо

$$1 + c_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{n-1} \neq 0.$$

\*) При переходе ко второй форме записи мы считаем, что точка  $z = 0$  не является нулем  $f(z)$ .

Далее, при подходящем выборе ветвей логарифма имеем:

$$S_n = \ln \Pi_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + c_k).$$

Если при каком-нибудь выборе значений  $\ln(1 + c_k)$  ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + c_k)$  сходится, т. е. существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то тогда и  $\Pi_n = e^{S_n}$  стремится к пределу  $\Pi = e^S$ , т. е. сходится и бесконечное произведение (4). Заметим, что из сходимости ряда логарифмов вытекает, что  $\ln(1 + c_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , а отсюда следует, что, начиная с некоторого  $k$ , значения  $\operatorname{Im} \ln(1 + c_k)$  заключены между  $-\pi$  и  $\pi$ , т. е.  $\ln(1 + c_k)$  — главные значения логарифмов.

Наоборот, если бесконечное произведение сходится, т. е.  $\Pi_n \rightarrow \Pi \neq 0$ , то, выбирая значения  $\ln(1 + c_k)$  так, чтобы при любом  $n$  сумма  $\sum_{k=1}^n \ln(1 + c_k)$  давала главное значение  $\ln \Pi_n$ , мы получим, что существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \Pi_n = \ln \Pi$ , т. е. сходится ряд из логарифмов\*). Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Для сходимости бесконечного произведения

$$\Pi = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$$

необходима и достаточна сходимость ряда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + c_k)$$

при надлежащем выборе значений логарифмов. При этом  $\Pi = e^S$ .

Бесконечное произведение, содержащее равные нулю множители, называется *сходящимся к нулю*, если после удаления всех таких множителей оно остается сходящимся в старом смысле. Равенство (4) тогда сохраняется, если считать  $\Pi = 0$ . При таком определении остается в силе свойство конечных произведений обращаться в нуль лишь в том случае, когда равен нулю хотя бы один из множителей.

Если ряд из логарифмов множителей бесконечного произведения оказывается абсолютно сходящимся, то это произведение

\*) Чтобы удовлетворить нашему условию выбора ветвей логарифмов, достаточно всякий раз надлежащим образом выбирать значение последнего слагаемого суммы  $\ln(1 + c_n)$ . Из сходимости ряда логарифмов на основании проведенного выше рассуждения следует, что, начиная с некоторого  $k$ , все выбранные значения логарифмов будут главными.

также называется *абсолютно сходящимся*. На основании теоремы 1 заключаем, что справедлива

**Теорема 2.** В абсолютно сходящемся произведении можно произвольным образом изменять порядок множителей, не меняя величины произведения.

Далее, справедлива

**Теорема 3.** Для абсолютной сходимости бесконечного произведения  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + c_k)$  необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .

В самом деле, так как у нас  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$  (и в случае сходимости ряда и в случае сходимости произведения), то, начиная с некоторого  $k$ ,  $|c_k| < \frac{1}{2}$ . Тогда

$$\left| \frac{\ln(1 + c_k)}{c_k} - 1 \right| = \left| -\frac{c_k}{2} + \frac{c_k^2}{3} - \dots \right| \leq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} < \left| \frac{\ln(1 + c_k)}{c_k} \right| < \frac{3}{2}.$$

По известной теореме сравнения рядов отсюда вытекает, что ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} |\ln(1 + c_k)|$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$  сходятся или расходятся одновременно. А по определению сходимость первого из этих рядов эквивалентна абсолютной сходимости произведения.

Понятие о сходимости бесконечных произведений естественным образом распространяется и на бесконечные произведения, составленные из функций. Произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z))$$

называется *сходящимся* в некоторой области  $D$ , если в каждой точке  $z_0$  этой области числовое бесконечное произведение  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z_0))$  сходится или сходится к нулю в смысле принятого выше определения.

После этих кратких сведений мы можем возвратиться к вопросу о разложении целых функций в бесконечные произведения, множители которых соответствуют нулям этих функций (обобщение разложения (3)). Заметим, что если целая функция  $f(z)$

(не равная тождественно 0), имеет бесчисленное множество нулей, то эти нули образуют последовательность, сходящуюся к бесконечно удаленной точке. Действительно, в противном случае можно было бы выделить последовательность нулей  $f(z)$ , сходящуюся к конечной точке плоскости, в которой  $f(z)$  по условию правильна, и по теореме единственности п. 20  $f(z)$  была бы тождественно равной нулю.

Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  будет последовательность нулей  $f(z)$ , расположенная, например, в порядке неубывания их модулей. Через  $m_n$  мы обозначим порядок нуля  $b_n$  и через  $a_1, a_2, \dots$ , — последовательность, составленную из тех же нулей, но так, что каждый нуль записывается столько раз, какова его кратность. Составим логарифмическую производную функции  $f(z)$ :

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \{\ln f(z)\}.$$

Как было доказано в п. 23, она имеет особенности лишь в точках  $b_n$ , являющихся ее полюсами первого порядка с вычетами, равными  $m_n$ ; следовательно,  $G(z)$  является мероморфной функцией.

Разложение  $G(z)$  на простейшие дроби тесно связано с разложением  $f(z)$  в бесконечное произведение. Именно, имеет место

**Теорема 4.** Пусть логарифмическая производная целой функции  $f(z)$  на некоторой правильной системе контуров растет не быстрее, чем  $z^{p-1}$ , где  $p \geq 1$  — целое число. Тогда для функции  $f(z)$  справедливо разложение вида

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{z}{a_n}\right)^p}, \quad (5)$$

где  $m \geq 0$  — порядок нуля  $f(z)$  в точке  $z = 0$ ,  $g(z)$  — некоторый многочлен степени  $\leq p$  и  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — последовательность нулей  $f(z)$ , в которую каждый нуль входит столько раз, какова его кратность.

В самом деле, предположим сначала, что  $z = 0$  не является нулем функции  $f(z)$ . Тогда по теореме 2 предыдущего пункта ее логарифмическая производная  $G(z)$  допускает разложение вида

$$G(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} c_k z^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{m_n}{z - b_n} + \frac{m_n}{b_n} \left[ 1 + \frac{z}{b_n} + \left(\frac{z}{b_n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{b_n}\right)^{p-1} \right] \right\},$$

ибо тейлоровские разложения главных частей  $G(z)$  в нашем случае имеют вид:

$$\frac{m_n}{z - b_n} = -\frac{m_n}{b_n} \frac{1}{1 - \frac{z}{b_n}} = -\frac{m_n}{b_n} \left[ 1 + \frac{z}{b_n} + \left( \frac{z}{b_n} \right)^2 + \dots \right].$$

В силу равномерной сходимости разложение  $G(z)$  можно почленно интегрировать вдоль любой линии, соединяющей точку  $z = 0$  с произвольной точкой  $z$  и не содержащей нулей  $f(z)$ . Получим:

$$\begin{aligned} \ln f(z) = \ln f(0) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \left\{ \ln \left( 1 - \frac{z}{b_n} \right) + \frac{z}{b_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{b_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left( \frac{z}{b_n} \right)^p \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где значения логарифмов определяются линией интегрирования.

Разбивая  $n$ -е слагаемое последней суммы на  $m_n$  одинаковых слагаемых, мы можем переписать разложение (6) в виде

$$\ln f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left\{ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left( \frac{z}{a_n} \right)^p} \right\},$$

где  $g(z)$  — многочлен степени  $\leq p$ . На основании теоремы 1 отсюда следует сходимость к функции  $f(z)$  бесконечного произведения

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left( \frac{z}{a_n} \right)^p} \quad (7)$$

во всех точках, которые не являются нулями этой функции. Но в нулях  $f(z)$  бесконечное произведение, очевидно, сходится к нулю, и, следовательно, формула (7) справедлива для всех конечных точек  $z$ .

Если  $z = 0$  является нулем  $f(z)$  кратности  $m$ , то достаточно применить наше рассуждение к функции  $f(z)/z^m$  и мы получим формулу (5). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Доказанная теорема обобщается на случай произвольной целой функции в следующем виде:

**Теорема (К. Вейерштрасс).** *Существует такая целая функция  $g(z)$  и такая последовательность целых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ , что имеет место формула*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{p_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{p_n}}. \quad (8)$$

Справедлива и обратная

**Теорема (К. Вейерштрасс).** Для любой последовательности\*) комплексных чисел  $a_n$ , сходящейся к бесконечности, можно найти такую последовательность целых чисел  $p_n$ , что бесконечное произведение (8) сходится и определяет целую функцию  $f(z)$ , которая имеет своими нулями точки  $a_n$  и только эти точки, причем нуль  $a_n$  будет такой кратности, сколько имеется в последовательности членов, равных  $a_n$ .

**Замечание 2.** Представимость целой функции формулой (5), а не общей формулой (8) можно было бы доказать при следующем, более естественном условии: существует такое целое положительное число  $p$  и такая постоянная  $M > 0$ , что для всех  $z$

$$|f(z)| \leq Me^{|z|^p}. \quad (9)$$

Функции, удовлетворяющие этому условию, называются целыми функциями *конечного порядка*\*\*).

На основании второй теоремы Вейерштрасса легко доказать, что любая мероморфная функция  $f(z)$  представляется в виде отношения двух целых функций. В самом деле, построим целую функцию  $f_2(z)$ , имеющую в каждом полюсе  $f(z)$  нуль такого же порядка (это можно сделать на основании упомянутой теоремы), тогда произведение  $f(z)f_2(z)$  будет целой функцией, скажем  $f_1(z)$ , и

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}. \quad (10)$$

Приведем несколько примеров представления целых функций в виде бесконечных произведений\*\*\*). По формуле (12) предыдущего пункта логарифмическая производная синуса представляется рядом

$$(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right).$$

Интегрируя  $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$  вдоль пути, соединяющего  $z = 0$  с точкой  $z \neq n\pi$ , и потенцируя, получаем:

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right) e^{\frac{z}{n\pi}} \quad (11)$$

\*) Среди членов последовательности могут быть и равные в любом конечном числе раз. Доказательство этих теорем можно найти, например, в книге Б. В. Ш а б а т а [10].

\*\*) *Порядком* целой функции  $f(z)$  называется нижняя грань таких положительных чисел  $p$ , что  $\left| \frac{f(z)}{e^{z^p}} \right|$  остается ограниченным при  $z \rightarrow \infty$ ; например,  $\sin z$  — функция первого порядка, функция  $e^{e^z}$  — бесконечного порядка.

\*\*\*). Все эти представления были известны еще Л. Эйлеру (см. сноску на стр. 431).

(штрих при символе бесконечного произведения обозначает, что выпускается индекс  $n = 0$ ).

Если воспользоваться вместо (12) формулой (13) предыдущего пункта, то получим аналогично

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right). \quad (12)$$

Отметим еще формулы, которые получаются из (11) и (12) заменой  $z$  на  $\pi z$ :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (13)$$

Заменяя в формуле (12)  $z$  на  $iz$ , получаем:

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right). \quad (14)$$

Используя формулу (16) предыдущего пункта, находим разложение логарифмической производной функции  $e^z - 1$ :

$$\frac{e^z}{e^z - 1} = 1 + \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 n^2};$$

интегрируя и потенцируя это соотношение, получаем:

$$e^z - 1 = ze^{\frac{z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right). \quad (15)$$

Представляя  $\cos z = \frac{\sin 2z}{2 \sin z}$  и пользуясь формулой (12), после разбienia числителя на два произведения (по четным и нечетным множителям) и сокращения получаем:

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right). \quad (16)$$

## § 2. Приложения теории вычетов

В этом параграфе рассматриваются применения теоремы п. 23 о вычетах и о логарифмических вычетах к вычислению определенных интегралов и подсчету числа нулей.

**73. Вычисление интегралов.** Сущность методов вычисления интегралов, основанных на применении теоремы о вычетах, состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции  $f(x)$  по какому-либо (конечному или бесконечному) отрезку  $(a, b)$  оси  $x$ . Мы дополняем  $(a, b)$  некоторой кривой  $C'$ , вместе с  $(a, b)$  ограничивающей область  $D$ , и

аналитически продолжаем  $f(x)$  в  $\bar{D}$ . К построенному аналитическому продолжению  $f(z)$  применяем теорему о вычетах и, следовательно, находим:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{C'} f(z) dz = 2\pi i \cdot R, \quad (1)$$

где  $R$  — сумма вычетов  $f(z)$  в области  $D$ . Если интеграл по  $C'$  удастся вычислить или выразить через искомый интеграл  $\int_a^b$ , то

задача вычисления  $\int_a^b$  будет решена.

В некоторых случаях вспомогательную функцию  $f(z)$  выбирают так, чтобы заданная на  $(a, b)$  функция была ее действительной или мнимой частью; тогда искомый интеграл находится соответственно отделением действительных или мнимых частей (1).

Описанный метод ясно показывает значение теоремы Коши о вычетах, сводящей вычисление интегральной величины — интеграла по контуру — к вычислению величин дифференциальных — вычетов  $f(z)$  в ее особых точках. Вычисление последних значительно более просто, в особенности для полюсов, когда можно воспользоваться формулами (3) или (5) п. 23.

В случае бесконечных отрезков  $(a, b)$  обычно рассматривают семейства неограниченно расширяющихся контуров интегрирования, которые строят так, чтобы в результате предельного перехода получить интеграл по  $(a, b)$ . В этом случае интеграл по  $C'$  в соотношении (1) можно не вычислять, а лишь найти его предел, причем часто оказывается, что последний равен нулю.

В некоторых примерах оценку интеграла по  $C'$  можно производить по следующей лемме.

**Лемма (К. Жордан).** Если на некоторой последовательности дуг окружностей  $C_{R_n} : |z| = R_n$ ,  $\operatorname{Im} z > -a$  ( $R_n \rightarrow \infty$ ,  $a$  — фиксировано) функция  $g(z)$  стремится к нулю равномерно относительно  $\arg z$ , то для любого положительного числа  $\lambda$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (2)$$

Обозначим  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ,  $M_n = \max_{C_{R_n}} |g(z)|$  и  $\alpha_n = \arcsin \frac{a}{R_n}$ .

По условиям леммы  $M_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_n$  также стремится к нулю, причем  $\alpha_n R_n \rightarrow a$ . Пусть  $a > 0$ ; на дугах  $AB$  и  $CD$



(рис. 154) имеем  $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda y} \leq e^{a\lambda}$ ; следовательно,

$$\left| \int_{AB, CD} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M_n e^{a\lambda} a_n R_n$$

и интеграл по этим дугам стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

На основании известного неравенства \*)  $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ , справедливого при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , мы заключаем, что на дуге  $BE$

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R_n \sin \varphi} \leq e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi};$$

следовательно,

$$\left| \int_{BE} \right| \leq M_n R_n \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi} d\varphi = M_n \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R_n})$$

и  $\int_{BE}$  также стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Если на дуге  $CE$

отсчитывать полярный угол от отрицательной полуоси по часовой стрелке, то для  $\left| \int_{CE} \right|$  получится

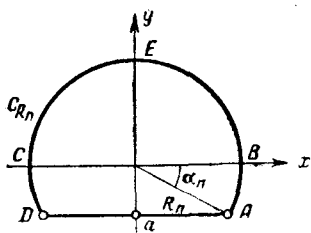


Рис. 154.

такая же оценка и утверждение леммы будет доказано. В случае  $a \leq 0$  доказательство упрощается, ибо будет излишней оценка интеграла по дугам  $AB$  и  $CD$ . Лемма доказана полностью.

Последовательность дуг окружностей  $C_{R_n}$  в лемме можно заменить семейством дуг  $C_R$ :  $|z| = R$ ,  $\operatorname{Im} z > -a$  ( $R_0 < R < \infty$ ), и тогда, если функция  $g(z)$  при  $R \rightarrow \infty$  стремится на  $C_R$  к нулю равномерно относительно  $\arg z$ , то для любого положительного числа  $\lambda$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0. \quad (3)$$

Для этого случая проведенное доказательство остается в силе.

\*) Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что  $\left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)' = \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} (\varphi - \operatorname{tg} \varphi)$  отрицательна на интервале  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  и что, следовательно, функция  $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$  убывает на этом интервале. Неравенство выражает выпуклость синусоиды на интервале  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ .

В следующей главе лемма Жордана потребуется нам в несколько видоизмененной форме. Заменяем переменное  $iz = p$ , тогда дуги окружностей леммы заменяются дугами  $C_R: |p| = R$ ,  $\operatorname{Re} p < a$  (рис. 155), и мы получим, что для любой функции  $F(p)$ , стремящейся на  $C_R$  к нулю при  $R \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg p$ , и для любого положительного  $t$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (4)$$

Заменяя в (4)  $p$  на  $-p$ , мы получим, что в тех же условиях для любого отрицательного  $t$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} F(p) e^{pt} dp = 0, \quad (5)$$

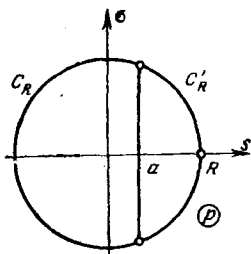


Рис. 155.

где  $C'_R$  — дуга окружности  $|p| = R$ ,  $\operatorname{Re} p > a$  (рис. 155).

Общий метод вычисления интегралов с помощью теории вычетов мы проиллюстрируем на отдельных конкретных примерах. Начнем с вычисления интегралов от произведения дробно-рациональной функции на синус или косинус.

Пример 1. Для вычисления интеграла (Лаплас)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + a^2}$$

мы выберем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

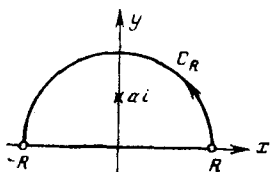


Рис. 156.

и контур, указанный на рис. 156. Так как функция  $g(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$  на  $C_R$  удовлетворяет неравенству  $|g(z)| < \frac{1}{R^2 - a^2}$ , то она равномерно стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , и по лемме Жордана, при  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} g(z) e^{iz} dz \rightarrow 0.$$

Для любого  $R > a$  имеем по теореме о вычетах

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}$$

(вычет в единственной лежащей внутри контура особой точке  $z = ai$  функции  $f(z)$  — полюсе первого порядка — находим по формуле (5) п. 23). В пределе при  $R \rightarrow \infty$  получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Отделяя действительные части и используя четность функции, найдем иско-  
мый интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

Пример 2. Для вычисления интеграла (Эйлер \*)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{si } \infty \quad (6)$$

(см. п. 70) мы возьмем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

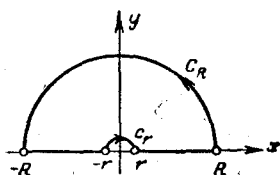


Рис. 157.

Контур интегрирования выберем, как указано на рис. 157; точка  $z = 0$  обходится малым полукругом  $c_r$ , ибо она — особая точка  $f(z)$ . По теореме Коши

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{c_r} + \int_r^R + \int_{C_R} = 0.$$

Из леммы Жордана видно, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0$ . Для оценки  $\int_{c_r}$  рассмотрим лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности  $z = 0$ ; это разложение имеет вид:

$$f(z) = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + P(z),$$

где  $P(z)$  — непрерывная в точке  $z = 0$  функция. Отсюда видно, что

$$\int_{c_r} = \int_{c_r} \frac{dz}{z} + \int_{c_r} P(z) dz = \int_{\pi}^0 \frac{re^{i\varphi} i d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -i\pi + O(r) **).$$

\*) Интеграл (6) обычно связывают с именами Лапласа или Дирихле; однако он был впервые вычислен Эйлером в работе 1781 г.

\*\*) Через  $O(a)$  мы обозначаем функцию, бесконечно малую при  $a \rightarrow 0$ .

Таким образом, теорему Коши можно записать в виде

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_r^R \frac{e^{ix} dx}{x} = i\pi + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Заменяя в первом интеграле  $x$  на  $-x$ , получим, что он равен  $-\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$ , и, объединяя его со вторым интегралом, будем иметь:

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = i\pi + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

В пределе при  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  получим окончательно:

$$\text{si } \infty = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Приведем далее несколько примеров вычисления интегралов, содержащих показательную функцию.

**Пример 3.** Для вычисления интеграла (Эйлер)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}$$

мы рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

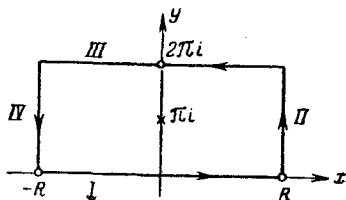


Рис. 158.

и воспользуемся тем ее свойством, что когда  $z$  получает мнимое приращение  $2\pi i$ , она умножается на постоянный множитель  $e^{2\pi i a}$ . В соответствии с этим будем интегрировать  $f(z)$  по контуру прямоугольника, как указано на рис. 158. Внутри него  $f(z)$  имеет один полюс  $z = \pi i$  первого порядка

с вычетом  $c_{-1} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$ ; следовательно, по теореме о вычетах

$$\int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Имеем:

$$\int_I = \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad \int_{III} = \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}.$$

На отрезках II и IV соответственно

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}},$$

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}};$$

следовательно, при  $R \rightarrow \infty$  оба интеграла  $\int_{II}$  и  $\int_{IV}$  стремятся к нулю, если потребовать, чтобы было  $0 < a < 1$ . Таким образом, при  $0 < a < 1$

$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} + O\left(\frac{1}{R}\right) = -2\pi i e^{a\pi i}$$

и в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получаем искомый интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1). \quad (8)$$

Пример 4. Для вычисления интеграла (Пуассон)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$$

рассмотрим функцию

$$f(z) = e^{-az^2}$$

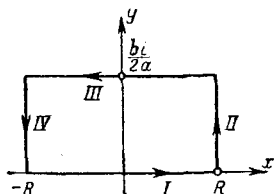


Рис. 159.

и заметим, что ее интеграл по действительной оси вычисляется на основании известного результата ( $\operatorname{erf} \infty = 1$ , см. п. 70), а на прямой  $y = h$  она обращается в функцию  $e^{-a(x+ih)^2} = e^{ah^2} \cdot e^{-ax^2} (\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$ , действительная часть которой при  $h = \frac{b}{2a}$  отличается от подынтегральной функции постоянным множителем. В соответствии с этим мы выбираем контур интегрирования, как указано на рис. 159. По теореме Коши

$$\int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\int_I = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{a}R} e^{-t^2} dt, \quad \int_{III} = -e^{b^2/4a} \int_{-R}^R e^{-ax^2} e^{-ibx} dx,$$

на отрезке II и IV, где  $x = \pm R$ ,

$$|e^{-az^2}| = e^{-a(R^2 - y^2)} \leq e^{b^2/4a} e^{-aR^2},$$

следовательно, если  $a > 0$  (что мы и предположим), то  $\int_{II, IV} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

В пределе при  $R \rightarrow \infty$  из (9), используя известное значение  $\operatorname{erf} \infty = 1$  (п. 70), находим:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{b^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ibx} dx = 0,$$

откуда, сравнивая действительные части, имеем окончательно:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a} \quad (a > 0). \quad (10)$$

Пример 5. Для вычисления интеграла (Лежандр)

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} \, dx$$

мы возьмем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$$

(ее удвоенная мнимая часть на оси  $x$  равна подынтегральной функции) и проинтегрируем ее по контуру, показанному на рис. 160. Так как  $f(x+i) = e^{-a} f(x)$ , то интегралы по нижней и верхней границам можно объединить

в один:  $(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x) \, dx$ , интеграл по отрезку  $x=R$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  (см. пример 3), на отрезке  $x=0$  полагаем  $z=iy$ . Тогда по теореме Коши

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R -i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} \, dy}{e^{2\pi iy} - 1} + \int_I + \int_{II} + \\ + O\left(\frac{1}{R}\right) = 0, \quad (11)$$

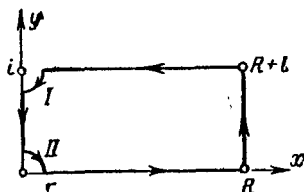


Рис. 160.

где I и II означают дуги окружностей (см. рис. 160). Вблизи точки  $z=i$  имеем:

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)} - 1} = \frac{e^{-a} + c_1(z-i) + \dots}{2\pi(z-i) + c_2'(z-i)^2 + \dots} = \frac{e^{-a}}{2\pi} \frac{1}{z-i} + P(z-i),$$

где  $P(z-i)$  — правильная в точке  $z=i$  функция; так как на дуге I имеем  $z = i + re^{i\varphi}$ ;  $dz = rie^{i\varphi} d\varphi$ , то

$$\int_I = \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_0^{-\pi/2} \frac{rie^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -\frac{ie^{-a}}{4} + O(r).$$

Аналогично  $\int_{II} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^0 i d\varphi + O(r) = -\frac{i}{4} + O(r)$ , и равенство (11) принимает вид

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R = i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} \, dy + \frac{i}{4} (1 + e^{-a}) + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Отделим здесь мнимую часть и перейдем к пределу  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ ; учитывая, что

$$\operatorname{Re} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} dy}{e^{2\pi i y} - 1} = - \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{2} dy = \frac{1}{2a} (e^{-a} - 1) + O(r),$$

будем иметь окончательно:

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{a} \quad (a > 0). \quad (12)$$

Пример 6. Для вычисления интегралов (Эйлер \*)

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

мы выберем вспомогательную функцию

$$f(z) = e^{iz^2}$$

и контур, указанный на рис. 161. На дуге  $C_R$  после замены  $z^2 = \xi$  получим:

$$\int_{C_R} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{C'_R} \frac{e^{i\xi} d\xi}{\sqrt{\xi}},$$

где  $C'_R$  — четверть окружности радиуса  $R^2$ ; следовательно, по лемме Жордана этот интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . По теореме Коши, если на  $OA$  положить  $z = x$ , а на  $OB$ :  $z = t\sqrt{i}$ , имеем:

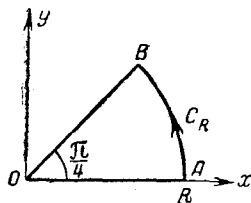


Рис. 161.

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} + \sqrt{i} \int_R^0 e^{-t^2} dt = 0.$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и пользуясь значением  $\operatorname{erf} \infty = 1$ , получим:

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{i} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отделяя здесь действительные и мнимые части, найдем:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (13)$$

\*) Интегралы впервые были вычислены Эйлером в 1781 г.

С интегралами (13) связаны специальные функции — так называемые *интегралы Френеля*

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt. \quad (14)$$

В самом деле, подстановка  $t = \tau^2$  дает:

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin \tau^2 d\tau, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos \tau^2 d\tau,$$

и следовательно, формулы (13) можно записать в виде

$$S(\infty) = C(\infty) = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

**74. Вычисление интегралов (продолжение).** Начнем с вычисления интегралов, содержащих многозначные функции.

**Пример 1.** Для вычисления интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2}$$

мы возьмем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2}$$

и контур интегрирования выберем, как в примере 2 предыдущего пункта \*) (см. рис. 157). Внутри этого контура логарифм допускает выделение однозначных ветвей;  $\ln z$  пусть означает ту ветвь, которая определяется неравенствами  $0 < \arg z < \pi$ . Функция  $f(z)$  имеет в точке  $z = i$  полюс второго порядка с вычетом

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \{f(z) (z - i)^2\} = \left[ \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{(z + i)^2} \right]_{z=i} = \frac{\pi + 2i}{8}.$$

По теореме о вычетах

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{c_r} + \int_r^R + \int_{C_R} = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

При  $z = Re^{i\varphi}$ ,  $0 < \varphi < \pi$  имеем, начиная с достаточно большого  $R$ ,  $|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} \leq 2 \ln R$ ; следовательно,

$$\left| \int_{C_R} \right| \leq \frac{2 \ln R}{(R^2 - 1)^2} \pi R$$

\*) Мы окружаем  $z = 0$  малым кружком, чтобы исключить особенность функции  $f(z)$ .



и  $\int_{C_R} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Аналогично при  $z = re^{i\varphi}$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , начиная с доста-

точно малого  $r$ ,  $|\ln z| \leq 2 \ln \frac{1}{r}$ ; следовательно,

$$\left| \int_{C_r} \right| \leq \frac{2 \ln \frac{1}{r}}{(1-r^2)^2} \pi r,$$

и этот интеграл также стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$ . В первом интеграле после замены  $z = -x$  получим:

$$\int_{-R}^{-r} = \int_r^R \frac{\ln x + \pi i}{(x^2 + 1)^2} dx,$$

и, таким образом, в пределе при  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  будем иметь:

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2} + \pi i \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Сравнение действительных частей \*) дает искомый интеграл

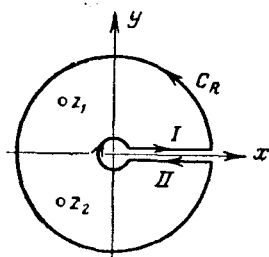


Рис. 162.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

Пример 2. Для вычисления интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2}$$

мы выберем вспомогательную функцию  $f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z_1 + a)^2 + b^2}$  и контур, указанный на

рис. 162 (внутри контура  $\ln z$  однозначен, если считать  $0 < \arg z < 2\pi$ ). На верхнем и нижнем берегах разреза, входящего в этот контур,  $\ln^2 z$  принимает соответственно значения  $\ln^2 x$  и  $(\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2$ , поэтому интегралы от  $\ln^2 x$  взаимно уничтожаются и появляется возможность вычислить искомый интеграл. Внутри контура лежат два полюса первого порядка  $z_{1,2} = -a \pm bi$  функции  $f(z)$  с вычетами

$$c'_{-1} = \frac{1}{2bi} \{\ln r + i(\pi - \varphi)\}^2, \quad c''_{-1} = -\frac{1}{2bi} \{\ln r + i(\pi + \varphi)\}^2,$$

\*) Сравнение мнимых частей дает элементарный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

где  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  и  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ . Применяя теорему о вычетах, получаем:

$$\int_I + \int_{C_R} + \int_{II} + \int_{c_r} = \frac{\pi}{b} 4\varphi (\pi - i \ln r).$$

В соответствии со сказанным выше имеем:

$$\int_I + \int_{II} = - \int_r^R \frac{4\pi i \ln x - 4\pi^2}{(x+a)^2 + b^2} dx.$$

Так же как в предыдущем примере, докажем, что  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{c_r} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} = 0$ ,

и тогда в пределе при  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  будем иметь:

$$4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{4\pi\varphi}{b} (\pi - i \ln r).$$

Отсюда, сравнивая мнимые части, получим искомый интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \quad (2)$$

**Пример 3.** С помощью того же контура вычисляется интеграл (Эйлер)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1),$$

если в качестве вспомогательной функции взять

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1) \ln z}}{1+z}$$

и заметить, что на нижнем берегу разреза  $f(xe^{2\pi i}) = e^{2\pi i a} f(x)$ . Прodelывая необходимые вычисления и оценки, получаем:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a} \quad (0 < a < 1). \quad (3)$$

Впрочем, подстановкой  $x = e^t$  этот интеграл сводится к интегралу из примера 3 предыдущего пункта.

**Пример 4.** Вычислим главное значение особого интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x} dx \quad (0 < a < 1)$$

(особенность в точке  $x=1$ ). Для его вычисления мы выбираем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1-z}$$

и контур, указанный на рис. 163. Учитывая, что на нижнем берегу разреза вдоль положительной полуоси  $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i} f(x)$  и что внутри контура  $f(z)$ , правильна, по теореме Коши будем иметь:

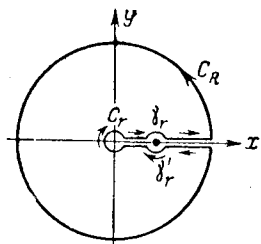


Рис. 163.

$$\int_{C_r} + (1 - e^{2a\pi i}) \left\{ \int_r^{1-r} f(x) dx + \int_{1+r}^R f(x) dx \right\} + \\ + \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} + \int_{C_R} = 0. \quad (4)$$

Очевидно,  $\int_{C_r} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$  и  $\int_{C_R} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Вдоль  $\gamma_r$  и  $\gamma'_r$  имеем соответственно  $z^{a-1} = 1 + O(r)$  и  $z^{a-1} = e^{2a\pi i} + O(r)$ ;  $1-z = re^{i\varphi}$ ,  $dz = -ire^{i\varphi} d\varphi$ , где  $\varphi$  меняется от 0 до  $-\pi$  и от  $-\pi$  до  $-2\pi$ ; следовательно

$$\int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} = \pi i (1 + e^{2a\pi i}) + O(r).$$

Переходя в (4) к пределу при  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ , получим, таким образом,

$$(1 - e^{2a\pi i}) I + \pi i (1 + e^{2a\pi i}) = 0,$$

откуда искомым особый интеграл равен

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} a\pi. \quad (5)$$

Пример 5. Для вычисления интеграла

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$$

прежде всего убеждаемся в том, что функция  $f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}$  во внешности отрезка  $(-1, 1)$  распадается на три однозначные ветви. В самом деле положим  $\varphi_1 = \arg(1+z)$ ,  $\varphi_2 = \arg(1-z)$ . При обходе против часовой стрелки замкнутого пути, изображенного пунктиром на рис. 164,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  получают приращение  $2\pi$ , следовательно,  $\arg f(z) = \frac{\varphi_1 + 2\varphi_2}{3}$  получает приращение  $2\pi$  и  $f(z)$  возвращается к исходному значению. Будем рассматривать

ту ветвь функции  $f(z)$ , которая на верхнем берегу отрезка  $(-1, 1)$  принимает положительные значения, и возьмем контур, изображенный на рис. 164 жирными линиями. На берегу  $I$  имеем  $\arg f(z) = 0$ , т. е.  $f(z) = \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$ , на берегу  $II$  (после обхода точки  $z=1$  по часовой стрелке)  $\arg f(z) = -\frac{2}{3}\pi$ , т. е.  $f(z) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$ ; интегралы же по малым окружностям  $c'_r$  и  $c''_r$ , очевидно, стремятся к нулю при  $r \rightarrow 0$ . Следовательно, по теореме Коши для многосвязных областей

$$\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \int_{C_R} \frac{dz}{f(z)}.$$

Для вычисления  $\int_{C_R}$  лучше всего воспользоваться разложением нашей

ветви  $\frac{1}{f(z)}$  в окрестности бесконечно удаленной точки. Имеем, вынося из-под знака корня  $-z^3$ ,

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{ze^{-\pi i/3}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1/3} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-2/3},$$

где  $\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1/3}$  и  $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-2/3}$  означают те ветви этих функций, которые положительны на отрезке  $(1, \infty)$  положительной оси. Разлагая последние по формуле бинома, находим вычет выбранной ветви  $1/f(z)$  в бесконечно удаленной точке: он равен  $-e^{\pi i/3}$  (коэффициент при  $1/z$  с обратным знаком).

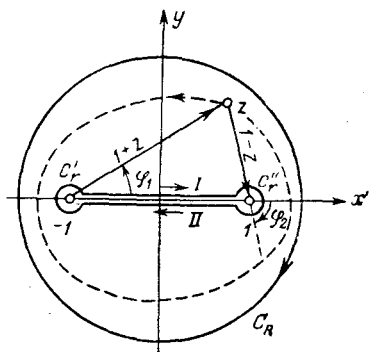


Рис. 164.

Но интеграл  $\int_{C_R}$  равен этому вычету, помноженному на  $2\pi i$  (см. п. 24), следовательно, имеем:

$$(1 - e^{2\pi i/3}) I = -e^{\pi i/3} 2\pi i,$$

откуда окончательно

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad (6)$$

Приведем еще два примера вычисления интегралов с конечными пределами.

Пример 6. Для вычисления интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2} \quad (a > b > 0)$$

положим  $e^{it} = z$ , тогда  $dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz}$ ,  $\cos t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  и этот интеграл перейдет в интеграл по единичной окружности:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2} = \frac{4}{ib^2} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{\left( z^2 + \frac{2a}{b} z + 1 \right)^2}.$$

Внутри окружности  $|z|=1$  подынтегральная функция имеет один полюс  $z_0 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b}$  с вычетом

$$c_{-1} = \left[ \frac{d}{dz} \frac{z}{\left( z + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{b} \right)^2} \right]_{z=z_0} = \frac{b^2 a}{4(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

По теореме о вычетах искомый интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \quad (a > b > 0). \quad (7)$$

Пример 7. Аналогично вычисляется интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n \cos nt}{1 - a - 2a \cos t} dt \quad \left( -1 < a < \frac{1}{3} \right).$$

После подстановки  $e^{it} = z$  имеем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n e^{int}}{1 - a - 2a \cos t} dt = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{(1 + z + z^2)^n}{(1 - a)z - a(1 + z^2)} dz.$$

Один из полюсов подынтегральной функции  $z_1, z_2 = \frac{1 - a \pm \sqrt{1 - 2a - 3a^2}}{2a}$  лежит внутри окружности, а другой — вне ее, ибо по свойству корней квадратного уравнения  $z_1 z_2 = 1$ ; при этом в силу условия  $-1 < a < \frac{1}{3}$  эти корни действительны и различны. Таким образом, по теореме о вычетах

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n e^{int}}{1 - a - 2a \cos t} dt = 2\pi \frac{(1 + z_1 + z_1^2)^n}{1 - a - 2az_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2a - 3a^2}} \left( \frac{z_1}{a} \right)^n, \quad (8)$$

где  $z_1 = \frac{1}{2a} (1 - a - \sqrt{1 - 2a - 3a^2})$  — полюс, лежащий внутри окружности. Так как правая часть (8) действительна, то она дает искомый интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n \cos nt}{1 - a - 2a \cos t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2a - 3a^2}} \left( \frac{1 - a - \sqrt{1 - 2a - 3a^2}}{2a^2} \right)^n. \quad (9)$$

В заключение приведем несколько интегральных представлений так называемой гамма-функции.

Пример 8. Гамма-функция определяется интегралом (Эйлер)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (10)$$

который берется по положительной полуоси. Этот интеграл абсолютно сходится и представляет аналитическую функцию для всех  $z$ , лежащих в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ , ибо  $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1}$  (см. теорему 4 п. 16). Деформацией контура интегрирования можно получить другое представление гамма-функции, справедливое в более широкой области значений аргумента, т. е. осуществить аналитическое продолжение этой функции.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_C e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi, \quad (11)$$

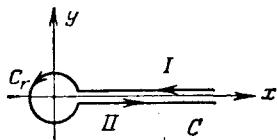


Рис. 165.

где интеграл берется вдоль контура  $C$ , состоящего из двубережного разреза по положительной полуоси и окружности  $|\xi| = r$  (рис. 165). Под  $\xi^{z-1}$  здесь понимается функция  $e^{(z-1) \ln \xi}$ , где  $\ln \xi$  — ветвь логарифма, для которой  $0 < \arg \xi \leq 2\pi$ .

Полагая на верхнем берегу разреза  $\xi = t$ , а на нижнем  $\xi = te^{2\pi i}$ , мы можем представить  $F(z)$  также в следующем виде:

$$F(z) = \int_I + \int_{c_r} + \int_{II} = (e^{2\pi iz} - 1) \int_r^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{c_r} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi.$$

При фиксированном  $r$  несобственный интеграл, входящий в эту формулу, сходится равномерно относительно  $z$  в любой ограниченной области значений  $z = x + iy$ . Это следует из того, что при  $|z| < M$  подынтегральная функция мажорируется функцией  $e^{-t} t^{M+1}$ , интеграл от которой вдоль отрезка  $(r, \infty)$  сходится. Таким образом, функция  $F(z)$  аналитична для всех конечных значений  $z$  (целая).

На  $c_r$ , где  $\xi = re^{i\varphi}$ , имеем  $|e^{-\xi} \xi^{z-1}| = e^{-r \cos \varphi} e^{(x-1) \ln r - \varphi y} < A r^{x-1}$ , где  $A$  — некоторая постоянная (при фиксированном  $z$ ); отсюда следует, что  $\left| \int_{c_r} \right| > A 2\pi r^x$ . Предположим теперь, что  $\operatorname{Re} z = x > 0$ , тогда  $\int_{c_r} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ .

Таким образом, при  $\operatorname{Re} z > 0$  мы имеем право перейти к пределу при  $r \rightarrow 0$  и на основании определения (10) получаем:

$$F(z) = (e^{2\pi iz} - 1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2\pi iz} - 1) \Gamma(z)$$

(при  $\operatorname{Re} z \leq 0$  этот предельный переход незаконен). Мы получаем новое интегральное представление гамма-функции (Ханкель)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi. \quad (12)$$

Заметим, что правая часть представляет собой отношение двух целых функций  $F(z)$  и  $e^{2\pi iz} - 1$ . В правой полуплоскости она совпадает с аналитической функцией  $\Gamma(z)$ ; следовательно, (12) дает аналитическое продолжение  $\Gamma(z)$  в левую полуплоскость и  $\Gamma(z)$ , таким образом, оказывается мероморфной функцией, аналитической всюду, кроме отрицательных\*) целых точек  $z = -n$  и  $z = 0$ , в которых знаменатель (12) обращается в нуль.

Заменим в (12)  $z$  через  $1 - z$ :

$$\begin{aligned}\Gamma(1-z) &= \frac{1}{e^{-2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{-z} d\zeta = \frac{e^{-\pi iz}}{e^{-2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta = \\ &= \frac{i}{2 \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta. \quad (13)\end{aligned}$$

В главе VII будет доказана формула

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (14)$$

справедливая для всех комплексных  $z$ . Пользуясь этой формулой и заменяя в (13) переменное интегрирования  $\zeta$  через  $-\zeta$ , отчетливо контур  $C$  заменится контуром  $C^*$  (рис. 166), по-

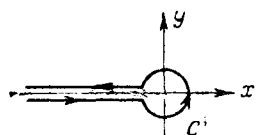


Рис. 166.

лучим интегральное представление функции  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  (Ханкель):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta. \quad (15)$$

**75. Подсчет числа нулей. Вопросы устойчивости.** В анализе часто встречается задача определения числа нулей аналитической функции, лежащих в заданной области. Общее решение этой задачи дает принцип аргумента п. 23: число нулей функции  $f(z)$  внутри замкнутого контура  $C$

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z), \quad (1)$$

где  $\Delta_C \arg f(z)$  обозначает полное приращение  $\arg f(z)$  при обходе контура  $C$ . При этом предполагается, что  $f(z)$  аналитична внутри  $C$ , непрерывна на  $C$  и не обращается там в нуль; каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

Иногда полезно воспользоваться простым следствием принципа аргумента.

**Теорема (Руше).** Если функции  $f(z)$  и  $g(z)$  аналитичны внутри  $C$ , а на  $C$  непрерывны и удовлетворяют условию

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad (2)$$

\*) В положительных целых точках, как мы видели раньше,  $\Gamma(z)$  аналитична; следовательно, в этих точках обращается в нуль и числитель (12).

то функции  $f(z)$  и  $f(z) + g(z)$  имеют внутри  $C$  одинаковое число нулей.

Для доказательства заметим, что в силу нашего условия на  $C$   $|f(z)| > 0$  и  $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ . Следовательно, функции  $f(z)$  и  $f(z) + g(z)$  не обращаются на  $C$  в нуль и к ним применим принцип аргумента. Из соотношения

$$\arg \{f(z) + g(z)\} = \arg f(z) + \arg \left\{ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right\}$$

получаем:

$$\Delta_C \arg \{f(z) + g(z)\} = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left\{ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right\}.$$

Но так как при движении точки  $z$  по контуру  $C$  точка  $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$  все время остается внутри круга  $|w - 1| < 1$  (это следует из того, что  $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$  на  $C$ ), то точка  $w$  не может обойти начала координат и, значит,  $\Delta_C \arg \left\{ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right\} = 0$ . Таким образом,

$$\Delta_C \arg \{f(z) + g(z)\} = \Delta_C \arg f(z), \quad (3)$$

и остается воспользоваться формулой (1).

Приведем несколько примеров применения этой теоремы.

1) Докажем так называемую основную теорему алгебры: уравнение

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n = 0 \quad (c_0 \neq 0) \quad (4)$$

имеет в комплексной плоскости  $n$  (конечных) корней. Для доказательства примем  $f(z) = c_0 z^n$ ,  $g(z) = c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$  и выберем  $R$  столь большим, чтобы на окружности  $|z| = R$  было  $|f(z)| > |g(z)|$  — это можно сделать, ибо  $|f(z)| = |c_0| R^n$ ,  $|g(z)| \leq |c_1| R^{n-1} + \dots + |c_n|$ , а  $R^n$  растет быстрее, чем любой многочлен степени  $(n-1)$ . Тогда по теореме Руше число корней уравнения в круге  $|z| < R$  равно числу нулей  $z^n$ , т. е.  $n$ . С другой стороны, так как  $c_0 z^n + \dots + c_n \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ , то, еще увеличивая в случае надобности  $R$ , мы можем считать, что вне круга уравнение не имеет корней.

2) Для определения числа корней уравнения  $z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$  в единичном круге положим  $f(z) = -5z^5 + 1$  и  $g(z) = z^8 - 2z$ . Так как при  $|z| = 1$  имеем  $|f(z)| \geq |5z^5| - 1 = 4$ , а  $|g(z)| \leq |z|^8 + 2|z| = 3$ , то наше уравнение в единичном круге имеет столько же корней, сколько  $5z^5 = 1$ , т. е. пять.

3) Докажем, что уравнение

$$z + e^{-z} = \lambda, \quad (5)$$

где  $\lambda > 1$ , имеет в правой полуплоскости единственный (действительный) корень. Для этого рассмотрим контур, составленный из отрезка  $(-iR, iR)$  и правой полуокружности  $|z| = R$ , и положим  $f(z) = z - \lambda$ ,  $g(z) = e^{-z}$ . На отрезке, где  $z = iy$ , имеем  $|f(z)| = |\lambda - iy| \geq \lambda > 1$ , а  $|g(z)| = |e^{-iy}| = 1$ . На полуокружности:  $|z| = R$ ,  $\operatorname{Re} z = x > 0$ , при достаточно большом  $R$  ( $R > \lambda + 1$ ) имеем:  $|f(z)| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1$ ;  $|g(z)| = e^{-x} \leq 1$ . Сле-



довательно, применима теорема Руше, и внутри любого контура описанного вида уравнение (5) имеет столько же корней, что и уравнение  $z - \lambda = 0$ , т. е. один и только один корень. А значит, и во всей правой полуплоскости данное уравнение имеет единственный корень. Этот корень действителен, ибо при  $z = 0$  левая часть уравнения равна  $1 < \lambda$ , а при  $z = x \rightarrow \infty$  она неограниченно возрастает; следовательно, найдется такое  $z = x$ , при котором левая часть равна  $\lambda$ .

Для прикладных вопросов особенно важна так называемая *проблема Рауса — Гурвица* \*):

*Найти условия, при которых нули многочлена или дробно-рациональной функции (а в более общей постановке — целой или мероморфной функции) все лежат в левой полуплоскости.*

Значение этой проблемы определяется тем, что она связана с проблемой устойчивости колебаний в механических и электрических системах. Чтобы пояснить эту связь, напомним, что простейшие задачи теории колебаний приводятся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = 0. \quad (6)$$

Общее решение такого уравнения, как известно, имеет вид:

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t},$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — корни характеристического многочлена

$$A(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

а  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные \*\*). Каждому комплексному корню  $p_k = s_k + i\sigma_k$  многочлена соответствует колебание  $e^{p_k t} = e^{s_k t} \{\cos \sigma_k t + i \sin \sigma_k t\}$  с частотой  $\sigma_k$ . При  $s_k < 0$  это колебание затухающее, при  $s_k = 0$  — гармоническое и при  $s_k > 0$  оно имеет неограниченно возрастающую амплитуду. Таким образом, если мы хотим ограничиться колебательными контурами, не допускающими собственных колебаний с неограниченно возрастающей амплитудой, мы должны потребовать, чтобы все корни многочлена  $A(p)$  лежали в левой полуплоскости или на мнимой оси.

Мы укажем простейшие методы решения проблемы Рауса — Гурвица; более полное изложение читатель может найти в монографии Н. Г. Чеботарева и Н. Н. Меймана [4] или в курсах

\*) Проблема была впервые поставлена Дж. Максвеллом в 1868 г. Э. Раус (1877 г.) дал первое решение этой проблемы, не получившее широкого распространения, А. Гурвицу (1895 г.) принадлежит решение, более удобное для приложений (см. ниже).

\*\*) Для простоты мы ограничиваемся случаем простых корней.

теории регулирования (см., например, [5] или [6]). Начнем с одного алгебраического метода решения проблемы для многочленов.

1) Критерий Гурвица. Для простоты будем предполагать, что коэффициенты исследуемого многочлена

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (7)$$

действительные числа и что  $a_0 > 0$ . Имеет место

Теорема (А. Гурвиц, 1895 г.). Для того чтобы все корни многочлена (7) с действительными коэффициентами  $a_n$  ( $a_0 > 0$ ) имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, \\ D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix} > 0 \quad (8)$$

мы полагаем  $a_k = 0$  при  $k > n$ ).

Будем доказывать теорему методом полной индукции. Для  $n = 1$  теорема верна, ибо условие (8) в этом случае сводится к неравенству  $a_1 > 0$ , из которого с учетом предположения  $a_0 > 0$  следует, что корень многочлена  $f(z) = a_0 z + a_1$  отрицателен.

Предположим теперь, что теорема верна для многочленов степени  $\leq n-1$ , и докажем, что тогда она верна и для многочленов степени  $n$ . Для этого положим  $f(z) = p + q$ , где

$$p = a_0 z^n + a_2 z^{n-2} + \dots, \quad q = a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \dots,$$

рассмотрим многочлен степени  $\leq n-1$

$$\varphi(z) = a_1 p + (a_1 - a_0 z) q = a_1^2 z^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z^{n-2} + \\ + a_1 a_3 z^{n-3} + (a_1 a_4 - a_0 a_5) z^{n-4} + \dots \quad (9)$$

Дальнейшее доказательство проведем в два приема.

а) Определители (8) для многочлена  $\varphi(z)$  выражаются через такие же определители для  $f(z)$  по формуле

$$\Delta_k = a_1^{k-1} D_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (10)$$

В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned}
 a_0 a_1 \Delta_k &= a_0 a_1 \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & \dots & 0 \\ a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_0 a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & \dots & 0 \\ a_0 a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_0 a_1 & a_1 a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_3 & a_1 a_2 & a_1^2 & a_1 a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 & a_1 a_3 & a_1 a_2 & a_1^2 & \dots & 0 \\ a_0 a_7 & a_1 a_6 & a_1 a_5 & a_1 a_4 & a_1 a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_0 a_1^k D_{k+1}
 \end{aligned}$$

(мы «окаймляем» определитель, затем добавляем к элементам 2-го столбца элементы 1-го, к элементам 4-го — элементы 3-го, умноженные на  $a_0/a_1$  и т. д.; наконец, из первого столбца выносим общий множитель  $a_0$ , а из остальных — множитель  $a_1$ ).

б) Корни  $f(z)$  лежат в левой полуплоскости  $H$  в том и только том случае, если  $a_1 > 0$  и корни  $\varphi(z)$  лежат в  $H$ .

Пусть корни  $f(z)$  лежат в  $H$ ; построим наряду с этим многочленом

$$f(z) = a_0 \prod_{k=1}^n (z - z_k) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (11)$$

многочлен

$$f_*(z) = a_0 \prod_{k=1}^n (z + \bar{z}_k) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n, \quad (12)$$

корни которого лежат в правой полуплоскости (выражения для его коэффициентов получаются при раскрытии произведений). Очевидно,

$$f(z) + f_*(z) = 2p, \quad f(z) - f_*(z) = 2q.$$

Так как  $|z - z_k| \cong |z + \bar{z}_k|$  при  $\operatorname{Re} z \cong 0$ , то и

$$|f(z)| \cong |f_*(z)| \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \cong 0; \quad (13)$$

поэтому  $q$  может иметь лишь чисто мнимые корни. Покажем, что эти корни простые. Пусть от противного в какой-либо точке

$iy$  одновременно  $f(iy) = f_*(iy)$  и  $f'(iy) = f'_*(iy)$ ; тогда

$$\frac{f'(iy)}{f(iy)} = \frac{f'_*(iy)}{f_*(iy)} \quad \text{или} \quad [\ln f(iy)]' = [\ln f_*(iy)]'$$

(у нас  $f$  и  $f_*$  не имеют корней на мнимой оси). На основании формул (11) и (12) последнее соотношение переписывается в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{iy - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{iy + \bar{z}_k},$$

но так как  $\operatorname{Re} \frac{1}{iy - z_k} > 0$ , а  $\operatorname{Re} \frac{1}{iy + \bar{z}_k} < 0$  \*) для всех  $k$ , то это соотношение не может иметь места.

Степень многочлена  $q$  равна  $n-1$ , ибо по известному свойству корней многочлена  $\frac{a_1}{a_0} = -\sum_{k=1}^n z_k > 0$  и, следовательно,  $a_1 \neq 0$ ; степень  $p$  равна  $n$ . Таким образом, учитывая доказанное выше, мы имеем разложение

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0}{a_1} z + \sum_{n=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{z - i\beta_k} + C. \quad (14)$$

Так как

$$\frac{p}{q} = \frac{f + f_*}{f - f_*} = \frac{1 + \frac{f_*}{f}}{1 - \frac{f_*}{f}} \quad (15)$$

и дробно-линейная функция  $\omega = \frac{1+\xi}{1-\xi}$  отображает круг  $|\xi| < 1$  на правую полуплоскость, то на основании неравенств (13) можно утверждать, что

$$\operatorname{Re} \frac{p(z)}{q(z)} \geq 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geq 0. \quad (16)$$

Отсюда мы заключаем, что в разложении (14) все  $\lambda_k > 0$  (ибо  $\operatorname{Re} \frac{1}{z - i\beta_k} \geq 0$  при  $\operatorname{Re} z \geq 0$  и в окрестности точки  $z = i\beta_k$  знак  $\operatorname{Re} \frac{p}{q}$  определяется знаком  $\operatorname{Re} \frac{\lambda_k}{z - i\beta_k}$ ) и что  $C$  — чисто мнимая постоянная.

\*) Напомним, что  $\operatorname{Re} z = x$  и  $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}$  имеют одинаковые знаки.

Наконец, пользуясь (14), мы находим:

$$\varphi = a_1 p + (a_1 - a_0 z) q = a_1 q \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{z - i\beta_k} + C \right\},$$

а из этой формулы видно, что  $\varphi$  не может иметь корней при  $\operatorname{Re} z \geq 0$ . В самом деле, действительная часть выражения в фигурной скобке при  $\operatorname{Re} z \geq 0$  положительна, а  $q$  обращается в нуль лишь в точках  $i\beta_k$ , в которых, очевидно,  $\varphi \neq 0$  (ибо в противном случае в этих точках было бы  $p = 0$ , а значит и  $f = 0$ , что противоречит условию). Таким образом, все корни многочлена  $\varphi(z)$  лежат в левой полуплоскости  $H$ .

Пусть теперь дано, что все корни  $\varphi(z)$  лежат в  $H$  и  $a_1 > 0$ . Из формулы (9) видно, что для  $\varphi$  многочлены  $p_1$  и  $q_1$ , аналогичные многочленам  $p$  и  $q$ , для  $f$ , имеют вид  $p_1 = a_1 q$  и  $q_1 = a_1 p - a_0 z q$ , поэтому

$$\frac{p}{q} = \frac{q_1}{p_1} + \frac{a_0}{a_1} z. \quad (17)$$

Повторяя для  $\varphi$  рассуждения, которые выше мы проводили для  $f$ , найдем, что  $\operatorname{Re} \frac{p_1}{q_1} \geq 0$  при  $\operatorname{Re} z \geq 0$ . Так как  $\frac{a_0}{a_1} > 0$  и знак  $\operatorname{Re} \frac{q_1}{p_1}$  совпадает со знаком  $\operatorname{Re} \frac{p_1}{q_1}$ , то из (17) мы придем к неравенствам (16). Но тогда при помощи (15) мы докажем справедливость неравенств (13). Таким образом, при  $\operatorname{Re} z > 0$  будем иметь  $|f(z)| > |f_*(z)|$ , откуда следует, что  $f(z)$  не имеет корней в правой полуплоскости. Но  $f(z)$  не может иметь корней и на мнимой оси, ибо там  $|f(z)| = |f_*(z)|$  и каждый чисто мнимый корень  $f(z)$  был бы корнем  $p$  и  $q$ , а следовательно, и корнем  $\varphi(z)$ , что противоречит сделанному предположению. Поэтому все корни  $f(z)$  лежат в  $H$ . Итак, утверждение б) доказано. Опираясь на него и на утверждение а), легко сделать переход от  $n-1$  к  $n$  и тем самым закончить доказательство теоремы Гурвица.

Примеры. 1) Для многочлена  $f(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 1$  имеем  $D_1 = 2$ ,  $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$ ,  $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$ ; следовательно, все его корни лежат в левой полуплоскости.

2) Для многочлена  $f(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$  имеем  $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$ , следовательно, хотя бы один его корень лежит в правой полуплоскости, или на мнимой оси (впрочем,  $f(iy) = iy(1 - y^2) + 1 - 2y^2$ , откуда видно, что многочлен не имеет чисто мнимых корней, т. е. можно утверждать, что хотя бы один его корень лежит в правой полуплоскости).

Из разложения (11) можно получить необходимое условие того, что все корни многочлена с действительными коэффициентами лежат в левой полуплоскости: *все коэффициенты этого многочлена должны иметь одинаковый знак* (условие А. Стодолы). Однако, как показывает, скажем, пример 2, это не является достаточным \*).

2) Геометрические методы. Геометрически проблема Рауса — Гурвица сводится к вопросу о том, будет ли образ  $\Delta$  правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z \geq 0$  при отображении  $w = f(z)$ , осуществляемом данной мероморфной функцией, содержать точку  $w = 0$ . На римановой поверхности  $R$  функции  $f(z)$  область  $\Delta$  ограничена кривой  $\tilde{\Gamma}$ , соответствующей мнимой оси плоскости  $z$  — в теории автоматического регулирования эту кривую называют *частотным годографом*.

На основании геометрических свойств аналитических функций можно сформулировать следующий

**Критерий устойчивости.** *Если часть  $\tilde{\Delta}$  римановой поверхности функции  $f(z)$ , остающаяся справа от частотного годографа при его обходе в направлении возрастания  $y$ , не содержит точек, расположенных над  $w = 0$  (и сам годограф не проходит над этой точкой), то соответствующая система автоматического регулирования устойчива, если же это условие не выполняется, — то неустойчива.*

В практических задачах исследование формы римановой поверхности часто оказывается затруднительным, между тем как построить проекцию  $\Gamma$  частотного годографа на плоскость  $w$  обычно довольно легко. Для этого достаточно отделить действительную и мнимую части в уравнении  $w = f(iy)$  и мы получим параметрические уравнения  $u = u(y)$ ,  $v = v(y)$ ,  $-\infty < y < \infty$ , кривой  $\Gamma$ . Однако если не рассматривать римановой поверхности и применять сформулированный критерий к области  $\Delta_0$  плоскости  $w$ , расположенной справа от  $\Gamma$ , то можно прийти к неправильному выводу. Это относится к тем случаям, когда  $\Gamma$  проходит не по всем листам  $R$ , расположенным над  $\Gamma$  — по листам, свободным от точек  $\tilde{\Gamma}$ , можно выйти за пределы области  $\Delta_0$  и, быть может, дойти до точки  $w = 0$ , хотя  $\Delta_0$  ее и не содержит. В силу односвязности области  $\tilde{\Delta}$  в этих случаях над точками  $\Delta_0$  непременно существуют точки разветвления поверхности  $R$ , связывающие листы, свободные от  $\tilde{\Gamma}$ , с листами, содержащими эту кривую.

**Пример.** Для многочлена

$$f(z) = z^3 - z^2 + 2z - 3$$

\*) Интересно отметить, что А. Стодола предложил это условие как необходимое и достаточное (1894 г.).

кривая  $\Gamma: u = y^2 - 3, v = y(2 - y^2)$  имеет вид, изображенный на рис. 167. Область  $\Delta_0$  (оттенена на рисунке) не содержит точки  $w = 0$ , однако область  $\Delta$  (проекция  $\tilde{\Delta}$ ) представляет собой всю плоскость; соответствующая система автоматического регулирования, конечно, неустойчива (не выполняется условие Стодолы). Здесь риманова поверхность имеет точки ветвления\*) над точками, которые отмечены звездочками на рис. 167; кривая  $\tilde{\Gamma}$  лежит на одном из трех ее листов.

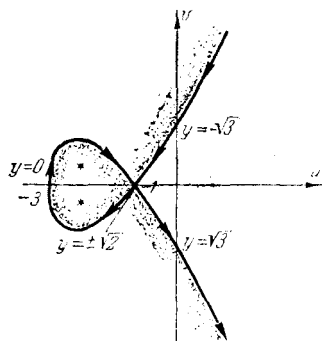


Рис. 167.

В некоторых задачах вид области  $\Delta$  — проекции  $\tilde{\Delta}$  на плоскость  $w$  — удается выяснить без изучения римановой поверхности. Для этого, например, можно рассмотреть систему полукругов  $D_R: |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0$  и выяснить вид областей  $\Delta_R$ , соответствующих этим полукругам при отображении  $w = f(z)$ . Зная, как меняется  $\Delta_R$

при изменении  $R$ , мы будем знать и вид области  $\tilde{\Delta}$ . Очевидно, в формулировке критерия устойчивости область  $\tilde{\Delta}$  на римановой поверхности можно заменить этой плоской областью.

Приведем еще один геометрический критерий устойчивости, относящийся к важному классу задач теории автоматического регулирования, в которых исследуемая функция имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{KG(z)} + 1, \quad (18)$$

где  $G(z)$  — дробно-рациональная функция и  $K$  — некоторая постоянная. Это — случай так называемых систем с простой обратной связью. Постоянная  $K$  имеет определенный физический смысл и называется коэффициентом усиления; ее выделение из выражения для  $G(z)$  оправдывается конструктивными соображениями: на величины  $K$  и  $G$  влияют разные звенья системы регулирования.

Чтобы получить искомый критерий устойчивости для функции (18), мы воспользуемся принципом аргумента п. 23. Очевидно, полюсы функции  $f(z)$  являются нулями  $G(z)$ ; если обозначить число этих полюсов в правой полуплоскости через  $P$ , то согласно принципу аргумента условие отсутствия нулей  $f(z)$  в правой полуплоскости сводится к условию

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{CR} \arg f(z) = P,$$

\*) Точки ветвления соответствуют при отображении  $w = f(z)$  корням уравнения  $f'(z) = 3z^2 - 2z + 2 = 0$ .

где  $C_R$  — граница полукруга  $D_R$  (см. выше) достаточно большого радиуса, обходимая по часовой стрелке \*).

Таким образом, при обходе  $C_R$  (по часовой стрелке), вектор  $f(z)$  должен  $P$  раз поворачиваться вокруг начала координат против часовой стрелки. Учитывая, что поворот вектора  $f(z)$  вокруг начала равносителен повороту вектора  $\frac{1}{KG(z)} = f(z) - 1$  вокруг точки  $w = -1$ , или вектора  $\frac{1}{G(z)}$  вокруг точки  $w = -K$ , мы приходим к следующему критерию устойчивости, который связывают обычно с именами Г. Найквиста и А. В. Михайлова.

**Критерий Найквиста — Михайлова.** Для того чтобы система автоматического регулирования, описываемая функцией (18), была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при обходе по часовой стрелке границы полукруга  $D_R$ , ограниченного отрезком мнимой оси и полуокружностью достаточно большого радиуса, вектор  $1/G(z)$  поворачивался вокруг точки  $w = -K$  против часовой стрелки  $P$  раз, где  $P$  — число полюсов  $1/G(z)$  в правой полуплоскости.

**Пример.** Пусть функция  $G(z)$  имеет вид

$$G(z) = \frac{1}{z(1 + \tau_1 z)(1 + \tau_2 z)},$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — положительные постоянные. Частотный годограф функции  $1/G(z)$  описывается уравнением

$$w = \frac{1}{G(iy)} = iy(1 + i\tau_1 y)(1 + i\tau_2 y) = -(\tau_1 + \tau_2)y^2 + iy(1 - \tau_1\tau_2 y^2)$$

и имеет вид, изображенный на рис. 168 жирной линией. В самом деле, мы имеем:

$$u = -(\tau_1 + \tau_2)y^2, \quad v = y(1 - \tau_1\tau_2 y^2),$$

откуда видно, что этот годограф целиком расположен в левой полуплоскости, пересекает ось  $u$  при  $y = 0$  и при  $y = \pm 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$ , причем угловой коэффициент касательной  $\frac{dv}{du} = \frac{3\tau_1\tau_2 y^2 - 1}{2(\tau_1 + \tau_2)y}$  равен  $\infty$  и  $\pm \frac{\sqrt{\tau_1\tau_2}}{\tau_1 + \tau_2}$  в точках пересечения годографа с осью  $u$  и неограниченно возрастает при  $|y| \rightarrow \infty$ . При достаточно больших  $|z|$  имеем  $\frac{1}{G(z)} \approx \tau_1\tau_2 z^3$ , откуда видно, что правой полуокружности  $|z| = R$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$  при больших  $R$  соответствует кривая, близкая к полтора раза проходимой окружности  $|w| = \tau_1\tau_2 R^3$  (см. рис. 168).

Пусть значение коэффициента усиления  $K = K_1$  таково, что точка  $-K_1$  лежит внутри петли годографа (так как в точке самопересечения годографа  $y^2 = \frac{1}{\tau_1\tau_2}$ , то для этой точки  $u = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$  и наш случай соответствует

\*) Различие в знаке с формулой п. 23 объясняется тем, что там граница области обходилась против часовой стрелки.



значениям  $0 < K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$ ). Как видно из рисунка, при полном обходе  $C_R$  вектор  $\frac{1}{G(z)} = \frac{1}{G_I}$  (изображен пунктиром на рисунке) в этом случае не делает ни одного оборота, — если начинать обход с точки  $a$ , то  $1/G_I$  сначала (при обходе годографа) сделает более одного оборота против часовой стрелки,

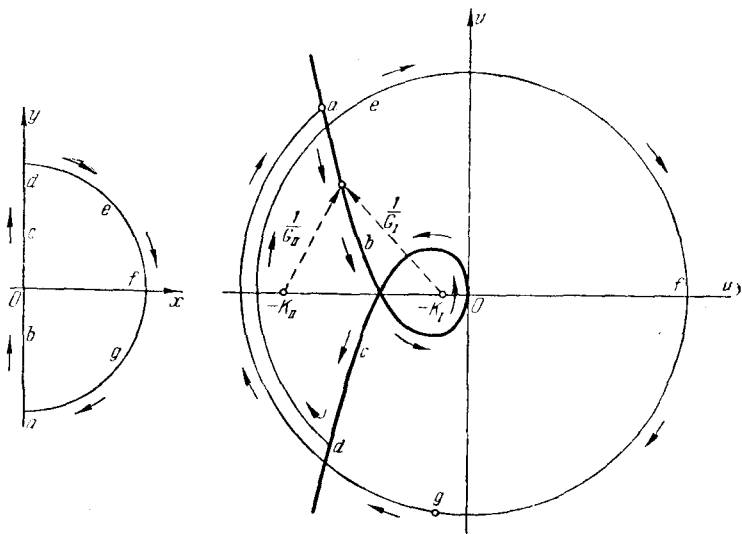


Рис. 168.

но затем (при обходе кривой, соответствующей полуокружности) повернется на такой же угол по часовой стрелке. Если же значение  $K = K_{II}$  таково, что точка  $-K_{II}$  лежит левее петли годографа (т. е.  $K > \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$ ), то при полном обходе  $C_R$  вектор  $\frac{1}{G(z)} = \frac{1}{G_{II}}$ , очевидно, сделает два полных оборота по часовой стрелке (рис. 168).

Так как в рассматриваемом случае число полюсов  $1/G(z)$  в правой полуплоскости равно нулю, то согласно критерию Найквиста — Михайлова соответствующая система автоматического регулирования устойчива при  $0 < K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$  и неустойчива при  $K > \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$ .

3) Метод Вышнеградского — Найквиста. Этот метод является развитием предыдущего и также приспособлен к исследованию функций, зависящих от параметров\*). Мы рас-

\*) Идея метода принадлежит русскому инженеру И. А. Вышнеградскому (1877), дальнейшая его разработка — американскому инженеру Г. Найквисту (1932); четкое обоснование метода дал советский математик Н. Н. Мейман (1949), мы следуем его изложению [4].

смотрим семейство многочленов, зависящих от двух действительных параметров  $\xi$  и  $\eta$  или, что то же самое, от одного комплексного параметра  $\zeta = \xi + i\eta$ :

$$f(z, \zeta) = P_1(z)\xi + P_2(z)\eta - P_3(z), \quad (19)$$

где  $P_k(z)$  — некоторые фиксированные многочлены. Мы будем считать, что не существует общего корня всех трех этих многочленов (если бы такой корень  $z_0$  существовал, то уравнение можно было бы сократить на множитель  $z - z_0$  в надлежащей степени); через  $n$  обозначим наибольшую из их степеней.

Обозначим через  $D(k, n-k)$  совокупность точек плоскости параметра  $\zeta$ , для каждой из которых многочлен (19) имеет  $k$  корней относительно  $z$  с отрицательными действительными частями и  $n-k$  корней с положительными действительными частями\*). В частности,  $D(n, 0)$  — область устойчивости — совокупность тех точек  $\zeta$ , для которых все корни имеют отрицательные действительные части. Так как корни многочлена непрерывно зависят от  $\zeta$ , то вместе с каждой точкой  $\zeta$  совокупности  $D(k, n-k)$  принадлежит и некоторая достаточно малая окрестность этой точки. Отсюда вытекает, что совокупность  $D(k, n-k)$  состоит из некоторого числа областей.

Точка  $\zeta$  не принадлежит ни одной из областей  $D(k, n-k)$ , если соответствующий многочлен (19) имеет хотя бы один чисто мнимый корень или, в частности, бесконечно удаленный корень, который также можно рассматривать как лежащий на мнимой оси. Малым изменением значений параметров  $\xi$  и  $\eta$  в этом случае можно достичь того, что многочлен уже не будет иметь чисто мнимых корней; следовательно, дополнение к совокупности всех областей  $D(k, n-k)$  состоит из граничных точек этих областей. Идея Вышнеградского и состоит в отыскании областей  $D(k, n-k)$  в плоскости параметров.

Рассмотрим сначала частный случай, когда многочлен  $P_2(z) = iP_1(z)$ , т. е.

$$f(z, \zeta) = P_1(z)\zeta - P_3(z). \quad (20)$$

Уравнение  $f(z, \zeta) = 0$ , которое в этом случае можно переписать в виде

$$\zeta = \frac{P_3(z)}{P_1(z)}, \quad (21)$$

устанавливает некоторое соответствие между плоскостями  $z$  и  $\zeta$ , причем каждой точке  $\zeta_0$  соответствует  $n$  точек  $z_0^{(v)}$  — корней уравнения (20) при заданном значении параметра  $\zeta_0$  (некоторые из них могут совпадать или уходить в бесконечность).

\*) Как всегда, корни считаются столько раз, какова их кратность.

Из сказанного выше следует, что граница  $\Gamma$  областей  $D(k, n-k)$  представляет собой образ мнимой оси при отображении (21), т. е. частотный годограф функции  $\zeta = P_3(z)/P_1(z)$ .

Пусть  $\zeta_0$  будет точка, не лежащая на  $\Gamma$ ; число  $k(\zeta_0)$  корней соответствующего уравнения (20) с отрицательными действительными частями можно найти, как и выше, при помощи принципа аргумента. Предположим, что  $P_1(z)$  не имеет чисто мнимых корней и обозначим через  $k_1$  число его корней в левой полуплоскости, через  $n_1$  и  $n_3$  обозначим, соответственно, степени  $P_1(z)$  и  $P_3(z)$  и положим

$$m = \begin{cases} \frac{n_3 - n_1}{2}, & \text{если } n_3 > n_1, \\ 0, & \text{если } n_3 \leq n_1. \end{cases} \quad (22)$$

Рассмотрим полукруг, ограниченный полуокружностью  $C'_R: |z|=R, \operatorname{Re} z \leq 0$ , и отрезком  $C''_R: -R \leq y \leq R$  мнимой оси; пусть  $C_R^* = C'_R + C''_R$ . Для достаточно больших  $R$  по принципу аргумента

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R^*} \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} + \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R^*} \arg P_1(z), \quad (23)$$

где контур  $C_R^*$  проходится против часовой стрелки.

Для больших  $|z|$  имеем  $\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} = z^{n_3-n_1} \left\{ c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots \right\}$ ,  $c_0 \neq 0$ , следовательно,  $\Delta_{C_R^*} \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} = \pi(n_3 - n_1) + O\left(\frac{1}{R}\right)$  при  $n_3 > n_1$ ; при  $n_3 \leq n_1$  это приращение равно  $O\left(\frac{1}{R}\right)$ . Таким образом, в силу нашего выбора  $m$  всегда

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C_R^*} \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} = m + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Разбивая первое слагаемое формулы (23) на два, соответствующие обходу  $C'_R$  и  $C''_R$ , а также учитывая, что второе ее слагаемое по принципу аргумента равно  $k_1$ , мы получим из этой формулы в пределе при  $R \rightarrow \infty$

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\} + m + k_1,$$

где  $C$  — мнимая ось плоскости  $z$ , проходимая снизу вверх. Переходя к параметрической плоскости  $\zeta$ , получим следующий результат.

*Число корней в левой полуплоскости уравнения (20) при  $\zeta = \zeta_0$  равно*

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg(\zeta_0 - \zeta) + m + k_1, \quad (24)$$

где  $\Gamma$  — частотный годограф функции (21), проходимый в направлении возрастания  $y$ ,  $t$  определяется по формуле (22) и  $k_1$  — число корней многочлена  $P_1(z)$  в левой полуплоскости.

**Замечание.** При доказательстве мы исключили случай, когда  $P_1(z)$  имеет чисто мнимые корни. В этом случае формула (24) остается в силе, если каждый такой корень  $P_1(z)$  засчитывать с половинной кратностью и первое слагаемое рассматривать как сумму приращений  $\arg(\zeta_0 - \zeta)$  вдоль отдельных уходящих в бесконечность ветвей годографа (из уравнения годографа  $\zeta = P_3(iy)/P_1(iy)$  видно, что  $\zeta \rightarrow \infty$  при приближении к каждому мнимому корню  $P_1(z)$ ). В самом деле, все проведенные рассуждения останутся в силе и в этом случае, если при обходе  $C_R'''$  обойти каждый чисто мнимый корень слева по малой полуокружности с центром в корне. Обход каждой такой полуокружности вносит в  $\frac{1}{2\pi} \Delta \arg \left\{ \zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} \right\}$  величину  $\frac{p}{2}$ , где  $p$  — кратность соответствующего корня\*), величина же  $\Delta_{C_R^*} \arg P_1(z)$  остается без изменения, ибо внутри  $C_R^*$  не появляется новых корней  $P_1(z)$ . Устремляя радиусы всех таких полуокружностей к нулю, в пределе получим нужный результат.

**Пример.** Для семейства многочленов

$$f(z, \zeta) = (z^3 - i)\zeta + 3az(z + 1)$$

кривая  $\Gamma$  определяется уравнением

$$\zeta = \frac{3ay}{1+y^3} + i \frac{3ay^2}{1+y^3}$$

и представляет собой декартов лист (рис. 169). Здесь  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$ ,  $m = 0$ ;  $P_1(z) = z^3 - i$  имеет один чисто мнимый корень  $z = -i$  и один корень

$z = e^{5\pi i/6}$  в левой полуплоскости, так что  $k_1 = 3/2$ . Формула (24) принимает вид

$$k(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg(\zeta_0 - \zeta) + \frac{3}{2}.$$

Для  $\zeta_0$  справа от ветвей  $\Gamma$  первое слагаемое равно  $-\frac{1}{2}$  (см. рис. 169: обход

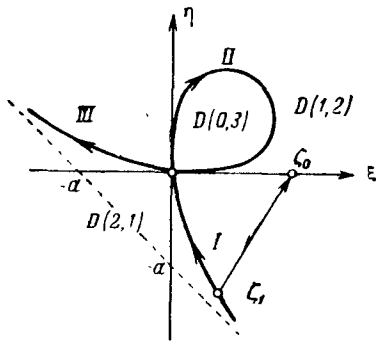


Рис. 169.

\*) Действительно, в окрестности каждого такого корня  $a$  имеем:

$$\zeta_0 - \frac{P_3(z)}{P_1(z)} = \frac{1}{(z-a)^p} (c_0 + c_1(z-a) + \dots), \quad c_0 \neq 0,$$

и полуокружность проходится по часовой стрелке.

участка I дает  $\Delta \arg (\zeta_0 - \zeta) = -\frac{3\pi}{4}$ , участка II — 0, участка III —  $\frac{\pi}{4}$ , следовательно, для таких  $\zeta_0$  имеем  $k(\zeta_0) = 1$ . Точно так же получим, что для  $\zeta_0$  внутри петли  $k(\zeta_0) = 0$ , а для  $\zeta_0$  слева от ветвей  $k(\zeta_0) = 2$ . Таким образом, мы полностью выясняем расположение корней.

Рассмотрим, наконец, общий случай многочлена (19). Полагая

$$P_k(z) = u_k(x, y) + iv_k(x, y) \quad (k = 1, 2, 3),$$

мы видим, что уравнение  $f(z, \zeta) = 0$  равносильно системе

$$\left. \begin{aligned} U &= u_1(x, y) \xi + u_2(x, y) \eta - u_3(x, y) = 0, \\ V &= v_1(x, y) \xi + v_2(x, y) \eta - v_3(x, y) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Как и выше, будем считать, что эта система устанавливает отображение плоскости  $z$  на плоскость  $\zeta$ , которое можно записать в явном виде, решая систему относительно  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\xi = \frac{u_3 v_2 - u_2 v_3}{\Delta}, \quad \eta = \frac{u_1 v_3 - u_3 v_1}{\Delta}, \quad (26)$$

где  $\Delta = \Delta(z) = u_1 v_2 - u_2 v_1$  — определитель системы. Очевидно, точкам  $z$ , в которых  $\Delta(z) \neq 0$ , отвечают вполне определенные конечные точки  $\zeta$ . Точкам, в которых  $\Delta(z) = 0$ , но хотя бы один из числителей (26) отличен от нуля (а следовательно, и второй числитель также, в чем легко убедиться), отвечает точка  $\zeta = \infty$ . Наконец, если в некоторой точке  $z$  обращаются в нуль и числители и знаменатель (26), то этой точке соответствует целая прямая плоскости  $\zeta$  — такие точки и соответствующие им прямые мы будем называть *исключительными* \*).

Отображение, обратное (26), не более чем  $n$ -значно, ибо каждая точка  $z$ , соответствующая  $\zeta$ , — это корень многочлена (19) при данном значении  $\zeta$ .

Выясним вопрос о сохранении ориентации при отображении (26). Для этого продифференцируем систему (25) по  $x$  и  $y$ , считая  $\xi$  и  $\eta$  функциями  $x$  и  $y$ :

$$u_1 d\xi + u_2 d\eta + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0,$$

$$v_1 d\xi + v_2 d\eta + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = 0.$$

Решая эту систему относительно  $d\xi$  и  $d\eta$  и пользуясь уравнениями Коши — Римана, согласно которым  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ,

\* В случае многочленов (20) исключительных точек быть не может.

получаем:

$$d\xi = \frac{1}{\Delta} \left\{ - \left( u_2 \frac{\partial U}{\partial y} + v_2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx + \left( u_2 \frac{\partial U}{\partial x} - v_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \right\},$$

$$d\eta = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left( u_1 \frac{\partial U}{\partial y} + v_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx - \left( u_1 \frac{\partial U}{\partial x} - v_1 \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \right\}.$$

Отсюда находим якобиан отображения (26)

$$\frac{\partial (\xi, \eta)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

и видим, что знак этого якобиана совпадает со знаком  $\Delta$ . Следовательно, *отображение (26) сохраняет ориентацию, если  $\Delta > 0$ , и меняет ее, если  $\Delta < 0$ .*

Как и выше, рассмотрим разбиение плоскости  $\xi$  на области  $D(k, n-k)$  и обозначим через  $\Gamma$  границу этих областей. Очевидно, параметрические уравнения  $\Gamma$  можно получить, полагая  $x=0$  в уравнениях (26). Положительным обходом  $\Gamma$ , по-прежнему, будем считать тот, который соответствует возрастанию  $y$ . Кривая  $\Gamma$  может состоять из нескольких ветвей, причем в отличие от случая многочленов (20) при полном обходе оси  $y$  ее участки могут проходить и по нескольку раз (не более  $n$ ). Кроме того, кривая  $\Gamma$  может содержать исключительные прямые, — это будет в том случае, когда на оси  $y$  имеются исключительные точки.

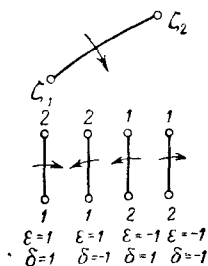


Рис. 170.

Рассмотрим некоторый участок  $\xi_1 \xi_2$  кривой  $\Gamma$  и предположим, что при полном обходе оси  $y$  он обходится  $l$  раз, т. е. что этому участку соответствует  $l$  отрезков  $y_1^\mu y_2^\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, l$ ) оси  $y$ . Положим  $\epsilon_\mu = 1$ , если направление  $y_1^\mu y_2^\mu$  совпадает с направлением оси  $y$ , и  $\epsilon_\mu = -1$  в противоположном случае. Положим также  $\delta_\mu = 1$ , если на  $y_1^\mu y_2^\mu$  определитель  $\Delta > 0$ , и  $\delta_\mu = -1$  в противоположном случае (рис. 170).

Пусть точка  $\xi$ , двигаясь непрерывно по некоторому достаточно малому пути, пересекает дугу  $\xi_1 \xi_2$  слева направо. Этому пути в плоскости  $z$  соответствует  $l$  путей, пересекающих отрезки  $y_1^\mu y_2^\mu$  оси  $y$ . Очевидно, если  $\epsilon_\mu \delta_\mu > 0$ , то соответствующий путь идет из левой полуплоскости в правую и многочлен (19) приобретает на нем один корень с положительной действительной частью и теряет корень с отрицательной действительной частью; в случае  $\epsilon_\mu \delta_\mu < 0$  наоборот. Таким образом,

при переходе с левой стороны дуги  $\xi_1 \xi_2$  кривой  $\Gamma$  на правую многочлен (19) теряет  $\varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 + \dots + \varepsilon_l \delta_l$  корней с отрицательной действительной частью\*).

С помощью этого замечания мы сможем найти все области  $D(k, n-k)$ , зная какую-либо одну из них.

В заключение приведем пример, принадлежащий Вышнеградскому:

$$f(z, \xi) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1.$$

Полагая  $z = iy$  и разделяя действительную и мнимую части, найдем параметрические уравнения кривой  $\Gamma$ :  $\xi = 1/y^2$ ,  $\eta = y^2$ . Это лежащая в первом

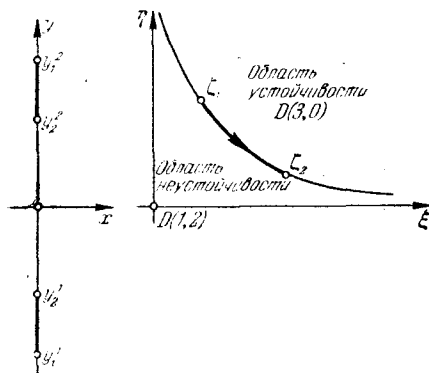


Рис. 171.

квадранте ветвь гиперболы  $\xi\eta = 1$  (рис. 171). При полном обходе оси  $y$  она описывается два раза; при этом если считать для нижней полуоси  $\mu = 1$ , а для верхней  $\mu = 2$ , то будем иметь:  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = -1$ . Далее, определитель  $\Delta$ , определяющий знак якобиана, на оси  $y$  равен  $\Delta(iy) = -y^3$ , следовательно,  $\delta_1 = +1$ ,  $\delta_2 = -1$ . Таким образом, при переходе через дугу  $\xi_1 \xi_2$  слева направо теряется  $\varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 = 2$  корня с отрицательной действительной частью. В начале координат  $\xi = \eta = 0$  многочлен принимает вид  $z^3 + 1$  и имеет корни  $z_1 = -1$ ,  $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ;

следовательно, область под гиперболой есть  $D(1, 2)$ , но тогда область над гиперболой есть  $D(3, 0)$ —область

устойчивости. Для проверки можно взять точку  $\xi = \eta = 3$ , в которой многочлен принимает вид  $z^3 + 3z^2 + 3z + 1$  и имеет тройной корень  $z = -1$ .

### § 3. Методы асимптотических оценок

Во многих технических вопросах важно иметь методы изучения так называемых установившихся режимов. Математически эти вопросы сводятся к изучению свойств функций для больших значений аргументов, или, как говорят, к изучению асимптотического поведения функций. Мы приведем здесь некоторые из методов асимптотического изучения функций. Для более подробного изучения этих вопросов мы рекомендуем книгу М. А. Е в г р а ф о в а [7].

**76. Асимптотические разложения.** В основе асимптотического исследования функций лежит замена этих функций более простыми так, чтобы сохранялись основные свойства и отобра-

\*) Если эта сумма равна нулю, то по обе стороны дуги  $\xi_1 \xi_2$  лежат области  $D(k, n-k)$  с одинаковыми индексами. В случае многочлена (20) эта сумма всегда равна единице; следовательно, здесь слева от  $\Gamma$  всегда лежит область с числом  $k$ , на единицу большим, чем справа (ср. рис. 158).

сывались второстепенные. В частности, исследуя функцию  $f(z)$  при больших значениях аргумента на каком-либо множестве  $M$ , простирающемся в бесконечность (чаще всего на какой-либо линии, идущей в бесконечно удаленную точку), проще всего заменить эту функцию рядом

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots, \quad (1)$$

в некотором смысле приближающем ее. Обычно требуют, чтобы погрешность при замене функции  $f(z)$  частной суммой  $s_n(z)$  этого ряда при  $z \rightarrow \infty$  по точкам  $M$  была малой высшего порядка относительно последнего члена частной суммы, т. е.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{z^k} \right\} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Из этого условия не следует, конечно, сходимости ряда (1), однако, как мы увидим ниже, даже всюду расходящиеся ряды, удовлетворяющие этому условию, содержат много полезных сведений об асимптотических свойствах функции  $f(z)$ .

Ряд (1), удовлетворяющий условию (2), называют *асимптотическим разложением* функции  $f(z)$  на множестве  $M$  и эту связь между рядом и функцией записывают в следующем виде:

$$f(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} + \dots \quad (3)$$

На данном множестве  $M$  асимптотическое разложение функции, если оно существует, определяется единственным образом.

В самом деле, из условий (2) при  $n=0$  мы найдем:  $\lim_{z \rightarrow \infty} \{f(z) - c_0\} = 0$ , откуда определяется  $c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ; при  $n=1$ :

$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left\{ f(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right\} = 0$ , откуда  $c_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z \{f(z) - c_0\}$  и вообще

$$c_n = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \{f(z) - s_{n-1}(z)\} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

С другой стороны, один и тот же ряд (1) может служить асимптотическим разложением различных функций. Например, ряд, тождественно равный нулю, служит асимптотическим разложением как функции, тождественно равной нулю, так и функции  $e^{-x}$  на луче  $x > 0$  (или даже в любом секторе  $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ); это видно из того, что  $\lim_{z \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$  для любого  $n$ .

\*) В этой и следующих формулах предельный переход при  $z \rightarrow \infty$  совершается, конечно, по точкам множества — мы не будем этого специально оговаривать.



Легко доказать, что *асимптотические разложения суммы и произведения двух функций* получаются соответственно *почленным сложением и умножением их асимптотических разложений*: если

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad \text{и} \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^n},$$

то

$$f(z) + g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n + d_n}{z^n},$$

$$f(z) g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \dots + c_n d_0}{z^n}. \quad (5)$$

Точно так же легко доказывается правило *почленного интегрирования* асимптотических разложений: если  $f(z) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$  (т. е. при  $z \rightarrow \infty$  по множеству  $M$  функция  $f(z)$  является бесконечно малой порядка не ниже второго), то

$$\int_z^{\infty} f(z) dz \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1) z^{n-1}}. \quad (6)$$

*Почленное дифференцирование асимптотического разложения, вообще говоря, незаконно.* В самом деле, легко видеть, что  $e^{-x} \sin e^x \sim 0$  на луче  $x > 0$ , однако  $(e^{-x} \sin e^x)' = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$  вовсе не имеет асимптотического разложения, ибо на луче  $x > 0$  не существует даже предела этой функции при  $x \rightarrow \infty$ .

**Примеры.** 1) Найдем асимптотическое разложение на луче  $x > 0$  функции, определяемой интегралом

$$f(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{t} e^{x-t} dt.$$

Повторным интегрированием по частям (полагая  $\frac{1}{t} = u$ ,  $e^{x-t} dt = dv$  и т. д.) найдем:

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} e^{x-t} dt = \\ = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Для остатка (с помощью интегрирования по частям) получаем оценку

$$n! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}} dt < \frac{n!}{x^{n+1}},$$

откуда вытекает, что в принятых выше обозначениях

$$x^n \{f(x) - s_n(x)\} \leq \frac{n!}{x}$$

стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ ; следовательно,

$$\int_x^{\infty} \frac{1}{t} e^{x-t} dt \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \dots \quad (7)$$

Рассматриваемый интеграл связан со специальной функцией — *интегральной показательной функцией* \*)

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau. \quad (8)$$

В самом деле, после замены переменной  $\tau = -t$  имеем, очевидно,

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -e^{-x} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} e^{x-t} dt.$$

Таким образом, из (7) мы получаем следующее асимптотическое равенство:

$$-\text{Ei}(-x) \sim \frac{e^{-x}}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^n} + \dots \right\}. \quad (9)$$

Ряды (7) и (9) расходятся, ибо их общие члены не стремятся к нулю (отношение  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n}{x} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и любом фиксированном  $x$ ). Тем не менее, они дают приближенные значения функции, весьма точные даже для довольно малых  $x$  и  $n$ , например: для интеграла (7)  $s_6(10) = 0,09152$  дает приближение с точностью до 0,00012.

2) Найдем асимптотическую формулу для функции вероятности ошибок (см. пример 1 п. 70) для положительных значений  $x$ . Рассмотрим сначала функцию

$$f(x) = \int_x^{\infty} e^{x^2-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_x^{\infty} \frac{1}{t} de^{x^2-t^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{x^2-t^2} \frac{dt}{t^2};$$

---

\*) При  $x > 0$  интеграл понимается в смысле главного значения.

повторяя интегрирование по частям, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n x^{2n-1}} + \\ + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^\infty \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt.$$

Для остатка (с помощью интегрирования по частям) получаем оценку

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^\infty \frac{e^{x^2-t^2}}{t^{2n}} dt < \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} x^{2n+1}},$$

откуда вытекает, что  $x^{2n-1} \{f(x) - s_{2n-1}(x)\} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ; следовательно

$$\int_x^\infty e^{x^2-t^2} dt \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \dots \quad (10)$$

Пользуясь тем, что  $\int_0^\infty e^{x^2-t^2} dt = e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (см. п. 67), получим:

$$\int_0^x e^{x^2-t^2} dt = e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{x^2-t^2} dt \sim e^{x^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2^2 x^3} - \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} + \dots$$

и, наконец,

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left( \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \dots \right). \quad (11)$$

3) Асимптотические разложения можно строить и для функций целочисленного аргумента  $n$ ; множеством  $M$  в этом случае служит последовательность целочисленных точек. В качестве примера рассмотрим задачу об асимптотической оценке нулей функции

$$f(z) = \sin z + \frac{1}{z}, \quad (12)$$

близким к точкам  $z_n = \pi n$ . В качестве первого приближения примем  $z_n \sim \pi n$ . Подставляя  $z = \pi n + \varepsilon_1(n)$  в уравнение  $f(z) = 0$ , получаем  $(-1)^n \sin \varepsilon_1(n) + \frac{1}{\pi n + \varepsilon_1(n)} = 0$ , откуда находим  $\varepsilon_1(n) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  и, следовательно, второе приближение для  $z_n$  имеет вид

$$z_n = \pi n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее полагаем  $z = \pi n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + \varepsilon_2(n)$  и из уравнения  $f(z) = 0$  получаем:

$$(-1)^n \sin \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} + \varepsilon_2(n) \right\} = - \frac{1}{\pi n + (-1)^{n-1} \frac{1}{\pi n} + \varepsilon_2(n)}.$$

Заменяя левую и правую части их приближенными выражениями, находим (с учетом того, что  $\varepsilon_2(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ):

$$(-1)^n \varepsilon_2(n) - \frac{1}{\pi n} - \frac{(-1)^n}{3!} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} \right]^3 = -\frac{1}{\pi n} - (-1)^n \frac{1}{\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

откуда  $\varepsilon_2(n) = -\frac{1}{\pi^3 n^3} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{6} \right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ , что дает третье приближение для  $z_n$ :

$$z_n \sim \pi n + \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n} - \frac{1}{\pi^3 n^3} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{6} \right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (13)$$

Наш процесс можно продолжать неограниченно, и так как погрешность приближений является малой высшего порядка относительно последнего сохраняемого члена, мы получаем асимптотическое разложение  $z_n$ .

В заключение отметим, что ряды вида (1) по целым отрицательным степеням аргумента являются простейшим, но не всегда наиболее удобным средством асимптотического приближения. Обобщая понятие асимптотического разложения, мы выбираем вместо  $1/z^n$  для сравнения произвольную последовательность функций  $q_n(z)$ , удовлетворяющую условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)} = 0, \quad (14)$$

а для приближения — произвольную последовательность  $\mu_n(z)$ , такую, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}(z)}{q_n(z)} = 0, \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{\mu_n(z)}{q_n(z)} \right| > 0. \quad (15)$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_n(z)$  мы называем *асимптотическим разложением функции  $f(z)$* ,

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu_n(z), \quad (16)$$

если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n(z)} \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^n c_k \mu_k(z) \right\} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

В качестве примера такого более общего разложения рассмотрим разложение для больших  $x$  решения дифференциального уравнения

$$y'' + \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) y = 0. \quad (18)$$

Чтобы получить представление решения, запишем уравнение в виде

$$y'' + y = a \frac{y}{x^2}$$

и, считая правую часть известной, воспользуемся формулой Коши из курса дифференциальных уравнений:

$$y(x) = A \cos(x - \alpha) + a \int_{x_0}^x \sin(x - t) \frac{y(t)}{t^2} dt. \quad (19)$$

Из этого представления видно, что  $y(x)$  ограничена при  $x \rightarrow \infty$ . В самом деле, обозначим через  $M_1 = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x)|$ ; тогда из (19) получаем:

$$M_1 \leq |A| + |a| M_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{t^2} < |A| + |a| M_1 \frac{1}{x_0},$$

откуда  $M_1 < \frac{|A|}{1 - \frac{|a|}{x_0}}$  и наше утверждение доказано (число  $x_0$  можно считать положительным и сколь угодно большим).

Таким образом, интеграл (19) сходится на бесконечности и, следовательно, в (19) можно принять  $x_0 = \infty$ .

В качестве первого приближения примем

$$y(x) = A \cos(x - \alpha) + o(1);$$

полагая  $y(x) = A \cos(x - \alpha) + \epsilon_1(x)$  и подставляя это в (19), найдем:

$$\begin{aligned} \epsilon_1(x) &= aA \int_{\infty}^x \sin(x - t) \cos(t - \alpha) \frac{dt}{t^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{aA}{2} \int_{\infty}^x \{\sin(x - \alpha) + \\ &+ \sin(x - 2t + \alpha)\} \frac{dt}{t^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{aA}{2x} \sin(x - \alpha) + o\left(\frac{1}{x}\right)^*. \end{aligned}$$

Мы получаем второе приближение:

$$y(x) = A \cos(x - \alpha) - \frac{aA}{2x} \sin(x - \alpha) + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Вводя новую поправку  $\epsilon_2(x)$ , находим из (19):

$$\begin{aligned} \epsilon_2(x) &= \frac{aA}{2} \int_{\infty}^x \sin(x - 2t + \alpha) \frac{dt}{t^2} - \frac{a^2A}{2} \int_{\infty}^x \sin(x - t) \sin(t - \alpha) \frac{dt}{t^3} + \\ &+ o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{aA}{4x^2} \cos(x - \alpha) - \frac{a^2A}{8x^2} \cos(x - \alpha) + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

---

\*) Интеграл  $\int_{\infty}^x \sin(x - 2t + \alpha) \frac{dt}{t^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ , в чем можно убедиться интегрированием по частям.

(первый интеграл мы преобразуем интегрированием по частям, второй — по формуле тригонометрии; остающиеся интегралы входят в величину  $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ). Таким образом, мы получаем третье приближение:

$$y(x) = A \cos(x - \alpha) - \frac{aA}{2x} \sin(x - \alpha) + \frac{aA}{4x^2} \left(1 - \frac{a}{2}\right) \cos(x - \alpha) + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (20)$$

Наши приближения можно уточнять неограниченно. Получаемое разложение является асимптотическим в обобщенном смысле, причем здесь  $\mu_n(x) = \frac{\cos(x - \alpha + n\pi/2)}{x^n}$ ,  $q_n(x) = \frac{1}{x^n}$ .

**77. Метод перевала.** Этот метод применяется для оценки при больших значениях положительного параметра  $\lambda$  контурных интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz, \quad (1)$$

где  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  — функции, аналитические вдоль линии интегрирования  $C$ . Интегралами вида (1) представляются многие специальные функции, решения дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными; такие интегралы встречаются при решении различных задач физики. Этим объясняется важное место, которое занимает метод перевала в приложениях теории функций комплексного переменного.

Мы начнем с изложения частного случая, который восходит еще к Лапласу и относится к действительным интегралам вида

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt. \quad (2)$$

Идея метода Лапласа весьма проста. Предположим, что  $f(t)$  имеет на отрезке  $(a, b)$  один резко выраженный максимум. Чем больше значение параметра  $\lambda$ , тем резче выражается этот максимум, и поэтому ясно, что при больших  $\lambda$  основной вклад в значение интеграла дает окрестность точки максимума.

Используем эту идею при доказательстве леммы, которая лежит в основе метода.

*Лемма. Пусть дан интеграл*

$$F(\lambda) = \int_0^a \varphi(t) e^{-\lambda t^\alpha} dt \quad (0 < a \leq \infty, \alpha > 0), \quad (3)$$

где функция  $\varphi(t)$  при  $|t| < 2h$  представляется сходящимся рядом

$$\varphi(t) = t^\beta (c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + \dots), \quad \beta > -1, \quad (4)$$

причем  $\int_0^a |\varphi(t)| e^{-\lambda_0 t^a} dt \leq M$  для некоторого  $\lambda_0$ . Тогда имеет место асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}, \quad (5)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера.

Для доказательства заметим, что при  $\lambda > \lambda_0$

$$\left| \int_h^a \varphi(t) e^{-\lambda t^a} dt \right| \leq e^{-(\lambda-\lambda_0)h^a} \int_h^a |\varphi(t)| e^{-\lambda_0 t^a} dt = \\ = O(e^{-(\lambda-\lambda_0)h^a}) = O(e^{-\lambda h^a}),$$

поэтому

$$F(\lambda) = \int_0^h \varphi(t) e^{-\lambda t^a} dt + O(e^{-\lambda h^a}).$$

Так как величина  $O(e^{-\lambda h^a})$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  много меньше любой степени  $\lambda^{-n}$  ( $n > 0$ ), то в соответствии с идеей Лапласа на асимптотическое разложение влияет лишь часть  $(0, h)$  отрезка интегрирования, примыкающая к точке максимума. В выделенной части интеграла мы делаем подстановку  $\lambda t^a = \tau$ , а затем, пользуясь тем, что при  $|t| \leq h$  имеем  $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\beta+k} + O(t^{\beta+n})$  и что для любых  $p \geq 0$  и  $c > 0$

$$\int_0^c \tau^{p-1} e^{-\tau} d\tau \leq \int_0^{\infty} \tau^{p-1} e^{-\tau} d\tau = \Gamma(p),$$

находим:

$$\int_0^h \varphi(t) e^{-\lambda t^a} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\lambda h^a} \varphi\left[\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}}\right] \tau^{\frac{1}{a}-1} \lambda^{-\frac{1}{a}} e^{-\tau} d\tau = \\ = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{\lambda^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}}} \int_0^{\lambda h^a} \tau^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}\right). \quad (6)$$

Заметим, наконец, что

$$\int_0^{\lambda h^a} \tau^{p-1} e^{-\tau} d\tau = \Gamma(p) + O\left(e^{-\frac{\lambda}{2} h^a}\right),$$

ибо для любого  $c > 0$ , полагая  $\tau = \sigma + c$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_c^\infty \tau^{p-1} e^{-\tau} d\tau &= e^{-c} \int_0^\infty (\sigma + c)^{p-1} e^{-\sigma} d\sigma < \\ &< e^{-c} \left\{ \int_0^c (2c)^{p-1} e^{-\sigma} d\sigma + \int_0^\infty (2\sigma)^{p-1} e^{-\sigma} d\sigma \right\} = e^{-c} (Ac^p + B) = O\left(e^{-\frac{c}{2}}\right). \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая еще, что  $O(e^{-\lambda \varepsilon}) = O(\lambda^{-n})$  для любых фиксированных  $\varepsilon > 0$  и  $n > 0$ , мы можем переписать (6) в виде

$$\int_0^h \varphi(t) e^{-\lambda t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k \Gamma\left(\frac{\beta+k+1}{\alpha}\right)}{\lambda^{\frac{\beta+k+1}{\alpha}}} + O\left(\lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}\right),$$

а по определению п. 76 это и доказывает справедливость асимптотического разложения (5).

К доказанной лемме сводится оценка интеграла (2). Имеет место

**Теорема 1.** Пусть интеграл (2) абсолютно сходится для некоторого  $\lambda = \lambda_0$ , т. е.

$$\int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt \leq M, \quad (7)$$

и  $f(t)$  достигает своего наибольшего значения во внутренней точке  $t_0$  отрезка  $(a, b)$ , в окрестности  $|t - t_0| < \delta$  которой  $f(t)$  представляется рядом

$$f(t) = f(t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n + \dots \quad (a_2 < 0), \quad (8)$$

причем существует  $h > 0$  такое, что вне этой окрестности  $f(t_0) - f(t) > h$ . Пусть еще функция  $t = \psi(\tau)$  определяется в окрестности точки  $\tau = 0$  из уравнения  $f(t_0) - f(t) = \tau^2$ , причем в этой окрестности

$$\varphi[\psi(\tau)] \psi'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n. \quad (9)$$

Тогда интеграл (2) имеет асимптотическое разложение

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \sim e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{\lambda^n} \frac{(2n)!}{4^n n!}. \quad (10)$$

Заметим прежде всего, что, как и в лемме, асимптотическое разложение  $F(\lambda)$  определяется окрестностью точки макси-



муна  $t_0$ . В самом деле, в соответствии с условиями теоремы

$$\left| \int_a^{t_0-\delta} \varphi(t) e^{-\lambda [f(t_0)-f(t)]} dt \right| = \left| \int_a^{t_0-\delta} \varphi(t) e^{-\lambda_0 [f(t_0)-f(t)]} e^{-(\lambda-\lambda_0) [f(t_0)-f(t)]} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\lambda_0 f(t_0)} e^{-(\lambda-\lambda_0)h} \int_a^b |\varphi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt = O(e^{-\lambda h})$$

и аналогично оценивается интеграл по отрезку  $(t_0 + \delta, b)$ .

В оставшейся окрестности  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  полагаем  $f(t_0) - f(t) = \tau^2$  и на основании (8) находим:  $\tau^2 = -a_2(t - t_0)^2 - a_3(t - t_0)^3 - \dots$ , откуда  $\tau = (t - t_0) \sqrt{-a_2 - a_3(t - t_0) - \dots}$ ; разлагая корень по формуле Тейлора, получаем ряд  $\tau = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(t - t_0)^n$ . В окрестности точки  $\tau = 0$  этот ряд можно обратить (см. п. 70), и мы получим  $t = \psi(\tau) = t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n \tau^n$ .

Пользуясь сказанным, мы делаем замену  $f(t_0) - f(t) = \tau^2$  в интеграле

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \varphi(t) e^{-\lambda [f(t_0)-f(t)]} dt = \int_{-\delta'}^{\delta''} \varphi[\psi(\tau)] \psi'(\tau) e^{-\lambda \tau^2} d\tau,$$

затем замечаем, что с принятой степенью точности можно считать  $\delta' = \delta'' = \delta_1$  \*\*) и, обозначая для простоты письма  $\varphi[\psi(\tau)] \psi'(\tau) = \varphi_1(\tau)$ , получаем:

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \varphi_1(\tau) e^{-\lambda \tau^2} d\tau = \int_{-\delta_1}^0 \varphi_1(\tau) e^{-\lambda \tau^2} d\tau + \int_0^{\delta_1} \varphi_1(\tau) e^{-\lambda \tau^2} d\tau =$$

$$= \int_0^{\delta_1} [\varphi_1(-\tau) + \varphi_1(\tau)] e^{-\lambda \tau^2} d\tau$$

(в первом интеграле мы заменили  $\tau$  на  $-\tau$ ).

\*) Отметим, что  $c'_1 = \frac{1}{\sqrt{-a_2}} = \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}$  и, следовательно, в разложении (9) свободный член  $c_0 = \varphi(t_0)$ ,  $c'_1 = \varphi(t_0) \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}}$ . Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

\*\*) Погрешность включается в член  $O(e^{-\lambda h})$ .

Теперь мы можем применить лемму, в которой для нашего случая  $\beta = 0$  и  $\alpha = 2$ . Так как на основании (9) имеем:

$$\varphi_1(-\tau) + \varphi_1(\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \tau^{2n},$$

то лемма дает

$$\int_a^b \varphi(t) e^{-\lambda[f(t_0)-f(t)]} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Остается воспользоваться тем, что  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$  (эту формулу мы докажем в гл. VII) и тогда получим искомое разложение (10).

Теорема 1 относится к случаю, когда наибольшее значение  $f(t)$  достигается во внутренней точке отрезка  $(a, b)$ . Аналогично доказывается следующая теорема, относящаяся к случаю наибольшего значения на конце.

Теорема 2. Пусть удовлетворяется условие (7) и  $f(t)$  достигает наибольшего значения в точке  $t = a$ , аналитична в этой точке,  $f'(a) \neq 0$  и существует  $h > 0$  такое, что  $f(a) - f(t) > h$  вне некоторой окрестности точки  $a$ . Пусть еще функция  $t = \psi(\tau)$  определяется в окрестности точки  $\tau = 0$  из уравнения  $f(a) - f(t) = \tau$ , причем в этой окрестности имеет место разложение (9). Тогда

$$F(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda f(t)} dt \sim \frac{e^{\lambda f(a)}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{\lambda^n}. \quad (11)$$

В качестве примера применения метода Лапласа рассмотрим вывод асимптотической формулы для гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx.$$

Полагая  $x = \lambda t$ , получаем:

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{\infty} t^{\lambda} e^{-\lambda t} dt = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t-1-\ln t)} dt. \quad (12)$$

К интегралу в последней форме применима теорема 1, в которой  $\varphi(t) \equiv 1$  и  $f(t) = -(t-1-\ln t)$  достигает наибольшего

значения в точке  $t = 1^*$ ). Мы ограничимся первым членом разложения. По формуле в сноске к стр. 475 находим  $c_0 =$   
 $= \varphi(t_0) \sqrt{-\frac{2}{f''(t_0)}} = \sqrt{2}$  и формула (10) дает:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda(t-1-\ln t)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left\{ \sqrt{2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}.$$

Подставляя это в (12), находим искомую оценку (формула Стирлинга):

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\}. \quad (13)$$

При желании можно было бы получить и следующие члены асимптотического разложения:

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda} \left\{ 1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} - \frac{139}{51\,840\lambda^3} + \dots \right\}. \quad (14)$$

Перейдем теперь к изложению собственно метода перевала. Сущность этого метода состоит в том, что при больших значениях параметра  $\lambda$  величина интеграла

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz \quad (1)$$

в основном определяется тем участком пути интегрирования  $C$ , на котором  $|e^{\lambda f(z)}| = e^{\lambda \operatorname{Re} f(z)}$ , т. е.  $\operatorname{Re} f(z)$ , велика по сравнению со значениями на остальной части  $C$ . При этом интеграл оценивается тем легче, чем меньше этот участок и чем круче падает величина  $\operatorname{Re} f(z)$ . В соответствии со сказанным, при применении метода перевала стараются деформировать путь интегрирования  $C$  в наиболее удобный путь  $\tilde{C}$ , пользуясь тем, что по теореме Коши такая деформация не меняет величины интеграла.

Чтобы уяснить вопрос геометрически, положим  $z = x + iy$  и представим

$$u = \operatorname{Re} f(z) \quad (15)$$

как поверхность  $S$  в пространстве  $(x, y, u)$ . Так как функция  $u$  гармоническая, то  $S$  не может иметь точек максимума и ми-

\*) Условие (7) теоремы выполняется при любом  $\lambda_0 > 0$ , ибо интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda_0(t-1-\ln t)} dt = \int_0^{\infty} t^{\lambda_0} e^{-\lambda_0(t-1)} dt \text{ сходится.}$$

нимума, а точки, в которых  $f'(z) = 0$ , будут для нее *точками перевала (седловыми точками)*, рис. 172).

Как мы говорили, наиболее удобный для оценки путь интегрирования  $\tilde{C}$  по крайней мере на участке, имеющем наибольшее значение для оценки интеграла, в каждой точке должен проходить в направлении наиболее быстрого изменения  $\operatorname{Re} f(z)$ , а так как функция  $f(z)$  аналитическая, то это направление

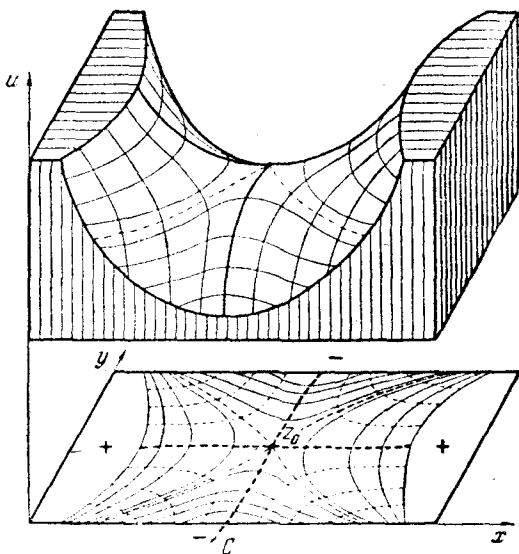


Рис. 172.

должно совпадать с направлением линии  $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$ . Таким образом, путь  $\tilde{C}$ , по крайней мере на участке, наиболее существенном для оценки интеграла, должен совпадать с линией уровня  $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$ .

Далее, путь  $\tilde{C}$  должен содержать точку  $z_0$ , в которой  $\operatorname{Re} f(z)$  достигает наибольшего среди значений этой функции на  $\tilde{C}$ . Покажем, что  $f'(z_0) = 0$ ; иными словами, точка линии  $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$ , в которой  $\operatorname{Re} f(z)$  достигает наибольшего значения, является точкой перевала.

В самом деле, в точке  $z_0$  производная от  $\operatorname{Re} f(z)$  вдоль линии  $\tilde{C}$  должна быть равна нулю:  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} f(z) = 0$ , а так как  $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$  на  $\tilde{C}$ , то  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} f(z) \equiv 0$ , а поэтому  $f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} f(z) + i \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} f(z) = 0$ .

Итак, при применении метода перевала к интегралу (1) путь интегрирования  $C$  следует деформировать в путь  $\tilde{C}$ , проходящий через точку перевала  $z_0$  и в окрестности этой точки идущий вдоль линии наибольшего ската  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}^*)$  (рис. 172).

Замечание 1. Сказанное требует небольшого уточнения. Из свойств гармонических функций (теорема 8 п. 41) вытекает, что окрестность точки перевала  $z_0$  разбивается линией уровня  $\operatorname{Re} f(z)$  на  $2n$  секторов ( $n \geq 2$ ,  $n-1$  — кратность нуля  $f'(z_0)$ ), над которыми поверхность  $S$  находится попеременно, то выше, то ниже своей касательной плоскости в точке  $(x_0, y_0, u_0)$ . Линия уровня  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$  в окрестности  $z_0$  распадается на  $n$  линий, проходящих через  $z_0$  в направлении биссектрис упомянутых выше секторов. Одну из таких линий мы и выбираем в качестве  $\tilde{C}$ .

Замечание 2. Если поверхность  $S$  имеет несколько точек перевала, то обычно следует выбирать в качестве  $\tilde{C}$  путь, проходящий через наиболее крутой из перевалов. Впрочем, вопрос о выборе точки перевала в общем виде решается далеко не просто и его приходится рассматривать отдельно в каждом конкретном случае.

Отметим важное обстоятельство, обеспечивающее эффективность применения метода перевала: так как вдоль линии  $\tilde{C}$  имеем  $\arg e^{f(z)} = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$ , то оценка интеграла (1) сводится к оценке интеграла от действительной функции, которая может быть проведена по методу Лапласа.

Это замечание позволяет нам воспользоваться результатами, содержащимися в теоремах 1 и 2, которые доказаны при изложении метода Лапласа. Как мы уже говорили, функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  предполагаются аналитическими в некоторой области. Рассмотрим сначала случай, когда путь интегрирования  $C$  можно деформировать в путь  $\tilde{C}$ , проходящий через точку перевала  $z_0$ , где  $f'(z_0) = 0$ ,  $f''(z_0) \neq 0$ , и в окрестности  $z_0$  совпадающий с линией наибольшего ската  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$ , причем на  $\tilde{C}$  вне этой окрестности  $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(z_0) - h$  ( $h > 0$ ). Кроме того, предположим, что интеграл (1) абсолютно сходится для достаточно больших значений  $\lambda$ .

В этом случае оценку интеграла можно провести на основании теоремы 1. В самом деле, пусть  $z = z(t)$  будет уравнение контура  $\tilde{C}$ ; имеем, очевидно,

$$F(\lambda) = \int_{\tilde{C}} \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda i \operatorname{Im} f[z(t)]} \int_a^b \varphi[z(t)] e^{\lambda \operatorname{Re} f[z(t)]} z'(t) dt \quad (16)$$

\*) Метод перевала называют также методом наибольшего ската или методом седловых точек.

и задача свелась к оценке интеграла вида (2), разложение которого дается формулой (10).

Выпишем первый член этого разложения. Для этого обозначим  $\varphi[z(t)]z'(t) = \tilde{\varphi}(t)$ ,  $\operatorname{Re} f[z(t)] = \tilde{f}(t)$  и тогда по формуле (10) получим искомый член

$$\int_a^b \tilde{\varphi}(t) e^{\lambda \tilde{f}(t)} dt \sim e^{\lambda \tilde{f}(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \tilde{c}_0, \quad (17)$$

где  $\tilde{c}_0$  — свободный член в разложении функции  $\tilde{\varphi}[\tilde{\psi}(\tau)]\tilde{\psi}'(\tau)$ , который находится по формуле в сноске к стр. 480. Имеем:  $\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(z_0)z'(t_0)$  и, так как  $f[z(t)] = \operatorname{Re} f[z(t)] + i \operatorname{Im} f[z(t)] = \tilde{f}(t) + \text{const}$  вдоль  $\tilde{C}$ , то

$$\tilde{f}''(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} f[z(t)]|_{t=t_0} = f''(z_0) z'^2(t_0)$$

(член  $f'[z(t)]z''(t) = 0$  при  $t = t_0$ ). Так как эта величина отрицательна, то, полагая  $z'(t_0) = ke^{i\vartheta}$ , мы можем записать ее в виде  $\tilde{f}''(t_0) = -|f''(z_0)|k^2$ . Таким образом,

$$\tilde{c}_0 = \tilde{\varphi}(t_0) \sqrt{-\frac{2}{\tilde{f}''(t_0)}} = \varphi(z_0) e^{i\vartheta} \sqrt{\frac{2}{|f''(z_0)|}},$$

и, подставляя найденное значение в (17), а затем в (16), получим искомую формулу

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}} \varphi(z_0) e^{i\vartheta} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (18)$$

Если на контуре  $\tilde{C}$  имеется несколько точек перевала, в которых значения  $\operatorname{Re} f(z)$  находятся вблизи к наибольшему, то следует взять сумму выражений (18) по всем этим точкам.

Случай, когда контур интегрирования заканчивается в точке перевала  $z_0$ , совершенно аналогичным образом приводится к теореме 2.

В качестве примера применения метода перевала найдем асимптотическую формулу для *цилиндрической функции первого рода целого порядка*  $n$

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} e^{\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^{n+1}} \quad (19)$$

(ср. формулу (14) п. 70). Здесь  $\varphi(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$ ,  $f(z) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ ,  $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)$ , следовательно, существует две точки перевала  $z_{1,2} = \pm i$  одинакового уровня  $\operatorname{Re} f(z) = 0$ , и согласно

сделанному выше замечанию нужно рассмотреть обе эти точки.

У нас  $\varphi(\pm i) = \mp i e^{\mp i n \frac{\pi}{2}}$ ,  $f(\pm i) = \pm i$ ,  $|f''(\pm i)| = 1$ . Линия уровня  $u = \operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$ , проходящая через точки перевала, состоит из окружности  $|z| = 1$  и прямой  $x = 0$ , направление же линии наибольшего ската должно быть бисекторным по отношению к этой линии; учитывая еще распределение знаков  $u$ , которое указано на рис. 173, находим  $\vartheta_1 = 3\pi/4$ ,  $\vartheta_2 = \pi/4$ . Таким образом, по формуле (18) мы получаем искомую асимптотическую оценку

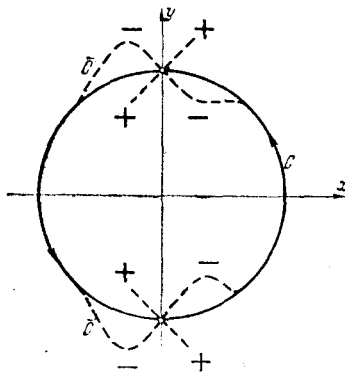


Рис. 173.

$$J_n(\lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left\{ -e^{\left(\lambda - n \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)i} + e^{-\left(\lambda - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)i} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \cos\left(\lambda - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (20)$$

Дальнейшие примеры применения метода перевала будут приведены в гл. VII.

**78. Метод производящих функций.** Идея этого метода состоит в том, что для получения асимптотической оценки какой-либо функции заменяют эту функцию другой (*производящей функцией*), аналитической по некоторому вспомогательному переменному.

Простейший вариант метода принадлежит Дарбу (1878 г.) и позволяет найти асимптотические выражения для больших значений  $n$  функций  $f_n(z)$ , определяемых через производящую функцию  $F(z, w)$  по формуле

$$F(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) w^n \quad (1)$$

(см. примеры 2, 3 и 4 п. 70, а также гл. VII п. 93).

Пусть известны особые точки  $F(z, w)$ , рассматриваемой как функция  $w$ , на окружности круга сходимости ряда (1), за которую мы для простоты примем  $|w| = 1$ . Пусть еще известны функции

$$F_k(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nk}(z) w^n \quad (2)$$

такие, что разность  $F(z, w) - F_k(z, w)$  при приближении к окружности  $|w| = 1$  сходится к  $p$  раз дифференцируемой функции

от  $t = \arg w$ . Тогда коэффициенты  $f_n - f_{nk}$  в разложении

$$F(z, w) - F_k(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n - f_{nk}) e^{int}$$

будут коэффициентами Фурье  $p$  раз непрерывно дифференцируемой функции и, следовательно, по известному свойству коэффициентов Фурье \*) будет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} \{f_n(z) - f_{nk}(z)\} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, функции  $f_{nk}(z)$  дают тем лучшее приближение  $f_n(z)$  для больших  $n$ , чем больше показатель  $p$ .

В качестве примера применения метода Дарбу найдем асимптотическое выражение для многочленов Лежандра  $P_n(z)$  больших порядков  $n$ ; для этих многочленов

$$F(z, w) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zw + w^2}} \quad (4)$$

(см. пример 2 п. 70). Пусть для простоты  $z$  — действительное число и  $-1 < z < 1$ ; положим  $z = \cos t$ ,  $0 < t < \pi$ , тогда  $1 - 2zw + w^2 = (w - e^{it})(w - e^{-it})$ ; следовательно, кругом сходимости ряда Тейлора функции (4) будет круг  $|w| < 1$ , а особыми точками — точки  $w = e^{\pm it}$ . Получим разложение по степеням  $w - e^{\pm it}$  той ветви двузначной функции (4), которая выделяется условием, что

$$\sqrt{w - e^{\pm it}} = e^{\pm it \frac{t+\pi}{2}} \sqrt{1 - we^{\mp it}}, \quad (5)$$

где корень справа означает ветвь, равную 1 при  $w = 0$  (т. е. представляемую биномиальным рядом \*\*). Имеем:

$$\begin{aligned} F(z, w) &= \frac{1}{\sqrt{w - e^{it}}} \{w - e^{it} + (e^{it} - e^{-it})\}^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{w - e^{it}}} \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin t}} \left\{ 1 + \frac{w - e^{it}}{e^{it} - e^{-it}} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin t}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(w - e^{it})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{it} - e^{-it})^n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n}$  — биномиальные коэффициенты.

\*) См. Фиктенгольц, т. III, стр. 606 и след.

\*\*) Из принятого условия следует, что знаменатель в выражении (4) равен 1 при  $w = 0$ .



Аналогично

$$F(z, w) = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2 \sin t}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(w - e^{-it})^{n-\frac{1}{2}}}{(e^{-it} - e^{it})^n}. \quad (7)$$

Положим:

$$F_k(z, w) = \frac{1}{\sqrt{2 \sin t}} \sum_{v=0}^k c_n \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4}} \frac{(w - e^{it})^{v-\frac{1}{2}}}{(e^{it} - e^{-it})^v} + e^{-\frac{3\pi i}{4}} \frac{(w - e^{-it})^{v-\frac{1}{2}}}{(e^{-it} - e^{it})^v} \right\}, \quad (8)$$

тогда разность  $F(z, w) - F_k(z, w)$  на окружности  $|w| = 1$  будет  $k$  раз непрерывно дифференцируемой функцией. В самом деле, это очевидно для точек  $w \neq e^{\pm it}$ , а для  $w = e^{it}$ , например, следует из того, что разложение разности по степеням  $(w - e^{it})$  начинается  $(w - e^{it})^{k+\frac{1}{2}}$  (это видно из разложений (6) и (7)).

Для того чтобы найти коэффициенты разложения (8) в ряд по степеням  $w$ , заменим  $(w - e^{\pm it})^{v-\frac{1}{2}}$  с помощью формулы (5). Тогда общий член ряда (8) переписется в виде

$$c_v \left\{ e^{\frac{3\pi i}{4} - \frac{t+\pi}{2}} i + v(t+\pi) i \frac{(1 - we^{-it})^{v-\frac{1}{2}}}{(e^{it} - e^{-it})^v} + e^{-\frac{3\pi i}{4} + \frac{t+\pi}{2}} i - v(t+\pi) i \frac{(1 - we^{it})^{v-\frac{1}{2}}}{(e^{-it} - e^{it})^v} \right\};$$

разлагая  $(1 - w e^{\pm it})^{v-\frac{1}{2}}$  в ряд по формуле бинома

$$(1 - we^{\pm it})^{v-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{vn} e^{\pm itn} w^n,$$

после элементарных преобразований получаем коэффициент при  $w^n$  в разложении (8)

$$f_{nk}(z) = \sqrt{\frac{2}{\sin t}} \sum_{v=0}^k c_v c_{vn} \frac{(-1)^n}{(2 \sin t)^v} \cos \left\{ \frac{\pi}{4} (1 + 2v) + \left( v - n - \frac{1}{2} \right) t \right\}, \quad (9)$$

который и дает асимптотическое выражение  $P_n(z)$  для больших  $n$ . Ограничиваясь первым членом, находим искомое асимптотическое выражение

$$P_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\sin t}} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cos \left\{ \frac{\pi}{4} - \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right\}. \quad (10)$$

Способ построения производящей функции по формуле (1) — далеко не единственный. Для функций не целочисленного, а непрерывно меняющегося переменного часто применяют, напри-

мер, метод *интегральных преобразований*, который состоит в замене функции  $f(t)$  функцией  $F(p)$  (производящей функцией), определяемой по формуле

$$F(p) = \int_C K(t, p) f(t) dt, \quad (11)$$

где  $K(t, p)$  — заданная функция (ядро интегрального преобразования). Наиболее часто применяются преобразования с ядрами  $K(t, p) = e^{-pt}$  (преобразование Лапласа),  $K(t, p) = t^{p-1}$  (преобразование Меллина) и др. Первому из них посвящена следующая глава (см. особенно п. 88).

В этой главе будет показано, что в случае преобразования Лапласа функция  $f(t)$  определяется через свою производящую функцию  $F(p)$  по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (11')$$

где  $F(p)$  — функция комплексного переменного  $p = s + i\sigma$ , аналитическая в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \lambda \geq 0$ , интеграл берется по вертикальной прямой  $\Pi$ :  $\operatorname{Re} p = \lambda$  и  $t$  — положительный параметр. В заключение этой главы укажем способ отыскания асимптотического выражения для таких интегралов.

Обозначим через  $L$  кривую, состоящую из двубережного разреза вдоль отрицательной оси  $s$  и малой окружности, обходящей точку  $p = 0$ . Через  $\Pi_R$  и  $L_R$  мы обозначим участки кривых  $\Pi$  и  $L$ , для которых соответственно  $|p| < R$ ,  $\operatorname{Re} p > -R$ , а через  $C_R$  — дуги окружностей  $|p| = R$ ,  $\operatorname{Re} p < \lambda$  (рис. 174). Мы предполагаем, кроме того, что:

1) функция  $F(p)$  допускает выделение однозначной ветви в плоскости  $p$  с вырезанной отрицательной полуосью;

2) выделенная ветвь имеет конечное число особых точек и на дугах окружностей  $C_R$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg p$ ;

3) интеграл по  $F(p)e^{pt}$  вдоль  $L$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

В этих условиях для больших  $t$

$$f(t) \approx \sum \operatorname{res} \{F(p_k) e^{p_k t}\}, \quad (12)$$

где сумма берется по всем особым точкам  $F(p)$  с неотрицательной действительной частью.

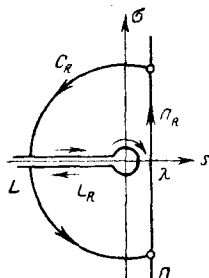


Рис. 174.

Действительно, на основании теоремы о вычетах имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi_R + C_R + L_R} F(p) e^{pt} dp = S(t), \quad (13)$$

где  $S(t)$  — полная сумма вычетов функции  $F(p)e^{pt}$  (мы считаем  $R$  столь большим, что контур рис. 162 охватывает все особые точки). По лемме Жордана п. 73 из условия 2) следует, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл вдоль  $C_R$  стремится к нулю (см. замечание после доказательства этой леммы); следовательно, равенство (13) в пределе принимает вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} F(p) e^{pt} dp = S(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_L F(p) e^{pt} dp. \quad (14)$$

Но при больших  $t$  члены суммы  $S(t)$ , относящиеся к особым точкам  $F(p)$  с отрицательной действительной частью, весьма малы в силу малости множителя  $|e^{pt}|$ , интеграл вдоль  $L$  по условию также мал. Отсюда и следует (12).

В качестве примера найдем асимптотическое выражение интеграла

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{pe^{pt - \frac{x}{v}\sqrt{p^2 + 2ap}}}{(p - i\omega)\sqrt{p^2 + 2ap}} dp, \quad (15)$$

где  $a, v$  и  $\omega$  — положительные постоянные (этот интеграл встречается в задаче включения длинной линии без утечки на э. д. с.  $e^{i\omega t}$ ; его асимптотическое выражение дает установившийся режим в линии — см. п. 87 следующей главы). Здесь условия 1) и 2) выполняются при  $x > 0$ , если под  $\sqrt{p^2 + 2ap}$  понимать однозначную в плоскости с вырезанной отрицательной полуосью  $s$  ветвь, которая при положительных  $p$  принимает положительные значения. Чтобы доказать выполнимость условия 3), положим  $pt = q$ , отчего контур  $L$  перейдет в контур  $L^*$  такого же вида, и мы будем иметь:

$$\int_L = \int_{L^*} \frac{qe^{q - \frac{x}{vt}\sqrt{q^2 + 2aqt}}}{(q - i\omega t)\sqrt{q^2 + 2aqt}} dq,$$

откуда непосредственно видно, что этот интеграл стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, описанный метод применим, и асимптотическое выражение интеграла (15) дает вычет подынтегральной функции в полюсе  $p = i\omega$ :

$$f(x, t) \approx \frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega - \omega^2}} e^{i\omega t - \frac{x}{v}\sqrt{2ai\omega - \omega^2}}. \quad (16)$$

## Литература к главе V

- [1] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
- [2] А. Гурвиц и Р. Курант, Теория функций, «Наука», 1968.
- [3] Унттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. I, Физматгиз, 1963.
- [4] Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Труды Матем. института им. В. А. Стеклова, XXVI, 1949.
- [5] Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.
- [6] Цянь Сюэ-сэнь, Техническая кибернетика, Иноиздат, 1956.
- [7] М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962.
- [8] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
- [9] Янке и Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.
- [10] Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, «Наука», 1969.
- [11] Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
- [12] Н. Г. де Брёйи, Асимптотические методы в анализе, Иноиздат, 1961.
- [13] А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.
- [14] Э. Копсон, Асимптотические разложения, «Мир», 1966.

## Операционный метод и его приложения

В прошлом столетии многие математики (в том числе у нас в России, например, Ващенко-Захарченко и Летников\*) занимались так называемым символическим исчислением. В основе этого исчисления лежит построение математического анализа как системы формальных операций над символом  $p = \frac{d}{dt}$  ( $t$  — независимая переменная). Например,  $n$ -я производная функции  $x = x(t)$  представляется как результат действия на  $x$  символа  $p^n = \frac{d^n}{dt^n}$ , левая часть линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами  $L[x] = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x$  — как результат действия на  $x$  символа  $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ , операция интегрирования  $\int_0^t x(t) dt$  рассматривается как применение символа  $\frac{1}{p}$ ,

так что  $\frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t dt = t$ ,  $\frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{t^2}{2}$ , ...,  $\frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$  и т. д.

Символическое исчисление оказалось довольно удобным для решения различных задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями. Его популяризации уже в нашем веке в сильной мере способствовал английский инженер-электрик О. Хевисайд, который успешно использовал символическое исчисление в электротехнических расчетах.

Для иллюстрации метода Хевисайда приведем решение простого дифференциального уравнения

$$x' - x = 1$$

---

\*) См. М. Ващенко-Захарченко, Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений, Киев, 1862. А. В. Летников, Теория дифференцирования с произвольным указателем, Москва, 1868.

при начальном условии  $x(0) = 0$ . Заменяя дифференцирование умножением на  $p$ , получим вместо дифференциального уравнения уравнение  $px - x = 1$ , откуда  $x = \frac{1}{p-1}$  и после формальных преобразований получаем:

$$x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} + \dots \right).$$

Учитывая сказанное выше относительно символов  $\frac{1}{p}$  и  $\frac{1}{p^n}$ , находим окончательно:

$$x = \int_0^t \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) dt = \int_0^t e^t dt = e^t - 1.$$

В правильности полученного решения можно убедиться непосредственной проверкой.

Однако Хевисайд несколько не заботился об обосновании применяемых им методов и в ряде случаев приходил к неверным результатам. Обоснование символического или, как его стали теперь называть, операционного метода было дано лишь в двадцатых годах нашего столетия Бромвичем и Карсоном, связавшими этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований, которым с успехом пользовались Коши, Лаплас и другие математики. При этом символ (оператор)  $p$  получил новое толкование, как комплексное переменное  $p = s + i\sigma$ , а вместе с ним новую трактовку получил и сам операционный метод \*).

Пусть, например, требуется найти функцию  $x(t)$  действительного переменного  $t$  из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаками производных и интегралов. Операционный метод решения задачи сводится к следующим этапам: 1) от искомой функции  $x(t)$  переходят к функции  $X(p)$  комплексного переменного  $p$  — «изображению»  $x(t)$ ; 2) над изображением  $X(p)$  производят операции, соответствующие заданным операциям над  $x(t)$ , — получают «операторное уравнение» относительно  $X(p)$ . При этом операции над изображением оказываются значительно более простыми, например: дифференцированию соответствует умножение на переменное  $p$ , интегрированию — деление на  $p$  и т. д.; 3) полученное операторное

\*) Операционный метод получил также иное строгое обоснование с помощью общей теории операторов, развитой в функциональном анализе — см., например, работу В. А. Диткина и А. П. Прудникова [11]. В последнее время весьма оригинальную и простую трактовку операционного метода дал польский математик Ян Микусинский [12].

уравнение решают относительно  $X(p)$ , что обычно сводится к простым алгебраическим действиям; 4) от найденного изображения  $X(p)$  переходят к оригиналу  $x(t)$ , который и является искомой функцией.

Применение операционного метода можно сравнить с логарифмированием, когда: 1) от чисел переходят к логарифмам, 2) над логарифмами производят действия, соответствующие действиям над числами, причем умножению чисел соответствует более простая операция сложения логарифмов и т. д., 3) от найденного логарифма снова возвращаются к числу.

В этой главе излагаются основные положения операционного метода и иллюстрируются его применения к различным задачам анализа и математической физики.

## § 1. Основные понятия и методы

**79. Преобразование Лапласа \*).** *Функцией-оригиналом* мы будем называть любую комплексную функцию  $f(t)$  действительного аргумента  $t$ , удовлетворяющую следующим условиям:

1°. Функция  $f(t)$  удовлетворяет условию Гёльдера всюду на оси  $t$ , кроме отдельных точек, где она имеет разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале таких точек конечное число. Это означает, что для каждого  $t$  (кроме указанных исключительных точек) существуют положительные постоянные  $A$ ,  $\alpha \leq 1$  и  $h_0$  такие, что

$$|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha \quad (1)$$

для всех  $h$ ,  $|h| \leq h_0$ .

2°.  $f(t) = 0$  для всех отрицательных  $t$ .

3°.  $f(t)$  возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные  $M > 0$ ,  $s_0 \geq 0$ , что для всех  $t$

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}. \quad (2)$$

Число  $s_0$  назовем *показателем роста*  $f(t)$ ; для ограниченных оригиналов можно, очевидно, принять \*\*)  $s_0 = 0$ .

С точки зрения физических приложений условия 1° и 3° не нуждаются в пояснениях — они, очевидно, выполняются для большинства функций  $f(t)$ , описывающих физические процессы ( $t$  интерпретируется как время). Условие 2° на первый взгляд кажется искусственным. Однако следует иметь в виду, что операционный метод приспособлен к задачам, приводящим к ре-

\*) Пьер Симон Лаплас (1749—1827) — французский математик, астроном и физик.

\*\*) Если стремиться к более точным оценкам, то в качестве показателя роста лучше принять нижнюю грань таких чисел  $s$ , что  $|f(t)|e^{-st}$  остается ограниченным при  $t \rightarrow \infty$ .

шению дифференциальных уравнений с данными начальными условиями. В таких задачах вся информация о ходе процесса до момента начала наблюдения, за который, конечно, можно принять момент  $t = 0$ , содержится в начальных условиях. Таким образом, и условие 2° физически вполне естественно.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая *единичная функция*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, умножение функции  $\varphi(t)$  на  $\eta(t)$  «гасит» эту функцию для  $t < 0$  и оставляет без изменения для  $t > 0$ : если функция  $\varphi(t)$  удовлетворяет условиям 1° и 3° и не удовлетворяет 2°, то произведение

$$f(t) = \eta(t) \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

будет удовлетворять и условию 2°, т. е. будет оригиналом (например,  $\eta(t) \sin \omega t$ ,  $\eta(t) t^n$ ,  $\eta(t) e^{\lambda t}$ , и т. д.). Для простоты записи мы будем, как правило, опускать множитель  $\eta(t)$ , условившись раз навсегда, что все функции, которые мы будем рассматривать, равны нулю для отрицательных  $t$  (например, вместо  $\eta(t)$  будем писать 1, вместо  $\eta(t) \sin \omega t$  — просто  $\sin \omega t$  и т. д.).

*Изображением функции  $f(t)$  (по Лапласу)* называют функцию комплексного переменного  $p = s + i\sigma$ , определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (3)$$

где интеграл берется по положительной полуоси. Фразу: «функция  $f(t)$  имеет своим изображением  $F(p)$ » мы будем записывать символом \*)

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \doteq f(t).$$

Заметим, что метод Хевисайда, как это стало ясно после работ Карсона, заключается в переходе от функции  $f(t)$  к функции

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Таким образом, изображение по Хевисайду отличается от изображения по Лапласу множителем  $p$ .

\*) Употребляются также символы  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ,  $\parallel$  и другие.



Наличие дополнительного множителя  $p$  приближает метод Хевисайда к другому символическому методу, применяемому в электротехнике, однако оно вносит неоправданные усложнения в некоторые выкладки. Кроме того, преобразование Лапласа более естественно связывается с известным интегралом Фурье, который также широко применяется в математической физике (см. п. 88) \*). Исходя из этих соображений, мы будем всюду рассматривать преобразование Лапласа, а не преобразование Хевисайда.

**Теорема 1.** Для всякого оригинала  $f(t)$  изображение  $F(p)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ , где  $s_0$  — показатель роста  $f(t)$ , и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

В самом деле, при  $\operatorname{Re} p = s > s_0$  интеграл (3) абсолютно сходится, ибо в силу неравенств (1) он мажорируется сходящимся интегралом

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} M e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}. \quad (4)$$

Далее, в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$  интеграл, получающийся из интеграла (3) дифференцированием по  $p$ , сходится равномерно, ибо он также мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от  $p$ ,

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) t e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} M t e^{-(s_1-s_0)t} dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}. \quad (5)$$

Отсюда на основании теоремы 4 п. 16 мы заключаем, что функция  $F(p)$  в любой точке полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$  обладает производной. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Интеграл Лапласа (3), вообще говоря, определяет изображение  $F(p)$  лишь в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Между тем, как мы увидим ниже, в большинстве практических задач область определения изображения значительно шире этой полуплоскости. Поэтому часто мы будем рассматривать аналитическое продолжение изображений за прямую  $\operatorname{Re} p = s_0$  и будем пользоваться тем, что соотношения между различными изображениями, которые, как правило, устанавливаются в полуплоскостях сходимости соответствующих интегралов Лапласа, при таком продолжении сохраняются (ср. п. 25).

\*) Наконец, как увидит читатель из дальнейшего изложения, свойства преобразования Лапласа более симметричны: каждому свойству оригиналов соответствует аналогичное («двойственное») свойство изображений — см. свойства III и IV, V и VI, VII, VIII, IX и X.

**Замечание 2.** Если точка  $p$  стремится к бесконечности так, что  $\operatorname{Re} p = s$  неограниченно возрастает, то  $F(p)$  стремится к нулю:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(p) = 0. \quad (6)$$

Это утверждение непосредственно вытекает из неравенства (4).

Отсюда следует, что  $F(p) \rightarrow 0$ , если  $p \rightarrow \infty$ , оставаясь внутри любого угла  $-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg p < \frac{\pi}{2} - \delta$ , где  $\delta > 0$  сколь угодно мало, причем эта сходимость равномерна относительно  $\arg p$ . Если, в частности,  $F(p)$  аналитична в бесконечно удаленной точке, то  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  по любому пути; следовательно,  $F(p)$  просто должна иметь нуль в бесконечности.

Свойства преобразования Лапласа мы выясним в следующих пунктах, а сейчас остановимся на выводе формулы, определяющей функцию-оригинал по ее изображению (четвертый этап операционного метода см. стр. 489). Мы дадим прежде нестрогий, но зато конструктивный вывод этой формулы, а затем приведем строгое доказательство.

Рассмотрим интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad (7)$$

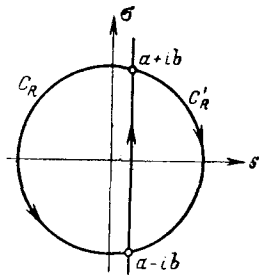


Рис. 175.

взятый вдоль прямой  $\operatorname{Re} p = a > 0$ , проходящей снизу вверх. Обозначим еще через  $C_R$  и  $C'_R$  части окружности  $|p| = R$ , лежащие соответственно слева и справа от прямой  $\operatorname{Re} p = a$ , а через  $a - ib$  и  $a + ib$  — концы  $C_R$  и  $C'_R$  (рис. 175).

Пусть  $t > 0$ ; так как  $\frac{1}{p} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg p$ , то по лемме Жордана п. 73 (формула (4)) имеем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0.$$

Следовательно, из теоремы Коши о вычетах, согласно которой

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{res} \frac{e^{pt}}{p} \Big|_{p=0} = 2\pi i,$$

в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получим:

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1 \quad (t > 0).$$

Если  $t < 0$ , то по той же лемме Жордана (формула (5) п. 73) имеем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R'} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

а по теореме Коши

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C_R'} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

откуда в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получим:

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \quad (t < 0).$$

Таким образом, интеграл (7) представляет единичную функцию.

Ясно, что если заменить в (7)  $t$  на  $t - \tau$ , где  $\tau$  — фиксированное число, то мы получим функцию

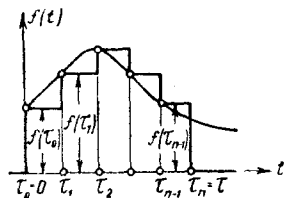


Рис. 176.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t > \tau. \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя в (8)  $\tau = \tau_1$ , а затем  $\tau = \tau_2 > \tau_1$  и вычитая второй интеграл из первого, мы получаем представление ступенчатой функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} dp = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t > \tau_2. \end{cases}$$

Точно таким же образом можно представить интегралом ступенчатую функцию, график которой изображен на рис. 176,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} dp = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta' \tau_k \right\} dp, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\Delta' \tau_k = \frac{1 - e^{-p \Delta \tau_k}}{p} = \Delta \tau_k - \frac{(\Delta \tau_k)^2}{2!} p + \frac{(\Delta \tau_k)^3}{3!} p^2 - \dots$$

( $\Delta \tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ ). Если теперь увеличивать число  $n$  так, чтобы  $\Delta \tau_k$  стремился к нулю, то  $\Delta' \tau_k$  будет бесконечно малой величиной, эквивалентной  $\Delta \tau_k$ , и сумма в фигурных скобках в формуле (9), мало отличающаяся от интегральной, в пределе перейдет в интеграл. Естественно ожидать, что в пределе мы получим интегральное представление функции  $f(t)$  на интервале  $(0, \tau)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_0^{\tau} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right\} dp.$$

Устремляя  $\tau$  к  $\infty$  и обозначая через

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (10)$$

преобразование Лапласа функции  $f(t)$ , мы получим в пределе искомое выражение оригинала через его изображение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (11)$$

Формула (11) «обращает» формулу (10), т. е. выражает функцию  $f(t)$  через ее изображение  $F(p)$ . Точно так же и (10) можно считать обращением (11), поэтому формулы (10) и (11) называются *формулами обращения* (Лапласа).

Приведем теперь точный результат.

**Теорема 2.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, т. е. удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°, и  $F(p)$  служит ее изображением, то в любой точке  $t$ , где  $f(t)$  удовлетворяет условию Гёльдера, справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (11)$$

где интеграл берется вдоль любой прямой  $\operatorname{Re} p = a > s_0$  и понимается в смысле главного значения\*).

\*) То есть как предел интеграла вдоль отрезка  $(a - ib, a + ib)$  при  $b \rightarrow \infty$ .

В самом деле, рассмотрим интеграл

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} \left\{ \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right\} dp$$

(см. формулу (10)). Так как в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a$  интеграл  $\int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$  сходится равномерно относительно  $p$  (см. доказательство теоремы 1), то можно изменить порядок интегрирования\*), и мы получим:

$$\begin{aligned} f_b(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)} dp = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\tau) e^{a(t-\tau)} \frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} e^{at} \int_{-t}^\infty f(\xi+t) e^{-a(\xi+t)} \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

(мы заменили  $\tau - t = \xi$ ). Полагая  $g(t) = f(t)e^{-at}$  и учитывая, что  $g(t) = 0$  для всех  $t \leq 0$ , мы получаем

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi} e^{at} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\xi+t) - g(t)}{\xi} \sin b\xi d\xi + \frac{1}{\pi} f(t) \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi. \quad (12)$$

Интеграл во втором слагаемом — это интеграл Эйлера (см. пример 2 п. 73), он равен  $\pi$  при любом  $b > 0$ , и, значит, второе слагаемое равно  $f(t)$ . Для доказательства нужного нам соотношения  $\lim_{b \rightarrow \infty} f_b(t) = f(t)$  остается, следовательно, доказать, что первое слагаемое в (12) стремится к 0 при  $b \rightarrow \infty$ . Для этого нам понадобится

**Лемма.** Для любой функции  $\varphi(\xi)$ , интегрируемой на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta \varphi(\xi) \sin b\xi d\xi = 0.$$

Действительно, если  $\varphi(\xi)$  непрерывно дифференцируема на  $[\alpha, \beta]$ , то все доказывается интегрированием по частям:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\xi) \sin b\xi d\xi = -\varphi(\xi) \frac{\cos b\xi}{b} \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \varphi'(\xi) \frac{\cos b\xi}{b} d\xi \rightarrow 0$$

\*) Это непосредственно вытекает из известной теоремы анализа, см., например, Фихтенгольц, т. II, стр. 733.

при  $b \rightarrow \infty$ . Если же  $\varphi(\xi)$  — произвольная интегрируемая функция, то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi_\varepsilon(\xi)$  такая, что

$$\int_a^b |\varphi(\xi) - \varphi_\varepsilon(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$\int_a^b \varphi(\xi) \sin b\xi d\xi = \int_a^b \{\varphi(\xi) - \varphi_\varepsilon(\xi)\} \sin b\xi d\xi + \int_a^b \varphi_\varepsilon(\xi) \sin b\xi d\xi,$$

где первое слагаемое справа по модулю не превосходит  $\varepsilon/2$  для всех  $b$  (ибо  $|\sin b\xi| \leq 1$ ), а второе — для достаточно больших  $b$  (по только что доказанному). Лемма доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы, фиксируем  $\varepsilon > 0$  и разобьем интеграл в первом слагаемом формулы (12) на три:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi+t) - g(t)}{\xi} \sin b\xi d\xi &= \int_{-B}^B \frac{g(\xi+t) - g(t)}{\xi} \sin b\xi d\xi + \\ &+ \int_{|\xi| > B} \frac{g(\xi+t)}{\xi} \sin b\xi d\xi - g(t) \int_{|\xi| > B} \frac{\sin b\xi}{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Здесь второе и третье слагаемые — сходящиеся интегралы, поэтому каждый из них можно сделать по модулю меньшим  $\varepsilon/3$ , если выбрать число  $B$  достаточно большим. Множитель при  $\sin b\xi$  в первом слагаемом — интегрируемая на отрезке  $[-B, B]$  функция, ибо в силу условия Гёльдера в окрестности  $\xi = 0$  мы имеем  $\left| \frac{g(\xi+t) - g(t)}{\xi} \right| \leq \frac{A}{|\xi|^{1-\alpha}}$ , где  $\alpha > 0$ . Поэтому в силу леммы первое слагаемое по модулю будет меньше  $\varepsilon/3$  при всех достаточно больших  $b$ . Таким образом,

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi+t) - g(t)}{\xi} \sin b\xi d\xi = 0,$$

и теорема доказана полностью.

Непосредственно из доказанной теоремы следует

**Теорема 3.** *Оригинал  $f(t)$  вполне определяется своим изображением  $F(p)$  с точностью до значений в точках разрыва  $f(t)$ .*

В самом деле, по доказанному значение оригинала в точке его непрерывности выражается через изображение  $F(p)$  по формуле (11). Значения оригинала в точках разрыва, очевидно, не влияют на изображение.

Приведем еще условия, достаточные для того, чтобы заданная функция комплексного переменного  $F(p)$  служила изображением некоторого оригинала:

**Теорема 4.** Если функция  $F(p)$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ , стремится к нулю при  $|p| \rightarrow \infty$  в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$  равномерно относительно  $\arg p$  и интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$$

абсолютно сходится, то  $F(p)$  является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (11)$$

Действительно, фиксируем некоторое число  $p_0$ ,  $\operatorname{Re} p_0 > a$ , тогда из (11) следует:

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-p_0 t} \left\{ \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right\} dt. \quad (13)$$

Так как во внутреннем интеграле  $p = a + i\sigma$ ,  $dp = i d\sigma$ , то можно вынести за его знак множитель  $e^{at}$  и оставшийся интеграл

$$\left| \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{i\sigma t} F(p) dp \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(a + i\sigma)| d\sigma.$$

Отсюда видно, что этот интеграл сходится равномерно относительно  $t$ , и, следовательно, в формуле (13) можно поменять порядок интегрирования. Мы получим:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp \int_0^\infty e^{(p-p_0)t} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{p-p_0} dp, \end{aligned} \quad (14)$$

ибо в силу того, что  $\operatorname{Re}(p-p_0) < 0$  и  $t > 0$ , внутренний интеграл сходится и равен  $-\frac{1}{p-p_0}$ . Далее, в силу условий теоремы на дуге окружности  $C_R$ :  $|p| = R$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , имеем

$\max |F(p)| = a_R \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , следовательно,

$$\left| \int_{C'_R} \frac{F(p)}{p-p_0} dp \right| \leq \frac{a_R}{R-|p_0|} \pi R$$

и этот интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что прямую интегрирования в (14) можно заменить замкнутым контуром  $\tilde{C}_R$ , составленным из  $C_R$  и отрезка  $(a+ib, a-ib)$ , проходимого сверху вниз:

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_R} \frac{F(p)}{p-p_0} dp$$

(мы освобождаемся от знака «—» в формуле (14), меняя направление обхода прямой). Но внутри контура  $\tilde{C}_R$  аналитическая функция  $\frac{F(p)}{p-p_0}$  имеет лишь одну особую точку  $p = p_0$  — полюс первого порядка с вычетом  $F(p_0)$ ; следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t) dt = F(p_0),$$

что и требовалось доказать.

Заметим теперь, что при  $t < 0$  по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} e^{p t} F(p) dp = 0;$$

следовательно, прямую интегрирования в формуле (11) можно заменить тем же контуром  $\tilde{C}_R$ , что и выше. Мы получим при  $t < 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_R} e^{p t} F(p) dp = 0,$$

ибо подынтегральная функция аналитична внутри  $\tilde{C}_R$ , так что условие 2° для оригинала выполняется. Далее, из (11)

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{at} \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)| d\sigma = M e^{at},$$

так что и условие 3° также выполняется. На проверке условия 1° мы не будем останавливаться.



**80. Свойства преобразования Лапласа.** Мы приведем здесь ряд простых предложений, составляющих аппарат операционного метода. Прежде всего отметим два простых примера преобразования Лапласа \*)

$$1 \doteq \frac{1}{p}, \quad e^{p_0 t} \doteq \frac{1}{p - p_0}, \quad (1)$$

которые получаются непосредственно из его определения (формула (2) предыдущего пункта).

Далее мы всюду будем обозначать через  $f(t)$ ,  $g(t)$ , ... оригиналы и через  $F(p)$ ,  $G(p)$ , ... — их изображения:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad G(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt, \dots$$

Непосредственно из свойств интегралов получаем:

**I. Свойство линейности.** Для любых (комплексных) постоянных  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p). \quad (2)$$

На основании этого свойства, например, сразу получаем из формул (1) соотношения

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Аналогично,

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{sh } \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \text{ch } \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (4)$$

**II. Теорема подобия.** Для любого постоянного  $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (5)$$

В самом деле, полагая  $\alpha t = \tau$ , имеем:

$$f(\alpha t) \doteq \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

**III. Дифференцирование оригинала.** Если функция  $f(t)$  непрерывна при  $t > 0$  и  $f'(t)$  или вообще  $f^{(n)}(t)$  является оригиналом, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad (6)$$

или

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (7)$$

где под  $f^{(k)}(0)$  понимается правое предельное значение  $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ .

\*) Здесь  $1$  и  $e^{p_0 t}$  по вашему условию обозначают соответственно  $\eta(t)$  и  $e^{p_0 t} \eta(t)$ .

В самом деле, переходя к изображениям и интегрируя по частям, получаем:

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = [f(t) e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

В силу того, что  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , имеем  $|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(s-s_0)t}$  и подстановка  $t = \infty$  в первый член дает нуль, подстановка же  $t = 0$  дает, очевидно,  $-f(0)$ ; второй член равен  $pF(p)$ , и формула (6) доказана. Применив формулу (6) дважды, получим:

$$f''(t) = [f'(t)]' \doteq p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

и т. д.

В частности, если  $f(0) = 0$ , то

$$f'(t) \doteq pF(p), \quad (8)$$

и дифференцирование оригинала сводится к умножению на  $p$  его изображения (ср. введение к этой главе).

Двойственным \*\*) к свойству III является свойство

IV. Дифференцирование изображения. Дифференцирование изображения сводится к умножению на  $-t$  оригинала, или вообще

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (9)$$

В самом деле, так как  $F(p)$  является в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$  аналитической функцией, то ее можно дифференцировать \*\*\*) по  $p$ , и мы получим:

$$\left. \begin{aligned} F'(p) &= - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt, \\ F''(p) &= \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt, \dots, F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

что равносильно формуле (9).

В качестве примера применения свойства IV отметим, что из соотношений (1) вытекает:

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}, \quad (11)$$

\*) Очевидно, под  $f(0)$  следует понимать правое предельное значение, левое всегда равно нулю.

\*\*) См. примечание к стр. 496.

\*\*\*) Возможность дифференцирования под знаком интеграла вытекает из того, что все интегралы (10) сходятся равномерно относительно  $p$  в любой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ ; можно также использовать теорему Вейерштрасса п. 16.

а из формул (3), (4):

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}. \quad (12)$$

V. Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на  $p$

$$\int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p} \quad (13)$$

(ср. введение к этой главе).

Прежде всего, легко проверить, что функция  $g(t) = \int_0^t f(t) dt$  вместе с  $f(t)$  является оригиналом, т. е. удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3° п. 79. Тогда в силу формулы (8) (она применима, ибо  $g(0) = 0$ ) имеем:

$$f(t) = g'(t) \doteq pG(p).$$

Таким образом, для изображения  $f(t)$  имеем  $F(p) = pG(p)$ , откуда

$$G(p) = \frac{F(p)}{p},$$

что и требуется.

Двойственным к свойству V является свойство

VI. Интегрирование изображения. Если интеграл  $\int_p^\infty F(p) dp$  сходится, то он служит изображением функции  $f(t)/t$ :

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp, \quad (14)$$

(интегрирование изображения равносильно делению на  $t$  оригинала).

В самом деле, имеем:

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_p^\infty dp \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt.$$

Предполагая, что путь интегрирования  $(p, \infty)$  весь лежит в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ , получим оценку внутреннего интеграла

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-(a-s_0)t} dt,$$

из которой ясна его равномерная сходимость относительно  $p$ . Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_0^\infty f(t) dt \int_p^\infty e^{-pt} dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt.$$

Полученное равенство равносильно формуле (14) \*).

Пример 1. Имеем (см. (1)):

$$e^{bt} - e^{at} = \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}.$$

Пользуясь свойством VI, получаем:

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} = \int_p^\infty \left( \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a} \right) dp = \ln \frac{p-a}{p-b}. \quad (15)$$

Пример 2. Из формулы (3), применяя свойство VI, найдем:

$$\frac{\sin t}{t} = \int_p^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arccotg} p.$$

Применяя свойство V, найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\operatorname{arccotg} p}{p}. \quad (16)$$

VII. Теорема запаздывания. Для любого положительного  $\tau$

$$f(t-\tau) = e^{-p\tau} F(p) \quad (17)$$

(включение оригинала с запаздыванием на  $\tau$  (рис. 177) равносильно умножению изображения на  $e^{-p\tau}$ ).

Так как  $f(t-\tau) = 0$  при  $t < \tau$ , то, делая замену переменных  $t-\tau = t_1$ , получим:

$$f(t-\tau) = \int_\tau^\infty f(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = e^{-p\tau} F(p),$$

что и требовалось доказать.

\*) Заметим, что из нашего рассуждения следует сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt.$$

Теорему, в частности удобно применять при отыскании изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

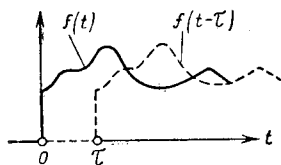


Рис. 177.

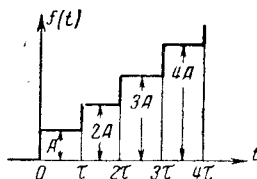


Рис. 178.

**Пример 1.** Найдем изображение ступенчатой функции, график которой изображен на рис. 178. Имеем, очевидно,

$$f(t) = A\{\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \dots\};$$

следовательно, по теореме запаздывания

$$f(t) \doteq A \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right\}.$$

Справа мы имеем сходящуюся геометрическую прогрессию, ибо  $|e^{-p\tau}| = e^{-s\tau} < 1$ , поэтому

$$f(t) \doteq \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p} \left( 1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right). \quad (18)$$

**Пример 2.** Периодический прямоугольный импульс  $g(t)$ , график которого изображен на рис. 179, можно записать в виде

$$g(t) \doteq A\{\eta(t) - 2\eta(t - \tau) + 2\eta(t - 2\tau) - \dots\};$$

следовательно, по теореме запаздывания

$$g(t) \doteq A \left\{ \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p\tau} + \frac{2}{p} e^{-2p\tau} - \dots \right\} = \frac{A}{p} \left( 1 - 2 \frac{e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}} \right) = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}. \quad (19)$$

Рис. 179.

Периодический треугольный импульс  $h(t)$ , график которого изображен пунктиром на рис. 179, равен  $\int_0^t g(t) dt$ ; следовательно, по свойству V

$$h(t) \doteq \frac{A}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}. \quad (20)$$

Двойственной к теореме запаздывания является

**VIII. Теорема сдвига.** Для любого комплексного  $p_0$

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq F(p - p_0) \quad (21)$$

(«сдвиг» изображения на  $p_0$  равносильно умножению оригинала на  $e^{p_0 t}$ ).

Имеем:

$$e^{p_0 t} f(t) \doteq \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p-p_0),$$

что и требовалось доказать.

Теорема позволяет по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на экспоненту, например:

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda t} \sin \omega t &\doteq \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}, & e^{-\lambda t} \cos \omega t &\doteq \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}, \\ e^{-\lambda t} t^n &\doteq \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

**81. Теоремы умножения.** Особое место в операционном методе занимают предложения, выражающие связь между оригиналами и изображениями произведения функций.

**IX. Теорема умножения (Э. Борель).** Произведение двух изображений  $F(p)$  и  $G(p)$  также является изображением, причем

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

В самом деле, интеграл в правой части формулы (1) является оригиналом: свойства 1° и 2° очевидны, а для доказательства 3° заметим, что если взять число  $s_0$  равным наибольшему из показателей роста  $f(t)$  и  $g(t)$ , то

$$\left| \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right| < M \left| \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_0 (t-\tau)} d\tau \right| = Mte^{s_0 t}.$$

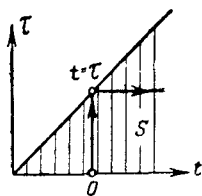


Рис. 180.

Отсюда и следует, что интеграл (1) не превосходит некоторой константы, умноженной на  $e^{(s_0+\varepsilon)t}$ , где  $\varepsilon$  сколь угодно малое положительное число.

Рассмотрим теперь изображение интеграла (1):

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Справа здесь стоит двукратный интеграл, распространенный на сектор  $S$  плоскости  $(t, \tau)$  (рис. 180), ибо при фиксированном  $t$  интегрирование по  $\tau$  ведется в пределах от 0 до  $\tau=t$ , а затем изменяется от 0 до  $\infty$ . Так как при  $\operatorname{Re} p > s_0$  этот двукратный

интеграл абсолютно сходится, то в нем можно изменить порядок интегрирования\*), и мы получим (заменяя еще  $t$  на  $t_1 = t - \tau$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau &\doteq \int_0^\infty f(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-p t} g(t-\tau) dt = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-p \tau} d\tau \int_0^\infty g(t_1) e^{-p t_1} dt_1 = F(p) G(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Интеграл в правой части формулы (1) называется *сверткой* функций  $f(t)$  и  $g(t)$  и обозначается символом

$$(f * g) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

Теорема IX утверждает, что *умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов*:

$$(f * g) \doteq F(p) G(p) **). \quad (3)$$

В приложениях полезно следствие теоремы умножения, которое относится к случаю, когда надо найти оригинал произведения  $pF(p)G(p)$ . Пользуясь правилом дифференцирования оригинала (формула (6) предыдущего пункта) и доказанной теоремой умножения, мы получаем так называемый интеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &= f(0)G(p) + \{pF(p) - f(0)\}G(p) \doteq \\ &\doteq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

На основании свойства симметрии свертки этот интеграл переписывается также в виде

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau) d\tau, \quad (5)$$

\*) См., например, Фихтенгольц, т. III, стр. 270.

\*\*) Отметим свойство симметрии свертки

$$(f * g) = (g * f),$$

которое легко доказать, заменяя в определении свертки переменное  $\tau$  на  $\tau_1 = t - \tau$ ; оно следует также из того, что левая часть (3) не меняется при перемене ролей  $F(p)$  и  $G(p)$ .

а перемена ролей функций  $F(p)$  и  $G(p)$  приводит к формулам

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &\doteq g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau = \\ &= g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \quad (6) \end{aligned}$$

Примеры применения интеграла Дюамеля будут даны ниже (см. п. 84 и след.).

Приведем теорему, двойственную теореме умножения.

Х. Теорема. Пусть даны два оригинала  $f(t)$  и  $g(t)$  с показателями роста  $s_1$  и  $s_2$ . Их произведение также является оригиналом, причем

$$f(t)g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq, \quad (7)$$

где  $a > s_1$  и  $\operatorname{Re} p > s_2 + a$ .

В самом деле, произведение  $f(t)g(t)$ , очевидно, удовлетворяет условиям 1°—3° для оригиналов. Его изображение

$$f(t)g(t) \doteq \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-pt}dt.$$

Возьмем  $a > s_1$  и заменим  $f(t)$  по формуле обращения:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &\doteq \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\{ \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt}dq \right\} g(t)e^{-pt}dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left\{ F(q) \int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t}dt \right\} dq \end{aligned}$$

(изменение порядка интегрирования можно обосновать).

Если считать еще  $\operatorname{Re} p > s_2 + a$ , то будем иметь  $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$ , ибо у нас  $\operatorname{Re} q = a$ , и внутренний интеграл можно заменить через  $G(p-q)$ . Теорема доказана.

Заметим еще, что так как  $a$  можно взять сколь угодно близким к  $s_1$ , то изображение функции  $f(t)g(t)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s$ , где  $s = s_1 + s_2$  — показатель роста этой функции.

В приложениях полезна доказанная в 1935 г. советским математиком А. М. Эфросом.



XI. Обобщенная теорема умножения. Пусть дано изображение  $F(p) \doteq f(t)$  и аналитические функции  $G(p)$  и  $q(p)$  такие, что

$$G(p) e^{-\tau q(p)} \doteq g(t; \tau), \quad (8)$$

тогда \*)

$$F[q(p)] G(p) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau) g(t; \tau) d\tau. \quad (9)$$

В самом деле, изображение правой части соотношения (9),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(\tau) g(t; \tau) d\tau &\doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^{\infty} f(\tau) g(t; \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} g(t; \tau) e^{-pt} dt \end{aligned}$$

(мы предполагаем, что можно изменить порядок интегрирования). Но внутренний интеграл есть изображение  $g(t; \tau)$ ; следовательно, по формуле (8) можно написать:

$$\int_0^{\infty} f(\tau) g(t; \tau) d\tau \doteq G(p) \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-q(p)\tau} d\tau = G(p) F[q(p)],$$

что и требуется.

Замечание. Если, в частности, принять  $q(p) = p$ , то  $g(t; \tau) \doteq e^{-p\tau} G(p)$  и по теореме запаздывания  $g(t; \tau) = g(t - \tau)$ ; следовательно, формула (9) принимает вид

$$F(p) G(p) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

(при  $\tau > t$  в силу свойства 2° оригиналов  $g(t - \tau) = 0$ ) и совпадает с формулой (1). Таким образом, теорема Эфроса действительно является обобщением теоремы умножения.

Приведем несколько примеров применения теоремы Эфроса.

Пример 1. Пусть  $G(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$  и  $q(p) = \sqrt{p}$ . Функцию  $g(t; \tau)$  найдем по формуле обращения

$$g(t; \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\tau \sqrt{p} + pt} \frac{dp}{\sqrt{p}}.$$

\*) Мы не формулируем условий теоремы; из этих условий должно следовать, что нужные функции являются изображениями и что можно менять порядок интегрирования (см. доказательство).

Рассмотрим замкнутый контур, составленный из отрезка  $(a - ib, a + ib)$ , дуг  $C'_R$  и  $C''_R$  окружности  $|p| = R$ , двубережного разреза I, II и окружности  $c_r$ :  $|p| = r$  (рис. 181). Внутри этого контура подынтегральная функция аналитична и однозначна (для определенности мы считаем  $-\pi < \arg p < \pi$ ). Поэтому по теореме Коши интеграл вдоль отрезка  $(a - ib, a + ib)$  можно заменить интегралом вдоль остальной части контура (направление интегрирования показано стрелками на рис. 181). Так как  $\tau > 0$ , то на дугах  $C'_R$  и  $C''_R$  функция  $\frac{1}{V\bar{p}} e^{-\tau V\bar{p}} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Следовательно, по лемме Жордана при  $t > 0$  интеграл от  $\frac{1}{V\bar{p}} e^{-\tau V\bar{p} + pt}$  вдоль  $C'_R$  и  $C''_R$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , и можно написать:

$$g(t; \tau) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_I e^{-\tau V\bar{p} + pt} \frac{dp}{V\bar{p}} + \int_{c_r} + \int_{II} \right\}.$$

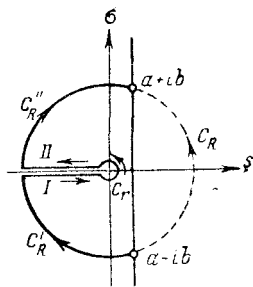


Рис. 181.

На берегу I имеем  $p = xe^{-i\pi}$ ,  $V\bar{p} = -iV\bar{x}$ , на берегу II:  $p = xe^{i\pi}$ ,  $V\bar{p} = iV\bar{x}$ ; следовательно,

$$\int_I = \int_R^r e^{i\tau V\bar{x} - xt} \frac{dx}{iV\bar{x}}, \quad \int_{II} = - \int_r^R e^{-i\tau V\bar{x} - xt} \frac{dx}{iV\bar{x}}.$$

Интеграл вдоль  $c_r$ , очевидно, стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$ , ибо  $\left| \int_{c_r} \right| < \frac{M}{Vr} 2\pi r$ . Таким образом,

$$g(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \cos \tau V\bar{x} \frac{dx}{V\bar{x}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-tu^2} \cos \tau u du = \frac{1}{V\pi t} e^{-\tau^2/4t}$$

(мы положили  $x = u^2$  и затем воспользовались известным значением интеграла Пуассона — см. пример 4) п. 73), т. е. \*)

$$\frac{e^{-\tau V\bar{p}}}{V\bar{p}} \doteq \frac{1}{V\pi t} e^{-\tau^2/4t}. \quad (10)$$

Пусть теперь известен оригинал функции  $F(p) \doteq f(t)$ . Учитывая соотношение (10), мы можем найти оригинал  $\frac{F(V\bar{p})}{V\bar{p}}$  непосредственно по теореме Эфроса:

$$\frac{F(V\bar{p})}{V\bar{p}} \doteq \frac{1}{V\pi t} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau. \quad (11)$$

\*) При  $t < 0$  стремится к нулю интеграл вдоль дуги  $C_R$ , обозначенной пунктиром на рис. 181; аналогичным рассуждением покажем, что  $g(t; \tau) = 0$  при  $t < 0$ .

Например, полагая  $F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p}$  ( $\alpha > 0$ ), найдем по теореме запаздывания  $f(t) = \eta(t - \alpha)$ , и формула (11) даст

$$\frac{e^{-\alpha \sqrt{p}}}{p} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\tau^2/4t} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(мы воспользовались тем, что  $\eta(\tau - \alpha) = 0$  при  $\tau < \alpha$ , а затем положили  $\frac{\tau}{2\sqrt{t}} = x$ ). Пользуясь обозначениями

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad 1 - \operatorname{erf} x = \operatorname{Erf} x \quad (12)$$

и учитывая, что  $\operatorname{erf} \infty = 1$  (см. п. 70), мы можем записать последнюю формулу в виде

$$\frac{e^{-\alpha \sqrt{p}}}{p} \doteq 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right) = \operatorname{Erf} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right). \quad (13)$$

Пример 2. Положим  $G(p) = \frac{1}{p}$  и  $q(p) = \frac{1}{p}$ . Функция  $g(t; \tau) \doteq \frac{1}{p} e^{-\tau/p}$  найдется с помощью теоремы подобия из формулы  $\frac{1}{p} e^{-1/p} \doteq J_0(2\sqrt{t})$ , которая будет получена в следующем пункте \*):

$$g(t; \tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}).$$

Теорема Эфроса дает:

$$\frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (14)$$

В частности, полагая  $f(\tau) = \cos \tau$ , получим  $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$  (см. (4) п. 80),

$F\left(\frac{1}{p}\right) \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$  и формула (14) примет вид:

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau}) \cos \tau d\tau \doteq \frac{1}{p^2 + 1}. \quad (15)$$

Учитывая формулу (3) п. 8, получаем следующее соотношение, содержащее бесселеву функцию  $J_0$ :

$$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau}) \cos \tau d\tau = \sin t. \quad (16)$$

\*) См. формулу (4) п. 82,  $J_0$  — бесселева функция нулевого порядка, см. п. 70, а также следующую главу.

**82. Теоремы разложения.** Мы докажем здесь несколько теорем, относящихся к разложению в ряды оригиналов или изображений. В первой теореме мы предположим, что изображение  $F(p)$  аналитично в бесконечно удаленной точке (по замечанию п. 79 тогда  $F(\infty) = 0$ ), и докажем, что в этом случае оригинал можно находить, беря формально сумму оригиналов членов лорановского разложения функции  $F(p)$  в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая формулы (11) п. 80 для оригиналов отрицательных степеней  $p$ , мы можем сформулировать эту теорему в следующем виде:

**XII. Первая теорема разложения.** Если  $F(p)$  правильна в бесконечно удаленной точке и имеет в ее окрестности  $|p| \geq R$  лорановское разложение

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \quad (1)$$

то оригиналом  $F(p)$  служит (умноженная на  $\eta(t)$ ) функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}. \quad (2)$$

При этом  $f(t)$  является целой функцией.

Для доказательства положим  $p = \frac{1}{q}$  и  $F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)$ . Функция  $\Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$  аналитична в круге  $|q| \leq \frac{1}{R}$ ; следовательно, неравенства Коши из п. 17 дают

$$|c_k| < MR^k.$$

Из полученных неравенств для любого (комплексного)  $t$  получаем:

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MR e^{R|t|}.$$

Отсюда следует, во-первых, что ряд (2) сходится для всех комплексных  $t$ , т. е. является целой функцией, и, во-вторых, что  $|f(t)| < Ce^{Rt}$  для положительных  $t$ . Таким образом, функция  $\eta(t)f(t)$  действительно является оригиналом. В силу равномерной сходимости ряда (2) в любом конечном круге мы можем умножить его на  $e^{-pt}$  и проинтегрировать почленно по  $t$  от 0 до любого  $T > 0$ . Если при этом  $\operatorname{Re} p > R$ , то можно почленно интегрировать и от 0 до  $\infty$ . Используя формулы (11) п. 80, мы и получим нужное разложение (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Можно доказать и обратное предложение: если оригинал имеет вид  $\eta(t)f(t)$ , где  $f(t)$  — целая функция, удовлетворяющая неравенству  $|f(t)| < Me^{s_0|t|}$  (т. е.  $f(t)$  имеет конечный порядок), то ее изображение  $F(p)$  правильно в бесконечно удаленной точке.

П р и м е р. Рассмотрим разложение

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}.$$

Так как  $F(p)$  правильна в бесконечности и имеет там нуль, то по теореме XII можно формально перейти к оригиналам

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} = f(t).$$

Ряд справа напоминает разложение цилиндрической функции  $J_n$  (см. п. 70, формула (13)); чтобы свести его к этой функции, положим  $t = \left(\frac{\tau}{2}\right)^2$ ; тогда

$$f(t) = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{n+2k} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^n J_n(\tau) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}).$$

Таким образом, мы имеем:

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p}, \quad (3)$$

в частности, при  $n=0$

$$J_0(2\sqrt{t}) = \frac{1}{p} e^{-1/p}. \quad (4)$$

Приведем также некоторые следствия полученных формул. Из соотношения (3) по теореме обращения получим

$$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{p^{n+1}} e^{pt - \frac{1}{p}} dp.$$

Заменяя здесь  $2\sqrt{t} = \tau$  и (при фиксированном  $\tau$ )  $p = \frac{2}{\tau} p_1$ , а также учитывая, что в силу последней замены прямая интегрирования лишь сдвинется в правой полуплоскости параллельно самой себе (ибо  $\frac{2}{\tau} > 0$ ), мы получаем:

$$J_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} e^{\frac{\tau}{2} \left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)} \frac{dp_1}{p_1^{n+1}} \quad (5)$$

(ср. с аналогичной формулой п. 70). Положим теперь  $p = \frac{1}{2} \left(p_1 - \frac{1}{p_1}\right)$ ; правая полуплоскость  $\operatorname{Re} p_1 > 0$  перейдет при этом в плоскость  $p$  с вырезан-

ными лучами  $(-i\infty, -i)$ ,  $(i, i\infty)$ . Чтобы выяснить характер образа  $L$  прямой интегрирования, положим  $p_1 = re^{i\varphi}$ ,  $p = s + i\sigma$ , тогда

$$s = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad \sigma = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \sin \varphi.$$

На прямой интегрирования  $\operatorname{Re} p_1 = a_1$  имеем  $r \cos \varphi = a_1$ ; следовательно, параметрическими уравнениями кривой  $L$  будут:

$$s = \frac{1}{2} \left( a_1 - \frac{\cos^2 \varphi}{a_1} \right); \quad \sigma = \frac{1}{2} \left( a_1 \operatorname{tg} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2a_1} \right),$$

где  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Из этих уравнений видно, что  $L$  лежит в полосе между  $s = a' = \frac{1}{2} \left( a_1 - \frac{1}{a_1} \right)$  и  $s = a'' = \frac{1}{2} a_1$  и имеет вертикальную асимптоту  $s = a''$  при  $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ . Второе уравнение показывает, что при  $\varphi$ , изменяющемся

от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\sigma$  изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$ , причем при достаточно больших  $a_1$  (что можно предполагать без ограничения общности) — монотонно. Таким образом, кривая  $L$  имеет вид, изображенный на рис. 182.

После нашей подстановки  $p = \frac{1}{2} \left( p_1 - \frac{1}{p_1} \right)$ ,  $p_1 = p + \sqrt{p^2 + 1}$ , соотношение (5) перейдет в

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1} (p + \sqrt{p^2 + 1})^n} \quad (6)$$

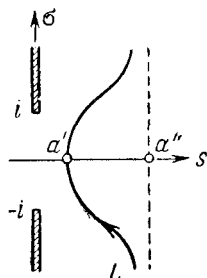


Рис. 182.

(мы пишем опять  $t$  вместо  $\tau$ ). Так как подынтегральная функция здесь имеет особенности лишь в точках  $\pm i$  (точки ветвления) и кривая  $L$  имеет вид, указанный на рис. 182, то мы можем, не меняя величины интеграла, заменить  $L$  прямой  $\operatorname{Re} p = a'' > 0$ . Вспоминая формулу обращения, мы получаем изображение цилиндрической функции

$$J_n(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1} (p + \sqrt{p^2 + 1})^n} = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (7)$$

В частности, для цилиндрической функции нулевого порядка имеем:

$$J_0(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (8)$$

Для одного важного класса изображений  $F(p)$  легко получить разложение оригиналов в ряд, члены которого соответствуют особым точкам изображений. Именно, имеет место

**XIII. Вторая теорема разложения.** Пусть функция  $F(p)$ : 1) мероморфна и правильна в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ ; 2) существует система окружностей  $C_n$ :  $|p| = R_n$ ,  $R_1 < R_2 < \dots$ ,  $R_n \rightarrow \infty$ , на которой  $F(p)$  стремится к нулю равномерно относительно  $\arg p$ ; 3) для любого  $a > s_0$  абсолютно

сходится  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$ . Тогда оригиналом  $F(p)$  служит (умноженная на  $\eta(t)$ ) функция

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res} F(p) e^{pt}, \quad (9)$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам  $p_k$  функции  $F(p)$  в порядке неубывания их модулей.

В самом деле, в наших условиях применима теорема 4 п. 79\*), согласно которой  $F(p)$  является изображением функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \quad (10)$$

Обозначим через  $C'_n$  часть окружности  $C_n$ , расположенную слева от прямой  $\operatorname{Re} p = a$ , через  $a \pm ib_n$  — точки пересечения  $C_n$  с этой прямой и через  $\Gamma_n$  — замкнутый контур, составленный из отрезка  $(a - ib_n, a + ib_n)$  и  $C'_n$  и проходимый против часовой стрелки. Так как по лемме Жордана при  $t < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C'_n} e^{pt} F(p) dp = 0,$$

то при  $t > 0$  вместо (10) можно написать

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} e^{pt} F(p) dp. \quad (11)$$

Применяя теорему Коши о вычетах, мы получаем, что

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(\Gamma_n)} \operatorname{res} F(p) e^{pt},$$

где сумма берется по всем особым точкам функции  $F(p)$ , лежащим внутри  $\Gamma_n$ , а это и есть нужный результат.

Следствие. Если функция  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  дробно-рациональна, причем степень многочлена  $A(p)$  в числителе меньше степени многочлена  $B(p)$ , то оригиналом ее служит (умноженная на  $\eta(t)$ ) функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p) (p - p_k)^{n_k} e^{pt}\}, \quad (12)$$

\*) То, что у нас  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$  лишь по некоторой системе окружностей не вносит в доказательство этой теоремы существенных изменений.

где  $p_k$  — полюсы  $F(p)$ , а  $n_k$  — их кратности и сумма берется по всем полюсам.

В самом деле, то, что  $F(p)$  служит изображением, следует немедленно из свойства линейности преобразования Лапласа и формул (11) п. 80 на основании теоремы о разложении дробно-рациональной функции на простейшие дроби (см. п. 71). Справедливость формулы (11) следует из леммы Жордана, которая применима, ибо  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Поэтому справедлива и формула (9), в которой ряд заменен конечной суммой. Остается воспользоваться формулой для вычисления вычетов в полюсах из п. 23, и мы получим искомую формулу (12).

В частности, если все полюсы  $F(p)$  простые, то формула (12) упрощается:

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \quad (13)$$

(мы воспользовались формулой для вычисления вычетов в простых полюсах; множитель  $\eta(t)$  в правой части мы опускаем согласно принятому условию).

В приложениях (главным образом электротехнических) важна разновидность этой формулы, которая относится к случаю, когда изображение имеет вид  $F(p) = \frac{A(p)}{pB(p)}$ , где степень  $A(p)$  не превосходит степени  $B(p)$  и  $B(p)$  имеет простые корни, отличные от нуля. В этом случае вместо (13), очевидно, получаем:

$$\frac{A(p)}{pB(p)} = \frac{A(0)}{B(0)} + \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{p_k B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (14)$$

где сумма берется по всем корням  $B(p)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Если многочлен  $B(p)$  имеет действительные коэффициенты, то каждому его комплексному корню  $p$  отвечает комплексно сопряженный корень  $\bar{p}$ . В самом деле,

$$B(\bar{p}) = a_0(\bar{p})^n + a_1(\bar{p})^{n-1} + \dots + a_n = \overline{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \overline{B(p)} = 0.$$

Если, кроме того, и многочлен  $A(p)$  имеет действительные коэффициенты, то

$$\frac{A(\bar{p})}{B'(\bar{p})} e^{\bar{p}t} = \overline{\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt}}$$

и, следовательно, сумма выражений  $\frac{A(p)}{B'(p)} e^{pt}$ , подсчитанных для корней  $p = p_k$  и  $p = \bar{p}_k$ , будет равна  $2 \operatorname{Re} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$ . Таким об-



разом, если многочлены  $A(p)$  и  $B(p)$  имеют действительные коэффициенты, то формулу (13) можно представить в виде

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (15)$$

где первая сумма распространена на все действительные корни  $B(p)$ , а вторая — на все комплексные корни с положительными мнимыми частями.

Замечание 2. Каждый член формулы (13), соответствующий корню  $p_k = s_k + i\sigma_k$ , можно представлять как записанное в комплексной форме колебание

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{s_k t} \{\cos \sigma_k t + i \sin \sigma_k t\}.$$

Отсюда ясно, что действительным корням ( $\sigma_k = 0$ ) соответствуют апериодические колебания, комплексным корням с отрицательными действительными частями  $s_k$  — затухающие колебания, чисто мнимым корням ( $s_k = 0$ ) — гармонические колебания. Положительные действительные корни или комплексные корни с положительными действительными частями вообще не могут иметь места, если рассматриваемая система не допускает колебаний с неограниченно возрастающей амплитудой.

Для таких систем легко написать колебание, соответствующее установившемуся режиму,

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \sum \frac{A(i\sigma_k)}{B'(i\sigma_k)} e^{i\sigma_k t}, \quad (16)$$

где сумма распространена на все чисто мнимые корни  $p_k = i\sigma_k$  с положительными мнимыми частями\*). В самом деле, в нашем предположении действительные части всех корней неположительны,  $s_k \leq 0$ , а амплитуды колебаний, соответствующих отрицательным  $s_k$ , стремятся к нулю по показательному закону и не входят в установившийся режим.

Примеры применения теоремы разложения мы приведем в следующих пунктах.

**83. Примеры. Дополнения.** В этом пункте мы приводим ряд соотношений и теорем, полезных при работе операционным методом.

---

\*) В (16) будет еще входить постоянное слагаемое  $\frac{A(0)}{B'(0)}$ , если  $B(0) = 0$ .

1) Пределные соотношения. Если  $f(t)$  является оригиналом вместе со своей производной  $f'(t)^*$  и  $F(p) \doteq f(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0), \quad (1)$$

где  $p \rightarrow \infty$  внутри угла  $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$  и  $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ ; если, кроме того, существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty). \quad (2)$$

где  $p \rightarrow 0$  внутри того же угла.

В самом деле, соотношение (1) следует непосредственно из того, что  $pF(p) \rightarrow f(0)$  является изображением  $f'(t)$  и, значит, по замечанию п. 79 стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ ,  $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ . Для доказательства соотношения (2), заметим, что из существования  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  следует ограниченность функции  $f(t)$ . Поэтому можно принять  $s_0 = 0$  и  $F(p)$  определена в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ . По формуле преобразования Лапласа для любого  $p$ ,  $\operatorname{Re} p > 0$ , получаем:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Так как при  $p = 0$  интеграл в левой части существует, а в угле  $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$  он сходится равномерно по  $p$ , то в последнем соотношении можно перейти к пределу при  $p \rightarrow 0$  в этом угле, и в пределе мы будем иметь:

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0),$$

что равносильно (2).

Соотношения (1) и (2) полезны для проверки вычислений с помощью операционного метода. Например, из (22) п. 80 при  $\lambda > 0$  получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} \sin \omega t &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2} = 0; \text{ из (16): } \operatorname{si} 0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \operatorname{arccctg} p = \\ &= 0; \text{ из (18): } f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A}{2} \left( 1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right) = A \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

\*) Это ограничение вводится лишь для простоты доказательства, однако оно не является обременительным и на практике обычно выполняется.

2) Изображения дробных степеней. По определению гамма-функции Эйлера для любого  $a > -1$  имеем:

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$$

(см. пример 8 п. 74). Пусть  $p = re^{i\alpha}$  — произвольное комплексное число из правой полуплоскости  $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ . Введем в последнем интеграле вместо  $t$  комплексную переменную интегрирования  $q = \frac{t}{p}$ , получим:

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_L q^a e^{-pq} dq,$$

где интеграл берется вдоль луча  $L$ :  $\arg q = -\alpha$ . На дуге  $C_R$ :  $|q| = R$ ,  $-\alpha < \arg q < 0$ , положим  $q = Re^{i\varphi}$ , тогда будем иметь:

$$\left| \int_{C_R} q^a e^{-pq} dq \right| \leq R^a \left| \int_{-\alpha}^0 e^{-rR \cos(\alpha+\varphi)} R d\varphi \right|.$$

Так как здесь  $\alpha + \varphi$  меняется между 0 и  $\alpha$ , то  $\cos(\alpha + \varphi)$  остается бóльшим положительной постоянной. Следовательно, интеграл вдоль  $C_R$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Учитывая еще, что между  $L$  и действительной осью плоскости  $q$  нет особых точек подынтегральной функции, мы можем заменить интеграл вдоль  $L$  интегралом по положительной полуоси. Обозначая переменную интегрирования снова через  $t$ , получим:

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} = \int_0^{\infty} t^a e^{-pt} dt. \quad (3)$$

При  $a \geq 0$  функция  $f(t) = t^a$  (умноженная на  $\eta(t)$ ) является оригиналом; следовательно, последнее уравнение эквивалентно операторному соотношению

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \doteq t^a. \quad (4)$$

Полученная формула распространяет соотношение (11) п. 80 на произвольные положительные степени (при  $a = n$  — целом неотрицательном  $\Gamma(a+1) = n!$ ).

При  $-1 < a < 0$  функция  $t^a$  неограниченно возрастает при  $t \rightarrow 0$  и поэтому не удовлетворяет условиям, наложенным на оригиналы. Однако для таких значений  $a$  интеграл в правой

части (3) сходится и эта формула остается справедливой. Поэтому можно говорить, что при  $-1 < a < 0$  функция  $t^a$  является «особым» оригиналом, а функция  $\Gamma(a+1)/p^{a+1}$  — его «особым» изображением.

В частности, при  $a = -1/2$  имеем:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

(мы положили  $t = u^2$  и воспользовались известным значением  $\operatorname{erf} \infty = 1$  из п. 70), и формула (4) дает:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad (5)$$

3) Приведем несколько часто встречающихся в приложениях операционных соотношений, содержащих  $\sqrt{p}$ . Изображение  $\frac{1}{p + \sqrt{p}}$  можно представить в виде  $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$ , где  $F(p) = \frac{1}{p+1} \doteq e^{-t}$ . По формуле (11) п. 81 имеем, следовательно:

$$\frac{1}{p + \sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\tau + \frac{\tau^2}{4t}\right)} d\tau.$$

Выделим в показателе степени под интегралом полный квадрат  $\tau + \frac{\tau^2}{4t} = \left(\sqrt{t} + \frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right)^2 - t$  и заменим переменную  $\tau$  на  $x = \sqrt{t} + \frac{\tau}{2\sqrt{t}}$ ; получим:

$$\frac{1}{p + \sqrt{p}} \doteq \frac{e^t}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\sqrt{t} + \frac{\tau}{2\sqrt{t}}\right)^2} d\tau = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Вводя принятое обозначение (см. (5) п. 70), найдем окончательно:

$$\frac{1}{p + \sqrt{p}} \doteq e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}). \quad (6)$$

Отсюда, используя еще формулу (5), находим:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p + \sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t}). \quad (7)$$

Далее имеем:

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} = \frac{p+\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} + \frac{\alpha}{p\sqrt{p+\alpha}}.$$

По теореме смещения из (5) находим:

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} \doteq e^{-\alpha t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad (5')$$

и отсюда по теореме об интегрировании оригинала

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} \doteq \int_0^t e^{-\alpha\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t}) \quad (8)$$

(мы положили  $\alpha\tau = x^2$ ). Окончательно,

$$\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t} + \sqrt{\alpha} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha t}). \quad (9)$$

Наконец, из формулы (8) п. 82 с помощью теоремы подобия получаем:

$$J_0(i\beta t) \doteq \frac{1}{\sqrt{p^2 - \beta^2}}.$$

Бесселева функция  $J_0(it)$  от чисто мнимого аргумента обозначается специальным символом  $I_0(t)$ ; пользуясь этим обозначением и подставляя в последней формуле  $p+\alpha$  вместо  $p$ , по теореме смещения находим:

$$\frac{1}{\sqrt{(p+\alpha)^2 - \beta^2}} \doteq e^{-\alpha t} I_0(\beta t). \quad (10)$$

4) Изображения интегралов Френеля. По определению этих интегралов имеем (см. п. 73, пример 6):

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{2\pi t}}, \quad S(t) = \int_0^t \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Рассмотрим вместо них интеграл  $\int_0^t e^{it} \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}}$ . По формуле (5) и теореме смещения имеем  $e^{it} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{2(p-i)}}$ , а отсюда по теореме об интегрировании оригинала

$$\int_0^t e^{it} \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \doteq \frac{1}{p\sqrt{2(p-i)}}.$$

Аналогично найдем:

$$\int_0^t e^{-it} \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \doteq \frac{1}{p\sqrt{2(p+i)}}.$$

по свойству линейности отсюда сразу получаем:

$$C(t) \doteq \frac{1}{2p\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{p+i}} + \frac{1}{\sqrt{p-i}} \right) = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{V p^2 + 1 + p}}{\sqrt{p^2 + 1}} \quad (11)$$

и

$$S(t) \doteq \frac{1}{2pi\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{p-i}} - \frac{1}{\sqrt{p+i}} \right) = \frac{1}{2p} \frac{\sqrt{V p^2 + 1 - p}}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (12)$$

5) Из теоремы подобия, которую можно переписать в виде

$$F(\alpha p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-pt} dt,$$

интегрированием по  $\alpha$  от 0 до 1 получаем:

$$\int_0^1 F(\alpha p) d\alpha = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha}$$

(мы предполагаем, что можно изменить порядок интегрирования). Это равенство означает, что

$$\int_0^1 f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} = \int_0^1 F(\alpha p) d\alpha.$$

Введем в левом интеграле новое переменное  $\tau = \frac{t}{\alpha}$ , а в правом —  $q = \alpha p$ ; получим:

$$\int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq. \quad (13)$$

Приведем несколько примеров применения формулы (13). Прежде всего из формулы  $\cos t = \frac{p}{p^2 + 1}$  получаем изображение интегрального косинуса (см. п. 70):

$$\text{Ci } t = - \int_t^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{q dq}{1 + q^2} = \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}; \quad (14)$$

из формулы  $e^{-t} = \frac{1}{p + 1}$  получаем:

$$- \text{Ei}(-t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dq}{q + 1} = \frac{1}{p} \ln(1 + p) \quad (15)$$

(см. (8) п. 76); из формулы  $J_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$ :

$$\int_t^{\infty} \frac{J_0(t)}{t} dt = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{p} \ln(p + \sqrt{1 + p^2}). \quad (16)$$

Все оригиналы в формулах (14) — (16) особые, ибо при  $t \rightarrow 0$  интегралы в левой части расходятся.

**З а м е ч а н и е.** Из теорем об интегрировании оригиналов и изображений следует:

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_p^\infty F(q) dq.$$

Складывая это с (13), будем иметь:

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_p^\infty F(q) dq.$$

Интегралы в левой и правой частях последнего соотношения постоянные, следовательно, это соотношение имеет вид:  $A \doteq \frac{B}{p}$ . Сравнивая его с соотношением  $1 \doteq \frac{1}{p}$ , по теореме единственности преобразования Лапласа заключаем, что  $A = B$ . Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^\infty F(q) dq. \quad (17)$$

6) **Правило дробных показателей.** Первая теорема разложения п. 82 распространяется и на обобщенные степенные ряды (см. п. 25). Мы ограничимся следующим простым, но важным для практики, случаем.

**Теорема.** Пусть  $F(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} p < a$  ( $a$  — некоторое положительное число) и не имеет в конечной  $p$ -плоскости никаких особенностей, кроме начала координат  $p = 0$ , которое является точкой ветвления конечного порядка. Тогда, если разложение  $F(p)$  в обобщенный степенной ряд имеет вид

$$F(p) = p^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^{k\beta}, \quad (18)$$

где  $\beta$  — рационально и положительно, то оригиналом  $F(p)$  служит (умноженный на  $\eta(t)$ ) ряд

$$f(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\alpha - k\beta)} \frac{1}{t^{k\beta}}, \quad (19)$$

в котором вычеркнуты все члены с целыми неотрицательными  $\alpha + k\beta$ .

Рассмотрим замкнутый контур  $C_{R,r}^*$ , составленный из отрезка  $(a - ib, a + ib)$ , дуг  $C_R'$  и  $C_r'$  окружности  $|p| = R$ ,  $\operatorname{Re} p < a$ , двубережного разреза  $I$ ,  $II$  вдоль отрезка  $-R < p < -r$  и окружности  $c_r$ :  $|p| = r$  (см. рис. 181).

Так как  $F(p)$  аналитична и однозначна внутри этого контура (мы считаем для определенности  $-\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2}$ ), то по теореме Коши интеграл вдоль отрезка  $(a - ib, a + ib)$  можно заменить интегралом по остальной части контура. Так как, кроме того, при  $t > 0$  по лемме Жордана интеграл от  $F(p)e^{pt}$  вдоль  $C_R' + C_R''$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , то формулу обращения можно записать в виде

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R,r}^*} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} F(p) e^{pt} dp,$$

где  $C_r^*$  — контур, составленный из двубережного разреза  $-\infty < p < -r$  по отрицательной полуоси  $p$  и окружности  $|p| = r$  (без точки  $p = -r$ ). Подставляя в последнюю формулу разложение (18) для  $F(p)$  и интегрируя почленно\*), найдем:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} p^{\alpha+k\beta} e^{pt} dp \right\}.$$

Введем новое переменное интегрирования  $\zeta = pt$ ; так как  $t > 0$ , то эта замена не изменяет вида контура, и мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^*} p^{\alpha+k\beta} e^{pt} dp = \frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}} \int_{C_{rt}^*} \zeta^{\alpha+k\beta} e^{\zeta} d\zeta = \frac{1}{t^{\alpha+k\beta+1}} \frac{1}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}$$

(см. ханкелевское интегральное представление гамма-функции — формула (15) п. 74). Подставляя этот результат в предыдущую формулу, мы и найдем искомое разложение (19). Если  $\alpha + k\beta$  — целое неотрицательное число, то интеграл от  $p^{\alpha+k\beta} e^{pt}$  вдоль  $C_r^*$  равен нулю, следовательно, из нашего разложения нужно вычеркнуть все члены с такими  $\alpha + k\beta$  \*\*).

Замечание. Так же как и в первой теореме разложения, ряд (19) формально получается почленным применением к ряду (18) формулы изображения степеней

$$p^a \doteq \frac{1}{\Gamma(-a) t^{a+1}}.$$

\*) Строго говоря, для возможности почленного интегрирования ряда вдоль бесконечной прямой требуются дополнительные условия. Достаточно, например, потребовать сходимости интеграла вдоль  $C_r^*$  от суммы ряда

$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |p|^{k\beta}$  (см. Ватсон [7] из литературы к гл. VII, стр. 727).

\*\*) Это следует также из того, что целая функция  $1/\Gamma(z)$  имеет нули в точках  $z = 0, -1, -2, \dots$  (см. гл. VII, п. 89).



Однако эта формула была доказана только для отрицательных  $a$ , для  $a > 0$  она имеет условный характер. Кроме того, заметим, что сумма ряда (19), вообще говоря, не удовлетворяет условию 3° и, следовательно, является особым оригиналом.

Пример. Пусть

$$F(p) = \frac{1}{Vp} e^{V\bar{p}(i-1)}.$$

Положим  $p = Re^{i\varphi}$ ,  $i-1 = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$ ; при  $Re\, p < 0$ , т. е.  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ , имеем

$$Re\, V\bar{p}(i-1) = V\sqrt{2}R \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) < 0, \text{ ибо тогда } \pi < \frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}.$$

Кроме того, для больших  $Im\, p$  и  $0 < Re\, p < a$  будем иметь  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$ ; следовательно  $V\bar{p}(i-1) \approx -V\sqrt{2}R$  или  $-iV\sqrt{2}R$ . Из всего этого следует, что  $F(p) \rightarrow 0$ , если  $p \rightarrow \infty$  и  $Re\, p < a$ , т. е. что  $F(p)$  удовлетворяет условиям правила дробных показателей. Имеем:

$$\frac{1}{V\bar{p}} e^{V\bar{p}(i-1)} = \frac{1}{V\bar{p}} e^{V\sqrt{2}R e^{\frac{3\pi}{4}} i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} e^{\frac{3k\pi}{4}} i^{\frac{k-1}{2}}.$$

Переходя формально к оригиналам и оставляя лишь те члены, для которых  $\frac{k-1}{2}$  не является целым числом, т. е. члены с четным  $k = 2n$ , получим

$$\frac{1}{V\bar{p}} e^{V\bar{p}(i-1)} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{(2n)!} 2^n \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

В следующей главе будет показано (см. формулу (19) п. 89), что

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \frac{(-1)^n}{V\pi};$$

учитывая это и подставляя  $(2n)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) 2^n n!$ , будем иметь:

$$\frac{1}{V\bar{p}} e^{V\bar{p}(i-1)} \doteq \frac{1}{V\pi t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2t}\right)^n = \frac{1}{V\pi t} e^{\frac{i}{2t}},$$

или

$$\frac{e^{-V\bar{p}}}{V\bar{p}} \cos V\bar{p} + i \frac{e^{-V\bar{p}}}{V\bar{p}} \sin V\bar{p} \doteq \frac{1}{V\pi t} \cos \frac{1}{2t} + i \frac{1}{V\pi t} \sin \frac{1}{2t}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{V\pi t} \cos \frac{1}{2t} \doteq \frac{1}{V\bar{p}} e^{-V\bar{p}} \cos V\bar{p}, \quad \frac{1}{V\pi t} \sin \frac{1}{2t} \doteq \frac{1}{V\bar{p}} e^{-V\bar{p}} \sin V\bar{p}. \quad (20)$$

7) Импульсные функции. Если функция  $F(p) = 1/\sqrt{p}$  уже является особым изображением, то функции  $F(p) = 1, p, p^2, \dots$ , которые даже не стремятся к нулю при  $p \rightarrow \infty$ , можно считать изображениями лишь в совершенно условном смысле. Эти условные изображения и соответствующие им оригиналы, так называемые импульсные функции, были введены Дираком и оказались полезными в ряде прикладных задач, в которых приходится иметь дело с величинами, имеющими характер мгновенного толчка.

Рассмотрим функцию  $\delta_h(t)$ , график которой изображен на рис. 183,

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h. \end{cases}$$

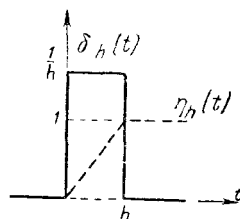


Рис. 183.

Она представляет величину, которая действует лишь на отрезке  $(0, h)$ , где имеет постоянное значение  $1/h$ , суммарный эффект ее действия равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1.$$

Предположим теперь, что  $h \rightarrow 0$ ; семейство функций  $\delta_h(t)$ , очевидно, при этом расходится, но мы введем условную функцию  $\delta(t)$ , которую будем считать пределом такого семейства,

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t),$$

и называть *импульсной функцией нулевого порядка*, или, короче, *δ-функцией*. Импульсная функция  $\delta(t)$  равна нулю всюду, кроме точки  $t = 0$ , где она равна  $\infty$ , и тем не менее для нее считается справедливым соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

предельное для такого же соотношения с функцией  $\delta_h(t)$ .

Таким образом,  $\delta$ -функция представляет собой условное сокращенное образование для вполне определенного предельного процесса, который часто рассматривается в физике: бесконечно большая величина, действующая в бесконечно малый промежуток с суммарным эффектом, равным 1. Введение этой функции сильно упрощает вычисления, связанные с таким предельным процессом: вместо того чтобы производить выкладки до

перехода к пределу и перейти к пределу в окончательном результате, переходят к пределу сразу, до выкладок. В большинстве физических задач законность такой перестановки вполне оправдана.

Мы условимся считать, что изображение  $\delta$ -функции получается как предельное для изображения функции  $\delta_h(t) = \frac{1}{h} [\eta(t) - \eta(t-h)]$ , которое по теореме запаздывания равно

$$\delta_h(t) \doteq \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Переходя здесь к пределу при  $h \rightarrow 0$ , получим (условно):

$$\delta(t) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1. \quad (21)$$

Соотношение (21) «подкрепляется» еще следующими соображениями. На рис. 183 изображен пунктиром график интеграла функции  $\delta_h(t)$

$$\eta_h(t) = \int_0^t \delta_h(t) dt.$$

Из этого графика видно, что  $\eta_h(t)$  при  $h \rightarrow 0$  стремится к единичной функции  $\eta(t)$ , так что мы положим

$$\int_0^t \delta(t) dt = \eta(t).$$

Но тогда  $\delta(t) = \eta'(t)$ , а так как  $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ , то по теореме о дифференцировании оригиналов мы снова получаем  $\delta(t) \doteq \doteq p \frac{1}{p} = 1$  (значение оригинала при  $t = 0$ , участвующее в этой теореме, мы считаем равным нулю на том «основании», что оно получается как предельное при  $h \rightarrow 0$  из значений  $\eta_h(0) = 0$ ; формальное применение указанной теоремы, где мы должны положить  $\eta(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \eta(t) = 1$ , привело бы к неправильному результату. Удивляться этому не следует, ибо мы применяем теорему в ситуации, когда ее условия нарушаются).

Далее, для любой функции  $\varphi(t)$ , удовлетворяющей условию 1° п. 79, по теореме о среднем получаем:

$$\int_0^\infty \varphi(t) \delta_h(t) dt = \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(t) dt = \varphi(t^*),$$

где  $0 < t^* < h$ . Переходя здесь к пределу при  $h \rightarrow 0$ , считаем по определению

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0) \quad (22)$$

(если  $\varphi(t)$  разрывна при  $t = 0$ , то  $\varphi(0)$  обозначает ее правое предельное значение). В соответствии с этим снова получаем:

$$\delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

На  $\delta$ -функцию распространяются основные правила операционного метода, например теорема запаздывания дает:

$$\delta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}$$

(это согласуется с (22), по которой  $\int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau}$ ).

теорема умножения

$$1 \cdot F(p) \doteq \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

(что также правильно).

Аналогично вводятся импульсные функции высших порядков. Рассмотрим, например, функцию  $\delta_h^{(1)}(t) = \frac{1}{h^2} [\eta(t) - 2\eta(t - h) + \eta(t - 2h)]$  (рис. 184); ее «предел» при  $h \rightarrow 0$

$$\delta_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h^{(1)}(t)$$

мы будем называть *импульсной функцией первого порядка*. Будем считать, что ее изображение является пределом изображений

$$\delta_h^{(1)}(t) \doteq \frac{1 - 2e^{-hp} + e^{-2hp}}{h^2 p}, \text{ т. е.}$$

$$\delta_1(t) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2e^{-hp} + e^{-2hp}}{h^2 p} = p. \quad (23)$$

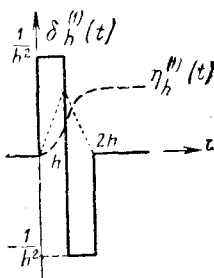


Рис. 184.

На рис. 184 пунктиром изображен график второго интеграла функции  $\delta_h^{(1)}(t)$

$$\eta_h^{(1)}(t) = \int_0^t dt \int_0^t \delta_h^{(1)}(t) dt;$$

из него видно, что  $\eta_h^{(1)}(t)$  при  $h \rightarrow 0$  стремится к единичной функции  $\eta(t)$ . Мы будем считать по определению

$$\int_0^t dt \int_0^t \delta_1(t) dt = \eta(t), \quad \delta_1(t) = \eta''(t)$$

и тогда в соответствии с (23) получим  $\delta_1(t) \doteq p^2 \cdot \frac{1}{p} = p$ .

Точно также можно рассматривать «оригинал» от степени  $p^n$  — импульсную функцию  $n$ -го порядка

$$\delta_n(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \eta(t), \quad \delta_n(t) \doteq p^n. \quad (24)$$

Примеры применения импульсных функций будут приведены ниже.

8) **Обобщенные функции.** В наше время импульсные функции получили строгое обоснование в так называемой теории обобщенных функций, которая обязана своим возникновением работам С. Л. Соболева и французского математика Л. Шварца. Мы опишем в общих чертах некоторые основные положения этой теории и, в частности, приведем строгие варианты приблизительных рассуждений раздела 7). Подробное изложение можно найти, например, в книгах И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [12] и Л. Шварца [13].

Главная идея теории состоит в переходе от функций к функционалам, заданным на том или ином пространстве функций, которые называются *основными функциями*. Наиболее употребительное пространство состоит из всех комплексных функций  $\varphi(t)$  действительного переменного  $t$ , бесконечно дифференцируемых на всей оси, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого конечного отрезка (зависящего от функции). Последовательность  $\varphi_n$  функций этого пространства называется *сходящейся к нулю* ( $\varphi_n \rightarrow 0$ ), если все  $\varphi_n$  обращаются в нуль вне одного отрезка, а на этом отрезке  $\varphi_n(t) \rightarrow 0$  равномерно вместе с производными всех порядков. Это пространство основных функций мы будем обозначать буквой  $\mathcal{A}$ .

*Обобщенной функцией класса  $\mathcal{A}^*$*  называется непрерывный линейный функционал  $f$  на множестве  $\mathcal{A}$ , т. е. отображение, которое каждой функции  $\varphi \in \mathcal{A}$  сопоставляет комплексное число  $(f, \varphi)$  так, что при этом выполняются

1°. Свойство линейности:  $(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2)$  для любых комплексных чисел  $\alpha_1, \alpha_2$  и любых функций  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}$ ;

2°. Свойство непрерывности: последовательность комплексных чисел  $(f, \varphi_n) \rightarrow 0$  для любой последовательности

$\varphi_n \in \mathcal{A}$ , сходящейся к нулю в смысле принятого выше определения.

В частности, любая обычная функция  $f(t)$ , определенная на всей оси  $t$  и интегрируемая на каждом конечном интервале, определяет обобщенную функцию  $f$  по правилу

$$(f, \varphi) = \int f(t) \varphi(t) dt \quad (25)$$

(мы не будем писать пределы интегрирования, если интеграл берется по всей прямой, или, что то же самое, по отрезку, вне которого  $\varphi = 0$ ). Можно доказать, что если для двух таких обычных функций  $f(t)$  и  $g(t)$  функционалы (25) совпадают, т. е.  $(f, \varphi) = (g, \varphi)$  для всех  $\varphi \in \mathcal{A}$ , то  $g(t)$  лишь несущественно отличается от  $f(t)$  (например, значениями в отдельных точках). Поэтому мы можем считать, что функционал  $f$  представляет функцию  $f(t)$ , т. е. рассматривать обычную функцию как обобщенную. Обобщенной функцией является и  $\delta$ -функция, которая строго определяется как функционал, сопоставляющий каждой функции  $\varphi \in \mathcal{A}$  ее значение в точке  $t = 0$ :

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad (26)$$

(ср. с формулой (22)).

Обобщенная функция — не функция, а функционал, поэтому ее значение в точке смысла не имеет. Однако говорят, что обобщенная функция равна нулю в окрестности точки  $t_0$ , если для всех основных функций  $\varphi$ , отличных от нуля лишь в пределах этой окрестности,  $(f, \varphi) = 0$ . *Носителем* обобщенной функции  $f$  называется совокупность точек  $t_0$  таких, что  $f$  не равна нулю ни в какой окрестности  $t_0$ . В частности, для обычных функций  $f(t)$  носитель совпадает с замыканием множества точек  $t$ , в которых  $f(t) \neq 0$ . Очевидно,  $\delta$ -функция равна нулю в окрестности любой точки  $t_0 \neq 0$ , так что ее носитель есть точка  $t = 0$ .

Сложение обобщенных функций определяется естественно:  $(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)$  для всех  $\varphi \in \mathcal{A}$ . Но перемножать их в общем случае нельзя, можно определить лишь произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Это делается при помощи следующего приема: для обычной функции  $f(t)$  и бесконечно дифференцируемой  $\alpha(t)$  имеем

$$(\alpha f, \varphi) = \int \alpha(t) \cdot f(t) \varphi(t) dt = (f, \alpha \varphi)$$

(мы смогли перебросить множитель  $\alpha$  к основной функции, ибо  $\alpha \varphi \in \mathcal{A}$  в силу бесконечной дифференцируемости  $\alpha$ ), и это свойство в общем случае принимается за определение: произведением обобщенной функции  $f$  на бесконечно дифференцируемую

функцию  $\alpha(t)$  называется функционал  $\alpha f$ , который действует на функции  $\varphi \in \mathcal{A}$  по правилу

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha \varphi). \quad (27)$$

Преимущества обобщенных функций особенно ярко проявляются при их дифференцировании. Так, отпадает необходимость всяких оговорок о существовании производных — *любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой*.

Это полезное свойство вытекает непосредственно из определения производной, в котором используется тот же прием переброски к основным функциям, что и в предыдущем определении. Именно, для обычных непрерывно дифференцируемых функций  $f(t)$  мы имеем

$$(f', \varphi) = \int f'(t) \varphi(t) dt = f(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f(t) \varphi'(t) dt = -(f, \varphi'),$$

(неинтегральный член исчезает, ибо  $\varphi(t)$  равна нулю вне конечного отрезка). В общем случае мы примем это за определение: *производной* обобщенной функции  $f$  называется функционал  $f'$  на пространстве  $\mathcal{A}$ , который действует на основные функции  $\varphi$  по правилу:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'). \quad (28)$$

Примеры. 1) Для единичной функции  $\eta(t)$  производная

$$(\eta', \varphi) = -(\eta, \varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(0),$$

ибо  $\varphi(\infty) = 0$ , следовательно,  $\eta' = \delta$  (ср. со сказанным на стр. 530).

2) Пусть  $f(t)$  — обычная функция, непрерывно дифференцируемая всюду, кроме точки  $t=0$ , где она имеет разрыв первого рода со скачком  $h = f(+0) - f(-0)$ . Ее производная в смысле теории обобщенных функций

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= - \int_{-\infty}^0 f(t) \varphi'(t) dt - \int_0^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \\ &= -f\varphi \Big|_{-\infty}^0 - f\varphi \Big|_0^{\infty} + \int f'(t) \varphi(t) dt = \int f'(t) \varphi(t) dt + h\varphi(0). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f' = f'_{\text{кл}}(t) + h\delta,$$

где слева стоит производная в смысле обобщенных функций, а справа — классическая производная (определенная всюду при  $t \neq 0$ ) и  $\delta$ -функция,

\* ) Производная основной функции также является основной.

умноженная на скачок  $f(t)$ . Этот пример является обобщением предыдущего, где  $f'_{кл}(t) = 0$  и  $h = 1$ .

3) Производная  $\delta$ -функции  $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$  и, вообще  $n$ -я производная  $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$ ; очевидно,  $\delta^{(n)} = \eta^{(n+1)}$  (ср. с формулой (24)).

Далее, последовательность обобщенных функций  $f_n$  называется *сходящейся* к обобщенной функции  $f$ , если для любой функции  $\varphi \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi) \quad (29)$$

(здесь речь идет о пределе последовательности комплексных чисел). Ряд из обобщенных функций  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм  $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$  сходится в смысле предыдущего определения.

Примеры. 1) Последовательность обычных функций  $\delta_n(t)$ , равная  $n$  на отрезке  $(0, 1/n)$  и нулю вне его, в классическом смысле расходится. Но по теореме о среднем

$$(\delta_n, \varphi) = n \int_0^{1/n} \varphi(t) dt = \varphi(\xi_n),$$

где  $\xi_n \in (0, 1/n)$  и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_n, \varphi) = \varphi(0)$ . Таким образом, в смысле обобщенных функций  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t)$  существует и равен  $\delta$ -функции (ср. стр. 529).

2) Точно так же предел последовательности обычных функций, графики которых изображены на рис. 184, в смысле обобщенных функций существует и равен  $\delta'$ .

Замечательно, что в теории обобщенных функций *любую сходящуюся последовательность или ряд можно почленно дифференцировать*. Это свойство получается сразу из определения: если  $f_n \rightarrow f$ , то  $(f'_n, \varphi) = -(f_n, \varphi')$  стремится к  $-(f, \varphi') = (f', \varphi)$  для любой  $\varphi \in \mathcal{A}$ , а это и означает, что  $f'_n \rightarrow f'$ . Таким образом, в теории обобщенных функций снимаются все классические предосторожности, связанные с дифференцированием последовательностей и рядов.

Наша дальнейшая цель — определить преобразование Лапласа обобщенных функций. Для обычных функций  $f(t)$  интеграл Лапласа

$$F(p) = \int f(t) e^{-pt} dt = (f, e^{-pt})$$



хочется рассматривать как значение функционала  $f$  на функцию  $e^{-pt}$ . Но последняя не принадлежит классу  $\mathcal{A}$  основных функций, и мы должны расширить этот класс, заменив условие равенства его функций нулю вне конечного отрезка менее строгим условием. Так как в теории преобразования Лапласа рассматриваются функции с носителями на полуоси  $t \geq 0$ , то на поведение основных функций при  $t \rightarrow -\infty$  мы не будем накладывать никаких ограничений. Однако мы потребуем, чтобы при  $t \rightarrow +\infty$  они стремились к нулю вместе со всеми производными быстрее любой степени  $1/t$ .

Иными словами, мы введем новый класс *основных функций*  $\mathcal{B}$ , состоящий из всех бесконечно дифференцируемых на оси  $t$  функций  $\varphi(t)$ , для каждой из которых  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^l \varphi^{(m)}(t) = 0$  при любых целых  $l, m \geq 0$ . Последовательность функций  $\varphi_n \in \mathcal{B}$  будем называть *сходящейся к нулю*, если для любых целых  $l, m \geq 0$  последовательность  $t^l \varphi_n^{(m)}(t)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на любом отрезке  $(a, \infty)$ .

Функционалы, линейные и непрерывные на пространстве  $\mathcal{B}$  (т. е. обладающее свойствами 1° и 2° стр. 532 с новым определением сходимости  $\varphi_n \rightarrow 0$ ) мы будем называть *обобщенными функциями класса  $\mathcal{B}^*$* . Так как  $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ , то, очевидно,  $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{A}^*$ , но обратное неверно — не все обобщенные функции класса  $\mathcal{A}^*$  продолжаются на основные функции из  $\mathcal{B}$  и, следовательно, принадлежат  $\mathcal{B}^*$ .

Теперь можно сформулировать основные определения. Будем называть обобщенную функцию  $f \in \mathcal{A}^*$  с носителем на полуоси  $t \geq 0$  *обобщенным оригиналом*, если существует действительное число  $s_0$  такое, что при всех  $s > s_0$  обобщенная функция  $e^{-st}f \in \mathcal{B}^*$ . *Изображением* такого оригинала называется функция комплексного переменного  $p = s + i\sigma$

$$F(p) = (f, e^{-pt}), \quad (30)$$

которая определена в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$  и понимается следующим образом. Для фиксированного  $p$ , для которого  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , выбирается число  $s_1$ ,  $s_0 < s_1 < s$ , и тогда

$$(f, e^{-pt}) = (e^{-s_1 t} f, e^{-(p-s_1)t}); \quad (30')$$

так как  $|e^{-(p-s_1)t}| = e^{-(s-s_1)t}$  быстро стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , то  $e^{-(p-s_1)t} \in \mathcal{B}$ , а по условию  $e^{-s_1 t} f \in \mathcal{B}^*$ , поэтому правая часть (30') определена (она, очевидно, не зависит от выбора  $s_1$ ).

Примеры. 1) Любой оригинал  $f(t)$  в смысле п. 79 является и обобщенным оригиналом, ибо  $e^{-s_1 t} f(t)$  при  $s_1 > s_0$  является интегрируемой функ-

ций, а для них, как мы условились на стр. 533,

$$(e^{-s_1 t} f, e^{-(p-s_1)t}) = \int f(t) e^{-pt} dt,$$

т. е. совпадает с интегралом Лапласа.

2) Любая обобщенная функция класса  $\mathcal{A}$  с ограниченным носителем принадлежит и классу  $\mathcal{B}^*$ , ибо поведение основных функций на бесконечности здесь несущественно. Поэтому для всех наших обобщенных функций преобразование Лапласа определено. В частности,

$$(\delta, e^{-pt}) = e^{-pt} |_{t=0} = 1, \quad (\delta', e^{-pt}) = (\delta, pe^{-pt}) = p,$$

и вообще

$$(\delta^{(n)}, e^{-pt}) = p^n$$

(ср. с формулой (24)).

Преобразование Лапласа обобщенных функций обладает многими свойствами классического преобразования; мы перечислим некоторые из них. Изображение  $F(p)$  обобщенного оригинала  $f$  оказывается аналитической функцией в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ , и остается справедливым свойство IV:

$$(-1)^n t^n f \doteq F^{(n)}(p).$$

Свойство III дифференцирования оригинала следует сразу из определения производной обобщенной функции:

$$(f', e^{-pt}) = p(f, e^{-pt}).$$

Заметим, что если, в частности,  $f$  — обычная функция, непрерывная при  $t > 0$ , то эта формула приводит к формуле (6) п. 80. В самом деле, согласно примеру 2) на стр. 534,  $f' = f'_{\text{кл}}(t) + f(0)\delta$ , где  $f(0)$  — правое предельное значение  $f(t)$  при  $t \rightarrow 0$  (левое равно нулю), и поэтому

$$(f', e^{-pt}) = -(f'_{\text{кл}}, e^{-pt}) - f(0)(\delta, e^{-pt}) = p(f, e^{-pt}) - f(0).$$

Свойство VII (теорема запаздывания) в общем случае не сохраняется, потому что функция  $f(t-\tau)$  не имеет смысла. Но, например, для  $\delta$ -функции она справедлива и имеет вид

$$\delta_\tau \doteq e^{-p\tau} \quad (\tau \geq 0),$$

где  $\delta_\tau$  — функция Дирака с носителем в точке  $\tau$  (в обозначениях раздела 7)  $\delta_\tau = \delta(t-\tau)$ .

В заключение приведем следующую теорему Л. Шварца. Для того чтобы аналитическая в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$  функция  $F(p)$  была преобразованием Лапласа некоторой обобщенной функции  $f$  с носителем на полуоси  $t \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $|F(p)|$  в этой полуплоскости не превосходил некоторой степени  $|p|^n$ .

Таблица оригиналов и их изображений \*)

№ п/п	Оригинал	Изображение
1 (83.4)	$t^a (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
2 (80.1)	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
3	$e^{-\lambda t} t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$
4 (80.3)	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
5 (80.4)	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6 (80.12)	$t^n \sin \omega t$	$n! \frac{\text{Im}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$
7 (80.12)	$t^n \cos \omega t$	$n! \frac{\text{Re}(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}}$
8 (80.22)	$e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha)$	$\frac{\omega \cos \alpha + (p+\lambda) \sin \alpha}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$
9 (80.22)	$e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha)$	$\frac{(p+\lambda) \cos \alpha - \omega \sin \alpha}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$
10 (80.4)	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
11 (80.4)	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
12 (80.15)	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \frac{p-a}{p-b}$
13 (83.5')	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
14	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{a^2}{p}} \text{Erfi}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)$
15	$e^{-a^2 t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{p^2}{4a^2}} \text{Erfi}\left(\frac{p}{2a}\right)$
16 (81.10)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

\*) В скобках под порядковыми номерами указаны пункт и номер формулы в тексте;  $\Gamma$  — гамма-функция (пп. 74, 89);  $\text{erf}$  и  $\text{Erfi}$  — функции вероятности ошибок (п. 70);  $\text{si}$ ,  $\text{Si}$ ,  $\text{Ci}$  и  $\text{Ei}$  — интегральные функции (пп. 70, 76);  $S$  и  $C$  — интегралы Френеля (п. 83);  $J_n$ ,  $I_n$ ,  $Y_n$ ,  $H_n^{(i)}$ ,  $\text{ber}$ ,  $\text{bei}$  — цилиндрические функции (п. 96).

Продолжение таблицы

№ п/п	Оригинал	Изображение
17	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$
18	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$
19 (83.20)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p}$
20 (83.20)	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}} \cos \frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p}$
21	$\sqrt{\frac{1}{\pi t}} \sin \omega t$	$\sqrt{\frac{V p^2 + \omega^2 - p}{p^2 + \omega^2}}$
22	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \omega t$	$\sqrt{\frac{V p^2 + \omega^2 + p}{p^2 + \omega^2}}$
23	$\frac{1}{1 \pm t}$	$\mp e^{\pm p} \text{Ei}(\mp p)$
24	$\frac{1}{1 + t^2}$	$\sin p \text{Ci } p - \cos p \text{Si } p$
25	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^p \text{Erf } \sqrt{p}$
26	$\frac{1}{t} \ln(1+t^2)$	$\text{Ci}^2 p + \text{Si}^2 p$
27	$\frac{1}{t} \ln(1-t^2)$	$\text{Ei } p \text{Ei}(-p)$
28 (82.7)	$J_n(t) \ (n > -1)$	$\frac{(V p^2 + 1 - p)^n}{V p^2 + 1}$
29	$\frac{J_n(at)}{t} \ (n > 0)$	$\frac{1}{n a^n} (V p^2 + a^2 - p)^n$
30 (83.10)	$e^{-at} I_0(\beta t)$	$\frac{1}{V(p+a)^2 - \beta^2}$
31	$\lambda^n e^{-\lambda t} I_n(\lambda t) \ (n > -1)$	$\frac{(p + \lambda - V p^2 + 2p\lambda)^n}{V p^2 + 2p\lambda}$
32	$t^n J_n(t) \ (n > -\frac{1}{2})$	$\frac{2^n}{V\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{(p^2 + 1)^{n + \frac{1}{2}}}$
33 (82.3)	$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \ (n > -1)$	$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{2p}}$
34	$\frac{1}{\sqrt{t}} J_{2n}(2\sqrt{t})$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{1}{2p}} I_n\left(\frac{1}{2p}\right)$

Продолжение таблицы

№ п/п	Оригинал	Изображение
35 (99.19)	$J_0(a\sqrt{t^2 - \tau^2}) \eta(t - \tau)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}} e^{-\tau \sqrt{p^2 + a^2}}$
36	$\frac{J_1(a\sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \eta(t - \tau)$	$\frac{e^{-\tau p} - e^{-\tau \sqrt{p^2 + a^2}}}{a\tau}$
37	$Y_0(t)$	$-\frac{2}{\pi} \frac{\ln(p + \sqrt{p^2 + 1})}{\sqrt{p^2 + 1}}$
38	$H_0^{(1, 2)}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \mp \frac{2i}{\pi} \frac{\ln(p + \sqrt{p^2 + 1})}{\sqrt{p^2 + 1}}$
39	$\sqrt{2} \operatorname{ber} \omega t$	$\sqrt{\frac{V p^4 + \omega^4 + p^2}{p^4 + \omega^4}}$
40	$\sqrt{2} \operatorname{bei} \omega t$	$\sqrt{\frac{V p^4 + \omega^4 - p^2}{p^4 + \omega^4}}$
41 (83.8)	$\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{p \sqrt{p + a}}$
42 (81.13)	$\operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p} e^{-a \sqrt{p}}$
43 (83.6)	$e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{p + \sqrt{p}}$
44 (83.7)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{Erf}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{1 + \sqrt{p}}$
45 (83.9)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at} + \sqrt{a} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{p + a}}{p}$
46 (80.16)	$\operatorname{si} t$	$\frac{\operatorname{arccig} p}{p}$
47 (83.14)	$\operatorname{Ci} t$	$\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$
48 (83.12)	$S(t)$	$\frac{1}{2p} \frac{\sqrt{V p^2 + 1} - p}{\sqrt{p^2 + 1}}$
49 (83.11)	$C(t)$	$\frac{1}{2p} \frac{\sqrt{V p^2 + 1} + p}{\sqrt{p^2 + 1}}$
50 (83.15)	$-\operatorname{Ei}(-t)$	$\frac{1}{p} \ln(1 + p)$

Достаточность условия доказывается просто: можно считать  $s_0 > 0$ , и в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq s_0$  функция  $\frac{F(p)}{p^{n+2}} = G(p)$  удовлетворяет достаточному условию для изображения классического оригинала  $g(t)$  (теорема 4 п. 79). Но тогда  $F(p)$  будет изображением  $(n+2)$ -й производной  $g(t)$  в смысле обобщенных функций, которая всегда существует. На доказательстве необходимости мы не останавливаемся.

Для удобства читателя мы приводим сводку всех полученных операционных соотношений, а также некоторых соотношений, которые получаются аналогичными приемами. Большой сборник операционных соотношений читатель может найти в справочнике В. А. Диткина и П. И. Кузнецова [10].

## § 2. Приложения

Мы рассмотрим здесь приложения операционного метода к решению задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями. Некоторые приложения операционного метода к специальным функциям мы рассмотрим в следующей главе.

**84. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы.** Операционный метод особенно просто применяется к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L[x] = a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (1)$$

и начальные условия

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (2)$$

Будем считать, что  $a_0 \neq 0$ , а функция  $f(t)$  и решение  $x(t)$  вместе с его производными до  $n$ -го порядка являются оригиналами; обозначим  $X(p) \doteq x(t)$ ,  $F(p) \doteq f(t)$ .

По правилу дифференцирования и свойству линейности вместо дифференциального уравнения (1) с начальными данными (2) получаем *операторное уравнение*

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) X(p) = F(p) + x_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + x_1(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1} a_0,$$

или

$$A(p) X(p) = F(p) + B(p), \quad (3)$$

где  $A(p)$  и  $B(p)$  — известные многочлены. Решая это уравнение, найдем *операторное решение*:

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \quad (4)$$

Если уравнение (1) при начальных данных (2) допускает решение  $x(t)$ , удовлетворяющее условиям, наложенным на оригиналы (а можно было бы доказать, что такое решение существует в принятых условиях всегда), то это решение является оригиналом  $X(p)$ .

Приведем несколько примеров решения уравнений таким методом.

1)  $x'' + a^2x = b \sin at$ , общие начальные данные. Операторное уравнение  $(p^2 + a^2)X = \frac{ab}{p^2 + a^2} + x_0p + x_1$ ; его решение \*):

$$X(p) = \frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} + x_0 \frac{p}{p^2 + a^2} + \frac{x_1}{p^2 + a^2}. \quad (5)$$

Оригиналы второго и третьего члена есть в таблице. Оригинал первого члена находим по формуле 6 таблицы и по теореме об интегрировании оригинала

$$\frac{ab}{(p^2 + a^2)^2} \doteq \frac{b}{2} \int_0^t t \sin at \, dt = \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at);$$

можно было воспользоваться также теоремой разложения. Окончательно:

$$x(t) = \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right) \frac{\sin at}{a} + \left(x_0 - \frac{bt}{2a}\right) \cos at. \quad (6)$$

2)  $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ , нулевые начальные данные. Операторное уравнение:  $(p+1)^3 X = 1/p$ ; его решение:

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)^3} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3}.$$

Оригинал находим по формулам 1 и 11 таблицы:

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{t^2}{2} e^{-t}. \quad (7)$$

3)  $x''' + x = 1$ , нулевые начальные данные. Операторное решение:

$$X(p) = \frac{1}{p(p^3 + 1)}.$$

Оригинал находим по второй теореме разложения:

$$x(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} + 2 \operatorname{Re} \frac{e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) t}}{-3} = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}. \quad (8)$$

4)  $x^{IV} + 2x'' + x = \sin t$ , нулевые начальные данные. Операторное решение:

$$X(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}.$$

---

\*) Имеем  $\lim_{p \rightarrow \infty} pX = x_0$  в соответствии с начальным условием (см. предельное соотношение (1) п. 83). Аналогичную проверку допускают и другие примеры.

Оригинал находим как вычет функции  $X(p) e^{pt}$  в особой точке  $p = i$ :

$$x(t) = \operatorname{Re} \frac{d^2}{dp^2} \left[ \left\{ \frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right\} \right]_{p=i} = \frac{1}{8} (3 - t^2) \sin t - \frac{3}{8} t \cos t. \quad (9)$$

5)  $x'' + \omega^2 x = a [\eta(t) - \eta(t-b)]$ , нулевые начальные данные. Операторное уравнение находим по теореме запаздывания; его решение:

$$X(p) = \frac{a(1 - e^{-bp})}{p(p^2 + \omega^2)}.$$

По второй теореме разложения

$$\frac{a}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{a}{\omega^2} - \frac{a}{\omega^2} \cos \omega t = \frac{2a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2},$$

по теореме запаздывания

$$\frac{ae^{-bp}}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{2a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b).$$

Окончательно,

$$x(t) = \frac{2a}{\omega^2} \left[ \sin^2 \frac{\omega t}{2} \eta(t) - \sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b) \right]. \quad (10)$$

График решения изображен на рис. 185.

6) Точечная масса  $m$  совершает прямолинейные колебания, причем сопротивлением среды мы пренебрегаем, а восстанавливающая сила  $m\omega^2 x$  пропорциональна смещению. В моменты времени  $t_k = k\tau$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  массе сообщаются импульсы величины  $a$ . Найти движение частицы, если начальное отклонение и начальная скорость равны нулю.

Уравнение движения имеет вид

$$mx'' + m\omega^2 x = a \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau),$$

где  $\delta(t)$  — импульсная функция. Решение операторного уравнения

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{a}{m} \frac{1}{p^2 + \omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau p} = \\ &= \frac{a}{m} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)(1 - e^{-\tau p})} \end{aligned}$$

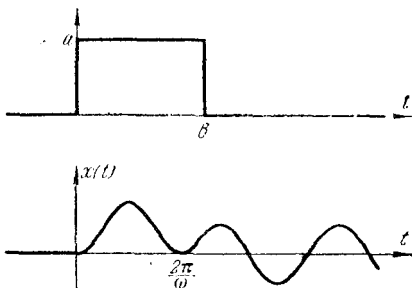


Рис. 185.

удовлетворяет условиям второй теоремы разложения. Согласно этой теореме оригинал представляет собой сумму вычетов функции  $X(p) e^{pt}$  во всех ее полюсах:  $p=0$ ,  $p = \pm i\omega$  и  $p_k = \frac{2k\pi i}{\tau}$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Если  $\tau$  не является целым кратным  $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ , что мы и предположим, то все полюсы простые, и, найдя вычеты, мы получим окончательно:

$$x(t) = \frac{a}{m\omega^2} \left\{ \frac{1}{\tau} - \frac{\omega}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} \cos \omega \left( t + \frac{\tau}{2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\tau}{\tau^2 - k^2\tau_1^2} \cos k \frac{\tau_1}{\tau} \omega t \right\}. \quad (11)$$



Отметим особо роль интеграла Дюамеля п. 81. Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L[x] = f(t) \quad (12)$$

при нулевых начальных условиях. Если известно решение  $x_1(t)$  уравнения

$$L[x] = 1 \quad (13)$$

с той же левой частью и правой частью 1, также при нулевых начальных условиях, то интеграл Дюамеля позволяет написать решение уравнения (12) без всяких вычислений.

В самом деле, операторные уравнения, соответствующие уравнениям (12) и (13), имеют вид

$$A(p)X(p) = F(p), \quad A(p)X_1(p) = \frac{1}{p},$$

где  $F(p)$  — изображение  $f(t)$ , откуда

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Таким образом, согласно формуле Дюамеля,

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x'_1(t - \tau) d\tau \quad (14)$$

(мы учитываем, что  $x_1(0) = 0$  согласно начальным условиям), или

$$x(t) = x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(\tau)f'(t - \tau) d\tau. \quad (15)$$

Пример. Уравнение  $x'' - a^2x = be^{-t^2}$ , нулевые начальные условия. Сначала решаем уравнение  $x'' - a^2x = 1$  при тех же условиях

$$X_1 = \frac{1}{p(p^2 - a^2)} = \frac{1}{a} \int_0^t \operatorname{sh} at dt = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1)$$

(мы воспользовались формулой 10 таблицы и теоремой об интегрировании оригинала). По формуле (14) находим искомое решение

$$x(t) = \frac{b}{a} \int_0^t e^{-\tau^2} \operatorname{sh} a(t - \tau) d\tau,$$

которое после простых преобразований выражается через функцию  $\operatorname{erf}$ :

$$x(t) = \frac{b\sqrt{\pi}}{4a} e^{\frac{a^2}{4}} \left\{ e^{at} \operatorname{erf}\left(t + \frac{a}{2}\right) - e^{-at} \operatorname{erf}\left(t - \frac{a}{2}\right) - 2 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{ch} at \right\}. \quad (16)$$

Совершенно аналогично применяется операционный метод и к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть, например, нужно решить систему  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка

$$L_v = \sum_{k=1}^n \left( a_{vk} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{vk} \frac{dx_k}{dt} + c_{vk} x_k \right) = f_v(t) \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

при заданных начальных условиях

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad \frac{dx_k(0)}{dt} = \beta_k. \quad (18)$$

Если считать  $x_k(t)$  и  $f_v(t)$  оригиналами и обозначить через  $X_k(p)$  и  $F_v(p)$  их изображения, то система (17) с начальными условиями (18) заменится операторной системой

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{vk} p^2 + b_{vk} p + c_{vk}) X_k(p) &= \\ &= F_v(p) + \sum_{k=1}^n [(a_{vk} p + b_{vk}) \alpha_k + a_{vk} \beta_k]. \end{aligned} \quad (19)$$

Решая ее как алгебраическую линейную систему уравнений, найдем  $X_k(p)$ , а затем и их оригиналы  $x_k(t)$ . Приведем несколько примеров.

1) Решить систему

$$(2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0,$$

$$(2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0$$

при начальных условиях  $x(0) = x'(0) = 1$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ . Переходим к операторной системе

$$(2p^2 - p + 9)X - (p^2 + p + 3)Y = 2p + 1,$$

$$(2p^2 + p + 7)X - (p^2 - p + 5)Y = 2p + 3$$

и для упрощения берем сумму и разность ее уравнений

$$2X - Y = 2 \frac{p+1}{p^2+4}, \quad X + Y = \frac{1}{p-1}.$$

Отсюда

$$X = \frac{1}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4},$$

$$Y = \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} - \frac{2}{3} \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{3} \frac{1}{p^2+4}.$$

Переходя к оригиналам, находим окончательно:

$$x = \frac{1}{3} (e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t), \quad y = \frac{1}{3} (2e^t - 2 \cos 2t - \sin 2t). \quad (20)$$

## 2) Система

$$x'' - x + y + z = 0,$$

$$x + y'' - y + z = 0,$$

$$x + y + z'' - z = 0,$$

начальные условия  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$ . Операторная система имеет вид

$$(p^2 - 1)X + Y + Z = p,$$

$$X + (p^2 - 1)Y + Z = 0,$$

$$X + Y + (p^2 - 1)Z = 0.$$

Ее решение легко получить с помощью определителей

$$X = \frac{p^3}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}, \quad Y = Z = -\frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 - 2)}.$$

По второй теореме разложения находим оригиналы

$$x = \frac{2}{3} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3} \cos t, \quad y = z = -\frac{1}{3} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + \frac{1}{3} \cos t. \quad (21)$$

## 3) Система уравнений

$$x'_0 = -ax_0, \quad x'_k + ax_k = ax_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

при начальных данных  $x_0(0) = 1$ ,  $x_1(0) = \dots = x_n(0) = 0$ . Операторная система имеет вид:

$$(p + a)X_0 = 1, \quad (p + a)X_k - aX_{k-1} = 0,$$

откуда

$$X_k = \frac{a^k}{(p + a)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Оригиналы находим по формуле 3 таблицы

$$x_k(t) = \frac{1}{k!} (at)^k e^{-at}. \quad (22)$$

4) Три одинаковые точечные массы  $m$  закреплены на струне так, что расстояния между ними и расстояния от крайних масс до закрепленных концов струны равны  $l$ . В начальный момент все массы находятся в положении равновесия, причем средней массе сообщается импульс  $v_0$ . Найти движение системы.

Дифференциальные уравнения движения системы проще всего найти с помощью уравнений Лагранжа, которые для малых свободных колебаний имеют вид (см. [8]):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0,$$

где  $T$  — кинетическая,  $\Pi$  — потенциальная энергия системы,  $q_k$  — обобщенные координаты, и точка означает дифференцирование по времени.

В нашем случае, если обозначить  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  отклонения масс от положения равновесия, будем иметь:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad \Pi = \frac{P}{l} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3),$$

где  $P$  — натяжение струны. Следовательно, уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_1 + \lambda (2x_1 - x_2) = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \lambda (2x_2 - x_1 - x_3) = 0,$$

$$\ddot{x}_3 + \lambda (2x_3 - x_2) = 0,$$

где  $\lambda = \frac{P}{ml}$ . Учитывая начальные условия  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ ,  $\dot{x}_2(0) = v_0$ , получим операторные уравнения

$$(p^2 + 2\lambda) X_1 - \lambda X_2 = 0,$$

$$-\lambda X_1 + (p^2 + 2\lambda) X_2 - \lambda X_3 = v_0,$$

$$-\lambda X_2 + (p^2 + 2\lambda) X_3 = 0.$$

Решив эту систему, найдем:

$$X_2 = \frac{p^2 + 2\lambda}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2} v_0, \quad X_1 = X_3 = \frac{\lambda}{(p^2 + 2\lambda)^2 - 2\lambda^2} v_0.$$

Применяя вторую теорему разложения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) = x_3(t) &= -\frac{v_0}{2\sqrt{2}} \left( \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right), \\ x_2(t) &= \frac{v_0}{2} \left( \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} + \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\lambda}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\lambda}$ .

Операционный метод может оказаться полезным и при решении некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Пусть  $x(t) \doteq X(p)$ ; по теоремам о дифференцировании оригиналов и изображений имеем:

$$x \doteq X, \quad tx \doteq -X', \quad t^2 x \doteq X'', \dots,$$

$$x' \doteq pX - x(0), \quad tx' \doteq -(pX)', \quad t^2 x' \doteq (pX)'', \dots, \quad (24)$$

$$x'' \doteq p^2 X - x(0)p - x'(0), \quad tx'' \doteq -(p^2 X)' + x(0), \quad t^2 x'' \doteq (p^2 X)'', \dots$$

и т. д. Переход к изображениям позволяет иногда упростить дифференциальные уравнения, содержащие члены подобного вида.

Пример. Дифференциальное уравнение

$$tx'' + x' + tx = 0 \quad (25)$$

называется уравнением цилиндрических функций с индексом 0 (см. п. 95). По формулам (24) находим операторное уравнение

$$(p^2 + 1) X' + pX = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, оно легко решается и дает:

$$X = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}},$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Так как  $\lim_{p \rightarrow \infty} pX = C$ , то согласно предельному соотношению (1) п. 83 мы должны иметь  $C = x(0)$ . Положив для определенности  $x(0) = 1$ , мы найдем по формуле 28 таблицы, что решением уравнения (25) при этом начальном условии служит бесселева функция \*)

$$x = J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \quad (26)$$

**85. Расчет электрических контуров.** Как известно, ток  $i(t)$  и напряжение  $u(t)$  на концах элемента цепи, содержащего активное сопротивление  $R$ , самоиндукцию  $L$  или емкость  $C$ , связаны соответственно соотношениями

$$u(t) = Ri(t), \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C} \left\{ \int_0^t i(t) dt + q_0 \right\}, \quad (1)$$

где  $q_0$  — начальный заряд на обкладках конденсатора.

Если ввести изображения  $i(p)$  и  $u(p)$  — «операторный ток»  $I(p)$  и «операторное напряжение»  $U(p)$ , то эти соотношения перейдут в следующие:

$$U = RI, \quad U = L(pI - i_0), \quad U = \frac{1}{Cp}(I + q_0), \quad (2)$$

где  $i_0 = i(0)$  — начальный ток. Если считать  $i_0 = q_0 = 0$ , что соответствует задачам включения, то вместо уравнений (2) будем иметь:

$$U = RI, \quad U = LpI, \quad U = \frac{1}{Cp}I.$$

Последние соотношения объединяются в форме «операторного закона Ома»

$$U = ZI, \quad (3)$$

где  $Z$  — «операторное сопротивление» (его называют также *импедансом*), которое в случае активного сопротивления, самоиндукции и емкости соответственно равно

$$Z_R = R, \quad Z_L = Lp, \quad Z_C = \frac{1}{Cp}. \quad (4)$$

\*) Точка  $t = 0$  является особой для дифференциального уравнения (25); этим и объясняется, что операторное уравнение не содержит начальных условий. В гл. VII мы увидим, что все решения уравнения (25), правильные в точке  $t = 0$ , пропорциональны решению (26). Решения этого уравнения, линейно независимые с (26), имеют особенность при  $t = 0$ .

Далее заметим, что при последовательном соединении двух элементов с импедансами  $Z_1$  и  $Z_2$  получим  $U_1 = Z_1 I$ ,  $U_2 = Z_2 I$ ,  $U = U_1 + U_2$  (смысл обозначений понятен); откуда  $U = (Z_1 + Z_2)I = ZI$ , или

$$Z = Z_1 + Z_2. \quad (5)$$

Аналогично при параллельном соединении  $U = Z_1 I_1 = Z_2 I_2$ ,  $I_1 + I_2 = I$ , откуда, положив  $U = ZI$ , найдем:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (6)$$

Таким образом, операторные сопротивления цепей в случае задач включения можно подсчитывать по обычным правилам соединения элементов.

Если начальные ток и заряд отличны от нуля, то в уравнении (3) появляются дополнительные члены. Например, в случае последовательно соединенных сопротивлений, емкости и самоиндукции ( $RLC$ -контур), получим:

$$U = \left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I - Li_0 + \frac{q_0}{Cp} = ZI - Li_0 + \frac{q_0}{Cp}, \quad (7)$$

где  $Z = R + Lp + \frac{1}{Cp}$  — операторное сопротивление контура.

Если имеется цепь, составленная из элементов, представляющих собой  $RLC$ -контур, то в каждом таком контуре будем иметь:

$$R_k i_k(t) + L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \frac{1}{C_k} \left\{ \int_0^t i_k(t) dt + q_{k0} \right\} + \sum_{v \neq k} M_{kv} \frac{di_v(t)}{dt} = u_k(t), \quad (8)$$

где  $R_k$ ,  $L_k$ ,  $C_k$ ,  $q_{k0}$ ,  $i_k(t)$ ,  $u_k(t)$  — обычные величины для  $k$ -го контура, а  $M_{kv}$  — коэффициент взаимной индукции между  $k$ -м и  $v$ -м контурами. Переходя от (8) к операторному уравнению, получаем:

$$U_k = \sum_v Z_{kv} I_v + \frac{q_{k0}}{pC_k} - L_k i_{k0} - \sum_{v \neq k} M_{kv} i_{v0}, \quad (9)$$

где

$$Z_{kk} = R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p}, \quad Z_{kv} = M_{kv} p \quad (v \neq k). \quad (10)$$

Складывая соотношения (9) для всех элементов, образующих замкнутый контур, и пользуясь вторым законом Кирхгофа, находим:

$$\sum_k \sum_v Z_{kv} I_v = \sum_k \left( L_k i_{k0} + \sum_{v \neq k} M_{kv} i_{v0} - \frac{q_{k0}}{pC_k} \right) + U, \quad (11)$$

где сумма берется по всем элементам, образующим этот контур, и  $U$  означает сумму операторных э. д. с., приложенных к нему. Первый закон Кирхгофа дает для любой точки разветвления

$$\sum I_k = 0, \quad (12)$$

где сумма берется по всем элементам, ведущим в эту точку. Система уравнений (11) и (12) позволяет определить операторные токи во всех элементах цепи.

Отметим еще роль интеграла Дюамеля при решении задач включения. Рассматривая для простоты случай одного контура, получим для включения этого контура соответственно на э. д. с.  $u(t)$  и единичную э. д. с. следующие операторные уравнения:

$$I = AU, \quad I_1 = A \frac{1}{p},$$

где  $A = \frac{1}{Z}$  — операторная проводимость («адмитанс») контура. Поэтому

$$I = pI_1U$$

и по формуле Дюамеля

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) i_1'(t - \tau) d\tau = i_1(t) u(0) + \int_0^t i_1(\tau) u'(t - \tau) d\tau, \quad (13)$$

где  $i_1(t)$  — оригинал функции  $I_1(p)$  — ток в контуре при включении его на единичную э. д. с. («временная проводимость»).

Таким образом, зная ток в контуре при включении его на единичную э. д. с., мы можем по формуле Дюамеля (13) сразу написать значение тока в этом контуре при включении его на произвольную э. д. с. (ср. формулы (14) и (15) предыдущего пункта).

Предельные соотношения (1) и (2) п. 83 позволяют указать простую связь временной проводимости  $i_1(t)$  для момента включения ( $t = 0$ ) для установившегося режима ( $t = \infty$ ) со значениями операторной проводимости  $A(p)$  для  $p = \infty$  и  $p = 0$ . Именно, из равенства  $A = I_1 \cdot p$  на основании этих соотношений получаем:

$$i_1(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} I_1 p = A(\infty), \quad i_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} I_1 p = A(0). \quad (14)$$

Соотношения (14) удобно использовать для проверки вычислений.

Приведем несколько примеров применения операционного метода к расчету контуров и цепей:

1) Включение постоянной э. д. с.  $U_0$  в контур рис. 186 — последовательно соединенные самоиндукция и емкость, шунтированная сопротивлением.

Операторное сопротивление находим по формулам (4), (5) и (6):

$$Z = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{RCp + 1}.$$

Операторная э. д. с.  $U = \frac{U_0}{p}$ , следовательно, по формуле (3) операторный ток

$$I = \frac{U_0 (RCp + 1)}{p (LCRp^2 + Lp + R)}.$$

Временной ток находим по второй теореме разложения. Функция  $I(p)$  имеет полюсы первого порядка в точках  $p = 0$  и

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Если  $L < 4R^2C$ , то корни комплексно сопряжены,  $p_{1,2} = -\sigma \pm i\omega$ , где

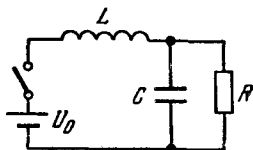


Рис. 186.

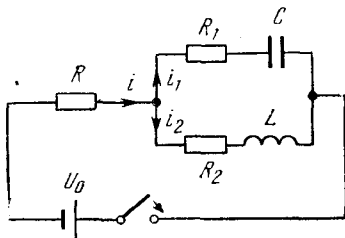


Рис. 187.

$\sigma = \frac{1}{2RC}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$ , и процесс имеет колебательный характер. По формуле (15) п. 82 находим тогда

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\sigma t} \left[ \cos \omega t + \left( \frac{\sigma}{\omega} - \frac{R}{\omega L} \right) \sin \omega t \right] \right\}. \quad (15)$$

Если же  $L > 4R^2C$ , то  $\omega$  будет чисто мнимым и, полагая в (15)  $\omega = i\lambda$ , где  $\lambda$  — действительно, найдем:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left\{ 1 - e^{-\sigma t} \left[ \operatorname{ch} \lambda t + \left( \frac{\sigma}{\lambda} - \frac{R}{\lambda L} \right) \operatorname{sh} \lambda t \right] \right\}. \quad (16)$$

Процесс имеет аperiодический характер.

2) Найдем ток  $i_1(t)$ , текущий через емкость  $C$  в контуре рис. 187, включенном на постоянную э. д. с.  $U_0$ . Пусть  $Z_1 = R_1 + \frac{1}{Cp}$  и  $Z_2 = R_2 + Lp$  — импедансы ветвей контура, по которым текут токи  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  (см. рис. 187) и

$$Z = R + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



— импеданс всего контура. Имеем  $I = \frac{U_0}{pZ} = I_1 + I_2$ ,  $I_1 Z_1 = I_2 Z_2$ , следовательно,  $I_1 = I - \frac{I_1 Z_1}{Z_2}$ , откуда

$$I_1 = \frac{Z_2 I}{Z_1 + Z_2} = \frac{U_0 Z_2}{p(Z_1 + Z_2) Z}.$$

Подставляя найденные значения  $Z_2$  и  $(Z_1 + Z_2) Z$ , получаем:

$$I_1(p) = \frac{U_0(R_2 + Lp)}{\alpha p^2 + 2\beta p + \gamma},$$

где  $\alpha = (R + R_1)L$ ,  $2\beta = (R_1 + R_2)R + R_1 R_2 + \frac{L}{C}$ ,  $\gamma = \frac{R_1 + R_2}{C}$ . Временной ток находится по формуле (13) п. 82:

$$i(t) = \frac{U_0}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{R_2 + Lp_k}{\alpha p_k + \beta} e^{p_k t} \quad (17)$$

где  $p_k$  — корни квадратного трехчлена в знаменателе выражения для  $I_1(p)$ .

3) Включение  $RLC$ -контура на синусоидальную э. д. с.  $U_0 \sin \omega t$ . Здесь  $Z = Lp + R + \frac{1}{Cp}$ ,  $U = \frac{U_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$ , следовательно, операторный ток равен

$$I_0(p) = \frac{U_0 \omega p}{(p^2 + \omega^2) \left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right)}. \quad (18)$$

По теореме разложения (15) п. 82

$$i_0(t) = U_0 \omega \left\{ \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega t}}{-L\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}} + 2 \operatorname{Re} \frac{p_0 e^{p_0 t}}{(p_0^2 + \omega^2)(2Lp_0 + R)} \right\},$$

где  $p_0 = -\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\sigma_0 + i\omega_0$  — корень квадратного трехчлена в знаменателе выражения (18) (мы считаем, что имеет место колебательный случай, т. е. что  $\omega_0$  — действительное число). Вводя принятые в электротехнике постоянные:  $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ ,  $X' = L\omega + \frac{1}{C\omega}$  (реактивные сопротивления),  $Z^* = \sqrt{R^2 + X^2}$  (полное сопротивление), после простых преобразований найдем:

$$i_0(t) = \frac{U_0}{Z^*} \sin(\omega t - \delta) - \frac{U_0}{\omega_0 Z^* \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t - \delta_0), \quad (19)$$

где  $\operatorname{tg} \delta = \frac{X}{R}$ ,  $\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\omega_0 X}{\sigma_0 X'}$ .

4) Пусть э. д. с., действующая на  $RLC$ -контур, на отрезке времени  $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ , равна  $U_0 \sin \omega t$ , а затем снова равна нулю. Найдем ток в кон-

туре при  $t > \frac{\pi}{\omega}$ . Действующая э. д. с.

$$u(t) = U_0 \left\{ \eta(t) \sin \omega t - \eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega t \right\} = \\ = U_0 \left\{ \eta(t) \sin \omega t + \eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \right\},$$

где  $\eta(t)$  — единичная функция; мы преобразовали второй член так, чтобы воспользоваться теоремой запаздывания. По этой теореме

$$U = \frac{U_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \left( 1 + e^{-p \frac{\pi}{\omega}} \right).$$

Операторный ток равен

$$I(p) = I_0(p) \left( 1 + e^{-p \frac{\pi}{\omega}} \right),$$

где  $I_0(p)$  определяется формулой (18). По той же теореме запаздывания

$$I_0(p) e^{-p \frac{\pi}{\omega}} = i_0\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) \eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right);$$

складывая правую часть этого соотношения с (19) и замечая, что при  $t > \frac{\pi}{\omega}$

имеем  $\eta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right) = \eta(t) = 1$ , находим искомый ток

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 Z^* \sqrt{LC}} e^{-\sigma_0 t} \left\{ \sin(\omega_0 t - \delta_0) + e^{\frac{\pi \sigma_0}{\omega}} \sin\left(\omega_0 t - \delta_0 - \pi \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right\}. \quad (20)$$

5) В контур рис. 188 включена на время  $\tau$  постоянная э. д. с.  $U_0$  и в момент  $t=0$  э. д. с. выключается; найти ток в контуре при  $t > 0$ .

Найдем ток на участке с самоиндукцией и заряд на конденсаторе в момент времени  $t=0$ . Для этого предварительно решим задачу включения контура на э. д. с.  $U_0$ . Пусть 1 и 2 будут участки контура, содержащие соответственно  $R$ ,  $L$  и  $C$ ; имеем

$$Z_1 = R + Lp, \quad Z_2 = \frac{1}{Cp},$$

$$I_1 Z_1 = -I_2 Z_2 = -\frac{U_0}{p}$$

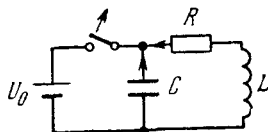


Рис. 188.

(направления токов указаны стрелками на рис. 188). Отсюда  $I_1 = -\frac{U_0}{p(R+Lp)}$ ,  $I_2 = U_0 C$ , следовательно,

$$i_1(t) = -\frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad i_2(t) = U_0 C \delta(t),$$

где  $\delta(t)$  — импульсная функция (см. п. 83). Таким образом, к моменту  $t = \tau$

$$i_0 = i_1(\tau) = -\frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}\tau} \right), \quad q_0 = U_0 C \int_0^\tau \delta(t) dt = U_0 C \quad (21)$$



Токи в соседних секциях (кроме первой и последней) связываются, таким образом, уравнением в конечных разностях \*)

$$(2Z + Z') I_k - Z(I_{k+1} + I_{k-1}) = 0. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) можно искать формально так же, как решение соответствующего дифференциального уравнения, в виде

$$I_k = Ae^{\gamma k} + Be^{-\gamma k}, \quad (26)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, а  $\gamma$  подбирается надлежащим образом.

Подставляя (26) в (25), получим уравнение для  $\gamma$ :  $2Z + Z' - 2Z \operatorname{ch} \gamma = 0$ , откуда

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + \frac{Z'}{2Z}. \quad (27)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются «граничными условиями», т. е. первым и последним из уравнений (24).

Найдя эти постоянные, мы представим выражение (26) в виде

$$I_k = \frac{U}{Z} \frac{\operatorname{ch}(n-k)\gamma}{\operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} n\gamma}. \quad (28)$$

В качестве примера рассмотрим дроссельный фильтр, для которого  $Z' = R + Lp$ ,

$Z = \frac{1}{pC}$ , включенный на постоянную э. д. с.  $U_0$ . Из (27) имеем:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{2}{LC}(1 - \operatorname{ch} \gamma) = 0, \quad (29)$$

и формула (28) принимает вид

$$I_k = U_0 C \frac{\operatorname{ch}(n-k)\gamma}{\operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} n\gamma}.$$

Знаменатель здесь обращается в нуль в точках  $\gamma_v = \frac{iv\pi}{n}$  ( $v=0, 1, \dots, n$ ), которым по формуле (29) соответствуют полюсы первого порядка

$$p=0, \quad p=-\frac{R}{L} \quad (v=0), \quad p=-\sigma \pm i\omega_v \quad (v=1, 2, \dots, n),$$

где  $\sigma = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_v = \sqrt{\frac{2}{LC} \left(1 - \cos \frac{v\pi}{n}\right) - \frac{R^2}{4L^2}}$ . Оригинал  $i_k(t)$  найдем по теореме разложения. Для этого сначала, пользуясь формулой (29), вычисляем:

$$B' = \frac{d}{dp} (\operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} n\gamma) = (\operatorname{cth} \gamma \operatorname{sh} n\gamma + n \operatorname{ch} n\gamma) \left( LCp + \frac{RC}{2} \right).$$

\*) Вводя разности  $\Delta I_k = I_{k+1} - I_k$  и  $\Delta^2 I_k = \Delta I_{k+1} - \Delta I_k$ , мы можем переписать уравнение (25) в виде  $\Delta^2 Z I_{k-1} - Z' I_k = 0$ . Это уравнение относится к классу линейных уравнений в конечных разностях (с постоянными коэффициентами). Решение таких уравнений во многом аналогично решению соответствующих дифференциальных уравнений. Сведения об уравнениях в конечных разностях читатель может найти в книге А. О. Гельфонда «Исчисление конечных разностей» (Гостехиздат, 1952).

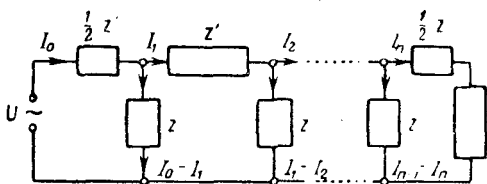


Рис. 190.

Переходя здесь к пределу при  $\gamma \rightarrow \gamma_0 = 0$  и соответственно при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $-\frac{R}{L}$ , найдем  $B'_0 = \pm nRC$ . Аналогично при  $\gamma \rightarrow \gamma_n = i\pi$  и  $\rho \rightarrow -\sigma_n \pm i\omega_n$  найдем  $B'_n = \pm 2i(-1)^n nLC\omega_n$ , а при  $\gamma \rightarrow \gamma_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n-1$ )  $B'_v = \pm i(-1)^v nLC\omega_v$ . Тогда теорема разложения даст ток в  $k$ -й секции фильтра:

$$i_k(t) = \frac{U_0}{nR} - \frac{U_0}{nR} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{(-1)^k U_0}{nL\omega_n} e^{-\sigma t} \sin \omega_n t + \\ + \frac{2U_0}{nL} e^{-\sigma t} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\sin \omega_v t}{\omega_v} \cos \frac{kv\pi}{n}. \quad (30)$$

Первый член здесь дает установившийся режим и равен напряжению, деленному на полное омическое сопротивление, остальные члены дают переходный ток. Затухание осциллирующих членов одинаково, при малых  $\frac{R}{2L}$  частоты

$$\omega_k \approx \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

Максимальная частота  $\omega_n = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ ; разница между частотами уменьшается при увеличении  $n$ , т. е. фильтр хорошо настраивается в резонанс для целой полосы частот. Его называют поэтому *полосным фильтром*.

8) *Фильтр с бесконечным числом элементов* более прост для исследования. Уравнение (27) останется в этом случае без изменения, а в формуле (28) следует перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$

$$I_k = \frac{Ue^{-k\gamma}}{Z \operatorname{sh} \gamma} \quad (31)$$

(мы считаем  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ ). Заменяя здесь  $Z \operatorname{sh} \gamma = Z \sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1}$  и  $e^\gamma = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1} + \operatorname{ch} \gamma$ , по формуле (27) получаем;

$$I_k = \frac{U}{\sqrt{ZZ'}} \frac{\left\{ \left( 1 + \frac{Z'}{2Z} \right) - \sqrt{\left( 1 + \frac{Z'}{2Z} \right)^2 - 1} \right\}^k}{\sqrt{1 + \frac{Z'}{2Z}}}. \quad (32)$$

В качестве примера рассмотрим бесконечный фильтр из емкостей и сопротивлений  $\left( Z = \frac{1}{C\rho}, Z' = R \right)$ , включенный на постоянную э. д. с.  $U_0$ . Формула (32) дает:

$$I_k = \frac{2U_0}{R\lambda^k} \frac{(\rho + \lambda - \sqrt{\rho^2 + 2\rho\lambda})^k}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho\lambda}},$$

где  $\lambda = \frac{2}{RC}$ . По формуле (31) таблицы находим оригинал

$$i_k(t) = \frac{2U_0}{R} e^{-\lambda t} I_k(\lambda t), \quad (33)$$

где  $I_k(t) = \frac{I_k(it)}{i^k}$  — цилиндрическая функция порядка  $k$  мнимого аргумента (см. п. 96).

**86. Уравнения с частными производными.** Операционный метод успешно применяется к решению так называемых *нестационарных задач* для уравнений математической физики. Для простоты мы ограничимся случаем, когда искомая функция  $u$  зависит от двух независимых переменных  $x$  и  $t$ , из которых первую мы будем трактовать как пространственную координату, а вторую как время. Кроме того, мы предположим, что дифференциальное уравнение имеет вид

$$L[u] = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где  $a, b, c, a_1$  и  $b_1$  — непрерывные функции от одного  $x$ , заданные в интервале  $0 \leq x \leq l$ . Мы будем всегда считать, что  $a > 0$  и рассматривать два основных случая: 1)  $a_1 < 0$  — *гиперболический случай* и 2)  $a_1 \equiv 0, b_1 < 0$  — *параболический случай*.

Нестационарная задача в нашем случае формулируется следующим образом.

Найти решение  $u(x, t)$  дифференциального уравнения (1) для  $0 \leq x \leq l$  и  $t \geq 0$ , удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (2)$$

(второе задается лишь в гиперболическом случае) и краевым условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t), \quad (3)$$

где  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — постоянные \*).

Нестационарность задачи выражается в том, что рассматривается решение, существенно зависящее от начальных условий («неустановившийся», «переходный» режим физического процесса).

Предположим, что  $u, \frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , рассматриваемые как функции  $t$ , являются оригиналами, и обозначим через

$$U(p, x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt$$

изображение функции  $u$ . В силу наших предположений тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \doteq \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteq \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

\*) Краевые условия могут несколько видоизменяться. Кроме того, часто встречается случай, когда  $l = \infty$ , тогда второе краевое условие отпадает.

(дифференцирование  $U$  по  $x$  мы обозначим с помощью символа  $d$ , а не  $\partial$ , ибо всюду в дальнейшем  $p$  будет рассматриваться лишь как параметр). По правилу дифференцирования оригиналов получаем также:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq pU - u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteq p^2 U - u(x, 0)p - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

или, учитывая начальные условия,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq pU - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteq p^2 U - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Предположим еще, что  $f(t)$  является оригиналом и  $F(p) \doteq f(t)$ , тогда граничные условия дают

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left[ \alpha \frac{dU}{dx} + \beta(pU - \varphi) \right]_{x=l} = \gamma U|_{x=l}.$$

Таким образом, *операционный метод приводит решение поставленной выше нестационарной задачи для уравнения (1) с частными производными к решению обыкновенного дифференциального уравнения*

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + AU + B = 0, \quad (4)$$

где

$$A = c + a_1 p^2 + b_1 p, \quad B = -a_1 p \varphi - a_1 \psi - b_1 \varphi$$

и  $p$  — комплексный параметр, при следующих граничных условиях:

$$U|_{x=0} = F(p), \quad \left[ \alpha \frac{dU}{dx} + (\beta p - \gamma) U - \beta \varphi \right]_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что в принятых условиях изображение  $U$  решения и нестационарной задачи удовлетворяет уравнению (4) и граничной задаче (5). Если известно, что нестационарная задача имеет единственное решение, удовлетворяющее вместе со своими производными первых двух порядков условиям, наложенным в п. 79 на оригиналы, и если задача (5) для уравнения (4) имеет единственное решение  $U$ , то, очевидно, решение нестационарной задачи можно получить как оригинал для  $U$ .

Приведем несколько примеров.

- 1) Температура  $u(x, t)$  в тонком стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $a^2$  — постоянный коэффициент. Рассмотрим распределение температур в полуограниченном стержне  $0 < x < \infty$ , если известен закон изменения темпе-

ратуры его левого конца, а начальная температура стержня равна нулю:

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = f(t). \quad (7)$$

Переходя к изображениям, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$pU = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad (8)$$

с комплексным параметром  $p$ , которое нужно решить при условии

$$U|_{x=0} = F(p). \quad (9)$$

Общее решение уравнения (8) есть

$$U = C e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x} + C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x};$$

здесь должно быть  $C_1 = 0$ , ибо иначе  $U$  будет неограниченно возрастать при  $x \rightarrow \infty$ . Условие (9) дает тогда  $C = F(p)$ , следовательно,

$$U = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

Для нахождения оригинала рассмотрим сначала частный случай  $f(t) \equiv 1$ ,

тогда  $F(p) = \frac{1}{p}$ ,  $U_1 = \frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}$  и по формуле 42 таблицы находим оригинал для  $U_1$ :

$$u_1(x, t) = \operatorname{Erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau. \quad (10)$$

В случае произвольных граничных данных (7) используем интеграл Дюамеля (6) п. 81; имеем  $U(p) = pF(p) U_1(p)$ , следовательно \*),

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi \quad (11) \end{aligned}$$

(мы положили  $\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$ ). При  $x=0$  из выражения (11) получаем  $u(0, t) = f(t) \operatorname{erf}(\infty) = f(t)$ , что и требуется.

\*) В обозначениях п. 81 здесь  $g(t) = \operatorname{Erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g'(t) =$

$$= \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$



2) Та же задача, но на левом конце стержня происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой, начальная температура стержня  $u_0 = \text{const}$ . Задача сводится к решению уравнения (6) при следующих начальных и крайних условиях:

$$u|_{t=0} = u_0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = hu|_{x=0} \quad (12)$$

( $h > 0$  — постоянная). Операторное уравнение имеет вид

$$\rho U - a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = u_0;$$

его нужно решить при условии:  $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = hU|_{x=0}$ . Решение этого уравнения, ограниченное при  $x \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$U = \frac{u_0}{p} + Ce^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Пользуясь граничным условием, находим окончательно:

$$\begin{aligned} U &= \frac{u_0}{p} \left( 1 - \frac{h}{\frac{\sqrt{p}}{a} + h} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \right) = \\ &= \frac{u_0}{p} \left( 1 - e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \right) + \frac{u_0}{a} \frac{1}{\sqrt{p} \left( \frac{\sqrt{p}}{a} + h \right)} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \end{aligned}$$

По формуле 42 таблицы имеем  $\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \rightleftharpoons \text{Erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$ , следовательно, оригинал первого члена равен  $u_0 \text{erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right)$ . Для нахождения оригинала второго члена заметим, что по теоремам запаздывания и подобия

$$F(p) = \frac{1}{\frac{p}{a} + h} e^{-p \frac{x}{a}} \rightleftharpoons ae^{-h(at-x)} \eta(at-x).$$

Тогда по следствию теоремы Эфроса (11) п. 81

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{p}}{a} + h} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \rightleftharpoons \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x}{a}}^{\infty} e^{-h(a\tau-x) - \frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$$

Заменяя здесь  $\frac{\tau + 2ah t}{2\sqrt{t}} = \xi$ , найдем окончательно:

$$u(x, t) = u_0 \left\{ \text{erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + e^{hx + a^2 h^2 t} \text{Erf} \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t} \right) \right\}. \quad (13)$$

3) Рассмотрим распределение температур в ограниченном стержне  $0 < x < l$ , левый конец которого теплоизолирован, а на правом поддержи-

вается постоянная температура  $u_1$ ; начальная температура  $u_0$  также постоянна. Задача сводится к решению уравнения (6) при условиях

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1.$$

Операторное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U = -\frac{u_0}{a^2};$$

его надо решить при условиях

$$\frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = \frac{u_1}{p}.$$

Общее решение операторного уравнения берем в виде

$$U = \frac{u_0}{p} + C_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} x + C_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} x;$$

подстановка первого краевого условия дает  $C_1 = 0$ , второго —  $C_2 = \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}}$ . Таким образом, изображение решения имеет вид

$$U = \frac{u_0}{p} + \frac{u_1 - u_0}{p} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}}.$$

Функция  $U(p)$  однозначна, ибо гиперболический косинус — функция четная и его тейлоровское разложение содержит лишь четные степени аргумента. Эта функция мероморфна и имеет простые полюсы в точках  $p=0$  и  $p_k = -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Можно доказать, что она удовлетворяет условиям второй теоремы разложения \*).

\*) Наметим путь доказательства: положим  $\frac{l}{a} \sqrt{p} = q$ ; тогда, повторяя рассуждения, которые мы проводили в п. 71 для  $\operatorname{ctg} z$ , мы покажем, что функция  $\frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}} = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{l} p}{\operatorname{ch} q}$  остается ограниченной в плоскости с исключенными (посредством кружков) полюсами. Отсюда следует, что функция  $\frac{1}{p} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}}$  стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$  на некоторой системе окружностей (условие 2 теоремы); кроме того, так как при больших  $|p|$  модуль этой функции не превосходит некоторой постоянной, умноженной на  $\frac{1}{|p|} e^{\frac{x-l}{a} \sqrt{|p|}}$ , и у нас  $x < l$ , то эта функция абсолютно интегрируема на прямой  $\operatorname{Re} p = \alpha$  (условие 3 теоремы). (В первом издании книги здесь была допущена неточность, на которую нам любезно указал Ким Сен Ен (Корея).)

Обозначим  $A(p) = u_0 \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p} + (u_1 - u_0) \operatorname{ch} \frac{x}{a} \sqrt{p}$ ,  $B(p) = p \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{p}$ ;

тогда  $U = \frac{A(p)}{B(p)}$ ,  $A(0) = u_1$ ,  $B'(0) = 1$ , и для  $p = p_k = -\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , имеем:

$$A(p_k) = (u_1 - u_0) \operatorname{ch} \frac{x}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right) i\pi = (u_1 - u_0) \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l},$$

$$B'(p_k) = \frac{l}{2a} \sqrt{p_k} \operatorname{sh} \frac{l}{a} \sqrt{p_k} = (-1)^k \frac{\pi}{2} \left(k - \frac{1}{2}\right).$$

Вторая теорема разложения даст тогда

$$u(x, t) = u_1 + \frac{2(u_1 - u_0)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \frac{1}{2}} \cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} e^{-\frac{a^2 \pi^2}{l^2} \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 t} \quad (14)$$

4) Для уменьшения скорости нейтронов, которые освобождаются в результате цепной реакции, происходящей в ядерных реакторах, применяются замедлители (обыкновенно — графитовые). Рассмотрим замедлитель в форме полупространства  $x > 0$ , который содержит плоский источник нейтронов, пусть в плоскости  $x = x_0$ . При известных упрощающих предположениях процесс замедления нейтронов в этом замедлителе описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \chi(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \chi(x, \theta)}{\partial x^2} + \delta(x - x_0) \delta(\theta), \quad (15)$$

где  $\theta$  — символический возраст нейтронов,  $\chi(x, \theta)$  — плотность их замедления, т. е. число нейтронов на единицу объема и в единицу времени, а  $\delta$  — импульсная функция\*).

Это уравнение нужно решить при граничном условии

$$\left(\chi - \gamma \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (16)$$

где  $\gamma$  — некоторая постоянная (это соотношение физически выражает условие равенства нулю полного потока нейтронов через плоскость  $x = 0$ ) и условия, что плотность замедления стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x, \theta) = 0 \quad (17)$$

для всех  $\theta$ . Начальные условия (условия при  $\theta = 0$ ) отсутствуют, ибо уравнение содержит импульсную функцию.

Применяя преобразование Лапласа по  $\theta$  и используя соотношение  $\delta(\theta) \rightleftharpoons 1$ , мы приходим к операторному уравнению

$$pX = \frac{d^2 X}{dx^2} + \delta(x - x_0). \quad (18)$$

Наличие в уравнении импульсной функции приводит к тому, что его решение, оставаясь непрерывным при  $x = x_0$ , испытывает в этой точке разрыв

\* Вывод уравнения (15) читатель может найти в книге Снеддона [10], § 27.

производной. В самом деле, интегрируя уравнение (18) по  $x$  вдоль отрезка  $(x_0 - h, x_0 + h)$  и пользуясь свойством интеграла от  $\delta$ -функции, мы находим:

$$p \int_{x_0-h}^{x_0+h} X dx = \frac{dX}{dx} \Big|_{x_0-h}^{x_0+h} + 1,$$

откуда, пользуясь непрерывностью функции  $X$ , в пределе при  $h \rightarrow 0$  получаем:

$$\frac{dX}{dx} \Big|_{x_0-0} - \frac{dX}{dx} \Big|_{x_0+0} = 1. \quad (19)$$

На основании сказанного общее решение уравнения (18) при  $x < x_0$  можно взять в виде

$$X = Ae^{(x_0-x)\sqrt{p}} + Be^{-(x_0-x)\sqrt{p}},$$

а при  $x > x_0$ , с учетом условия (17), в виде

$$X = Ce^{-(x-x_0)\sqrt{p}},$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — некоторые постоянные. Условия (16) и (19), а также условия непрерывности решения при  $x = x_0$  приводят к системе

$$\begin{aligned} A(1 + \gamma\sqrt{p})e^{x_0\sqrt{p}} + B(1 - \gamma\sqrt{p})e^{-x_0\sqrt{p}} &= 0, \\ \sqrt{p}(-A + B + C) &= 1, \quad A + B - C = 0, \end{aligned}$$

вполне определяющей эти постоянные. Решая эту систему, после несложных преобразований находим операторное решение:

$$X = \frac{e^{-|x-x_0|\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} + \frac{e^{-(x+x_0)\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} - \frac{e^{-(x+x_0)\sqrt{p}}}{\gamma p + \sqrt{p}}. \quad (20)$$

Оригиналы первых двух слагаемых есть в таблице. Чтобы найти оригинал третьего слагаемого, обозначим

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p + \sqrt{p}} = \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}},$$

тогда будем иметь  $F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{1 + \beta p}$  и по теореме запаздывания найдем ори-

гинал  $f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t-\alpha}{\beta}} \eta(t-\alpha)$ . Поэтому по следствию теоремы Эфроса (формула (11) п. 81) будем иметь:

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\beta p + \sqrt{p}} = \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\beta\sqrt{\pi t}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\beta} - \frac{\tau^2}{4t}} d\tau.$$

Полученный интеграл легко выразить через функцию  $\text{Erf}$ , если, выделив в показателе степени полный квадрат, положить  $\frac{\tau}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{\beta} = \xi$ ; получим

окончательно:

$$\frac{e^{-\alpha \sqrt{p}}}{\beta p + \sqrt{p}} = \frac{1}{\beta} e^{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{t}{\beta^2}} \operatorname{Erfi} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{\beta} \right). \quad (21)$$

Таким образом, мы находим оригинал решения (20) — окончательное выражение \*) для плотности замедления нейтронов:

$$\chi(x, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \left\{ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\theta}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}} \right\} - \frac{1}{\gamma} e^{\frac{x+x_0}{\gamma} + \frac{\theta}{\gamma^2}} \operatorname{Erfi} \left( \frac{x+x_0}{2\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{\gamma} \right). \quad (22)$$

Приведем еще приближенное выражение для этой функции при малых значениях  $\gamma$ . Пользуясь асимптотической формулой для функции  $\operatorname{Erfi} x$  (формула (11) п. 76), мы можем написать для больших  $x$ :

$$\operatorname{Erfi} x \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}.$$

Поэтому для малых  $\gamma$  последний член формулы (22) асимптотически равен

$$-\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi} \left( \frac{x+x_0}{2\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{\gamma} \right)} e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}} \approx -\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left( 1 - \frac{x+x_0}{2\theta} \gamma \right) e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}$$

и для малых  $\gamma$  мы имеем:

$$\chi(x, \theta) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \left\{ e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\theta}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}} \right\} + \frac{x+x_0}{2\theta\sqrt{\pi\theta}} \gamma e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\theta}}. \quad (23)$$

Для физических приложений важно уметь определять точку  $x = x_c$ , в которой скорость замедления равна нулю, так называемую экстраполированную конечную точку. На основании приближенного выражения (23) находим из условия  $\chi(x_c, \theta) = 0$

$$1 - e^{\frac{x_c x_0}{\theta}} \approx \gamma \frac{x_c + x_0}{\theta}.$$

Если еще считать  $x_c x_0$  малым в сравнении с  $\theta$ , получим:  $-x_c x_0 = \gamma(x_c + x_0)$ , откуда

$$x_c \approx -\frac{\gamma x_0}{x_0 + \gamma} \approx -\gamma.$$

5) В линейной теории неустановившегося обтекания крыльев самолета рассматривается следующая задача \*\*).

\*) Разрывность производной операторного решения в точке  $x = x_0$  при переходе к оригиналам исчезла.

\*\*) См., например, «Современное состояние аэродинамики больших скоростей» под редакцией Л. Хоурта (ИЛ, 1955), т. 1, гл. IX, § 6.

Функция двух переменных  $f(x, y)$  — приведенный потенциал сверхзвукового потока, обтекающего крыло, — равна нулю при  $x < 0$ , а при  $x \geq 0$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + c^2 f = 0, \quad (24)$$

где  $b^2$  и  $c^2$  — положительные постоянные; и нулевым условием при  $x = 0$ :

$$f|_{x=0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

причем  $f(x, y)$  остается ограниченной при  $y \rightarrow +\infty$ .

Из физических соображений считается известной функция  $-\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha(x)$  — приведенный скос потока на поверхности крыла — и через эту функцию требуется выразить значения потенциала на поверхности крыла  $f(x, 0)$ .

Задача изящно решается операционным методом. Преобразование Лапласа по переменной  $x$  переводит  $f(x, y)$  в функцию  $F(p, y)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2 F}{dy^2} - b^2 (p^2 + \lambda^2) F = 0,$$

где  $\lambda^2 = \frac{c^2}{b^2}$  — положительная постоянная. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F = C e^{-b\sqrt{p^2 + \lambda^2} y} + C_1 e^{b\sqrt{p^2 + \lambda^2} y},$$

причем в нашей задаче  $C_1 = 0$ , ибо  $F(p, y)$  должна оставаться ограниченной при  $y \rightarrow +\infty$ . Следовательно,

$$\frac{dF}{dy} \Big|_{y=0} = -Cb\sqrt{p^2 + \lambda^2} = -A(p),$$

где  $A(p)$  — изображение скоса потока  $\alpha(x)$ ; отсюда

$$F(p, 0) = C = \frac{A(p)}{b\sqrt{p^2 + \lambda^2}}.$$

Пользуясь теоремой умножения и формулой 28 таблицы, получаем решение задачи:

$$f(x, 0) = \frac{1}{b} \int_0^x \alpha(x - \xi) J_0(\lambda \xi) d\xi. \quad (25)$$

6) Стержень длины  $l$  находится в состоянии покоя и его конец  $x = 0$  закреплен, а к свободному концу  $x = l$  приложена сила  $A \sin \omega t$ , направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня.

Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где  $u = u(x, t)$  — продольное смещение и  $a^2$  — постоянный коэффициент, зависящий от материала стержня. Начальные и граничные условия сводятся к следующим:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t, \quad (26)$$

где  $E$  — модуль упругости \*). Операторное уравнение имеет вид

$$\rho^2 U = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2};$$

его надо решить при условиях

$$U|_{x=0} = 0; \quad \frac{dU}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Общее решение берем в виде

$$U = C_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x;$$

подстановка  $x=0$  дает  $C_1=0$ , подставляя  $x=l$ , получаем  $C_2 = \frac{b}{\rho(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l}$ , где  $b = \frac{Aa\omega}{E}$ . Таким образом, операторное решение

имеет вид

$$U = \frac{b}{\rho(p^2 + \omega^2)} \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a} p}{\operatorname{ch} \frac{l}{a} p}. \quad (27)$$

Для нахождения оригинала опять можно использовать вторую теорему разложения. Функция  $U$  имеет один действительный полюс  $p=0$  и бесчисленное множество чисто мнимых полюсов, причем все они попарно сопряжены.

Полюсы, лежащие в верхней полуплоскости:  $p = i\omega$ ,  $p_k = i \frac{\pi a}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right) = i\omega_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) все первого порядка и различны, если  $\omega_k \neq \omega$  ни при каком целом  $k$  (это — условие отсутствия резонанса, мы предполагаем его выполненным). На основании второй теоремы разложения получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)} e^{i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{i\omega_k t} \right\} = \\ &= \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x}{\omega_k^2 - \omega^2} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k}. \end{aligned} \quad (28)$$

7) Два одинаковых стержня длины  $l$  с одинаковой скоростью  $v_0$  движутся навстречу друг другу вдоль своих осей. Определим смещение точек стержней после удара.

Пусть удар происходит при  $t=0$  в начале координат. В силу симметрии достаточно рассмотреть смещение  $u(x, t)$  точек одного стержня, например правого. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

\*) Мы воспользовались тем, что согласно закону Гука сила  $X$ , действующая вдоль стержня, связана со смещением  $u$  соотношением

$$X = E \frac{\partial u}{\partial x}.$$

при условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -v_0; \quad u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.$$

Операторное уравнение запишется в виде

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = \frac{v_0}{a^2}, \quad (29)$$

а граничные условия перейдут в

$$U|_{x=0} = 0, \quad \frac{dU}{dx} \Big|_{x=l} = 0.$$

Решение уравнения (29) при этих условиях имеет вид

$$U = -\frac{v_0}{p^2} + \frac{v_0}{p^2} \frac{e^{-p \frac{x}{a}} + e^{-p \frac{2l-x}{a}}}{1 + e^{-\frac{2pl}{a}}}. \quad (30)$$

Разлагая  $\left(1 + e^{-\frac{2pl}{a}}\right)^{-1}$  в геометрическую прогрессию (сходящуюся, ибо  $\left|e^{-\frac{2pl}{a}}\right| < 1$ ), получаем:

$$U = -\frac{v_0}{p^2} + \frac{v_0}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ e^{-p \frac{2kl+x}{a}} + e^{-p \frac{2(k+1)l-x}{a}} \right\};$$

пользуясь, далее, теоремой запаздывания, находим оригинал

$$u(x, t) = v_0 \left\{ -t + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \left( t - \frac{2kl+x}{a} \right) \eta \left( t - \frac{2kl+x}{a} \right) + \left( t - \frac{2(k+1)l-x}{a} \right) \eta \left( t - \frac{2(k+1)l-x}{a} \right) \right] \right\}. \quad (31)$$

Это решение пригодно лишь до тех пор, пока стержни соприкасаются, т. е. до тех пор, пока  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} < 0$ . Но из формулы (30) имеем  $\frac{dU}{dx} \Big|_{x=0} = -\frac{v_0}{ap} \operatorname{th} \frac{pl}{a}$ , и по формуле (19) п. 80  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -g(t)$ , причем в этой формуле  $A = \frac{v_0}{a}$ ,  $\tau = 2 \frac{l}{a}$ . Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} < 0$  лишь при  $0 < t < 2 \frac{l}{a}$ , а для этого участка в формуле (31) отличны от 0 лишь три члена, т. е.

$$u(x, t) = v_0 \left\{ -t + \left( t - \frac{x}{a} \right) \eta \left( t - \frac{x}{a} \right) + \left( t - \frac{2l-x}{a} \right) \eta \left( t - \frac{2l-x}{a} \right) \right\}. \quad (32)$$

Отсюда видно, что при  $t \rightarrow \frac{2l}{a}$  имеем  $u(x, t) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow v_0$ , т. е. стержни отскакивают друг от друга без вибрации со скоростью  $v_0$ .



**87. Расчет длинных линий.** Мы будем рассматривать двухпроводную длинную линию как систему равномерно распределенных сопротивлений, индуктивностей, емкостей и утечек; их величины, отнесенные к единице длины, мы обозначим соответственно  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и  $G$  (рис. 191). Фиксируем участок линии между точками  $x$  и  $x + \Delta x$ , тогда для напряжения  $u$  и тока  $i$  будем иметь:

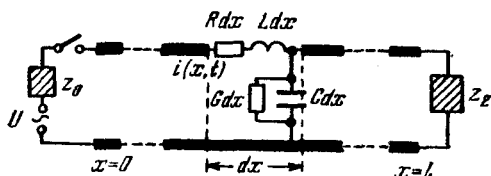
$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t) = L \Delta x \frac{\partial i}{\partial t} + R \Delta x \cdot i,$$

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = C \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} + G \Delta x \cdot u,$$

и, перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu. \quad (1)$$

Эта система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка легко сводится к одному уравнению; например, для тока получаем:



$$LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + RGi = \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \quad (2)$$

Рис. 191.

и точно такое же уравнение имеет место для

напряжения. Так как коэффициенты  $L$  и  $C$  неотрицательны, то уравнение (2) будет либо гиперболического, либо параболического типа, в зависимости от того, будет  $LC > 0$  или  $LC = 0$ .

Обозначим через  $U$  и  $I$  соответственно изображения (по времени) напряжения и тока и через  $i_0$  и  $u_0$  — значения последних при  $t = 0$ ; тогда системе (1) будет соответствовать следующая операторная система:

$$(Lp + R)I = -\frac{dU}{dx} + Li_0, \quad (Cp + G)U = -\frac{dI}{dx} + Cu_0. \quad (3)$$

Исключая из системы (3) операторный ток, получаем уравнение для  $U$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \gamma^2 U = L \frac{di_0}{dx} - C(Lp + R)u_0, \quad (4)$$

где

$$\gamma = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)} \quad (5)$$

обозначает так называемый коэффициент распространения волны. В случае нулевых начальных данных правая часть урав-

нения (4) будет равна 0 и общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$U = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}, \quad (6)$$

где  $A$  и  $B$  могут зависеть лишь от  $p$ , но не от  $x$ . Эти функции определяются из условий на концах линии.

Для операторного тока получается уравнение, аналогичное уравнению (4), однако, зная  $U$ , ток проще определить из первого уравнения системы (3):

$$I = -\frac{1}{Lp + R} \left( \frac{dU}{dx} - Li_0 \right). \quad (7)$$

В случае нулевых начальных данных, используя решение (6), получаем:

$$I = \frac{1}{Z} (Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}), \quad (8)$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{Lp + R}{Cp + G}} \quad (9)$$

— так называемое *характеристическое сопротивление линии*.

В общем случае исследование уравнений длинной линии представляет значительные трудности и обычно делаются какие-либо упрощающие предположения. Одним из таких предположений является предположение о том, что длина линий бесконечна. Обычно такую бесконечно длинную линию представляют простирающейся от точки  $x = 0$  в бесконечность вдоль положительной оси  $x$ . Условие ограниченности  $U$  и  $I$  на бесконечности приводит тогда к тому, что в уравнениях (6) и (8) коэффициент  $B = 0$  (мы считаем  $Re \gamma > 0$ ), и эти уравнения принимают, следовательно, вид

$$U = Ae^{-\gamma x}, \quad I = \frac{A}{Z} e^{-\gamma x}. \quad (10)$$

Физически наше условие означает, что мы пренебрегаем явлениями отражения волн от конца линии.

Кроме того, иногда пренебрегают различными параметрами линии, или считают, что эти параметры связаны некоторыми соотношениями.

Рассмотрим несколько примеров.

1) *Бесконечно длинная линия без индуктивности и утечки (кабель)\**.

Здесь  $L = G = 0$ ,  $\gamma = \sqrt{RCp}$ ,  $Z = \sqrt{\frac{R}{Cp}}$ , следовательно, уравнения (10) принимают вид

$$U = Ae^{-\sqrt{RCp} x}, \quad I = A \sqrt{\frac{Cp}{R}} e^{-\sqrt{RCp} x}. \quad (11)$$

\*) В подземном или подводном кабеле вследствие близости проводов можно пренебречь самоиндукцией, а при хорошей изоляции и утечкой.

Величина  $A$  находится из условий включения кабеля. Например, если на левом конце включается постоянная э. д. с., то из первого уравнения (11) при  $x = 0$  получим  $A = U_0/p$ , и тогда по формулам 42 и 6 таблицы изображений (в которых считаем  $\alpha = \sqrt{RC} x$ ) сразу находим напряжение и ток:

$$u(x, t) = U_0 \operatorname{Erf} \left( \frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right), \quad i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{R\pi t}} e^{-\frac{RCx^2}{4t}}. \quad (12)$$

Заметим, что задача определения напряжения вполне аналогична задаче определения температуры в примере 1) предыдущего пункта (достаточно лишь положить  $a = \frac{1}{\sqrt{RC}}$ ). Поэтому по формуле (11) п. 86 при включении кабеля на произвольную э. д. с., закон изменения которой задан функцией  $f(t)$ , получим:

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2 RC}{4t\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (13)$$

2) Установившийся режим в кабеле удобнее находить непосредственно с помощью формулы обращения Лапласа, используя метод деформации контура, изложенный в конце п. 78. Для примера найдем установившийся ток при включении кабеля на э. д. с.  $u(t) = U_0 \sin \omega t$ .

Из уравнений (11) имеем:

$$I = \frac{U_0 \omega}{p^2 + \omega^2} \sqrt{\frac{Cp}{R}} e^{-\sqrt{RCp} x},$$

и по формуле обращения

$$i(x, t) = \frac{U_0 \omega}{2\pi i} \sqrt{\frac{C}{R}} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} \frac{\sqrt{p}}{p^2 + \omega^2} e^{-\sqrt{RCp} x + pt} dp. \quad (14)$$

Деформируя прямую интегрирования в контур  $L$ , указанный на рис. 174, по методу п. 78 находим:

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C\omega}{R}} e^{-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right) - \frac{U_0 \omega}{2\pi i} \sqrt{\frac{C}{R}} \int_L,$$

где первый член представляет собой сумму вычетов подынтегральной функции (14) в ее особых точках  $p = \pm i\omega$  ( $\sqrt{p}$  означает ветвь корня, определяемую условием  $-\pi < \arg p < \pi$ ), а под знаком интеграла стоит та же функция, что и в (14). Заменяя  $pt = q$ , найдем:

$$\int_L = \int_{L^*} \frac{\sqrt{q}}{t^{3/2} \left( \frac{q^2}{t^2} + \omega^2 \right)} e^{-x\sqrt{\frac{RCq}{t}} + q} dq,$$

где  $L^*$  — контур того же вида, что и  $L$ . Отсюда видно, что при  $t \rightarrow \infty$  интеграл стремится к нулю, следовательно, установившийся ток равен

$$i_{\text{уст}}(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C\omega}{R}} e^{-x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - x\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right). \quad (15)$$

В частности, положив  $x=0$ , находим установившийся ток в начале линии

$$i_{\text{уст}} = U_0 \sqrt{\frac{C\omega}{R}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

3) *Включение кабеля через импеданс.* Пусть на левом конце кабеля через импеданс  $Z_0$  включается э. д. с.  $u_0(t)$ . Как известно, приложенная э. д. с. складывается из падения напряжения на импедансе и э. д. с. в начале линии

$$U_0(p) = Z_0 I|_{x=0} + U|_{x=0}. \quad (16)$$

Для кабеля из системы (11) находим  $U|_{x=0} = A$ ,  $I|_{x=0} = \sqrt{\frac{Cp}{R}} A$ , следовательно, условие (16) принимает вид

$$U_0(p) = A \left(1 + Z_0 \sqrt{\frac{Cp}{R}}\right), \quad (17)$$

откуда и находится  $A$ .

Например, при включении кабеля на постоянную э. д. с.  $U_0$  через сопротивление  $R_0$  имеем  $A = \frac{U_0}{p \left(1 + \sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)}$ , где  $\beta = \frac{R}{CR_0^2}$ . Отсюда по формулам (11) операторное напряжение равно

$$U = \frac{U_0 e^{-\alpha \sqrt{p}}}{p \left(1 + \sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)} = \frac{U_0 e^{-\alpha \sqrt{p}}}{p} - \frac{U_0}{\sqrt{\beta}} \frac{e^{-\alpha \sqrt{p}}}{\frac{p}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{p}},$$

где  $\alpha = x\sqrt{RC}$ . По формуле 42 таблицы и формуле (21) предыдущего пункта находим оригинал:

$$u(x, t) = U_0 \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}}\right) - U_0 e^{x \frac{R}{R_0} + \beta t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\beta t}\right). \quad (18)$$

По формуле (11) операторный ток

$$I = \frac{U_0 e^{-\alpha \sqrt{p}}}{p \left(1 + \sqrt{\frac{p}{\beta}}\right)} \sqrt{\frac{Cp}{R}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{R}} \frac{e^{-\alpha \sqrt{p}}}{\frac{p}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{p}},$$

следовательно,

$$i(x, t) = \frac{U_0}{R_0} e^{x \frac{R}{R_0} + \beta t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\beta t}\right). \quad (19)$$

4) *Бесконечно длинная линия без потерь* ( $R=G=0$ ). Согласно формулам (5) и (9) коэффициент распространения волны равен  $\gamma = \sqrt{LC} p = \frac{p}{v}$ ,

где  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — скорость распространения волны, а характеристическое сопротивление  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , следовательно,

$$U = Ae^{-\frac{p}{v}x}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} Ae^{-\frac{p}{v}x}. \quad (20)$$

Здесь  $A = U|_{x=0}$ , и если линия включается на произвольную э. д. с.  $f(t)$ , то по теореме запаздывания получаем:

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} f\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (21)$$

Это означает, что вдоль такой линии волны напряжения и тока распространяются с постоянной скоростью  $v$  без изменения формы.

5) *Бесконечно длинная линия без искажений*. Так называют линию, параметры которой удовлетворяют условию  $\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \delta$  (при  $\delta = 0$  получаем предыдущий пример). Здесь  $\gamma = \frac{p + \delta}{v}$ , где  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$  и, следовательно,

$$U = Ae^{-\frac{p+\delta}{v}x}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} Ae^{-\frac{p+\delta}{v}x}. \quad (22)$$

Если такая линия включается на произвольную э. д. с.  $f(t)$ , то

$$u(x, t) = e^{-\frac{\delta}{v}x} f\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad i(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\delta}{v}x} f\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (23)$$

Это означает, что в такой линии волны напряжения и тока распространяются с постоянной скоростью  $v$  без изменения формы и с постоянным затуханием.

6) *Бесконечно длинная линия с потерями, но без утечки* ( $G = 0$ ). В этом случае  $\gamma = \frac{1}{v} \sqrt{p^2 + 2ap}$ , где  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $a = \frac{R}{2L}$  и  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{p} \sqrt{p^2 + 2ap}$ , следовательно,

$$U = Ae^{-\frac{x}{v} \sqrt{p^2 + 2ap}}, \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{Ape^{-\frac{x}{v} \sqrt{p^2 + 2ap}}}{\sqrt{p^2 + 2ap}}. \quad (24)$$

Если такая линия включается на постоянную э. д. с.  $U_0$ , то  $Ap = U_0$  и

$$I = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{e^{-\frac{x}{v} \sqrt{(p+a)^2 - a^2}}}{\sqrt{(p+a)^2 - a^2}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} F(p+a),$$

где  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 - a^2}} e^{-\frac{x}{v} \sqrt{p^2 - a^2}}$ . По формуле 35 таблицы (эта формула будет выведена в п. 99 \*) находим оригинал  $f(t) = \eta\left(t - \frac{x}{v}\right) I_0\left(a \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right)$ ,

\*) См. формулу (19) п. 99; здесь  $\tau = x/v$  и вместо  $a$  стоит  $ia$ .

где  $I_0$  — цилиндрическая функция нулевого порядка мнимого аргумента, а по теореме смещения

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-at} I_0 \left( a \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \right) \eta \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (25)$$

7) Установившийся ток в линии предыдущего примера, включенной на э. д. с.  $U_0 e^{i\omega t}$ . Имеем  $A = U|_{x=0} = \frac{U_0}{p - i\omega}$  и по формуле обращения из второй формулы (24) находим:

$$i(x, t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{pe^{-\frac{x}{v} \sqrt{p^2 + 2ap} + pt}}{(p - i\omega) \sqrt{p^2 + 2ap}} dp.$$

Асимптотическое выражение этого интеграла было найдено в п. 78 методом деформации контура интегрирования (см. (16) п. 78). Подставляя это выражение, получаем:

$$i_{уст} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega - \omega^2}} e^{i\omega t - \frac{x}{v} \sqrt{2ai\omega - \omega^2}}. \quad (26)$$

8) Линия конечной длины  $l$  включается на постоянную э. д. с.  $U_0$ , правый конец разомкнут. Формулы (6) и (8) дают

$$U = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}, \quad I = \frac{1}{Z} (Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}), \quad (27)$$

постоянные  $A$  и  $B$  находим из условий на концах

$$U|_{x=0} = A + B = \frac{U_0}{p}, \quad I|_{x=l} = \frac{Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}}{Z} = 0,$$

следовательно,

$$U = U_0 \frac{\operatorname{ch} \gamma(l-x)}{p \operatorname{ch} \gamma l}, \quad I = \frac{U_0}{Z} \frac{\operatorname{sh} \gamma(l-x)}{p \operatorname{ch} \gamma l}. \quad (28)$$

Для линии с потерями, но без утечки, где  $\gamma = \frac{1}{v} \sqrt{p^2 + 2ap}$ , знаменатель операторного напряжения имеет бесчисленное множество нулей, определяемых уравнением  $\operatorname{ch} \gamma l = 0$ ,  $\gamma l = (2n+1) \frac{\pi}{2} i$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В плоскости  $p$  им соответствует бесчисленное множество полюсов функции  $U$ , определяемых уравнением

$$p^2 + 2ap + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} = 0,$$

откуда

$$p = -a \pm i\omega_n, \quad \text{где} \quad \omega_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2 v^2}{l^2} - a^2}.$$

Пользуясь второй теоремой разложения, находим:

$$u(x, t) = U_0 \left\{ 1 - \frac{\pi e^{-at} v^2}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{\omega_n (\omega_n^2 + a^2)} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \times \right. \\ \left. \times (a \sin \omega_n t + \omega_n \cos \omega_n t) \right\}. \quad (29)$$

**88. Другие интегральные преобразования.** Преобразование Лапласа, которое каждому оригиналу  $f(t)$  ставит в соответствие изображение  $F(p)$  по формуле

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1)$$

и каждому изображению  $F(p)$  оригинал  $f(t)$  по формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2)$$

является частным случаем интегральных преобразований вида

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) K(t, p) dt, \quad (3)$$

где  $K(t, p)$  — ядро интегрального преобразования — известная функция переменннй  $t$  и параметра  $p$ . Такого рода преобразования применяются при решении дифференциальных уравнений и в других задачах анализа. В заключении главы мы укажем важнейшие из этих преобразований и приведем несколько примеров их применения.

1) Преобразование Фурье. Так как в формуле обращения Лапласа (2) интегрирование производится по прямой  $\operatorname{Re} p = a$ , то в этой формуле можно положить  $p = a + i\sigma$  и она примет вид

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a + i\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma.$$

Введем еще новые обозначения

$$f(t) e^{-at} = g(t), \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\sigma) = G(\sigma); \quad (4)$$

в этих обозначениях последняя формула перепишется в виде

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) \cdot e^{i\sigma t} d\sigma. \quad (5)$$

Формулу (1) для прямого преобразования Лапласа можно записать в виде

$$F(a + i\sigma) = \int_0^{\infty} t(t) e^{-at} e^{-i\sigma t} dt,$$

или, в новых обозначениях, в виде

$$G(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(t) e^{-i\sigma t} dt. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) называются *формулами обращения Фурье*, а переход от функции  $g(t)$  к  $G(\sigma)$  — *преобразованием Фурье*. Таким образом, преобразование Лапласа, связывающее функции  $f(t)$  и  $F(p)$ , является преобразованием Фурье, связывающим функции  $g(t) = f(t) e^{-at}$  и  $G(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(a + i\sigma)$ , где  $a$  — произвольное действительное число, большее показателя роста функции  $f(t)$ .

Область применимости преобразования Фурье значительно уже области применимости преобразования Лапласа. Это связано с тем, что для сходимости несобственного интеграла (6) функция  $g(t)$  должна удовлетворять довольно стеснительному условию на бесконечности, например условию абсолютной интегрируемости\*), т. е. сходимости интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$ . На-

личие в интеграле Лапласа (1) дополнительного множителя  $e^{-at}$ , «гасящего» значения  $f(t)$  для больших значений аргумента, расширяет класс оригиналов до функций, растущих на бесконечности не быстрее некоторой показательной функции, а это условие практически вовсе не является стеснительным.

Если, в частности, показатель роста функции  $f(t)$  равен 0 и в формуле обращения Лапласа можно принять  $a = 0$ , то преобразование Лапласа (1) — (2) отличается от преобразования Фурье (6) — (5) только несущественными множителями перед интегралами. В этом смысле можно говорить, что преобразо-

\*) Для применимости преобразования Фурье достаточно, кроме условия абсолютной интегрируемости функции  $g(t)$ , потребовать еще, чтобы эта функция была кусочно-непрерывной и имела ограниченное изменение на каждом конечном отрезке оси  $t$ ; доказательство см., например, Смирнов, т. II.



вание Фурье является частным случаем преобразования Лапласа \*).

Преобразование Фурье с точки зрения физики является более естественным, чем преобразование Лапласа. Это объясняется тем, что формулы (5)—(6) аналогичны формулам разложения функции  $g(t)$  в ряд Фурье:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{in\sigma t}, \quad G_n = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-in\sigma t} dt$$

( $T$  — период функции  $g(t)$ ; ср. формулы (20)—(21) п. 70). В самом деле, формулу (5) можно рассматривать как разложение функции  $g(t)$  в непрерывный спектр простых гармонических колебаний  $G(\sigma)e^{i\sigma t}$ , частоты которых меняются не скачками, как в случае рядов Фурье, а сплошным образом. Функцию  $G(\sigma)$ , определяемую формулой (6), можно рассматривать как аналог коэффициентов Фурье  $G_n$ , т. е. как комплексную амплитуду колебания с частотой  $\sigma$ . Величина  $|G(\sigma)|$  показывает, какова доля этого колебания в спектре колебания  $g(t)$ , поэтому функцию  $G(\sigma)$  называют *спектральной функцией*.

На основании сказанного легко понять, что применение преобразования Фурье во многом аналогично применению преобразования Лапласа.

В качестве примера рассмотрим в общих чертах задачу о безвихревых движениях идеальной несжимаемой жидкости, происходящих под действием силы тяжести. Для простоты ограничимся случаем плоских волн в жидкости бесконечной глубины. Направим ось  $x$  горизонтально и перпендикулярно гребням волн, а ось  $y$  — вертикально вверх и предположим, что равновесное положение свободной поверхности жидкости совпадает с плоскостью  $y = 0$ , а также, что в начальный момент свободная поверхность занимает равновесное положение.

Как известно из гидродинамики \*\*), потенциал  $u = u(x, y, t)$  скорости движения жидкости в этой задаче удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

и следующим граничным и начальным условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{при } y = 0, \quad (8)$$

$$u = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } t = 0 \quad (9)$$

\*) Заметим, что в теории преобразования Фурье обычно не предполагают, что  $g(t)$  равна нулю для отрицательных  $t$  и поэтому в формуле (6) нижним пределом интеграла берут  $-\infty$ , а не нуль. В теории преобразования Лапласа иногда также отказываются от этого предположения и тогда приходят к так называемому двухстороннему преобразованию Лапласа (см., например, Ван дер Поль и Бремер. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1953).

\*\*) См., например, Кочин, Кибель и Розе, Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, 1948, т. I, стр. 399.

(второе условие (9) определяется нашим предположением, что при  $t = 0$  свободная поверхность занимает положение  $y = 0$ ).

Введем изображение по Фурье потенциала скоростей \*)

$$U(\sigma, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{-i\sigma x} dx;$$

тогда, в предположении что  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $u$  стремятся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , мы получим, что изображением  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  служит  $-\sigma^2 U$ \*\*), и следовательно, вместо (8) получим уравнение

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \sigma^2 U = 0.$$

Решение этого уравнения, стремящееся к нулю при  $y \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$U = C(\sigma, t) e^{|\sigma| y}, \quad (10)$$

где  $C(\sigma, t) = U|_{y=0}$ . С другой стороны, умножая уравнение (8) на  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sigma x}$  и интегрируя по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , мы получим:

$$|\sigma| C = -\frac{1}{g} \frac{d^2 C}{dt^2},$$

откуда

$$C(\sigma, t) = c_1(\sigma) e^{i\sqrt{g|\sigma|}t} + c_2(\sigma) e^{-i\sqrt{g|\sigma|}t}. \quad (11)$$

Но при  $y = 0$  и  $t = 0$  мы имеем:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dC}{dt} = i\sqrt{g|\sigma|} \{c_1(\sigma) - c_2(\sigma)\}$$

и поэтому на основании второго условия (9) получаем, что  $c_1(\sigma) = c_2(\sigma) = c(\sigma)$ . Но тогда на основании первого условия (9) при  $y = 0$  и  $t = 0$  мы будем иметь:

$$U = C(\sigma, 0) = 2c(\sigma) = \Phi(\sigma),$$

где  $\Phi(\sigma)$  — изображение по Фурье функции  $\varphi(x)$ .

Таким образом, из (11) мы получаем, что  $C = \Phi(\sigma) \cos \sqrt{g|\sigma|}t$ , и по (10) окончательно находим изображение решения

$$U = \Phi(\sigma) \cos \sqrt{g|\sigma|}t e^{|\sigma| y};$$

\*) См. сноску \*) на стр. 576.

\*\*) В самом деле, интегрируя по частям, мы найдем, что в нашем предположении изображение первой производной имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\sigma x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u e^{i\sigma x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\sigma x} dx = i\sigma U,$$

аналогично вторая производная — вид  $(i\sigma)^2 U$ .

чтобы найти само решение, достаточно воспользоваться формулой обращения Фурье (5)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\sigma) \cos \sqrt{g|\sigma|} t e^{i\sigma|y+ix} d\sigma. \quad (12)$$

В общем случае вычисление этого интеграла затруднительно. Предположим для упрощения, что  $\Phi(x) = A\delta(x)$ , где  $\delta$  — импульсная функция (физически это означает, что волны возникают под действием импульса, приложенного в начале координат). Тогда по свойствам интеграла от импульсной функции мы находим, что  $\Phi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A$  и из формулы (12) получаем при  $y=0$ :

$$u(x, 0, t) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{g|\sigma|} t e^{i\sigma x} d\sigma = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \sqrt{\sigma g} t \cos \sigma x d\sigma$$

(мы отделили действительную часть и воспользовались четностью  $\cos \sigma x$ ). После некоторых преобразований (мы на них не останавливаемся) этот интеграл выражается через интегралы Френеля (см. п. 73 пример 6)

$$u(x, 0, t) = \frac{A}{x} \sqrt{\frac{2\pi}{\pi}} \{\cos \tau C(\tau) + \sin \tau S(\tau)\}; \quad (13)$$

здесь  $\tau = \frac{gt^2}{4x}$ .

2) Преобразование Меллина. Заменим в формулах двухстороннего преобразования Лапласа \*) (1) и (2) переменные  $p$  на  $-p$  и  $t$  на  $\tau = e^t$ ; эти формулы примут вид

$$F(-p) = \int_0^{\infty} f(\ln \tau) e^{p \ln \tau} \frac{d\tau}{\tau}; \quad f(\ln \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(-p) e^{-p \ln \tau} dp.$$

Если еще положить  $f(\ln \tau) = g(\tau)$  и  $F(-p) = G(p)$ , то мы придем к так называемым *формулам обращения Меллина* \*\*):

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) t^{p-1} dt; \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{G(p)}{t^p} dp \quad (14)$$

(мы снова пишем  $t$  вместо  $\tau$ ).

\*) Двухстороннее преобразование Лапласа отличается от обычного тем, что в формуле (1) интегрирование ведется от  $-\infty$  до  $\infty$ , а не от 0 до  $\infty$ ; см. сноску на стр. 576.

\*\*) Для применимости этих формул достаточна аналитичность  $G(p)$  в полосе  $s_1 < s < s_2$ , абсолютная сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} G(s+i\sigma) d\sigma$  для всех  $s$  из этой полосы и равномерная сходимость  $G(s+i\sigma)$  к нулю при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  в любой более узкой полосе  $s_1 - \delta \leq s \leq s_2 + \delta$ ,  $\delta > 0$ ; прямая интегрирования во второй формуле должна принадлежать этой полосе (см.,

Элементарно доказывается, что преобразование Меллина обладает рядом свойств, аналогичных свойствам преобразования Лапласа, например:

$$g(at) \doteq \frac{G(p)}{a^p}, \quad t^a g(t) \doteq G(p+a), \quad (15)$$

$$f(t) g(t) \doteq \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(q) G(p-q) dq$$

и др. Особо отметим теорему об изображении производной: если предел  $g(t)t^{p-1}$  при  $t \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow +\infty$  равен нулю, то \*)

$$g'(t) \doteq -(p-1)G(p-1); \quad (16)$$

повторно применяя эту теорему, получим формулу для изображения старших производных. Простые изображения имеют произведения  $t^h g^{(h)}(t)$ ; интегрированием по частям мы получаем: если  $g(t)t^p|_{t=0}^\infty = 0$ , то

$$tg'(t) \doteq -pG(p); \quad (17)$$

если, кроме того,  $g'(t)t^{p+1}|_0^\infty = 0$ , то

$$t^2 g''(t) \doteq (p+1)pG(p) \quad (18)$$

и т. д. Последнее свойство можно использовать для решения дифференциальных уравнений, содержащих члены вида  $t^k \frac{d^k x}{dt^k}$ .

В качестве примера применения преобразования Меллина рассмотрим задачу о стационарном тепловом поле в секторе  $|\arg z| < \alpha$ , на сторонах которого в точках, где  $|z| < a$ , поддерживается постоянная температура  $u_0$ ,

например, Курант и Гильберт [2] из литературы к гл. VII, т. I, стр. 95).

Можно формулировать условия применимости и в терминах функции  $g(t)$ : достаточно потребовать, чтобы эта функция была кусочно-непрерывной и имела ограниченное изменение на каждом отрезке полуоси  $t > 0$  и существовали бы две постоянные  $s_1$  и  $s_2$ ,  $s_1 < s_2$ , такие, что интегралы

$\int_0^\infty g(t)t^{s_1-1} dt$  и  $\int_0^\infty g(t)t^{s_2-1} dt$  абсолютно сходятся; прямая интегриро-

вания во второй формуле также должна принадлежать полосе  $s_1 < s < s_2$  (см., например, Титчмарш [9], стр. 65). Иногда комбинируют эти типы условий и выбирают, например,  $s_1$  из условия сходимости первого из написанных выше интегралов, а  $s_2$  — как абсциссу ближайшей справа к прямой  $s = s_1$  особой точки функции  $G(p)$ .

\*) Доказательство получается сразу интегрированием по частям

$$\begin{aligned} g'(t) &\doteq \int_0^\infty g'(t)t^{p-1} dt = g(t)t^{p-1} \Big|_0^\infty - (p-1) \int_0^\infty g(t)t^{p-2} dt = \\ &= -(p-1)G(p-1). \end{aligned}$$

а в точках, где  $|z| > a$ , — температура, равная нулю. Задача сводится к решению уравнения:

$$r^2 \Delta u = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (19)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в полярных координатах  $r, \varphi$ , при граничных условиях

$$u|_{\varphi=\pm\alpha} = \begin{cases} u_0 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases} \quad (20)$$

Совершим преобразование Меллина по переменной  $r$ ; на основании формул (18) и (17) мы получаем, что уравнение (19) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p^2 U + \frac{d^2 U}{d\varphi^2} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$U = A(p) \cos p\varphi + B(p) \sin p\varphi.$$

Граничные условия (20) после перехода к изображениям дадут:

$$U|_{\varphi=\pm\alpha} = \int_0^a u_0 r^{p-1} dr = u_0 \frac{a^p}{p},$$

следовательно, мы должны иметь:

$$A(p) \cos p\alpha \pm B(p) \sin p\alpha = u_0 \frac{a^p}{p}.$$

Отсюда находим  $A(p) = u_0 \frac{a^p}{p \cos p\alpha}$ ,  $B(p) = 0$  и получаем изображение решения

$$U = u_0 \frac{a^p \cos p\varphi}{p \cos p\alpha}.$$

Само решение найдем по формуле обращения Меллина

$$u = \frac{u_0}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^p \frac{\cos p\varphi}{\cos p\alpha} \frac{dp}{p}.$$

Подынтегральная функция аналитична в полосе  $0 < \operatorname{Re} p < 1$ , ибо ближайший к  $p=0$  полюс подынтегральной функции лежит в точке  $p = \frac{\pi}{2\alpha} > 1$ ,

если  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , что мы и предположим. Следовательно, в последней формуле в качестве  $s$  можно взять любое число,  $0 < s < 1$  \*). Перейдя к пределу при  $s \rightarrow 0$ , мы можем брать интеграл по мнимой оси плоскости  $p$  с обходом точки  $p=0$  по малой полуокружности против часовой стрелки. При этом обходе приращение интеграла будет равно вычету подынтегральной функции

\*) Относительно выбора  $s$  см. сноску на стр. 578—579.

в точке  $p = 0$ , умноженному на  $\pi i$ , т. е. равно  $\pi i$ , и мы получим:

$$u = \frac{u_0}{2} + \frac{u_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{i\sigma} \frac{\operatorname{ch} \sigma \varphi}{\operatorname{ch} \sigma a} \frac{d\sigma}{\sigma},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Подставляя  $\left(\frac{a}{r}\right)^{i\sigma} = e^{i\sigma \ln \frac{a}{r}} = \cos\left(\sigma \ln \frac{a}{r}\right) + i \sin\left(\sigma \ln \frac{a}{r}\right)$  и пользуясь четностью и нечетностью соответствующих подынтегральных функций, найдем окончательно:

$$u = \frac{u_0}{2} + \frac{u_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\sigma \ln \frac{a}{r}\right) \frac{\operatorname{ch} \sigma \varphi}{\operatorname{ch} \sigma a} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (21)$$

3) Преобразование Ханкеля. По аналогии с (1) можно написать двумерное преобразование Фурье

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(\sigma x + \tau y)} dx dy,$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma, \tau) e^{i(\sigma x + \tau y)} d\sigma d\tau.$$

Перейдем здесь к полярным координатам, положив  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и  $\sigma = \rho \cos \theta$ ,  $\tau = \rho \sin \theta$ ; будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} G(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} g(r, \varphi) e^{-ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi, \\ g(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} G(\rho, \theta) e^{ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Положим, в частности,  $g(r, \varphi) = e^{-in\varphi} g(r)$ , где  $n$  — целое число, и заменим в первой формуле (22)  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + t$ ; пользуясь известным свойством интеграла от периодической функции, получим тогда:

$$G(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-in\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \int_0^{\infty} g(r) r dr \int_0^{2\pi} e^{i(\rho \sin t - nt)} dt.$$

По формуле (15) п. 70 внутренний интеграл равен  $2\pi J_n(rp)$ , где  $J_n$  — цилиндрическая функция первого рода порядка  $n$ . Поэтому, полагая  $G(\rho, \theta) e^{in(\theta + \frac{\pi}{2})} = G_n(\rho)$ , мы можем переписать последнюю формулу в виде

$$G_n(\rho) = \int_0^{\infty} g(r) J_n(rp) r dr. \quad (23)$$

В новых обозначениях вторая формула (22) принимает вид

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_n(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{i\left[n\left(\varphi - \theta - \frac{\pi}{2}\right) + r\rho \cos(\varphi - \theta)\right]} d\theta;$$

после подстановки  $\theta - \varphi = t - \frac{\pi}{2}$  внутренний интеграл снова приводится к формуле (15) п. 70, и мы получаем:

$$g(r) = \int_0^{\infty} G_n(\rho) J_n(rp) \rho d\rho. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) называются *формулами обращения Ханкеля порядка  $n$*  (или иначе — *формулами Фурье — Бесселя*)\*).

Выясним вид формул для изображения производных при рассматриваемых преобразованиях. По определению преобразования Ханкеля порядка  $n$

$$g'(r) \doteq \int_0^{\infty} \frac{dg}{dr} J_n(rp) r dr = r g(r) J_n(rp) \Big|_{r=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} g(r) \frac{d}{dr} [r J_n(rp)] dr$$

(мы воспользовались формулой интегрирования по частям). Предполагая, что внеинтегральный член равен 0 и пользуясь формулой (22) п. 95, по которой  $J'_n(rp) = J_{n-1}(rp) - \frac{n}{rp} J_n(rp)$ , мы

---

\*) Для применимости формул обращения Ханкеля достаточно, например, чтобы функция  $g(r)$  была кусочно-непрерывной и имела ограниченное изменение на всяком конечном отрезке полуоси  $r > 0$  и чтобы интеграл  $\int_0^{\infty} g(r) \sqrt{r} dr$  абсолютно сходилась (см., например, Ватсон [7] из литературы к гл. VII, стр. 502—510).

найдем:

$$\frac{d}{dr} [r J_n(r\rho)] = J_n(r\rho) + \rho r J'_n(r\rho) = -(n-1) J_n(r\rho) + \rho r J_{n-1}(r\rho)$$

и

$$g'(r) \doteq (n-1) \int_0^\infty g(r) J_n(r\rho) dr - \rho \int_0^\infty g(r) J_{n-1}(r\rho) r dr.$$

Интеграл во втором члене равен изображению Ханкеля порядка  $n-1$  функции  $g(r)$ , которое мы обозначим  $G_{n-1}(\rho)$ . Интеграл в первом члене равен изображению порядка  $n$  функции  $g(r)/r$ , но нам удобнее выразить его через изображения самой функции. Для этого воспользуемся рекуррентной формулой (23) п. 95, по которой  $\frac{J_n(r\rho)}{r} = \frac{\rho}{2n} [J_{n-1}(r\rho) + J_{n+1}(r\rho)]$ , и найдем окончательную формулу

$$g'(r) \doteq -\rho \left[ \frac{n+1}{2n} G_{n-1}(\rho) - \frac{n-1}{2n} G_{n+1}(\rho) \right]. \quad (25)$$

Полученная формула достаточно сложна; еще более сложный вид имеют формулы для изображения  $g''(r)$  и старших производных. Не выписывая этих формул, найдем изображение некоторой комбинации функций  $g$ ,  $g'$  и  $g''$ . Предполагая, что  $rg'(r) J_n(r\rho) \Big|_0^\infty = 0$ , интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^\infty \frac{d^2 g}{dr^2} J_n(r\rho) r dr = - \int_0^\infty \frac{dg}{dr} \frac{d}{dr} [r J_n(r\rho)] dr,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right) J_n(r\rho) r dr &= \\ &= -\rho \int_0^\infty \frac{dg}{dr} r J'_n(r\rho) dr = \rho \int_0^\infty g(r) \frac{d}{dr} [r J'_n(r\rho)] dr \end{aligned}$$

(мы еще раз проинтегрировали по частям и воспользовались тем, что  $rg(r) J'_n(r\rho) \Big|_0^\infty = 0$ ). Но согласно уравнению (1) п. 95, которому удовлетворяет функция  $J_n(r\rho)$ , имеем:

$$\rho \frac{d}{dr} [r J'_n(r\rho)] = - \left( \rho^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) r J_n(r\rho),$$



следовательно, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{n^2}{r^2} g \right) J_n(r\rho) r dr = -\rho^2 \int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) r dr.$$

Таким образом, если  $rg'(r) J_n(r\rho) \big|_0^{\infty} = rg(r) J_n'(r\rho) \big|_0^{\infty} = 0$ , то

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) - \frac{n^2}{r^2} g(r) \doteq -\rho^2 G_n(\rho). \quad (26)$$

В частности, для преобразования Ханкеля нулевого порядка имеем:

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) \doteq -\rho^2 G(\rho), \quad (27)$$

где

$$G(\rho) = G_0(\rho). \quad (28)$$

Комбинация производных, участвующая в левой части формулы (27), встречается в выражении оператора Лапласа в цилиндрических или полярных координатах. Поэтому преобразование Ханкеля и применяется главным образом в задачах, содержащих такое выражение.

В качестве примера рассмотрим классическую задачу о потенциале поля, созданного наэлектризованным плоским диском (Вебер). Задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (29)$$

где  $z$  — координата вдоль оси, перпендикулярной диску, при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} u|_{z=0} &= u_0 \quad \text{для} \quad 0 \leq r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 \quad \text{при} \quad r > 1 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

( $u_0$  — постоянная, второе условие выражает симметрию поля относительно плоскости  $z = 0$ ).

Воспользуемся преобразованием Ханкеля нулевого порядка. Операторное уравнение на основании формулы (27) записывается в виде

$$-\rho^2 U + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0,$$

где  $U$  — изображение функции  $u$ , а его общее решение — в виде

$$U = A(\rho) e^{-\rho z} + B(\rho) e^{\rho z}.$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть поле при  $z > 0$ ; так как при  $z \rightarrow +\infty$  потенциал должен стремиться к нулю, то  $B = 0$  и по формуле

обращения Ханкеля (24)

$$u(r, z) = \int_0^{\infty} A(\rho) e^{-\rho z} J_0(\rho r) \rho d\rho.$$

Граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} A(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho &= u_0 \quad \text{для} \quad 0 \leq r < 1, \\ \int_0^{\infty} A(\rho) J_0(\rho r) \rho^2 d\rho &= 0 \quad \text{для} \quad r > 1. \end{aligned}$$

Сравнивая их с известными соотношениями \*)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(\rho r) \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho &= \frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad 0 \leq r < 1, \\ \int_0^{\infty} J_0(\rho r) \sin \rho d\rho &= 0 \quad \text{для} \quad r > 1 \end{aligned}$$

мы видим, что обоим этим условиям удовлетворяет функция

$$A(\rho) = \frac{2u_0}{\pi} \frac{\sin \rho}{\rho^2}.$$

Учитывая единственность решения задачи (она ясна из физических соображений), мы получаем окончательно:

$$u(r, z) = \frac{2u_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho z} J_0(\rho r) \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho. \quad (31)$$

4) Обращение одного контурного интеграла. В заключение приведем пример формулы обращения несколько иного типа. Такого рода формулы применяются при решении дифференциальных уравнений посредством контурных интегралов.

Пусть функция  $g(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , содержащей начало координат, и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^N g(\xi) d\xi}{(\xi - z)^N}, \quad (32)$$

где  $C$  — граница области  $D$ ,  $N$  — положительное число и  $\frac{\xi^N}{(\xi - z)^N}$  — однозначная в области  $D$  с разрезом вдоль пути  $\gamma$ ,

\*) См. формулы (9) и (10) п. 99.

соединяющего точки 0 и  $z$ , ветвь аналитической функции. Тогда  $g(z)$  вполне определяется формулой

$$g(z) = \int_0^1 (1 - \xi)^{N-1} f'(z\xi) d\xi. \quad (33)$$

Для доказательства предположим сначала, что точка  $z$  принадлежит кругу сходимости разложения Тейлора  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , и деформируем контур  $C$  в контур  $c$ , также принадлежащий этому кругу и охватывающий разрез  $\gamma$ . Подставляя это разложение в формулу (32) и интегрируя его почленно, мы найдем:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2\pi i} \int_C \frac{\xi^{N+k} d\xi}{(\xi - z)^N}. \quad (34)$$

Вычет подынтегральной функции в точке  $\xi = \infty$  находится из разложения функции  $\xi^k \left(1 - \frac{z}{\xi}\right)^{-N}$  и равен

$$-\frac{N(N+1) \dots (N+k)}{(k+1)!} z^{k+1} = -\frac{\Gamma(N+k+1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(N)} z^{k+1}.$$

Так как интеграл в  $k$ -м члене формулы (34) равен этому вычету, умноженному на  $-2\pi i$ , то в разложении  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  мы имеем:

$$b_{k+1} = \frac{\Gamma(N+k+1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(N)} c_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (35)$$

С другой стороны, интеграл в правой части формулы (33) равен

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} z^k \int_0^1 \xi^k (1-\xi)^{N-1} d\xi &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{k+1} z^k \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(N)}{\Gamma(N+k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} \frac{\Gamma(k+2)\Gamma(N)}{\Gamma(N+k+1)} z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = g(z) \end{aligned}$$

(для вычисления интеграла — так называемой бета-функции Эйлера — мы воспользовались формулой (2) п. 90 и по формуле (35) заменили  $b_{k+1}$  через  $c_k$ ). Таким образом, формула (33) доказана, в принятом выше дополнительном предположении. Чтобы доказать ее для всех  $z$  из области  $D$ , достаточно воспользоваться аналитическим продолжением.

Формулы обращения (32)—(33) были получены Макки\*) и использованы им для решения уравнения Эйлера — Пуассона, которое находит важные применения в газовой динамике.

### Литература к главе VI

- [1] А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, ДНТВУ, 1937.
- [2] А. М. Лурье, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, 1950.
- [3] Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, Гостехиздат, 1948.
- [4] М. И. Конторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, Гостехиздат, 1953.
- [5] К. А. Круг, Переходные процессы в линейных электрических цепях, Гостехиздат, 1948.
- [6] А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, Госэнергоиздат, 1948.
- [7] С. И. Евтянов, Переходные процессы в приемно-усилительных схемах, Гостехиздат, 1948.
- [8] Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, 1954.
- [9] Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
- [10] И. Снеддон, Преобразование Фурье, ИЛ, 1955.
- [11] В. А. Диткин и А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, 1961.
- [12] Я. Микусинский, Операторное исчисление, Иноиздат, 1956.
- [13] Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, «Наука», 1965.
- [14] И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции и действия над ними, Гостехиздат, 1958.
- [15] Л. Шварц, Математические методы для физических наук, «Мир», 1965.

---

\*) A. G. Mackie, Contour integral solutions of a class of differential equations, J. Rational Mech. and Analysis, 4, 5 (1955), 733—750.

## Специальные функции

В этой главе мы рассмотрим основные, наиболее часто встречающиеся в прикладных задачах классы так называемых специальных функций и главнейшие их применения. Многие из этих функций (гамма-функция, цилиндрические функции, специальные многочлены Чебышева, Лежандра и др.) уже рассматривались в предыдущих главах в качестве примеров, здесь их свойства будут изложены более систематически.

Основными методами изучения свойств специальных функций в данном изложении будут методы, развитые в предыдущих главах. Однако многие важные свойства специальных функций не связаны с теорией функций комплексного переменного, и нам придется затрагивать иногда вопросы, довольно далекие от этой теории.

Целью настоящей главы является лишь общее ознакомление читателя с важнейшими свойствами специальных функций. В приложениях к отдельным конкретным задачам приходится иногда пользоваться свойствами значительно более детальными. Не имея возможности на них останавливаться, мы отсылаем читателя к литературе.

## § 1. Гамма-функция Эйлера

В большом числе формул анализа участвует впервые введенная Л. Эйлером (1729 г.) функция «гамма» — в предыдущем изложении мы не раз встречались с нею. Значение этой функции видно хотя бы из того, что она является естественным распространением факториала на дробные и даже комплексные значения аргумента\*). Это соображение мы и положим в основу определения гамма-функции.

**89. Определение и основные свойства.** Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(z+1) = zf(z), \quad (1)$$

---

\*) Ср., например, формулу (4) п. 83.

которому для всех целых неотрицательных значений  $z = n$  удовлетворяет функция

$$f(n+1) = n! \quad (2)$$

Будем искать аналитическую функцию  $f(z)$ , удовлетворяющую уравнению (1) для всех комплексных  $z$  и, для определенности, равную 1 при  $z = 1$  (условие I).

Прежде всего заметим, что искомая функция для любых целых положительных  $n$  должна удовлетворять уравнению

$$f(z+n+1) = (z+n)(z+n-1) \dots (z+1)f(z+1), \quad (3)$$

которое получается повторным применением формулы (1).

Полагая в соотношении (3)  $z = 0$ , получаем, что для всех целых положительных  $n$  значение  $f(n+1)$  совпадает с  $n!$ .

Заменив в (3)  $f(z+1) = zf(z)$  и переписав это соотношение в виде

$$f(z) = \frac{f(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1) \dots z}, \quad (4)$$

мы видим, что искомая функция  $f(z)$  должна иметь полюсы во всех целых неположительных точках  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). В самом деле, при  $z \rightarrow -n$  числитель выражения (4) стремится к 1, а знаменатель к нулю.

Из той же формулы (4) видно, что

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)f(z) = \frac{1}{(-1)(-2) \dots (-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (5)$$

т. е. что все полюсы  $f(z)$  — первого порядка, причем вычет в полюсе  $z = -n$  равен  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

Мы предположим еще, что  $f(z)$  не имеет других особенностей, кроме  $z = 0, -1, -2, \dots$ , и нигде не обращается в нуль (условие II).

Тогда логарифмическая производная функции  $f(z+1)$ :

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz} \ln f(z+1) = \frac{f'(z+1)}{f(z+1)},$$

будем мероморфной функцией, имеющей в точках  $z = -1, -2, \dots$  простые полюсы с вычетами, равными  $-1$  (см. п. 23). Из формулы (3) логарифмированием и последующим дифференцированием получаем:

$$\psi(z+n+1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z+k} + \psi(z+1).$$

Подставим здесь  $z = 0$  и обозначим  $\psi(1) = -C$ :

$$\psi(n+1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - C;$$

вычитая полученное равенство из предыдущего, найдем:

$$\psi(z+1) = -C - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right\} + \psi(z+n+1) - \psi(n+1). \quad (6)$$

Ряд с общим членом

$$u_k(z) = \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k^2} \frac{-z}{1 + \frac{z}{k}},$$

очевидно, сходится при любом  $z \neq -k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), ибо отношение его общего члена к члену сходящегося ряда  $1/k^2$  стремится к конечному пределу  $-z$ . Кроме того, в любой ограниченной области, начиная с некоторого  $k$ , имеем  $|u_k(z)| \leq M/k^2$ , где  $M$  — некоторая постоянная, следовательно, этот ряд сходится равномерно. Таким образом, по теореме Вейерштрасса

п. 16, сумма ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$  представляет собой функцию, аналитическую во всех конечных точках, кроме точек  $z = -k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), где она имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными  $-1$ .

Перейдем в формуле (6) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ; по только что доказанному существует предел  $\sum_{k=1}^n u_k(z)$ , следовательно, существует и предел  $\psi(z+n+1) - \psi(n+1)$ , который мы обозначим через  $\psi_0(z)$ . В пределе будем иметь:

$$\psi(z+1) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right\} + \psi_0(z). \quad (7)$$

Так как по доказанному  $f(z+1)$  имеет в точках  $z = -k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) полюсы первого порядка, то главные части ее логарифмической производной  $\psi(z+1)$  в этих полюсах равны  $-\frac{1}{z+k}$  (см. п. 23). Отсюда следует, что функция  $\psi_0(z)$  должна быть целой. Очевидно, что и обратно, какова бы ни была целая функция  $\psi_0(z)$ , функция  $f(z)$ , определяемая по своей логарифмической производной  $\psi(z)$ , будет удовлетворять условию II.

Условие I налагает на функцию  $\psi_0(z)$  дополнительное ограничение. В самом деле, из функционального уравнения (1) логарифмированием и дифференцированием получаем следующее уравнение для функции  $\psi(z)$ :

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}. \quad (8)$$

Но из равенства (7) следует:

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z} + \psi_0(z) - \psi_0(z-1),$$

(постоянная  $C$  и все слагаемые, кроме первого, при вычитании сокращаются), поэтому для того чтобы удовлетворялось соотношение (8), функция  $\psi_0(z)$  должна быть периодической с периодом 1, т. е.  $\psi_0(z) = \psi_0(z-1)$ . Обратно, для любой такой  $\psi_0(z)$  функция  $\psi(z)$  будет удовлетворять уравнению (8) и, интегрируя и дифференцируя последнее, найдем:

$$\ln f(z+1) - \ln f(z) = \ln z + A,$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Если функция  $f(z)$  удовлетворяет еще условиям  $f(1) = f(2) = 1$ , то, подставляя в последнее уравнение  $z = 1$ , найдем  $A = 0$ , т. е. после потенцирования получим функциональное уравнение (1).

Таким образом, для любой целой периодической с периодом 1 функции  $\psi_0(z)$  соответствующая функция  $f(z)$  (если для нее  $f(1) = f(2) = 1$ ) удовлетворяет обоим условиям I и II. Иными словами, условиям I и II удовлетворяет целый класс мероморфных функций. Простейшую из функций этого класса мы получим, если положим в (7)  $\psi_0(z) \equiv 0$  — она и называется *гамма-функцией Эйлера* и обозначается символом  $\Gamma(z)$ .

Для логарифмической производной гамма-функции имеем, следовательно, разложение

$$\psi(z+1) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right\}, \quad (9)$$

где  $C$  — постоянная, которую мы сейчас определим. Интегрируя разложение (9) вдоль некоторого пути, соединяющего точку  $z = 0$  с произвольной точкой  $z \neq k$  ( $k = -1, 2, \dots$ ) и не содержащего точек  $k$ , получим разложение логарифма гамма-функции:

$$\ln \Gamma(z+1) = -Cz - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{z}{k} \right) - \frac{z}{k} \right\}. \quad (10)$$



Постоянная  $C$  определяется условием  $\Gamma(2) = 1$ , которое мы наложим выше на гамма-функцию \*). Подставляя в (10)  $z = 1$ , получим:

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \right\}.$$

Последнее произведение равно, очевидно,  $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{n+1}{n} = n+1$ ; добавляя в сумму, стоящую под знаком предела, стремящийся к нулю член  $\frac{1}{n+1}$  и заменяя еще  $n+1$  через  $n$ , получим окончательно:

$$-\psi(1) = C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right). \quad (11)$$

Эта постоянная носит название *постоянной Эйлера*; ее приближенное значение равно 0,5772157 \*\*).

Из формулы (10) потенцированием получаем представление функции  $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$  в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{k} \right) e^{-z/k}. \quad (12)$$

Полученное бесконечное произведение сходится для всех конечных  $z$ , для  $z \neq -k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) это следует из доказанной сходимости ряда (9) и теоремы п. 72, а для  $z = -k$  непосредственно видно, что оно сходится к нулю.

Перечислим основные свойства гамма-функции, которые мы получили при ее определении:

1)  $\Gamma(z)$  аналитична всюду, кроме целочисленных отрицательных точек и точки  $z = 0$ .

2)  $\Gamma(z)$  удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (13)$$

или более общему

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1) \dots (z+1)\Gamma(z+1). \quad (14)$$

3) При всех целых положительных  $z = n$  значение  $\Gamma(n+1)$  совпадает с  $n!$ :

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (15)$$

\*) Второе условие  $\Gamma(1) = 1$  имеет место при любом  $C$  в силу нашего выбора начала пути интегрирования (ср. разложение (10)).

\*\*) Постоянная Эйлера  $C$  встречается и в других вопросах.

4) Все полюсы гамма-функции первого порядка, причем вычет  $\Gamma(z)$  в полюсе  $z = -n$  равен  $\frac{(-1)^n}{n!}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Из сходимости произведения (12) заключаем:

5) Функция  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  — целая, следовательно, гамма-функция не обращается в нуль.

Свойства 3)—5) выясняют общий характер графика функции  $\Gamma(x)$  действительного аргумента  $x$ . Этот график изображен на рис. 192\*) пунктиром на том же рисунке изображен график  $\frac{1}{\Gamma(x)}$ . На рис. 193 приведен также рельеф гамма-функции, т. е.

поверхность с уравнением  $u = |\Gamma(z)|$ . Ярко выраженные пики над точками  $z = 0, -1, -2, \dots$  соответствуют полюсам. Два семейства линий на поверхности представляют собой семейства линий равного модуля и равного аргумента, цифровые отметки на них указывают значения модуля и аргумента (последние — в градусах).

Приведем еще несколько свойств гамма-функции. Наряду с соотношением (13) во многих вопросах полезно еще второе функциональное уравнение для гамма-функции:

6) Для всех комплексных  $z$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (16)$$

(при  $z = n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , обе части равенства обращаются в бесконечность).

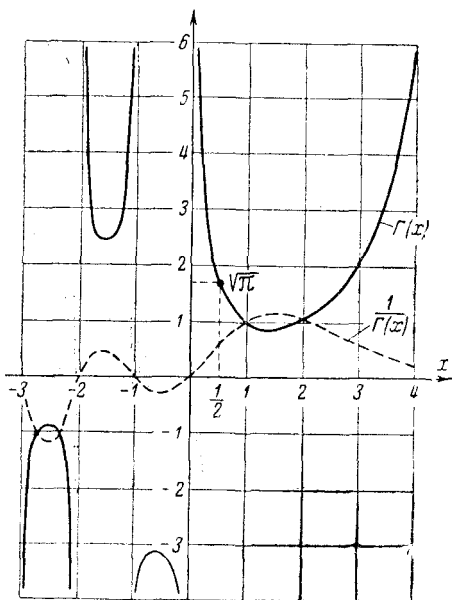


Рис. 192.

\*) Максимумы и минимумы  $\Gamma(x)$  для отрицательных  $x$  приближаются к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ , это связано с тем, что по свойству 4) вычет, т. е. коэффициент при главной части разложения  $\Gamma(x)$  в окрестности точки  $x = -n$ , сильно убывает с ростом  $n$ :

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} + c_0 + c_1(x+n) + \dots$$

Для вывода этого соотношения подставим сначала  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  в формулу (12), получим:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(z+1)} = ze^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad (17)$$

затем заменим в той же формуле (12)  $z$  на  $-z$ :

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}.$$

Перемножив полученные произведения (это законно в силу их абсолютной сходимости, см. п. 72), найдем:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Остается воспользоваться разложением  $\sin \pi z$  в бесконечное произведение (см. п. 72), и мы получим искомую формулу (16).

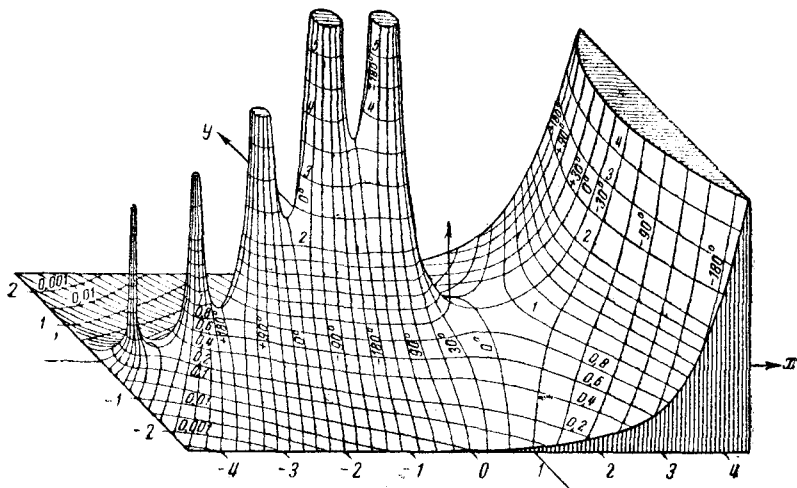


Рис. 193.

Отметим некоторые следствия полученных формул. Полагая  $z = 1/2$  в формуле (16), находим  $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$ , откуда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Применив теперь формулу (14), в которой положено  $z = -1/2$ , найдем:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \quad (18)$$

Полагая в (16)  $z = n + \frac{1}{2}$ , будем иметь:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} = (-1)^n \pi,$$

откуда по (18) получим формулу, которой мы уже пользовались в п. 83:

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \sqrt{\pi} = (-1)^n \frac{4^n n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}. \quad (19)$$

Остановимся на интегральных представлениях гамма-функции, которые также использовались в предыдущих главах.

7) Для всех  $z$  из правой полуплоскости

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (20)$$

где интегрирование производится по положительной полуоси  $t$  (Эйлер).

Для доказательства прежде всего заметим, что интеграл (20) сходится для всех  $z$ , для которых  $x = \operatorname{Re} z > 0$ . В самом деле,  $|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t+(x-1)\ln t} = e^{-t} t^{x-1}$ , и мы видим, что при  $t \rightarrow \infty$  сходимость интеграла (для любого  $x$ ) обеспечивается множителем  $e^{-t}$ , а при  $t \rightarrow 0$  подынтегральная функция имеет порядок  $t^{x-1}$ , так что для  $x > 0$  интеграл будет сходиться.

Далее, рассмотрим еще функцию

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt;$$

вводя здесь новое переменное интегрирования  $\tau = t/n$  и применяя затем формулу интегрирования по частям, находим:

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau$$

(проинтегрированная часть исчезает). Повторив этот прием, до тех пор, пока не исчезнет множитель  $(1-\tau)$ , получим:

$$f_n(z) = \frac{n^n n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau =$$

$$= \frac{n^n n!}{z(z+1) \dots (z+n-1)(z+n)} = \frac{e^{z \ln n}}{z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right)}.$$

Умножим числитель и знаменатель полученного выражения на

$$e^{-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{z}{k}}, \text{ тогда найдем:}$$

$$f_n(z) = \frac{e^{z \left( \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)}}{z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

Перейдем теперь к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ; на основании формул (11), (12) и (13) получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{ze^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}} = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z).$$

С другой стороны, так как  $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow e^{-t}$  при  $n \rightarrow \infty$ , то естественно ожидать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (21)$$

и тогда формула (20) будет доказана. Для доказательства последнего соотношения мы воспользуемся неравенством \*)

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n} \quad \text{при } 0 < t < n. \quad (22)$$

\*) Непосредственным дифференцированием по  $t$  проверяется формула

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \int_0^t e^{\tau} \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^{n-1} \frac{\tau}{n} d\tau,$$

причем интеграл в правой части заключен между 0 и  $\int_0^t e^{\tau} \frac{\tau}{n} d\tau = e^t \frac{t^2}{2n}$ ;

отсюда и вытекает неравенство (22).

Оценим разность между предполагаемым пределом и  $f_n(z)$ :

$$\Delta = \int_0^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

В силу сходимости интеграла (20) для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $n_0$ , что при  $n > n_0$

$$\left| \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_n^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (23)$$

Фиксируем этот номер  $n_0$  и для любого  $n > n_0$  представим  $\Delta$  в виде

$$\Delta = \int_0^{n_0} \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \\ + \int_{n_0}^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Для оценки первого слагаемого воспользуемся неравенством (22); получим:

$$\left| \int_0^{n_0} \right| < \frac{1}{2n} \int_0^{n_0} t^{x+1} dt,$$

откуда видно, что при достаточно больших  $n$  (и фиксированном  $n_0$ ) это первое слагаемое по модулю не превосходит  $\frac{\varepsilon}{3}$ .

Для второго слагаемого имеем:

$$\left| \int_{n_0}^n \right| \leq \int_{n_0}^n \left[ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt < \int_{n_0}^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

(мы отбросили вычитаемое и увеличили интервал интегрирования, а затем воспользовались неравенством (23)). Модуль третьего слагаемого при любом  $n \geq n_0$  не превосходит  $\frac{\varepsilon}{3}$  и, следовательно,  $|\Delta| < \varepsilon$ . Соотношение (21) доказано, а значит, доказана и формула (20).

Из интегрального представления Эйлера (20) выше\*) были получены следующие

\*) См. п. 74 формулы (12) и (15).

8) *интегральные представления гамма-функции во всей плоскости (Ханкель):*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta, \quad (24)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-z} d\zeta. \quad (25)$$

Здесь  $C$  и  $C^*$  — контуры, указанные на рис. 165 и 166. Формула (24) представляет мероморфную функцию  $\Gamma(z)$ , как отношение двух целых функций (ср. п. 72); формула (25) представляет целую функцию  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ .

9) В заключение приведем полученную нами в п. 77 асимптотическую формулу для гамма-функции (Стирлинг):

для больших положительных  $x$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}. \quad (26)$$

**90. Примеры. Дополнения.** В качестве первого применения гамма-функции мы приведем вычисление так называемого *эйлерова интеграла первого рода* \*), или *бета-функции*, которая для  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $\operatorname{Re} w > 0$  определяется соотношением

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \quad (1)$$

(интеграл (1) в наших предположениях, очевидно, сходится). Для вычисления интеграла (1) мы воспользуемся операционным методом.

Рассмотрим несколько более общий интеграл

$$\int_0^t \tau^{z-1} (t-\tau)^{w-1} d\tau = (t^{z-1} * t^{w-1}),$$

который является сверткой функций  $t^{z-1}$  и  $t^{w-1}$  (см. п. 81) и при  $t=1$  дает  $B(z, w)$ . По теореме умножения (п. 81) изображением этой свертки является произведение изображений  $t^{z-1}$  и  $t^{w-1}$ , т. е. по формуле (6) п. 83

$$(t^{z-1} * t^{w-1}) = \frac{\Gamma(z)}{p^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{p^w} = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{p^{z+w}}.$$

\*) Введен Л. Эйлером в статье, опубликованной в «Комментариях Петербургской Академии наук», 1772 г.

С другой стороны, так как  $\Gamma(z)\Gamma(w)$  — постоянная, то оригинал правой части можно найти по той же формуле (6) п. 83:

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{t^{z+w}} = \Gamma(z)\Gamma(w) \frac{t^{z+w-1}}{\Gamma(z+w)}.$$

По теореме единственности изображений получаем, следовательно,

$$(t^{z-1} * t^{w-1}) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}.$$

Полагая здесь  $t = 1$ , получаем искомое выражение  $B(z, w)$  через гамма-функцию:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (2)$$

Между прочим, заметим, что формула (2) дает аналитическое продолжение бета-функции, определенной интегралом (1) лишь для  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $\operatorname{Re} w > 0$ , на всю комплексную плоскость значений  $z$  и  $w$ .

К эйлеровым интегралам сводятся различные, часто встречающиеся в анализе интегралы. Приведем несколько примеров:

1) Интеграл

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx \quad (p > -1, q > -1)$$

подстановкой  $x = 2t - 1$  приводится к виду  $2^{p+q+1} B(p+1, q+1)$  и по формуле (2) он равен:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx = 2^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}. \quad (3)$$

2) Интеграл

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx \quad (p, q, m > 0)$$

подстановкой  $x^m = t$  приводится к  $\frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$ . Следовательно, по формуле (42) он равен

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m} + q\right)}. \quad (4)$$



## 3) Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} \varphi \cos^{q-1} \varphi d\varphi$$

подстановкой  $\sin \varphi = x$  приводится к интегралу, вычисленному в примере 2)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} \varphi \cos^{q-1} \varphi d\varphi = \int_0^1 x^{p-1} (1-x^2)^{\frac{q}{2}-1} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \quad (5)$$

4) Полагая в предыдущем примере  $p-1=r$ ,  $q-1=-r$  ( $-1 < r < 1$ ) получим, в частности:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^r \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right).$$

Но по второму функциональному уравнению для гамма-функции (формула (16) п. 89)  $\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1+r}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi r}{2}}$ , т. е.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^r \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi r}{2}}. \quad (6)$$

5) К гамма-функции сводится после подстановки  $\ln \frac{1}{x} = t$  интеграл

$$\int_0^1 \ln^p \frac{1}{x} dx = \int_0^\infty e^{-t} t^p dt = \Gamma(p+1). \quad (7)$$

6) К эйлеровым интегралам сводятся также *полные эллиптические интегралы* при значении модулей  $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (см. п. 39):

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}; \quad E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Действительно, подстановка  $\cos \varphi = t$ , а затем  $t^4 = \tau$  приводит первый из них к виду

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \tau^{-\frac{3}{4}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); \quad (8)$$

аналогично

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} \right\} =$$

$$= \frac{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{2}}. \quad (9)$$

7) Для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ 

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-it} dt = \Gamma(z) e^{-\frac{\pi iz}{2}}. \quad (10)$$

Действительно, рассмотрим интеграл вдоль замкнутого контура, показанного на рис. 194:

$$\int_C \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta = \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R} + \int_{Ri}^{ri} = 0$$

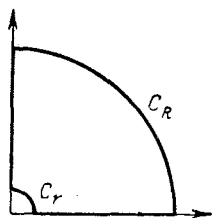


Рис. 194.

(он равен нулю по теореме Коши). Так как при  $\operatorname{Re} z = x < 1$  величина  $|\zeta^{z-1}| \leq R^{x-1}$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , то по лемме Жордана (п. 73, формула (2)) интеграл вдоль  $C_R$  также стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . С другой стороны, при  $x > 0$  интеграл вдоль  $C_r$  стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$ , ибо по теореме об оценке интеграла его модуль не превосходит  $r^{x-1} \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} r^x$ .

Таким образом, в пределе при  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$  мы получаем:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (it)^{z-1} e^{-it} i dt = e^{i \frac{\pi z}{2}} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-it} dt,$$

откуда и вытекает искомая формула. Полагая в ней, в частности,  $z = 1/n$ ,  $n > 1$ , и затем заменяя  $t^{1/n} = x$ , находим:

$$\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{n}-1} e^{-it} dt = n \int_0^{\infty} e^{-ix^n} dx = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{\pi i}{2n}},$$

откуда, отделяя действительные и мнимые части, получаем интеграл:

$$\int_0^{\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}, \quad \int_0^{\infty} \sin x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n} \quad (11)$$

(при  $n=2$  получаем известный нам результат, см. п. 73, пример 6).

В заключение приведем несколько соотношений, в которых участвует гамма-функция.

1. *Интеграл Раабе*. Вычислим интеграл

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(t) dt.$$

Заменяя  $t$  на  $1-t$ , можем написать:

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(1-t) dt$$

и тогда, складывая это выражение с предыдущим и пользуясь вторым функциональным уравнением для гамма-функции, получим:

$$2R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(t) \Gamma(1-t) dt = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin t\pi} dt = \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin x dx.$$

Последний интеграл вычисляется простой заменой переменной  $x = 2u$  (Эйлер):

$$I = \int_0^{\pi} \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2u du = \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin u du + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos u du;$$

второй из полученных интегралов после замены  $u = v - \frac{\pi}{2}$  переходит

в  $\int_0^{\pi} \ln \sin v dv$ , и объединяя его с первым, находим  $I = \pi \ln 2 + 2I$ , откуда  $I = -\pi \ln 2$ . Таким образом,

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(t) dt = \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Раабе рассмотрел более общий интеграл ( $a \geq 0$ )

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(t) dt = \int_0^{a+1} - \int_0^a.$$

Так как  $R'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln a$ , то интегрированием находим  $R(a) = a(\ln a - 1) + C$ . Полагая здесь  $a=0$  и учитывая, что  $R(0) = R_0 = \ln \sqrt{2\pi}$ , найдем окончательно:

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(t) dt = a(\ln a - 1) + \ln \sqrt{2\pi}. \quad (12)$$

2. *Формула Лежандра*. Рассмотрим интеграл

$$B(z, z) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{z-1} d\tau = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - \tau \right)^2 \right\}^{z-1} d\tau.$$

Так как парабола  $\sigma = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)^2$  симметрична относительно прямой  $\tau = 1/2$ , то можно написать:

$$B(z, z) = 2 \int_0^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - \tau\right)^2 \right\}^{z-1} d\tau,$$

откуда после замены  $\frac{1}{2} - \tau = \frac{1}{2} \sqrt{t}$  получаем:

$$B(z, z) = \frac{2}{4^z} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{z-1} dt = \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(\frac{1}{2}, z\right).$$

Заменяя здесь бета-функцию ее выражением (2) и вспоминая, что  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , найдем так называемое *третье функциональное уравнение* для гамма-функции (Лежандр):

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z). \quad (13)$$

3. *Формула Эйлера.* Вычислим величину произведения

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

где  $n$  — любое положительное число. Для этого напомним произведение в обратном порядке

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

и перемножим оба выражения. Объединив каждую пару множителей, с помощью второго функционального уравнения получаем:

$$E^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin 2 \frac{\pi}{n}} \dots \frac{\pi}{\sin (n-1) \frac{\pi}{n}} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin k \frac{\pi}{n}}. \quad (14)$$

Для вычисления произведения синусов рассмотрим тождество

$$z^n - 1 = (z - 1) \left(z - e^{i \frac{2\pi}{n}}\right) \dots \left(z - e^{i (n-1) \frac{2\pi}{n}}\right)$$

(ср. корни  $n$ -й степени из 1), откуда

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{i k \frac{2\pi}{n}}\right)$$

и в пределе при  $z \rightarrow 1$  найдем

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i k \frac{2\pi}{n}}\right)$$

(ср. производную  $z^n$  в точке  $z=1$ ). Переходя в правой части к абсолютным величинам и учитывая, что  $\left|1 - e^{ik \frac{2\pi}{n}}\right| = \left|e^{i \frac{k\pi}{n}}\right| \left|2i \sin \frac{k\pi}{n}\right| = 2 \left|\sin \frac{k\pi}{n}\right|$ , будем иметь:

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin k \frac{\pi}{n}.$$

Подставляя это в соотношение (14), получаем формулу (Эйлера)

$$E = \prod_{k=1}^n \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2}. \quad (15)$$

## § 2. Ортогональные многочлены

**91. Ортогональные системы функций.** Во многих задачах математической физики встречаются разложения функций в так называемые *обобщенные ряды Фурье*. Напомним основные понятия, связанные с такими разложениями.

Рассмотрим семейство действительных функций действительного переменного  $x$ , заданных на фиксированном интервале  $(a, b)$ , быть может, неограниченном. Мы предположим, что эти функции кусочно-гладки и обладают лишь точками разрыва 1 рода. По аналогии с векторной алгеброй введем понятие скалярного произведения функций семейства.

В векторной алгебре скалярным произведением векторов  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и  $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  называют сумму произведений их одноименных координат

$$(a, b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

В соответствии с этим, рассматривая функции  $f(x)$  и  $g(x)$  как векторы с бесконечным множеством «координат» (значений этих функций в отдельных точках интервала  $(a, b)$ ), их *скалярным произведением* называют «непрерывную сумму произведений одноименных координат», т. е.

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (1)$$

Также по аналогии с векторной алгеброй вводятся и другие понятия. *Нормой* («длиной») функции  $f(z)$  называют квадрат-

ный корень из ее скалярного квадрата:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}. \quad (2)$$

Введенные понятия обладают и некоторыми свойствами, аналогичными обычным. Например, очевидно, что в наших предположениях  $\|f\| = 0$  в том и только в том случае, когда  $f(x) \equiv 0$  (мы не учитываем значения функций в точках разрыва, которые не оказывают влияния на  $\|f\|$ ). Известное из анализа *неравенство Буняковского — Шварца*

$$\left[ \int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

можно трактовать как свойство скалярного произведения

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (3)$$

и т. д.

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  семейства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx = 0. \quad (4)$$

В соответствии с этим и система функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется *ортогональной*, если два любых ее представителя ортогональны друг другу:

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0, \text{ если } m \neq n.$$

Эта система называется, кроме того, *нормированной*, если нормы всех функций, ее составляющих, равны 1.

Введенные определения распространяются и на функции действительного переменного  $x$ , принимающие комплексные значения, если под скалярным произведением таких функций понимать вместо интеграла (1) интеграл

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (5)$$

где  $\overline{g(x)}$  обозначает функцию, которая принимает значения, комплексно-сопряженные с  $g(x)$ . При этом, правда, теряется свойство симметрии скалярного произведения: очевидно,

$$(f, g) = \overline{(g, f)}.$$

Скалярный квадрат функции остается неотрицательным:

$$(f, f) = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0,$$

и понятие нормы вводится без изменений; также без изменений вводится понятие ортогональной и нормированной системы.

Простейшим примером ортогональной системы является система функций

$$\varphi_n(x) = e^{in\omega x} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Эта система ортогональна на произвольном интервале длины  $T = 2\pi/\omega$ . В самом деле, при  $m \neq n$  имеем ( $a$  — любое действительное число):

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^{a+T} e^{i(m-n)\omega x} dx = \frac{e^{i(m-n)\omega a}}{i(m-n)\omega} (e^{i(m-n)2\pi} - 1) = 0.$$

Система не нормирована, ибо

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^{a+T} |e^{in\omega x}|^2 dx} = \sqrt{T},$$

но ее легко нормировать, разделив все функции на  $\sqrt{T}$ .

Ортогональные системы функций особенно удобно применять для разложения по ним других функций. В самом деле, пусть функция  $f(x)$  представлена равномерно сходящимся рядом по функциям ортогональной системы  $\{\varphi_n(x)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots \quad (6)$$

Пользуясь свойством ортогональности, легко определить все коэффициенты ряда. Для определения коэффициента  $c_n$  мы умножаем обе части представления (6) на  $\overline{\varphi_n(x)}$  \*) (отчего ряд не перестает равномерно сходиться) и интегрируем по основному промежутку  $(a, b)$ :

$$\int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_n(x)} dx.$$

---

\*) Если система  $\{\varphi_n(x)\}$  состоит из действительных функций, то  $\overline{\varphi_n(x)} = \varphi_n(x)$ .

В силу ортогональности системы все интегралы справа, кроме одного, для которого  $k = n$ , исчезнут, и мы получим:

$$\int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = c_n \|\varphi_n\|^2,$$

откуда

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \quad (7)$$

(мы предполагаем, что система  $\{\varphi_n(x)\}$  не содержит функций, равных тождественно нулю).

Ряд вида (6) называется *обобщенным рядом Фурье* функции  $f(x)$  по ортогональной системе  $\{\varphi_n(x)\}$ , а формулы (7) для определения его коэффициентов называются *обобщенными формулами Фурье*. Для рассмотренного выше примера системы  $\varphi_n(x) = e^{in\omega x}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ряд (6) совпадает с обычным рядом Фурье, записанным в комплексной форме,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

(см. п. 70), а формулы (7) — с обычными формулами Фурье

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{in\omega x} dx.$$

Для дальнейшего изложения важную роль играет так называемая *ортогонализация* системы функций, т. е. замена функций системы  $\varphi_n(x)$  такими их линейными комбинациями  $\psi_n(x)$ , которые образуют ортогональную систему. При доказательстве возможности ортогонализации мы будем предполагать, что система  $\{\varphi_n(x)\}$  *линейно независима*. Это так же, как в векторной алгебре, означает что ни одна из функций системы не может быть представлена как линейная комбинация каких-либо других функций той же системы.

*Теорема об ортогонализации. Какова бы ни была линейно независимая система функций  $\{\varphi_n(x)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), всегда можно построить функции  $\psi_n^0(x)$ , которые являются линейными комбинациями  $\varphi_k(x)$  и образуют ортогональную нормированную систему.*

В качестве функции  $\psi_0^0(x)$  мы возьмем

$$\psi_0^0(x) = \frac{1}{\|\varphi_0(x)\|} \varphi_0(x),$$



так как система  $\{\varphi_n(x)\}$  — линейно независима, то она не может содержать функций, тождественно равных 0 \*), следовательно,  $\|\varphi_0\| \neq 0$ . Выберем теперь постоянную так, чтобы функция

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) - \alpha_{10}\psi_0^0(x)$$

была ортогональной к  $\psi_0^0$ ; имеем  $(\psi_1, \psi_0^0) = (\varphi_1, \psi_0^0) - \alpha_{10}$ , следовательно, достаточно взять  $\alpha_{10} = (\varphi_1, \psi_0^0)$ . Функция  $\psi_1(x)$  не может тождественно равняться нулю, ибо тогда  $\varphi_1(x)$  линейно выражалась бы через  $\varphi_0(x)$ , что противоречит условиям теоремы. Следовательно, в качестве  $\psi_1^0(x)$  мы можем принять

$$\psi_1^0(x) = \frac{1}{\|\psi_1\|} \psi_1(x).$$

После этого берем функцию

$$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - \alpha_{20}\psi_0^0(x) - \alpha_{21}\psi_1^0(x)$$

и подбираем постоянные  $\alpha_{20}$  и  $\alpha_{21}$  так, чтобы  $\psi_2$  была ортогональной  $\psi_0^0$  и  $\psi_1^0$ . Так как  $(\psi_2, \psi_0^0) = (\varphi_2, \psi_0^0) - \alpha_{20}$  и  $(\psi_2, \psi_1^0) = (\varphi_2, \psi_1^0) - \alpha_{21}$ , то для этого достаточно выбрать  $\alpha_{20} = (\varphi_2, \psi_0^0)$ ,  $\alpha_{21} = (\varphi_2, \psi_1^0)$ . Функция  $\psi_2(x)$  не может оказаться тождественно равной нулю, ибо тогда  $\varphi_2(x)$  оказалась бы линейной комбинацией  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ , следовательно, можно взять

$$\psi_2^0(x) = \frac{1}{\|\psi_2\|} \psi_2(x).$$

Наше построение можно продолжать неограниченно. Если функции  $\psi_0^0(x)$ ,  $\psi_1^0(x)$ , ...,  $\psi_{n-1}^0(x)$  уже построены, мы берем

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \psi_k^0(x), \quad (8)$$

где  $\alpha_{nk} = (\varphi_n, \psi_k^0)$ , и затем

$$\psi_n^0(x) = \frac{1}{\|\psi_n\|} \psi_n(x).$$

Система  $\{\psi_n^0(x)\}$  и есть искомая.

Замечание 1. Из нашего построения видно, что не только все  $\psi_n^0(x)$  являются линейными комбинациями  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , но и, наоборот,  $\varphi_n(x)$  являются линейными комбинациями  $\psi_0^0, \psi_1^0, \dots, \psi_n^0$ . Отсюда следует, что любая функция  $\varphi_k(x)$  ортогональна всем функциям  $\psi_{k+1}^0, \psi_{k+2}^0, \dots$  или, иначе, что *любая функция  $\psi_n^0(x)$  ортогональна  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ .*

\*) Функция  $\varphi(x) \equiv 0$  всегда выражается линейно через другую:  $\varphi(x) \equiv 0 \cdot \psi(x)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В некотором смысле имеет место единственность ортогональной системы: *если функция  $\psi(x)$  является линейной комбинацией  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  и ортогональна  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ , то она может отличаться от  $\psi_n^0(x)$  только постоянным множителем.* В самом деле, пусть

$$\psi_n^0(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \varphi_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k \varphi_k(x) \quad (9)$$

(здесь согласно предыдущему  $\alpha_n \neq 0$ ). Рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = \psi(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n} \psi_n^0(x);$$

она, очевидно, линейно выражается через функции  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  (ибо разложение ее по  $\varphi_k$  уже не содержит  $\varphi_n$ ) и ортогональна всем этим функциям. Но отсюда вытекает, что  $\Psi(x) \equiv 0$ , т. е. что  $\psi(x) = \frac{\beta_n}{\alpha_n} \psi_n^0(x)$ .

В заключение укажем обобщение понятия ортогональности, которым мы будем пользоваться ниже (мы ограничиваемся случаем действительных функций). Система функций  $\{\varphi_n(x)\}$  называется *ортогональной с весом  $\rho(x)$*  на интервале  $(a, b)$ , если для любых двух функций системы

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (10)$$

Здесь  $\rho(x)$  — «вес» — фиксированная неотрицательная функция, непрерывная на интервале  $(a, b)$ . При  $\rho(x) \equiv 1$  мы получаем обычную ортогональность.

Теорема об ортогонализации легко обобщается на случай ортогональности с весом. Очевидно, для того, чтобы ортогонализировать с весом  $\rho(x)$  систему функций  $\{\varphi_n(x)\}$ , достаточно ортогонализировать в обычном смысле систему функций  $\{\sqrt{\rho(x)} \varphi_n(x)\}$ . При этом функции, получающиеся в результате ортогонализации, будут представлять собой произведения  $\sqrt{\rho(x)}$  на линейные комбинации функций  $\varphi_k(x)$ . Система таких линейных комбинаций

$$\psi_n^0(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \varphi_k(x) \quad (11)$$

окажется ортогональной с весом  $\rho(x)$ .

Пусть некоторая функция  $f(x)$  разложена в равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (12)$$

по функциям ортогональной с весом  $\rho(x)$  системы  $\{\varphi_n(x)\}$ . Для определения коэффициентов такого разложения мы будем иметь вместо (7) формулу

$$c_n = \frac{1}{d_n^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx, \quad (13)$$

где  $d_n$  — «взвешенная норма» функции  $\varphi_n(x)$ :

$$d_n = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x) \rho(x) dx}. \quad (14)$$

Для вывода формулы (13) достаточно умножить разложение (12) на  $\varphi_n(x)\rho(x)$ , затем почленно проинтегрировать его и воспользоваться ортогональностью с весом системы  $\{\varphi_n(x)\}$ .

**92. Ортогональные многочлены.** Выберем некоторый интервал  $(a, b)$  и применим описанный в предыдущем пункте процесс ортогонализации с весом  $\rho(x)$  к системе степеней  $x$ :  $\varphi_n(x) = x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), которая, как известно, линейно независима. В результате для каждого фиксированного интервала  $(a, b)$  и фиксированного веса  $\rho(x)$  мы получим вполне определенную систему многочленов  $\{q_n(x)\}$ , нормированную и ортогональную на  $(a, b)$  с весом  $\rho(x)$ . Из формулы (11) следует, что каждый многочлен  $q_n^0(x)$  имеет степень  $n$ .

Наиболее употребительными являются следующие системы ортогональных многочленов\*):

Интервал	Вес	Обозначение	Автор
$(-1, 1)$	1	$p_n(x)$	Лежандр
$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$t_n(x)$	Чебышев
$(-1, 1)$	$(1-x)^\lambda (1+x)^\mu \quad \lambda, \mu > -1$	$p_n^{(\lambda, \mu)}(x)$	Якоби
$(-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$	$h_n(x)$	Чебышев — Эрмит
$(0, \infty)$	$x^\lambda e^{-x} \quad \lambda > -1$	$l_n^{(\lambda)}(x)$	Чебышев — Лагерр

\*) Многочлены  $p_n(x)$  были введены в 1785 г. Лежандром; многочлены  $t_n(x)$ ,  $h_n(x)$  и  $l_n(x) = l_n^{(0)}(x)$  — П. Л. Чебышевым в 1859 г. (в работе «Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций», опубликованной в мемуарах Петербургской академии наук), кроме того, многочлены  $h_n(x)$  изучал Эрмит в работе 1864 г., а  $l_n(x)$  — Лагерр в работе 1879 г. Многочлены Лежандра и Чебышева являются частным случаем многочленов Якоби (1859 г.) — первые при  $\lambda = \mu = 0$ , вторые при  $\lambda = \mu = -1/2$ .

Отметим некоторые свойства ортогональных систем многочленов. Через  $q_n^0(x)$  мы будем обозначать многочлены, принадлежащие произвольной, но фиксированной ортогональной и нормированной системе, через  $Q_n(x)$  — многочлены, отличающиеся от  $q_n^0(x)$  произвольным постоянным множителем

$$Q_n(x) = d_n q_n^0(x),$$

где  $d_n$  — взвешенная норма  $Q_n(x)$ . Выражение «произвольный многочлен» будет означать многочлен с произвольными коэффициентами, вообще не принадлежащий рассматриваемой системе.

Из замечания 1 предыдущего пункта непосредственно вытекают следующие теоремы:

**Теорема 1.** *Произвольный многочлен степени  $n$  может быть представлен как линейная комбинация многочленов  $Q_0(x)$ ,  $Q_1(x)$ , ...,  $Q_n(x)$ .*

**Теорема 2.** *Многочлен  $Q_n(x)$  ортогонален с весом  $\rho(x)$  произвольному многочлену степени ниже  $n$ .*

Имеет место также следующий общий факт:

**Теорема 3.** *Многочлен  $Q_n(x)$  на интервале  $(a, b)$  имеет в точности  $n$  различных корней.*

Для доказательства рассмотрим интеграл

$$\int_a^b Q_n(x) \rho(x) dx = 0 \quad (1)$$

— он равен 0, ибо  $Q_n(x)$  по теореме 2 ортогонален с весом  $\rho(x)$  многочлену нулевой степени  $x^0 = 1$ . Так как по принятому выше условию вес  $\rho(x)$  — неотрицательная функция, то из равенства (1) вытекает, что  $Q_n(x)$  не может сохранять на всем интервале  $(a, b)$  постоянный знак.

Пусть  $Q_n(x)$  на интервале  $(a, b)$  меняет знак  $m \geq 1$  раз в точках  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Рассмотрим многочлен степени  $m$ ,

$$R_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m);$$

очевидно, произведение  $Q_n(x)R_m(x)$  должно сохранять на  $(a, b)$  постоянный знак, следовательно,

$$\int_a^b Q_n(x) R_m(x) \rho(x) dx \neq 0. \quad (2)$$

С другой стороны, если  $m < n$ , то по теореме 2 многочлен  $Q_n(x)$  должен быть ортогональным с весом  $\rho$  многочлену  $R_m(x)$  и интеграл (2) должен равняться 0. Отсюда следует, что  $m = n$  и теорема доказана.

Для произвольной системы ортогональных многочленов можно получить и рекуррентную формулу, связывающую три последовательных многочлена  $Q_{n-1}$ ,  $Q_n$  и  $Q_{n+1}$ . Предположим сначала, что система нормирована. По теореме 1 произведение  $xq_n^0(x)$ , которое является многочленом степени  $n+1$ , может быть представлено как линейная комбинация  $q_0^0, q_1^0, \dots, q_{n+1}^0$ :

$$xq_n^0(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{nk} q_k^0(x). \quad (3)$$

По формуле (13) предыдущего пункта для коэффициентов этого разложения имеем:

$$c_{nk} = \int_a^b xq_n^0(x) q_k^0(x) \rho(x) dx. \quad (4)$$

Но если  $k < n-1$ , то  $xq_k^0(x)$  — многочлен степени ниже  $n$  и по теореме 2 тогда  $c_{nk} = 0$ . Таким образом, в соотношении (3) могут быть отличными от 0 только три последних коэффициента  $c_{n, n-1}$ ,  $c_{n, n}$  и  $c_{n, n+1}$ .

Обозначим через  $a_{nn}^0 = a_n^0$  коэффициент при старшей степени  $x$  в выражении  $q_n^0(x)$ . Сравнение в тождестве (3) коэффициентов при  $x^{n+1}$  дает  $a_n^0 = c_{n, n+1} a_{n+1}^0$ , откуда

$$c_{n, n+1} = \frac{a_n^0}{a_{n+1}^0}.$$

Но из формулы (4) видно, что  $c_{nk} = c_{kn}$  для любых  $a$  и  $k$ , следовательно,  $c_{n, n-1} = c_{n-1, n} = \frac{a_{n-1}^0}{a_n^0}$ , и мы получаем искомую рекуррентную формулу

$$xq_n^0(x) = \frac{a_n^0}{a_{n+1}^0} q_{n+1}^0(x) + c_{nn} q_n^0(x) + \frac{a_{n-1}^0}{a_n^0} q_{n-1}^0(x). \quad (5)$$

Коэффициент  $c_{nn}$  легко выразить через коэффициенты  $b_n^0$  при  $x^{n-1}$  в выражении  $q_n^0(x)$  — сравнивая в (5) коэффициенты при  $x^n$ , получим  $b_n^0 = \frac{a_n^0}{a_{n+1}^0} b_{n+1}^0 + c_{nn} a_n^0$ , откуда

$$c_{nn} = \frac{b_n^0}{a_n^0} - \frac{b_{n+1}^0}{a_{n+1}^0}. \quad (6)$$

Чтобы перейти к случаю произвольной ортогональной системы многочленов  $\{Q_n(x)\}$ , не обязательно нормированной, достаточно заметить, что

$$a_n = d_n a_n^0, \quad b_n = d_n b_n^0,$$

где  $d_n$  — взвешенная норма многочлена  $Q_n(x)$ .

Пользуясь этими выражениями после простых преобразований формул (5) и (6), получим следующую теорему:

*Теорема 4. Любые три последовательных многочлена ортогональной системы связаны рекуррентным соотношением*

$$xQ_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} Q_{n+1}(x) + \left( \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \right) Q_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} \left( \frac{d_n}{d_{n-1}} \right)^2 Q_{n-1}(x). \quad (7)$$

Таким образом, зная коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  при двух старших степенях  $Q_n(x)$ , мы сможем последовательно определять эти многочлены. Подсчет коэффициентов для конкретных систем мы проведем в п. 93, где и получим окончательные соотношения.

Для получения дальнейших свойств ортогональных многочленов мы предположим, что вес  $\rho(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad (8)$$

где  $\beta(x)$  имеет своими корнями концы  $a$  и  $b$  интервала, на котором ортогональна (с весом) рассматриваемая система многочленов, и условиям на концах интервала:

$$\rho(x) \beta(x) |_{x=a, b} = 0. \quad (9)$$

Заметим, что этим условиям удовлетворяют все перечисленные выше специальные классы ортогональных многочленов\*).

а) *Многочлены Лежандра*:  $\rho' = 0$ , следовательно, уравнение (8) удовлетворяется при  $\alpha(x) \equiv 0$ ; для выполнения (9) достаточно принять  $\beta(x) = 1 - x^2$ . Таким образом, для многочленов Лежандра

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1 - x^2. \quad (10)$$

б) *Многочлены Чебышева*:  $\rho' = \frac{x}{(1-x^2)^3} = \frac{x\rho}{1-x^2}$ , следовательно,

$$\alpha = x, \quad \beta = 1 - x^2. \quad (11)$$

Условие (9) удовлетворяется.

\*) Можно доказать, что этими классами и исчерпываются многочлены, ортогональные с весом, который удовлетворяет условиям (8) и (9).

в) *Многочлены Якоби*:  $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\mu}{1+x} - \frac{\lambda}{1-x} = \frac{\mu - \lambda - (\mu + \lambda)x}{1-x^2}$ , следовательно,

$$\alpha = (\mu - \lambda) - (\mu + \lambda)x, \quad \beta = 1 - x^2; \quad (12)$$

при  $\lambda > -1$ ,  $\mu > -1$  условие (9) удовлетворяется.

г) *Многочлены Чебышева—Эрмита*:  $\frac{\rho'}{\rho} = -2x$ , следовательно,

$$\alpha = -2x, \quad \beta = 1; \quad (13)$$

условие (9) удовлетворяется, ибо  $\rho = e^{-x^2} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

д) *Многочлены Чебышева—Лагерра*:  $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\lambda - x}{x}$ , следовательно,

$$\alpha = \lambda - x, \quad \beta = x; \quad (14)$$

условие (9) удовлетворяется при  $\lambda > -1$ .

Оказывается, что ортогональные многочлены удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами, к которым часто приводят различные физические задачи\*). Мы получим дифференциальное уравнение для произвольной системы ортогональных многочленов, удовлетворяющей условиям (8) и (9).

Пусть  $Q_n(x)$  — произвольный многочлен системы, ортогональной с весом  $\rho(x)$  на интервале  $(a, b)$  и не обязательно нормированной. Интегрированием по частям получаем

$$I = \int_a^b [\beta(x) \rho(x) Q'_n(x)]' x^k dx = x^k [\beta \rho Q'_n]_a^b - k \int_a^b x^{k-1} \beta \rho Q'_n dx;$$

в силу условия (9) первый член справа исчезает, и интегрируя еще раз по частям ( $x^{k-1} \beta \rho = u$ ,  $Q'_n dx = dv$ ), получаем:

$$I = -k [x^{k-1} \beta \rho Q_n]_a^b + k \int_a^b Q_n [(k-1) x^{k-2} \beta \rho + x^{k-1} \beta' \rho + x^{k-1} \beta \rho'] dx.$$

Пользуясь опять условием (9) и заменяя в силу (8)  $\beta \rho' = \alpha \rho$ , будем иметь:

$$I = k \int_a^b Q_n \rho [(k-1) x^{k-2} \beta + x^{k-1} (\beta' + \alpha)] dx.$$

В квадратных скобках под знаком интеграла здесь стоит некоторый многочлен степени  $k$ , ибо  $\beta$  — многочлен второй сте-

\*) Это обстоятельство и делает понятным значение ортогональных многочленов для приложений.

пени, а  $\beta' + \alpha$  — первой степени. По теореме 2 мы заключаем отсюда, что при  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  этот интеграл равен 0. Вспоминая начальное выражение  $I$ , получим, что при  $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$I = \int_a^b (\beta' \rho Q_n' + \beta \rho' Q_n' + \beta \rho Q_n'') x^k dx = \int_a^b [(\alpha + \beta') Q_n' + \beta Q_n''] x^k \rho dx = 0$$

(мы снова воспользовались уравнением (8)). Последнее равенство означает, что многочлен  $n$ -й степени, стоящий в квадратных скобках, который по теореме 1 есть линейная комбинация  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ , ортогонален с весом  $\rho$  всем степеням  $x^k$  для  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Так как система  $\{Q_n\}$  получена ортогонализацией с весом  $\rho$  степеней  $\{x^n\}$ , то по замечанию 2 предыдущего пункта мы можем заключить отсюда, что этот многочлен отличается от  $Q_n$  лишь постоянным множителем

$$(\alpha + \beta') Q_n'(x) + \beta Q_n''(x) = \gamma_n Q_n(x). \quad (15)$$

Для определения множителя  $\gamma_n$  достаточно сравнить в (15) коэффициенты при  $x^n$ ; обозначая через  $a_n$  коэффициент при старшей степени  $Q_n$  и вспоминая обозначения, введенные в условии (8), будем иметь  $(\alpha_1 + 2\beta_2)na_n + \beta_2n(n-1)a_n = \gamma_n a_n$ , откуда

$$\gamma_n = n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]. \quad (16)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 5.** Для любой системы многочленов  $\{Q_n(x)\}$ , ортогональных с весом  $\rho(x)$ , удовлетворяющим условиям (8) и (9), многочлен  $Q_n(x)$  является решением линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\beta y'' + (\alpha + \beta') y' - \gamma_n y = 0, \quad (17)$$

где  $\gamma_n$  определяется формулой (16).

В качестве примеров приведем дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют специальные многочлены. Из формул (10) — (14) и уравнения (17) имеем:

а) многочлены Лежандра

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (18)$$

б) многочлены Чебышева

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0; \quad (19)$$

в) многочлены Якоби

$$(1 - x^2) y'' + \{\mu - \lambda - (\mu + \lambda + 2)x\} y' + n(\mu + \lambda + n + 1)y = 0; \quad (20)$$



г) многочлены Чебышева — Эрмита

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0; \quad (21)$$

д) многочлены Чебышева — Лагерра

$$xy'' + (\lambda - 1 - x)y' + ny = 0. \quad (22)$$

**93. Выражение через вес. Производящие функции.** Мы по-прежнему будем рассматривать произвольную систему многочленов  $\{Q_n(x)\}$ , ортогональную на интервале  $(a, b)$  с весом  $\rho(x)$ , удовлетворяющим условиям

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \quad \rho(x)\beta(x)|_{x=a, b} = 0, \quad (1)$$

и не обязательно нормированную. Для таких систем оказывается возможным получить формулу, непосредственно выражающую многочлен  $Q_n(x)$  через вес  $\rho(x)$  и функцию  $\beta(x)$ . Имеет место

**Теорема 1.** Для любой системы многочленов  $\{Q_n(x)\}$ , ортогональных с весом  $\rho(x)$ , удовлетворяющим условиям (1), многочлен  $Q_n(x)$  представляется в виде

$$Q_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x)\beta^n(x)\}, \quad (2)$$

где  $A_n$  — постоянный коэффициент, зависящий от нормировки многочленов.

Для многочленов Лежандра эта формула была доказана Родригом (1814 г.), аналогичные формулы получены и для других специальных многочленов. Мы приведем вывод этой формулы, который нам сообщил И. Г. Араманович.

Докажем прежде всего, что выражение

$$\tilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{\rho(x)\beta^n(x)\} \quad (3)$$

представляет собой многочлен  $n$ -й степени. Имеем:

$$(\rho\beta^n)' = \rho'\beta^n + \rho\beta^{n-1}n\beta' = \rho\beta^{n-1}\tilde{Q}_{n,1},$$

где  $\tilde{Q}_{n,1} = \alpha + n\beta'$  — многочлен первой степени (мы воспользовались дифференциальным уравнением (1)). Аналогично

$$(\rho\beta^n)'' = (\rho\beta^{n-1}\tilde{Q}_{n,1})' = \rho\beta^{n-2}\tilde{Q}_{n,2},$$

где  $\tilde{Q}_{n,2} = [\alpha + (n-1)\beta']\tilde{Q}_{n,1} + \beta\tilde{Q}_{n,1}'$  — многочлен второй степени.

Имея в виду применение метода полной индукции, предположим, что справедлива формула

$$(\rho\beta^n)^{(k)} = (\rho\beta^{n-k+1}\tilde{Q}_{n,k-1})' = \rho\beta^{n-k}\tilde{Q}_{n,k}, \quad (4)$$

где

$$\tilde{Q}_{n,k} = [\alpha + (n - k + 1)\beta'] \tilde{Q}_{n,k-1} + \beta\tilde{Q}'_{n,k-1} \quad (5)$$

— многочлен  $k$ -й степени. Тогда снова используя уравнение (1), получим:

$$(\rho\beta^n)^{(k+1)} = (\rho\beta^{n-k}\tilde{Q}_{n,k})' = \rho\beta^{n-k-1} \{[\alpha + (n - k)\beta'] \tilde{Q}_{n,k} + \beta\tilde{Q}'_{n,k}\}.$$

Мы видим, что эта формула содержит в себе формулы (4) и (5), записанные для  $k+1$ . Таким образом, по принципу полной индукции можно утверждать, что (4) и (5) справедливы для всех  $k = 1, 2, \dots, n$ . Заметим, что (4) остается в силе и для  $k = 1$ , если считать  $\tilde{Q}_{n,0} \equiv 1$ .

Формулы (4) и (5) для  $k = n$  дают

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = \rho\tilde{Q}_n,$$

где

$$\tilde{Q}_n = \tilde{Q}_{n,n} = (\alpha + \beta') \tilde{Q}_{n,n-1} + \beta\tilde{Q}'_{n,n-1}$$

— многочлен  $n$ -й степени. Отсюда и вытекает утверждение о выражении (3).

Покажем теперь, что многочлен  $\tilde{Q}_n$  ортогонален с весом  $\rho$  любой степени  $x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ). Для этого будем последовательно применять формулу интегрирования по частям к интегралу

$$I_k = \int_a^b x^k \tilde{Q}_n \rho \, dx = \int_a^b x^k d(\rho\beta\tilde{Q}_{n,n-1}),$$

пользуясь все время формулой (4) и условием (1) для  $\rho\beta$ . На  $(k-1)$ -м шаге получим:

$$I_k = (-1)^{k-1} k! \int_a^b x d(\rho\beta^k \tilde{Q}_{n,n-k}), \quad (6)$$

а на  $k$ -м

$$I_k = (-1)^k k! \int_a^b d(\rho\beta^{k+1} \tilde{Q}_{n,n-k-1}) = 0.$$

Последняя формула имеет место для  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  (при  $k = n-1$  мы считаем  $\tilde{Q}_{n,0} = 1$ ), и ортогональность доказана.

По замечанию 2 п. 91 мы можем теперь утверждать, что многочлен  $\tilde{Q}_n$  отличается от ортогонального многочлена  $Q_n$  лишь постоянным множителем:  $Q_n = A_n \tilde{Q}_n$ , а это и дает искомую формулу (2).

Как уже отмечалось, величина коэффициента  $A_n$  зависит от нормировки многочлена. В частности, например, многочлен  $\tilde{Q}_n$  нормирован так, что  $A_n = 1$ . Найдем коэффициент  $\tilde{a}_n$  при старшей степени такого многочлена. Для этого сравним сначала коэффициенты при старшей степени  $x$  в формуле (5):

$$\tilde{a}_{n,k} = [\alpha_1 + (2n - k + 1)\beta_2] \tilde{a}_{n,k-1}.$$

Отсюда получаем:

$$\tilde{a}_n = \tilde{a}_{n,n} = [\alpha_1 + (n+1)\beta_2][\alpha_1 + (n+2)\beta_2] \dots [\alpha_1 + 2n\beta_2] \tilde{a}_{n,0},$$

где  $\tilde{a}_{n,0} = 1$ , или короче

$$\tilde{a}_n = \prod_{k=n+1}^{2n} (\alpha_1 + k\beta_2). \quad (7)$$

Совершенно аналогичным образом найдем и коэффициент при  $x^{n-1}$  в выражении многочлена  $\tilde{Q}_n$ :

$$\tilde{b}_n = n(\alpha_0 + n\beta_1) \prod_{k=n+1}^{2n-1} (\alpha_1 + k\beta_2) = \frac{\alpha_0 + n\beta_1}{\alpha_1 + 2n\beta_2} n\tilde{a}_n^*). \quad (8)$$

В качестве примеров отметим значения  $\tilde{a}_n$  и  $\tilde{b}_n$  для специальных многочленов, нормированных так, что в формуле (2) коэффициенты  $A_n = 1$ .

Для *многочленов Якоби*  $\alpha = (\mu - \lambda) - (\mu + \lambda)x$ ,  $\beta = 1 - x^2$ , следовательно:

$$\tilde{a}_n = (-1)^n \prod_{k=n+1}^{2n} (\lambda + \mu + k) = (-1)^n \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2n + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)}, \quad (9)$$

ибо в силу функционального уравнения для гамма-функции (см. (14) п. 89)

$$\Gamma(z + 2n + 1) = (z + 2n)(z + 2n - 1) \dots (z + n + 1) \Gamma(z + n + 1)$$

и

$$\tilde{b}_n = n \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu + 2n} \tilde{a}_n = (-1)^n (\lambda - \mu) n \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2n)}{\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)}. \quad (10)$$

\*) Для получения формулы (8) нужно сравнить коэффициенты при  $x^{k-1}$  в формуле (5), что дает

$$\tilde{b}_{n,k} = [\alpha_1 + (2n - k)\beta_2] \tilde{b}_{n,k-1} + (\alpha_0 + n\beta_1) \tilde{a}_{n,k-1}$$

(обозначения аналогичны предыдущим), и затем последовательно применять эту формулу, начиная от  $\tilde{b}_{n,1} = \alpha_0 + n\beta_1$  до тех пор, пока не получится  $\tilde{b}_{n,n} = \tilde{b}_n$ ; при этом надо пользоваться полученными выше выражениями для  $\tilde{a}_{n,k}$ .

Из формул (9) и (10), в частности, получаем для *многочленов Лежандра* ( $\lambda = \mu = 0$ ):

$$\tilde{a}_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}; \quad \tilde{b}_n = 0, \quad (11)$$

и для *многочленов Чебышева* ( $\lambda = \mu = -1/2$ ):

$$\tilde{a}_n = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}; \quad \tilde{b}_n = 0. \quad (12)$$

Для *многочленов Чебышева — Эрмита* ( $\alpha = -2x, \beta = 1$ ) имеем:

$$\tilde{a}_n = (-1)^n 2^n; \quad \tilde{b}_n = 0, \quad (13)$$

а для *многочленов Чебышева — Лагерра* ( $\alpha = \lambda - x, \beta = x$ ):

$$\tilde{a}_n = (-1)^n; \quad \tilde{b}_n = (-1)^{n+1} (\lambda + n) n. \quad (14)$$

Найдем теперь взвешенную норму  $\tilde{d}_n$  многочлена  $\tilde{Q}_n$ . Имеем:

$$\tilde{d}_n^2 = \int_a^b \tilde{Q}_n^2 \rho \, dx = \int_a^b (\tilde{a}_n x^n + \dots) \tilde{Q}_n \rho \, dx = \tilde{a}_n \int_a^b x^n \tilde{Q}_n \rho \, dx,$$

ибо по теореме 2 предыдущего пункта  $\tilde{Q}_n$  ортогонален с весом  $\rho$  любому многочлену степени ниже  $n$ . Применяя теперь формулу (6) для  $k = n$  и интегрируя по частям, находим:

$$\tilde{d}_n^2 = (-1)^n n! \tilde{a}_n \int_a^b \rho \beta^n \, dx,$$

или окончательно

$$\tilde{d}_n = \sqrt{(-1)^n n! \tilde{a}_n \delta_n}, \quad (15)$$

где

$$\delta_n = \int_a^b \rho \beta^n \, dx \quad (16)$$

— величина, определяемая весом  $\rho$  и функцией  $\beta$ .

Зная  $\tilde{d}_n$  и  $\tilde{a}_n$ , нетрудно определить коэффициент  $a_n^0$  при старшей степени нормированного многочлена  $q_n^0(x) = \frac{1}{\tilde{d}_n} \tilde{Q}_n(x)$ :

$$a_n^0 = \frac{\tilde{a}_n}{\tilde{d}_n} = \sqrt{\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\tilde{a}_n}{\delta_n}}. \quad (17)$$

Для *многочленов Якоби* формула (16) дает:

$$\delta_n = \int_{-1}^1 (1-x)^{\lambda+n} (1+x)^{\mu+n} \, dx = 2^{\lambda+\mu+2n+1} \frac{\Gamma(\lambda+n+1) \Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2n+2)}$$

(мы воспользовались формулой (3) п. 90). На основании (9) и (17) получаем тогда

$$(a_n^0)^2 = \frac{1}{2^{\lambda+\mu+2n+1} n!} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+2)}{\Gamma(\lambda+n+1) \Gamma(\mu+n+1)} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+2n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)}. \quad (18)$$

В частности, для *многочленов Лежандра и Чебышева* отсюда, соответственно, получаем:

$$a_n^0 = \frac{(2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}} (n!)^2} \sqrt{2n+1}, \quad (19)$$

$$a_n^0 = \frac{(2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}} n!} \frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{n-\frac{1}{2}}.$$

Для *многочленов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра*, соответственно,

$$\delta_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \delta_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\lambda+n} dx = \Gamma(\lambda+n+1),$$

и на основании (13) и (14) получаем:

$$(a_n^0)^2 = \frac{2^n}{\sqrt{\pi} n!}; \quad (a_n^0)^2 = \frac{1}{n! \Gamma(\lambda+n+1)}. \quad (20)$$

В литературе обычно рассматриваются ненормированные ортогональные многочлены  $Q_n(x)$ . Для того чтобы однозначно определить эти многочлены, достаточно, очевидно, задать, кроме веса и интервала, величины их старших коэффициентов  $a_n$ . Сохраняя принятые выше обозначения, будем иметь:

$$Q_n(x) = A_n \tilde{Q}_n(x) = d_n q_n^0(x),$$

откуда, сравнивая старшие коэффициенты, найдем:

$$a_n = A_n \tilde{a}_n = d_n a_n^0, \quad b_n = A_n \tilde{b}_n = d_n b_n^0. \quad (21)$$

Так как коэффициенты  $\tilde{a}_n$  и  $a_n^0$  найдены выше, то, зная  $a_n$ , мы можем определить отсюда  $A_n$  и  $d_n$ . Приведем эти величины для специальных многочленов.

Многочлен	Обозначение	$a_n$	$d_n^2$	$A_n$
Лежандра	$P_n(x)$	$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$	$\frac{2}{2n+1}$	$(-1)^n \frac{1}{2^n n!}$
Чебышева	$T_n(x)$	1	$\frac{\pi}{2^{n-1}}$	$(-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}$
Якоби	$P_n^{(\nu, \mu)}(x)$	$\frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\lambda + \mu + 2n + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + n + 1)}$	$\frac{2^{\lambda + \mu + 1} \Gamma(\lambda + n + 1) \Gamma(\mu + n + 1)}{n! \Gamma(\lambda + \mu + n + 1) (\lambda + \mu + 2n + 1)}$	$(-1)^n \frac{1}{2^n n!}$
Чебышева — Эрмита	$H_n(x)$	$2^n$	$2^n n! \sqrt{\pi}$	$(-1)^n$
Чебышева — Лагерра	$L_n^{(\lambda)}(x)$	$(-1)^n$	$n! \Gamma(\lambda + n + 1)$	1

Зная  $A_n$ , мы можем записать формулу (2) для всех этих многочленов. В качестве примера выпишем ее для многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n \quad (22)$$

(она совпадает с известной формулой Родрига) и для многочленов Чебышева — Лагерра

$$L_n^{(\lambda)}(x) = x^{-\lambda} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{\lambda+n}) \quad (23)$$

(она часто служит определением  $L_n^{(\lambda)}(x)$ ).

Далее, зная коэффициенты  $a_n$ ,  $d_n$  и  $b_n$  (последний определяется из (21) через  $A_n$  и найденные выше  $\delta_n$ ), мы можем записать в окончательной форме рекуррентные соотношения для таких многочленов (см. формулу (7) предыдущего пункта):

а) *многочлены Лежандра*

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x), \quad n \geq 1; \quad (24)$$

б) *многочлены Чебышева*

$$xT_n(x) = T_{n+1}(x) + \frac{1}{4} T_{n-1}(x), \quad n \geq 2^*); \quad (25)$$

\* ) При  $n < 2$  формулы имеют несколько иной вид:

$$xT_1 = T_2 + \frac{1}{4} T_0 + \frac{1}{4}, \quad xT_0 = T_1.$$

в) *многочлены Якоби*

$$\begin{aligned} (v+2n)(v+2n+1)(v+2n+2)xP_n^{(\lambda, \mu)}(x) = \\ = 2(n+1)(v+n+1)(v+2n)P_{n+1}^{(\lambda, \mu)}(x) + \\ + (\mu^2 - \lambda^2)(v+2n+1)P_n^{(\lambda, \mu)}(x) + \\ + 2(\lambda+n)(\mu+n)(v+2n+2)P_{n-1}^{(\lambda, \mu)}(x), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $v = \lambda + \mu$ ;

г) *многочлены Чебышева — Эрмита*

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1; \quad (27)$$

д) *многочлены Чебышева — Лагерра*

$$\left. \begin{aligned} xL_n^{(\lambda)}(x) = -L_{n+1}^{(\lambda)}(x) + (\lambda + 2n + 1)L_n^{(\lambda)}(x) - n(\lambda + n)L_{n-1}^{(\lambda)}(x), \\ n > 1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

В заключение покажем, что многочлены ортогональной системы можно рассматривать как коэффициенты разложения в ряд Тейлора некоторой аналитической функции, которая называется производящей функцией многочленов этой системы \*).

Как нам сообщили И. Г. Араманович и Н. И. Кожевников, производящую функцию можно получить для любого семейства многочленов, ортогональных с весом  $\rho$ , удовлетворяющим условию (1). Мы следуем здесь их изложению.

Для простоты мы рассмотрим многочлены  $\tilde{Q}_n$ , нормированные так, что в формуле (2) все коэффициенты  $A_n = 1$ . Назовем *производящей функцией* семейства  $\{\tilde{Q}_n\}$  функцию двух комплексных переменных  $z$  и  $w$ , определяемую соотношением \*\*)

$$\Psi(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{Q}_n(z)}{n!} w^n. \quad (29)$$

Преобразуем выражение (29), пользуясь формулой (2) и формулой Коши для высших производных. Мы имеем:

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^n(\rho \beta^n)}{dz^n} = \frac{1}{\rho(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\xi) \beta^n(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi,$$

\*) В п. 70 мы уже приводили примеры определения многочленов с помощью производящей функции.

\*\*) Радиус сходимости ряда (29), расположенного по степеням  $w$ , зависит, конечно, от значения  $z$ . В предыдущем изложении  $\tilde{Q}_n$  определялся для действительных значений аргумента, но так как  $\tilde{Q}_n$  — многочлен, мы можем считать его определенным во всей комплексной плоскости.

где  $C$  — замкнутый контур, охватывающий точку  $\xi = z$  и лежащий в области аналитичности функции  $\rho(\xi)\beta^n(\xi)$ . Меняя в последней формуле порядок суммирования и интегрирования и суммируя полученную геометрическую прогрессию, мы получаем:

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\xi)}{\xi - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w\beta(\xi)}{\xi - z} \right)^n d\xi = \frac{1}{\rho(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - z - w\beta(\xi)};$$

наши преобразования законны, если для всех  $\xi$  на кривой  $C$  модуль знаменателя геометрической прогрессии  $\frac{w\beta(\xi)}{\xi - z}$  меньше 1, а это всегда будет для достаточно малых  $|w|$ . Знаменатель подынтегральной функции представляет собой многочлен второй степени относительно  $\xi$ , причем при малых  $|w|$  один корень этого многочлена — мы обозначаем его  $\xi_w$  — близок к точке  $\xi = z$ , а другой велик по абсолютной величине. Уменьшая в случае надобности контур  $C$ , мы можем считать, что второй корень лежит вне этого контура. Тогда подынтегральная функция имеет внутри  $C$  лишь один полюс первого порядка  $\xi = \xi_w$  с вычетом

$$c_{-1} = \frac{\rho(\xi_w)}{1 - w\beta'(\xi_w)}.$$

Применяя теорему Коши о вычетах, мы получаем окончательно:

**Теорема 2.** Для любой системы  $\{\tilde{Q}_n(x)\}$  многочленов, ортогональной с весом  $\rho(x)$ , удовлетворяющим условию (1), существует производящая функция  $\Psi(z, w)$  такая, что

$$\Psi(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{Q}_n(z)}{n!} w^n. \quad (29)$$

Эта функция определяется формулой

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{\rho(\xi_w)}{1 - w\beta'(\xi_w)}, \quad (30)$$

где  $\xi_w$  означает тот корень квадратного уравнения

$$\xi - z - w\beta(\xi) = 0, \quad (31)$$

который при малых  $w$  близок к  $\xi = z$ .

Приведем несколько примеров.

1) Многочлены Лежандра. Уравнение (31) принимает вид  $w\xi^2 + \xi - (z + w) = 0$ , откуда

$$\xi_w = \frac{1}{2w} (-1 + \sqrt{1 + 4wz + 4w^2})$$



(знак перед корнем выбирается с учетом того, что при малых  $|\omega|$  должно быть  $\zeta_\omega \approx z$ ), и по формуле (30) мы получаем:

$$\Psi(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\omega z + 4\omega^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{P}_n(z)}{n!} \omega^n.$$

Заменяя  $\tilde{P}_n = \frac{1}{A_n} P_n = 2^n n! (-1)^n P_n$  и  $\omega$  на  $-\frac{\omega}{2}$ , получим окончательно

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2z\omega + \omega^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \omega^n, \quad (32)$$

что совпадает с формулой (8) п. 70.

2) *Многочлены Чебышева — Эрмита*. Уравнение (31) имеет вид  $\xi - z - \omega = 0$  и по формуле (30)

$$\Psi(z, \omega) = \frac{\rho(\zeta_\omega)}{\rho(z)} = e^{-(\omega^2 + 2\omega z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(z)}{n!} \omega^n.$$

Заменяя  $\tilde{H}_n = (-1)^n H_n$  и  $\omega$  на  $-\omega$ , получаем:

$$e^{2\omega z - \omega^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} \omega^n. \quad (33)$$

3) *Многочлены Чебышева — Лагерра*. Уравнение (31) имеет вид  $\xi - \omega - \omega\xi = 0$  и по формуле (30)

$$\Psi(z, \omega) = \frac{z^{-\lambda}}{(1-\omega)^{\lambda+1}} e^{-z\omega/(1-\omega)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} \omega^n. \quad (34)$$

**94. Примеры. Приложения.** 1) Многочлены Лежандра играют важную роль в теории потенциала. Рассмотрим в пространстве притягивающую точку  $P$  массы 1, находящуюся на расстоянии  $a$  от начала координат  $O$ . Потенциал этой массы, вычисленный в точке  $M$ , которая отстоит от начала координат на расстоянии  $r$ , имеет вид:

$$V(M) = \frac{1}{MP} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}},$$

где  $\varphi$  — угол между  $OP$  и  $OM$ . Положим  $t = a/r$ ,  $x = \cos \varphi$ , тогда

$$V(M) = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \varphi + \frac{a^2}{r^2}}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}},$$

и если разлагать правую часть в ряд по степеням переменного  $t$ , то согласно формуле (32) предыдущего пункта коэффициентами такого ряда будут служить многочлены Лежандра:

$$V(M) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (1)$$

При действительных  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , это разложение сходится при  $|t| < 1$ , т. е. при  $r > a$ . В самом деле, для таких  $x$  корни квадратного уравнения  $t^2 - 2xt + 1 = 0$ ,  $t_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$  ( $x = \cos \varphi$ ), которые являются особыми точками  $V$ , рассматриваемой как функция  $t$ , и лежат на единичной окружности.

2) Рекуррентные формулы для многочленов Лежандра. Кроме основной рекуррентной формулы

$$xP_n(x) = \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) + \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) \quad (2)$$

для многочленов Лежандра можно получить и другие формулы, связывающие  $P_n(x)$  различной степени. Прежде всего, дифференцируя разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (3)$$

по  $x$ , находим:

$$\frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n,$$

откуда, пользуясь снова разложением (3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получаем *вторую рекуррентную формулу*

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x). \quad (4)$$

Дифференцируя (2) по  $x$  и исключая из полученного соотношения и формулы (4) производную  $P'_n(x)$ , получим *третью рекуррентную формулу*

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \quad (5)$$

3) Интегральные представления многочленов Лежандра. По формуле Родрига (22) предыдущего пункта имеем:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}.$$

Пользуясь формулой Коши для старших производных из п. 17, находим отсюда *первое интегральное представление*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - x)^{n+1}} d\zeta, \quad (6)$$

где  $C$  — замкнутый контур, окружающий точку  $x$ . Пусть, в частности,  $x$  — действительное число,  $|x| < 1$ , а  $C$  — окружность с центром в точке  $x$  и радиуса  $\sqrt{1-x^2}$ , тогда, полагая  $\zeta - x = \sqrt{1-x^2} e^{it}$ , найдем  $\zeta^2 - 1 = 2\sqrt{1-x^2} e^{it} (x + i \sin t \sqrt{1-x^2})$  и, следовательно,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i \sin t \sqrt{1-x^2})^n dt.$$

Так как слева и справа здесь стоят аналитические функции  $x$ , то последнее равенство, полученное нами для действительных  $x$ ,  $|x| < 1$ , справедливо и для всех комплексных значений  $x$ . Кроме того, легко видеть, что  $\sin t$  в нем можно заменить на  $\cos t$ , а интеграл от 0 до  $2\pi$  — удвоенным интегралом от 0 до  $\pi$ . Мы получим *второе интегральное представление многочленов Лежандра* (Лаплас):

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + i \sqrt{1-x^2} \cos t)^n dt. \quad (7)$$

Заменим здесь  $x + i \sqrt{1-x^2} \cos t = \zeta$ , тогда  $dt = \frac{i d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta + \zeta^2}}$  и линией интегрирования в плоскости  $\zeta$  будет служить вертикальный отрезок, соединяющий точки  $x + i \sqrt{1-x^2} = e^{i\varphi}$ ,  $x - i \sqrt{1-x^2} = e^{-i\varphi}$ , так что

$$P_n(x) = -\frac{i}{\pi} \int_{e^{-i\varphi}}^{e^{i\varphi}} \frac{\zeta^n d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta + \zeta^2}}.$$

По теореме Коши этот отрезок можно заменить дугой окружности  $|\zeta| = 1$ , на которой  $\zeta = e^{i\theta}$ ,  $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$ , тогда получим:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{i(n+1)\theta} d\theta}{\sqrt{1-2xe^{i\theta} + e^{2i\theta}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} d\theta}{\sqrt{\cos \theta - x}}. \quad (8)$$

Заменяя здесь  $x = \cos \varphi$  и отделяя справа действительную часть, находим *третье интегральное представление многочленов*

Лежандра (Дирхле):

$$P_n(\cos \varphi) = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}}. \quad (9)$$

4) Асимптотические формулы для многочленов Лежандра. Будем рассматривать в интеграле (8) вместо  $\theta$  комплексное переменное  $\zeta = s + i\sigma$  и по теореме Коши заменим отрезок интегрирования  $(-\varphi, \varphi)$  трехзвенной ломаной  $I + II + III$  (рис. 195), получим:

$$\pi \sqrt{2} P_n(\cos \varphi) = \int_I + \int_{II} + \int_{III}; \quad (10)$$

на отрезке II, где  $\zeta = s + iH$ , модуль подынтегральной функции

$$\left| \frac{e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) \zeta}}{\sqrt{\cos \zeta - \cos \varphi}} \right| \leq \frac{e^{-i \left( n + \frac{1}{2} \right) H}}{\sqrt{|\cos \zeta| - |\cos \varphi|}}$$

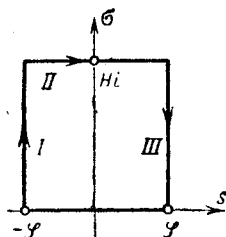


Рис. 195.

и стремится к нулю при  $H \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\int_{II} \rightarrow 0$  при  $H \rightarrow \infty$ ; на отрезках I и III имеем  $\zeta = \mp \varphi + i\sigma$ ,  $d\zeta = i d\sigma$ . Переходя к пределу при  $H \rightarrow \infty$ , получим из (10):

$$\begin{aligned} \pi \sqrt{2} P_n(\cos \varphi) &= i e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) i \varphi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma} d\sigma}{\sqrt{\cos(\varphi - i\sigma) - \cos \varphi}} - \\ &- i e^{\left( n + \frac{1}{2} \right) i \varphi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma} d\sigma}{\sqrt{\cos(\varphi + i\sigma) - \cos \varphi}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Для приближенной оценки интегралов при больших значениях  $n$  воспользуемся методом перевала п. 77. Для больших  $n$

функция  $e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma}$  имеет весьма крутой пик в точке  $\sigma = 0$ , причем наикрутейшим является спуск, для которого  $\sigma$  принимает действительные значения, так что путь интегрирования не нужно деформировать. Наличие множителя  $\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \mp i\sigma) - \cos \varphi}}$  перед  $e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma}$  лишь усугубляет пик в точке  $\sigma = 0$ . В самом деле,  $\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos \varphi = \mp 2 \sin\left(\varphi \pm \frac{i\sigma}{2}\right) \sin \frac{i\sigma}{2}$ , и модуль этого

множителя

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos \varphi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2} \left| \sin \left( \varphi \pm i \frac{\sigma}{2} \right) \right|}}$$

стремится к бесконечности при  $\sigma \rightarrow 0$  и убывает со скоростью показательной функции при  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Таким образом, главную часть интегралов (11) при больших  $n$  можно вычислять, ограничиваясь лишь малым интервалом интегрирования  $0 < \sigma < h$ , на котором

$$\frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi \pm i\sigma) - \cos \varphi}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mp 2 \sin \varphi \cdot \frac{i\sigma}{2}}} = \frac{e^{\pm i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \varphi}} \sigma^{-\frac{1}{2}}.$$

С той же степенью точности можно сохранить и оставшуюся часть  $(h, \infty)$  интервала интегрирования, ибо при больших  $n$  функция  $e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma}$  все равно принимает на ней весьма малые значения. Мы получим тогда для первого интеграла формулы (11):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty &\approx \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \varphi}} \int_0^\infty \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma} d\sigma = \frac{1-i}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается второй интеграл:

$$\int_0^\infty \approx \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\sin \varphi}} \int_0^\infty \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})\sigma} d\sigma = \frac{1+i}{\sqrt{2 \sin \varphi}} \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}},$$

тогда

$$\begin{aligned} P_n(\cos \varphi) &\approx \\ &\approx \frac{i}{2\pi \sqrt{\sin \varphi}} \sqrt{\frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}} \left\{ (1-i) e^{-(n+\frac{1}{2})i\varphi} - (1+i) e^{(n+\frac{1}{2})i\varphi} \right\} \end{aligned}$$

или после простых преобразований

$$P_n(\cos \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \left(n+\frac{1}{2}\right)}} \frac{\cos \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \varphi}}.$$

С той же степенью точности мы можем заменить в знаменателе  $n + \frac{1}{2}$  через  $n$  и тогда получим окончательно *асимптотическую формулу для многочленов Лежандра* (Лаплас):

$$P_n(\cos \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \varphi}}. \quad (12)$$

На оценке погрешности в полученной формуле мы останавливаться не будем.

Из асимптотической формулы видно, что  $P_n$  при неограниченном возрастании  $n$  стремится к нулю, как  $1/\sqrt{n}$ . Из той же формулы получается приближенная формула для нулей функции  $P_n(\cos \varphi)$ :

$$\varphi_k \approx \frac{4k-1}{2} \frac{\pi}{2n+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

тем более точная, чем больше число  $n$ .

5) Функции Лежандра. Попытаемся удовлетворить дифференциальному уравнению для многочленов Лежандра (формула (18) п. 92):

$$L[w] = (1 - z^2) w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0$$

при нецелых  $n$  тем же интегралом (6), каким для целых положительных  $n$  представлялся многочлен  $P_n(x)$ :

$$w(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (14)$$

Подставив это в уравнение (14), найдем:

$$\begin{aligned} L[w] &= \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(\xi - z)^{n+3}} [2(n+1)\xi(\xi - z) - (n+2)(\xi^2 - 1)] d\xi = \\ &= \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{(\xi^2 - 1)^{n+1}}{(\xi - z)^{n+2}} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом,  $L[w] = 0$ , если при обходе контура  $C$  функция

$$f(\xi) = \frac{(\xi^2 - 1)^{n+1}}{(\xi - z)^{n+2}}.$$

возвращается к исходному значению. Вырежем из плоскости  $\xi$  луч, идущий от точки  $-1$  до  $-\infty$  по отрицательной оси, и выберем в качестве  $C$  любой замкнутый контур, охватывающий

точки  $\zeta = 1$  и  $\zeta = z$  и не задевающий разреза (рис. 196). При полном обходе такого контура

$$\arg f(\zeta) = (n+1)\{\arg(\zeta-1) + \arg(\zeta+1)\} - (n+2)\arg(\zeta-z)$$

получит приращение  $(n+1)2\pi - (n+2)2\pi = -2\pi$ , ибо при этом  $\arg(\zeta-1)$  и  $\arg(\zeta-z)$  получают приращения  $2\pi$ , а  $\arg(\zeta+1)$  вернется к исходному значению. Отсюда следует, что при обходе контура  $C$  функция  $f(\zeta)$  возвращается к исходному значению, т. е. интеграл

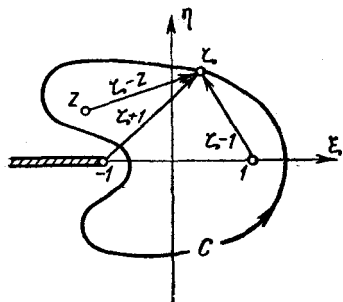


Рис. 196.

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad (15)$$

где  $C$  — контур описанного вида, является решением уравнения (14) при любом  $n$ . Этот интеграл называется *функцией Лежандра первого рода*. При целых положительных  $n$  точки  $\zeta = \pm 1$  перестают быть особыми и  $C$  можно деформировать в любой контур, окружающий точку  $\zeta = z$ . Следовательно, при таких  $n$  функция Лежандра обращается в обычный многочлен Лежандра.

Так как дифференциальное уравнение Лежандра (14) — второго порядка, то наряду с  $P_n(z)$  оно должно обладать еще одним решением, линейно независимым от  $P_n(z)$ . Такое решение может быть получено из  $P_n(z)$  с помощью одной квадратуры:

$$w = P_n(z) \int^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)}. \quad (16)$$

Действительно, уравнение Лежандра можно переписать в виде

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \frac{dw}{dz} \right] + n(n+1)w = 0;$$

так как  $P_n(z)$  ему удовлетворяет, то и

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \frac{dP_n}{dz} \right] + n(n+1)P_n = 0.$$

Умножая первое из этих двух уравнений на  $P_n$ , а второе на  $w$  и вычитая, находим:

$$\frac{d}{dz} \left[ (1-z^2) \left( P_n \frac{dw}{dz} - w \frac{dP_n}{dz} \right) \right] = 0,$$

откуда интегрированием получаем  $(1 - z^2) \left( P_n \frac{dw}{dz} - w \frac{dP_n}{dz} \right) = C$ , или

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{w}{P_n} \right) = \frac{C}{(1 - z^2) P_n^2(z)},$$

и далее

$$w = P_n(z) C \int \frac{dz}{(1 - z^2) P_n^2(z)},$$

что совпадает с интегралом (16) с точностью до постоянного множителя  $C$ . Интеграл (16), нормированный так, что в бесконечности он равен нулю, т. е.

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_{\infty}^z \frac{d\zeta}{(1 - \zeta^2) P_n^2(\zeta)}, \quad (17)$$

обычно называется *функцией Лежандра второго рода*.

Функции  $P_n(z)$  и  $Q_n(z)$  линейно независимы, ибо  $P_n(z) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ , а  $Q_n(z) \rightarrow 0$  (из соотношения  $\alpha P_n(z) + \beta Q_n(z) \equiv 0$ , устремляя  $z$  к  $\infty$ , получаем сначала  $\alpha = 0$ , а затем подстановкой какого-либо  $z$  получаем  $\beta = 0$ ).

Как видно из формулы (17), точки  $\zeta = \pm 1$  являются для функции Лежандра  $Q_n(z)$  особыми точками логарифмического характера, так что  $Q_n(z)$  и при целых  $n$  не является многочленом.

6) Сферические функции. Рассмотрим однородный гармонический многочлен  $U_n(x, y, z)$  вида

$$U_n(x, y, z) = \sum_{k+l+m=n} a_{klm} x^k y^l z^m, \quad (18)$$

где сумма берется по всем неотрицательным индексам  $k, l, m$ , сумма которых равна  $n$ . Многочлен  $U_n$  удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа

$$\Delta U_n = \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} = 0. \quad (19)$$

В сферических координатах  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$  гармонический многочлен представляется в виде

$$U_n(x, y, z) = r^n Y_n(\theta, \varphi), \quad (20)$$

где  $Y_n$  — многочлен относительно  $\cos \theta$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \theta$ ,  $\sin \varphi$ . Функция  $Y_n(\theta, \varphi)$  называется *сферической функцией  $n$ -го порядка*.



Непосредственным дифференцированием по  $x$ ,  $y$  и  $z$  под знаком интеграла мы убеждаемся в том, что  $2n + 1$  многочленов степени  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (z + ix \cos t + iy \sin t)^n \cos mt \, dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n), \\ \int_{-\pi}^{\pi} (z + ix \cos t + iy \sin t)^n \sin mt \, dt \quad (m = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(при  $m > n$  интегралы равны нулю в силу ортогональности тригонометрических функций), являются гармоническими многочленами. Можно доказать, что они образуют максимальную \*) линейно независимую систему многочленов степени  $n$ .

Вводя сферические координаты и пользуясь представлениями (20), мы получаем из (21) систему  $(2n + 1)$  сферических функций:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos(t - \varphi)]^n \cos mt \, dt, \\ \int_{-\pi}^{\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos(t - \varphi)]^n \sin mt \, dt. \end{aligned}$$

Заменяя в этих интегралах  $t - \varphi = \tau$ , мы представляем их в виде

$$\int_{-\pi - \varphi}^{\pi - \varphi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos \tau]^n \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} m(\varphi + \tau) \, d\tau.$$

Пользуясь теперь известным свойством периодических функций, по которому интеграл по отрезку длины, равной периоду, не зависит от положения этого отрезка, мы заменяем отрезок интегрирования  $[-\pi - \varphi, \pi - \varphi]$  отрезком  $[-\pi, \pi]$ . Наконец, разлагая  $\cos m(\varphi + \tau)$  по известной формуле и пользуясь нечетностью функции  $\sin m\tau$ , мы получаем окончательные выражения системы  $(2n + 1)$  сферических функций  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \cos m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \tau)^n \cos m\tau \, d\tau \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n), \\ \sin m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \tau)^n \sin m\tau \, d\tau \quad (m = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (22)$$

\*) Это означает, что любой гармонический многочлен  $U_n(x, y, z)$  степени  $n$  можно представить как линейную комбинацию многочленов (21).

Коэффициенты при  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$  в выражениях (22) равны; отличающиеся от них лишь постоянным множителем функции

$$P_{n,m}(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \tau)^n \cos m\tau d\tau \quad (23)$$

называются *присоединенными функциями Лежандра*. В частности,

$$P_{n,0}(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \tau)^n d\tau = P_n(\cos \theta)$$

совпадает с многочленом Лежандра (мы воспользовались интегральным представлением Лапласа (7)).

Таким образом, систему  $(2n+1)$  сферических функций  $n$ -го порядка можно представить в виде

$$P_n(\cos \theta); P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\varphi, P_{n,n}(\cos \theta) \sin m\varphi, \quad (24)$$

где  $m = 1, 2, \dots, n$  и  $P_{n,m}$  — присоединенные функции Лежандра.

7) Экстремальное свойство многочленов Чебышева. Многочлены Чебышева являются многочленами, наименее отклоняющимися от нуля на интервале  $(-1, 1)$ . Это означает, что максимум модуля  $T_n(x)$  достигает на интервале  $(-1, 1)$  наименьшего значения, которое только возможно для многочленов  $n$ -й степени со старшим коэффициентом, равным 1. В самом деле, положим  $x = \cos \varphi$  и  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), тогда из формулы

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}},$$

(см. (11) п. 70) получаем:

$$T_n(x_k) = \frac{\cos k\pi}{2^{n-1}} = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}},$$

т. е. в этих точках  $T_n(x)$  достигает своего максимального по модулю значения.

Пусть  $R_n(x)$  будет многочлен  $n$ -й степени со старшим коэффициентом 1. Предположим, что  $R_n(x)$  отклоняется от нуля на интервале  $(-1, 1)$  не больше, чем  $T_n(x)$ , тогда, очевидно,

$$T_n(x_0) \geq R_n(x_0), T_n(x_1) \leq R_n(x_1), T_n(x_2) \geq R_n(x_2), \dots$$

Но отсюда следует, что разность  $R_{n-1}(x) = R_n(x) - T_n(x)$ , которая является многочленом степени не выше  $n-1$ , меняет знак на интервале  $(-1, 1)$  не менее  $n$  раз, т. е. имеет не

менее  $n$  корней. Это противоречие и показывает, что  $T_n(x)$  являются многочленами, наименее уклоняющимися от нуля.

8) Многочлены Якоби и гипергеометрический ряд. Дифференциальное уравнение

$$z(z-1)w'' + [-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z]w' + \alpha\beta w = 0 \quad (25)$$

называется *гипергеометрическим уравнением* (Гаусс). Его решением является степенной ряд

$$w = F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n + \dots, \quad (26)$$

называемый *гипергеометрическим рядом* \*). При  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  он обращается в обычный геометрический ряд (геометрическую прогрессию со знаменателем  $z$ ).

Для того чтобы ряд (26) обращался в многочлен степени  $n$ , очевидно, нужно, чтобы  $\alpha$  или  $\beta$  было равно  $-n$ . Положим, например,  $\beta = -n$  и обозначим

$$\gamma - 1 = \lambda, \quad \alpha + \beta - \gamma = \mu;$$

полученный многочлен, умноженный на коэффициент  $C_n$ , обозначим через

$$Q_n^{(\lambda, \mu)}(z) = C_n F(\lambda + \mu + n + 1, -n, \lambda + 1; z).$$

Можно показать, что если ввести вместо  $z$  переменную  $x$  по формуле

$$z = \frac{1-x}{2}$$

и положить

$$C_n = \frac{\Gamma(\lambda + n + 1)}{n! \Gamma(\lambda + 1)},$$

то  $Q_n^{(\lambda, \mu)}(z)$  перейдет в многочлен Якоби  $P_n^{(\lambda, \mu)}(x)$ .

9) Волновое уравнение и функции Чебышева — Эрмита. Волновое уравнение для частицы в силовом поле (Шрёдингер) имеет следующий вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + (E - V) \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (27)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\psi$  — функция геометрических координат частицы и времени,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  — масса

\*) Коэффициенты ряда (26) находятся обычным методом неопределенных коэффициентов.

частицы,  $V$  — потенциал и  $E$  — параметр. Мы предположим, что  $\psi$  зависит лишь от координаты  $x$  и  $V = \frac{k}{2} x^2$ , что соответствует случаю линейного осциллятора. Вводя две новые постоянные  $\alpha^2 = mk/h^2$ ,  $\lambda = 2mE/h^2$ , из которых первая задана, а вторая играет роль параметра вместо  $E$ , мы переписываем уравнение (27) в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2) \psi = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) сводится к уравнению для многочленов Чебышева — Эрмита. Чтобы доказать это, мы рассмотрим систему функций

$$\psi_n(t) = e^{-t^2/2} H_n(t), \quad (29)$$

ортогональную с весом 1 на интервале  $(-\infty, \infty)$  ( $\psi_n(t)$  называют *функциями Чебышева — Эрмита*). Подставляя  $H_n(t) = e^{t^2/2} \psi_n(t)$  в дифференциальное уравнение для многочленов Чебышева — Эрмита, найдем после сокращения на  $e^{t^2/2}$ :

$$\psi_n''(t) + (1 + 2n - t^2) \psi_n(t) = 0. \quad (30)$$

Это уравнение сводится к уравнению (28) простой заменой независимого переменного. В самом деле, положим  $t = ax$ , где  $a$  — некоторая постоянная, и  $\psi_n(ax) = \psi(x)$ , откуда  $\psi''(x) = a^2 \psi_n''(t)$  (производная берется по аргументу, который стоит в скобках). Подставляя это в уравнение (30), мы приведем его к виду

$$\psi''(x) + [(1 + 2n)a^2 - a^4 x^2] \psi(x) = 0.$$

Сравнивая полученное уравнение с (28), мы видим, что если принять  $a = \sqrt{\alpha}$ , то при

$$\lambda = \lambda_n = (1 + 2n)\alpha \quad (31)$$

оно будет совпадать с уравнением (28). Таким образом, если параметр  $\lambda$  уравнения (28) удовлетворяет условию (31), то решением этого уравнения служит функция

$$\psi = \psi_n(\sqrt{\alpha} x) = e^{-\alpha x^2/2} H_n(\sqrt{\alpha} x), \quad (32)$$

где  $H_n$  — многочлен и  $\psi_n$  — функция Чебышева — Эрмита.

10) *Функции Чебышева — Эрмита и параболические координаты.* Рассмотрим двумерное волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu^2 u = 0, \quad (33)$$

где  $\mu^2$  — некоторая постоянная. Перейдем здесь к новым независимым переменным  $\xi, \eta$ , полагая  $\zeta = \xi + i\eta$  и

$$z = x + iy = i(\zeta),$$

где  $f(\xi)$  — аналитическая функция. Непосредственным применением правила дифференцирования сложных функций и уравнений Коши — Римана найдем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = |f'(\xi)|^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

следовательно, уравнение (33) в новых переменных примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \mu^2 |f'(\xi)|^2 u = 0. \quad (34)$$

Положим, в частности,  $f(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2$ , тогда

$$x = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2), \quad y = \xi \eta$$

и координатными линиями  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$  в плоскости  $z = x + iy$  будут служить параболы, поэтому координаты  $\xi$  и  $\eta$  называются *параболическими*.

Уравнение (34) для параболических координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \mu^2 (\xi^2 + \eta^2) u = 0.$$

Будем искать его решение методом разделения переменных, полагая  $u = U(\xi) V(\eta)$ . Тогда последнее уравнение примет (после простых преобразований) вид:

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} + \mu^2 \xi^2 = - \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} - \mu^2 \eta^2, \quad (35)$$

и так как слева стоит функция одного только  $\xi$ , а справа — одного  $\eta$ , то обе части равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим  $-\beta^2$ . Вместо одного уравнения (35) мы получаем два

$$U''(\xi) + (\mu^2 \xi^2 + \beta^2) U(\xi) = 0, \quad V''(\eta) + (\mu^2 \eta^2 - \beta^2) V(\eta) = 0.$$

Оба этих дифференциальных уравнения сводятся к уравнению (30) для функций Чебышева — Эрмита, если перейти в них к новым независимым переменным  $t = \sqrt{i\mu} \xi$ ,  $\tau = i \sqrt{i\mu} \eta$  и положить  $\beta = \beta_n = \sqrt{(2n+1)i\mu}$  (ср. (8) этого пункта). Таким образом, мы получаем бесчисленное множество решений волнового уравнения (33) в виде

$$u = u_n = A_n \psi_n(\sqrt{i\mu} \xi) \psi_n(i \sqrt{i\mu} \eta),$$

где  $\psi_n$  — функции Чебышева — Эрмита и  $A_n$  — постоянные.

Построенные решения позволяют решать, например, задачи дифракции для параболического цилиндра.

### § 3. Цилиндрические функции

Цилиндрические, или, как их обычно называют, бесселевы функции, играют особую важную роль в приложениях, главным образом в задачах, связанных с круглыми или цилиндрическими телами. Это объясняется тем, что решение уравнений математической физики, содержащих оператор Лапласа в цилиндрических координатах, классическим методом разделения переменных (см. п. 99, примеры 6—8) приводит к уравнению

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \lambda^2) y = 0, \quad (1)$$

служащему для определения цилиндрических функций.

Цилиндрическая функция  $J_0(x)$  была впервые рассмотрена Даниилом Бернулли в работе, посвященной колебанию тяжелых цепей (Петербург, 1732 г.). Д. Бернулли пришел к частному случаю уравнения (1) для  $\lambda = 0$  и, решая его, нашел выражение  $J_0(x)$  в виде степенного ряда; кроме того, он заметил без доказательства, что уравнение  $J_0(x) = 0$  имеет бесчисленное множество действительных корней (см. п. 99, пример 6).

Следующей работой, в которой встречаются цилиндрические функции, была работа Леонарда Эйлера (Петербург, 1738 г.). В этой работе Л. Эйлер, рассматривая задачу о колебаниях круглой мембраны, пришел к уравнению (1) с целыми значениями  $\lambda = n$  (см. п. 99, пример 7). Решая это уравнение, он нашел для целых  $n$  выражение  $J_n(x)$  в виде ряда по степеням  $x$ , а в последующих работах распространил это выражение на случай произвольных значений индекса  $\lambda$ . Кроме того, Л. Эйлер доказал, что для  $\lambda$ , равного целому числу с половиной, функции  $J_\lambda(x)$  выражаются через элементарные (см. п. 95), заметим без доказательства, что при действительном  $\lambda$  функции  $J_\lambda(x)$  имеют бесчисленное множество действительных нулей (см. п. 98) и дал интегральное представление для  $J_\lambda(x)$ .

Наконец, для случаев  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  Эйлер в работе 1769 г. дал выражение в виде ряда второго решения уравнения (1), линейно независимого от  $J_\lambda(x)$  (см. (4) п. 96).

Таким образом, Л. Эйлер получил основные результаты, связанные с цилиндрическими функциями и их приложениями к математической физике.

Немецкий астроном Ф. Бессель, с именем которого обычно связывают цилиндрические функции, в работе 1824 г., в связи с изучением движения планет вокруг солнца, дал рекуррентные соотношения для функций  $J_\lambda(x)$ , которые, несмотря на всю их важность, все же носят элементарный характер (п. 95), получил для целых  $n$  новое интегральное представление  $J_n(x)$  (см. выше п. 70), доказал наличие бесчисленного множества нулей  $J_0(x)$  и составил первые таблицы для  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  и  $J_2(x)$ .

**95. Цилиндрические функции первого рода.** 1) Интегральные представления Н. Я. Сони́на. Рассмотрим дифференциальное уравнение цилиндрических функций

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \lambda^2) x = 0, \quad (1)$$

где  $t$  — независимое переменное,  $x$  — искомая функция и  $\lambda$  — параметр, индекс уравнения (1), который для простоты мы будем считать действительным числом. Будем решать это уравнение операционным методом, так, как это указано в п. 84.

Если обозначить через  $X(p)$  изображение искомой функции, то по теоремам о дифференцировании оригиналов и изображений III и IV п. 80 будем иметь:

$$\begin{aligned} t^2 x'' &\doteq (p^2 X - px_0 - x_1)' = p^2 X'' + 4pX' + 2pX, \\ tx' &\doteq -(pX - x_0)' = -pX' - X, \quad t^2 x \doteq X'', \end{aligned}$$

где  $x_0 = x(0)$ ,  $x_1 = x'(0)$  — начальные данные \*). Таким образом, операторное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет вид:

$$(p^2 + 1) X'' + 3pX' + (1 - \lambda^2) X = 0. \quad (2)$$

Для решения этого уравнения произведем замену независимого переменного и искомой функции, положив

$$p = \operatorname{sh} q, \quad X(p) = \frac{1}{\operatorname{ch} q} Y(q).$$

Тогда будем иметь:  $X' = \frac{dX}{dq} : \frac{dp}{dq} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 q} Y' - \frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^3 q} Y$ ,  $X'' = \frac{dX'}{dq} : \frac{dp}{dq} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 q} Y'' - 3 \frac{\operatorname{sh} q}{\operatorname{ch}^4 q} Y' + \frac{3 \operatorname{sh}^2 q - \operatorname{ch}^2 q}{\operatorname{ch}^5 q} Y$  и, подставляя это в (2), придем к простому уравнению

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0.$$

Возвращаясь от частного решения  $Y = e^{-\lambda q}$  этого уравнения к старым переменным  $p$  и  $X$ , получим частное решение уравнения (2):

$$X = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} e^{-\lambda \operatorname{arsh} p} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1} (p + \sqrt{p^2 + 1})^\lambda}. \quad (3)$$

Функция  $\sqrt{p^2 + 1}$  допускает выделение однозначных ветвей в плоскости  $p = s + j\sigma$  с выброшенными лучами  $s = 0$ ,  $|\sigma| > 1$ . Примем  $\lambda > 0$  и условимся рассматривать ту ветвь  $\sqrt{p^2 + 1}$ , которая на оси  $s$  принимает положительные значения. Тогда функция  $X(p)$  будет стремиться к нулю при  $|p| \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} p > 0$

\*) Начальные данные не участвуют в операторном уравнении (2), ибо  $t = 0$  является особой точкой уравнения (1).

равномерно относительно  $\arg p$  и, следовательно, будет служить изображением (см. теорему 4 п. 79; на проверке остальных условий мы не останавливаемся). Оригинал для  $X(p)$  — частное решение уравнения (1) — мы будем называть *цилиндрической функцией 1-го рода, или бесселевой функцией порядка  $\lambda$*  и обозначать символом  $J_\lambda(t)$  (для целых  $\lambda = n$  см. формулу (7) п. 82)). Функцию  $J_\lambda(t)$  находим по формуле обращения п. 79:

$$J_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{pt} dp}{\sqrt{p^2 + 1} (p + \sqrt{p^2 + 1})^\lambda}, \quad (4)$$

где  $L$  — произвольная прямая  $\operatorname{Re} p = a > 0$ .

Перейдем здесь к новой переменной

$$\omega = p + \sqrt{p^2 + 1}; \quad (5)$$

тогда  $p = \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)$ ,  $\frac{dp}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{d\omega}{\omega}$  и линией интегрирования будет служить кривая  $C$  плоскости  $\omega = \xi + i\eta$  — образ прямой  $L$  при отображении (5). Так как ось  $\sigma$  переходит при отображении (5) в совокупность лучей  $\xi = 0$ ,  $|\eta| > 1$  и полуокружность  $|\omega| = 1$ ,  $\xi > 0$  (см. свойство отображения Жуковского в п. 7, отображение (5) несущественно от него отличается), а число  $a$  сколь угодно мало, то  $C$  имеет вид, изображенный на рис. 197 пунктиром. Интеграл (4) перейдет при этом в интеграл (Н. Я. Сонин, 1870 г.)

$$J_\lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\frac{t}{2} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)}}{\omega^{\lambda+1}} d\omega. \quad (6)$$

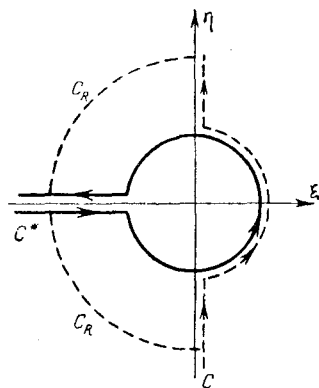


Рис. 197.

Не меняя величины интеграла, кривую  $C$  можно, очевидно, заменить любой вертикальной прямой  $\operatorname{Im} \omega = a > 0$ .

Так как на окружности  $|\omega| = R$  функция  $e^{-t/2\omega}/\omega^{\lambda+1}$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ , то при  $t > 0$  по лемме Жордана интеграл (6) вдоль дуг  $C_R$  (рис. 197) стремится к нулю. Следовательно, в формуле (6) контур  $C$  можно заменить контуром  $C^*$ , указанным на рис. 197, который идет из точки  $-\infty$  по нижнему берегу отрицательной полуоси  $\xi$ , обходит начало координат по окружности и возвращается в  $-\infty$  по верхнему берегу той же полуоси. Таким образом, мы получаем еще одно интегральное представление цилиндрических функций, также



принадлежащее Н. Я. Сонину (вместо  $t$  мы пишем  $z$ ):

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{e^{\frac{z}{2} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)}}{\omega^{\lambda+1}} d\omega. \quad (7)$$

Интеграл Сонина (7) получен нами для положительных  $z$ , однако правая его часть представляет аналитическую в правой полуплоскости  $z$  функцию, ибо при  $\operatorname{Re} z > 0$  интеграл (7) сходится равномерно по  $z$ . Таким образом, интеграл Сонина дает аналитическое продолжение  $J_{\lambda}(z)$  в правую полуплоскость.

Кроме того, при  $\operatorname{Re} z > 0$  интеграл Сонина сходится не только для положительных, но и для любых комплексных значений параметра  $\lambda$ , ибо на горизонтальной части контура  $C^*$  показательный множитель стремится к нулю быстрее, чем может возрастать  $|\omega^{\lambda+1}|$ . Следовательно, интеграл Сонина определяет в правой полуплоскости бесселевы функции произвольного комплексного порядка.

2) Аналитические свойства. При целых значениях параметра  $\lambda = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) подынтегральная функция интеграла Сонина (7) однозначна, следовательно, интегралы по горизонтальным частям контура  $C^*$  исчезают и интеграл (7) принимает вид, уже встречавшийся выше (см. п. 70):

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \frac{e^{\frac{z}{2} \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)}}{\omega^{n+1}} d\omega \quad (8)$$

(радиус окружности, входящей в состав контура  $C^*$ , мы принимаем равным 1). Так как интеграл в правой части (8) сходится для любых  $z$  и притом равномерно, то мы можем утверждать, что при целочисленных значениях параметра  $\lambda = n$  функции  $J_n(z)$  являются целыми.

Пусть, далее,  $z$  — положительное, а  $\lambda$  — произвольное комплексное число. Заменяя в интеграле Сонина (7) переменное  $\omega = \frac{2\zeta}{z}$ , мы получим интеграл Сонина — Шлеффли:

$$J_{\lambda}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{z}{2} \right)^{\lambda} \int_{C^*} e^{\zeta - \frac{z^2}{4\zeta}} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta \quad (9)$$

(при такой замене контур  $C^*$  заменяется подобным ему контуром, имеющим, следовательно, тот же вид, что и  $C^*$ ).

Интеграл Сонина — Шлеффли сходится и притом равномерно в любой ограниченной области значений  $z$  и при любом комплексном  $\lambda$  и, следовательно, дает аналитическое продолжение цилиндрической функции  $J_{\lambda}(z)$  на всю комплексную плоскость  $z$

и на все комплексные значения параметра  $\lambda$ . Наличие множителя  $z^\lambda$  перед интегралом показывает, что эта функция, вообще говоря, бесконечнозначна с точкой ветвления  $z = 0$ . Но отношение  $J_\lambda(z)/z^\lambda$  при любом комплексном  $\lambda$  оказывается целой функцией.

3) Другие интегральные представления. Пусть  $\operatorname{Re} z > 0$ ; заменим в интеграле Сонина  $\omega = e^{i\zeta}$ , отчего контур  $C^*$  заменится контуром  $\Pi$ , изображенным на рис. 198 (радиус окружности в контуре  $C^*$  мы считаем равным 1). Интеграл Сонина перейдет в интеграл Шлеффли:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} e^{iz \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta, \quad (10)$$

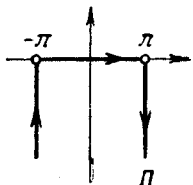


Рис. 198.

представляющий цилиндрическую функцию в правой полуплоскости.

При целых значениях параметра  $\lambda = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) в силу периодичности функций  $e^{in\zeta}$  и  $\sin \zeta$  интегралы по вертикальным частям контура  $\Pi$  взаимно сокращаются, и мы получаем:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \zeta - in\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \zeta - n\zeta) d\zeta \quad (11)$$

(мы разлагаем функцию  $e^{i(z \sin \zeta - n\zeta)}$  по формуле Эйлера и пользуемся четностью  $\cos$  и нечетностью  $\sin$ ). Это — интеграл Бесселя, который мы уже приводили в п. 70.

4) Представление рядом. Разложим в интеграле Сонина — Шлеффли (9) множитель  $e^{-\frac{1}{\zeta}(\frac{z}{2})^2}$  в ряд по степеням  $\frac{1}{\zeta}$  и переменим порядок суммирования и интегрирования (это законно в силу равномерной сходимости полученного ряда):

$$\begin{aligned} J_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \zeta^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} d\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} e^{\zeta} \zeta^{-\lambda-1-k} d\zeta. \end{aligned}$$

Вспоминая интегральное представление Ханкеля для гамма-функции (см. формулу (24) п. 89), находим искомое разложение цилиндрической функции в ряд:

$$J_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k}. \quad (12)$$

Из формулы (12) видно, что при действительных  $\lambda$  и  $z = x$  функция  $J_\lambda(x)$  принимает действительные значения.

Для целочисленных неотрицательных значений  $\lambda = n$  получаем, в частности, разложение

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, \quad (13)$$

с которым мы уже встречались (см., например, пп. 70 и 82). Для целочисленных отрицательных значений  $\lambda = -n$  первые  $n$  слагаемых суммы (12) исчезают, ибо  $\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0$  при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , и формула (12) принимает вид:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (-n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\nu}}{(n+\nu)! \nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu}$$

(мы заменили индекс суммирования  $k$  индексом  $\nu = k - n$ ); или

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (14)$$

5) Производящая функция. Для целочисленных значений  $\lambda = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  интеграл Сонина (8) совпадает с формулой для коэффициентов разложения функции  $e^{\frac{z}{2}(\omega - \frac{1}{\omega})}$  в ряд Лорана по степеням  $\omega$ . Таким образом,

$$e^{\frac{z}{2}(\omega - \frac{1}{\omega})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \omega^n. \quad (15)$$

Функция  $e^{\frac{z}{2}(\omega - \frac{1}{\omega})}$  называется *производящей функцией* для  $J_n(z)$ . В п. 70 мы использовали ее для определения цилиндрических функций целочисленного порядка.

Заменяя в (15)  $\omega = e^{i\theta}$ , мы получаем разложение в ряд Фурье функции

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (16)$$

Отделяя в (16) (при действительных  $z$  и  $\theta$ ) действительные и мнимые части, получаем:

$$\cos(z \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \cos n\theta, \quad \sin(z \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \sin n\theta,$$

или, используя соотношения (14), получим ряды Фурье в действительной форме:

$$\begin{aligned}\cos(z \sin \theta) &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\theta, \\ \sin(z \sin \theta) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin (2n-1)\theta.\end{aligned}\quad (17)$$

При  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , в частности, будем иметь:

$$\begin{aligned}\cos z &= J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - \dots, \\ \sin z &= 2J_1(z) - 2J_3(z) + \dots\end{aligned}$$

6) Рекуррентные соотношения. Из разложения в ряд (12) находим:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}} &= \frac{1}{2^{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1} = \\ &= -\frac{1}{z^{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2k+1}\end{aligned}$$

(мы заменили индекс суммирования  $k$  на  $k-1$ ), или окончательно

$$\frac{d}{dz} \frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^{\lambda}}. \quad (18)$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$\frac{d}{z dz} \frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^{\lambda+1}},$$

откуда видно, что применение к  $\frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}}$  операции  $\frac{d}{z dz}$  сводится к изменению знака и замене индекса  $\lambda$  на  $\lambda+1$ . Применяя эту операцию последовательно и вводя сокращенное обозначение

$$\underbrace{\frac{d}{z dz} \cdot \frac{d}{z dz} \cdots \frac{d}{z dz}}_{n \text{ раз}} = \frac{d^n}{(z dz)^n},$$

получаем:

$$\frac{d^n}{(z dz)^n} \frac{J_{\lambda}(z)}{z^{\lambda}} = (-1)^n \frac{J_{\lambda+n}(z)}{z^{\lambda+n}}. \quad (19)$$

Точно так же получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (z^\lambda J_\lambda(z)) &= 2^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda + k)}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\lambda + 2k - 1} = \\ &= z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda + 2k - 1} \end{aligned}$$

(мы воспользовались рекуррентным соотношением для гамма-функции), или

$$\frac{d}{dz} (z^\lambda J_\lambda(z)) = z^\lambda J_{\lambda-1}(z). \quad (20)$$

Деля обе части равенства на  $z$ , мы видим, что применение операции  $\frac{d}{z dz}$  к  $z^\lambda J_\lambda(z)$  сводится к изменению индекса  $\lambda$  на  $\lambda - 1$ . Последовательно применяя эту операцию, найдем:

$$\frac{d^n}{(z dz)^n} \{z^\lambda J_\lambda(z)\} = z^{\lambda-n} J_{\lambda-n}(z). \quad (21)$$

Формулы (18) и (20) переписываются в виде

$$J'_\lambda(z) = \frac{\lambda}{z} J_\lambda(z) - J_{\lambda+1}(z); \quad J'_\lambda(z) = J_{\lambda-1}(z) - \frac{\lambda}{z} J_\lambda(z). \quad (22)$$

Вычитая из одного уравнения (22) другое, найдем *рекуррентное соотношение*, не содержащее производных:

$$J_{\lambda-1}(z) + J_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} J_\lambda(z). \quad (23)$$

Точно так же, складывая уравнения (22), найдем *второе рекуррентное соотношение*

$$J_{\lambda-1}(z) - J_{\lambda+1}(z) = 2J'_\lambda(z). \quad (24)$$

Отметим еще, что из (22) при  $\lambda = 0$  получаем:

$$J'_0(z) = -J_1(z). \quad (25)$$

7) Цилиндрические функции порядка, равного целому числу с половиной. Как показал Эйлер, эти функции выражаются через элементарные. В самом деле, по формуле (11), учитывая, что  $\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2k+2)! \sqrt{\pi}}{4^{k+1} (k+1)!}$  (см.

формулу (18) п. 89), получим сначала

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{k+1} (k+1)!}{k! (2k+2)! \sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad (26)$$

и

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k k!}{k! (2k)! \sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \quad (27)$$

Затем, пользуясь соотношениями (19) и (21), найдем:

$$\left. \begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(z dz)^n} \frac{\sin z}{z}, \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(z dz)^n} \frac{\cos z}{z}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

откуда и видно, что  $J_{\pm n+\frac{1}{2}}(z)$  выражаются через элементарные функции.

После простых преобразований эти формулы принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ S_1 \sin\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) + S_2 \cos\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \right\}, \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ S_1 \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) - S_2 \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n+2k)!}{(2k)! (n-2k)! (2z)^{2k}}, \\ S_2 &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n+2k+1)!}{(2k+1)! (n-2k-1)! (2z)^{2k+1}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

( $[a]$  означает целую часть положительного числа  $a$ , например,  $[7/2] = 3$ ).

8) Ортогональность. По определению цилиндрическая функция  $y = J_\lambda(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^2 J_\lambda''(x) + x J_\lambda'(x) + (x^2 - \lambda^2) J_\lambda(x) = 0. \quad (31)$$

Положим  $x = \alpha t$ , где  $\alpha$  — постоянная, и рассмотрим функцию  $y = J_\lambda(\alpha t) = y(t)$ . Имеем  $J_\lambda'(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{dy}{dt}$ ,  $J_\lambda''(x) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$  и, подставляя это в (31), находим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $y = J_\lambda(\alpha t)$ :

$$y'' + \frac{1}{t} y' + \left( \alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2} \right) y = 0. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь две функции  $y_1 = J_\lambda(\alpha t)$  и  $y_2 = J_\lambda(\beta t)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные; по только что доказанному, они удовлетворяют уравнениям:

$$y_1'' + \frac{1}{t} y_1' + \left( \alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2} \right) y_1 = 0, \quad y_2'' + \frac{1}{t} y_2' + \left( \beta^2 - \frac{\lambda^2}{t^2} \right) y_2 = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на  $y_2$ , второе на  $y_1$  и вычтем из первого второе. Если обозначить еще  $u = y_1' y_2 - y_1 y_2'$ , то, очевидно,  $u' = y_1'' y_2 - y_1 y_2''$  и мы получим:

$$u' + \frac{1}{t} u = (\beta^2 - \alpha^2) y_1 y_2.$$

После умножения на  $t$  левая часть будет равна  $\frac{d}{dt}(ut)$ , поэтому, интегрируя по  $t$  от 0 до  $l$ , получим:

$$ut \Big|_{t=0}^l = (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l y_1 y_2 t \, dt$$

(для сходимости интеграла при нецелых  $\lambda$  мы должны предположить, что  $\lambda > -1$ ; тогда подынтегральная функция  $J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t$  при  $t \rightarrow 0$  если и обращается в бесконечность, то порядка ниже первого). Подставляя вместо  $y_1$  и  $y_2$  их выражения через  $J_\lambda$ , будем иметь:

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^l J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t \, dt = l \{ \alpha J_\lambda'(\alpha l) J_\lambda(\beta l) - \beta J_\lambda(\alpha l) J_\lambda'(\beta l) \}. \quad (33)$$

Пусть теперь  $\alpha$  и  $\beta$  будут различные корни уравнения

$$J_\lambda(xl) = 0 \quad (34)$$

или уравнения

$$J'_\lambda(xl) = 0. \quad (35)$$

Тогда правая часть (33) будет равной нулю, и мы получим:

$$\int_0^l J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t dt = 0. \quad (36)$$

Как будет доказано в п. 98, при действительных  $\lambda$  каждое из уравнений (34) и (35) имеет бесчисленное множество действительных корней. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$  — система корней одного из этих уравнений, тогда на основании формулы (36) можно утверждать, что функции  $J_\lambda(\alpha_1 t), J_\lambda(\alpha_2 t), \dots, J_\lambda(\alpha_k t), \dots$  образуют семейство, ортогональное с весом  $t$  на интервале  $(0, l)$  \*).

Этот факт указывает на аналогию между цилиндрическими функциями  $J_\lambda(\alpha t)$  (удовлетворяющими дифференциальному уравнению  $y'' + \frac{1}{t} y' + (\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}) y = 0$ ) и тригонометрическими функциями  $\sin \alpha t, \cos \alpha t$  (удовлетворяющими уравнению  $y'' + \alpha^2 y = 0$ ). Действительно, тригонометрические функции  $\sin k\alpha t, \cos k\alpha t$  также образуют семейство, ортогональное на некотором интервале. В дальнейшем мы не раз будем отмечать эту аналогию.

9) Ряды по цилиндрическим функциям. Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$  — положительные корни уравнения (34) или (35) и  $f(t)$  — кусочно-гладкая на интервале  $(0, l)$  функция. Предположим, что на этом интервале  $f(t)$  представляется равномерно сходящимся рядом

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\lambda(\alpha_k t). \quad (37)$$

Так как по доказанному в 8) функции  $J_\lambda(\alpha_k t)$  образуют систему, ортогональную с весом  $t$  на интервале  $(0, l)$ , то коэффициенты ряда (37) определяются по общей формуле (7) п. 91:

$$c_k = \frac{1}{d_k^2} \int_0^l f(t) J_\lambda(\alpha_k t) t dt, \quad (38)$$

где

$$d_k^2 = \int_0^l J_\lambda^2(\alpha_k t) t dt.$$

Вычислим последний интеграл. Для этого воспользуемся формулой (33), в которой предположим, что  $\alpha_k$  является одним из

\*) При нецелых  $\lambda$  мы предполагаем  $\lambda > -1$ .



корней уравнения (34) или (35), а  $\beta$  непрерывно приближается к этому корню. Для случая уравнения (34) формула (33) принимает вид:

$$\int_0^l J_\lambda(\alpha_k t) J_\lambda(\beta t) t dt = \frac{\alpha_k l J'_\lambda(\alpha_k l) J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2}.$$

откуда видно, что при  $\beta \rightarrow \alpha_k$  снова имеется неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Раскрыв эту неопределенность по правилу Лопиталя, найдем:

$$d_k^2 = \int_0^l J_\lambda^2(\alpha_k t) t dt = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_k} \frac{\alpha_k l J'_\lambda(\alpha_k l) J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2} = \frac{l^2}{2} J_\lambda'^2(\alpha_k l).$$

По первой формуле (22), полагая в ней  $z = \alpha_k l$ , найдем  $J'_\lambda(\alpha_k l) = -J_{\lambda+1}(\alpha_k l)$ , и последняя формула переписывается в виде

$$d_k^2 = \frac{l^2}{2} J_{\lambda+1}^2(\alpha_k l). \quad (39)$$

Аналогично, для случая уравнения (35) будем иметь:

$$d_k^2 = - \lim_{\beta \rightarrow \alpha_k} \frac{\beta J_\lambda(\alpha_k l) J'_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_k^2} = - \frac{l^2}{2} J_\lambda(\alpha_k l) J_\lambda''(\alpha_k l).$$

Но из дифференциального уравнения (31), полагая в нем  $x = \alpha_k l$  и пользуясь формулой (35), находим  $J_\lambda''(\alpha_k l) = -\left(1 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2 l^2}\right) J_\lambda(\alpha_k l)$ , следовательно, последнюю формулу можно переписать в виде

$$d_k^2 = \frac{1}{2} \left( l^2 - \frac{\lambda^2}{\alpha_k^2} \right) J_\lambda^2(\alpha_k l). \quad (40)$$

Ряд (37), коэффициенты которого находятся по формулам (38), представляет собой обобщенный ряд Фурье; он называется также *рядом Фурье — Бесселя*. Доказывается, что он сходится к  $\frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)]$  для любой кусочно-гладкой на интервале  $(0, l)$  функции.

**96. Другие цилиндрические функции.** 1) Функции Ханкеля. Рассмотрим снова дифференциальное уравнение цилиндрических функций с индексом  $\lambda$ :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = 0 \quad (1)$$

( $z$  — независимое переменное,  $w$  — искомая функция,  $\lambda$  — параметр; все величины предполагаются здесь комплексными). Попробуем найти решения уравнения (1) методом интегрального преобразования (см. п. 88), т. е. будем искать решение в виде

$$w = \int_C K(z, \xi) W(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где  $W$  — новая искомая функция, а функция  $K(z, \xi)$  и контур  $C$  выбираются так, как будет указано ниже. Подставляя (2) в уравнение (1), мы будем иметь (предполагается, что перестановка порядка дифференцирования и интегрирования законна):

$$\int_C \left\{ z^2 \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + z \frac{\partial K}{\partial z} + (z^2 - \lambda^2) K \right\} W(\xi) d\xi = 0.$$

Пусть теперь  $K$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z^2 \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + z \frac{\partial K}{\partial z} + z^2 K + \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} = 0, \quad (3)$$

тогда предыдущее соотношение принимает вид:

$$\int_C \left\{ \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} + \lambda^2 K \right\} W(\xi) d\xi = 0.$$

Интегрируя первый член  $\frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} W(\xi)$  два раза по частям, мы преобразуем последнее уравнение к виду

$$\int_C \{W'' + \lambda^2 W\} K d\xi + \left[ W \frac{\partial K}{\partial \xi} - KW' \right]_a^b = 0,$$

где  $a$  и  $b$  обозначают концы линии  $C$ . Отсюда видно, что если положить

$$W = e^{\pm i\lambda \xi}$$

и выбрать путь интегрирования так, чтобы на его концах выражение  $W \frac{\partial K}{\partial \xi} - KW'$  обращалось в нуль, то интеграл (2) будет давать решение уравнения (1). Легко проверить, что уравнение (3) будет удовлетворяться, если положить  $K = e^{iz \sin \xi}$ . В качестве путей интегрирования выберем контуры  $C_1$  и  $C_2$  рис. 199; так как на мнимой оси  $\sin \xi = \sin i\eta = i \operatorname{sh} \eta$ , а на прямых  $\pm \pi + i\eta$  имеем  $\sin \xi = -\sin i\eta = -i \operatorname{sh} \eta$ , то на вертикальных частях  $C_1$  и  $C_2$

$$|K| = \begin{cases} e^{-x \operatorname{sh} \eta}, & \eta > 0, \\ e^{x \operatorname{sh} \eta}, & \eta < 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что если считать  $x = \operatorname{Re} z > 0$ , то при  $\eta \rightarrow +\infty$ , соответственно при  $\eta \rightarrow -\infty$ ,  $|K|$  стремится к нулю со скоростью  $e^{-\frac{x}{2}e^\eta}$ , соответственно  $-e^{-\frac{x}{2}e^{-\eta}}$ . Но тогда и  $W \frac{\partial K}{\partial \zeta} = e^{\pm i\lambda \zeta} i z \cos \zeta \cdot K$ , и  $KW' = \pm i\lambda e^{\pm i\lambda \zeta} K$  стремятся к нулю при  $\zeta$ , приближающемся к концам  $C_1$  и  $C_2$ , ибо стремление к нулю  $K$  погашает возможный рост множителя при  $K$ .

Таким образом, мы получаем в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  решения уравнения (1)

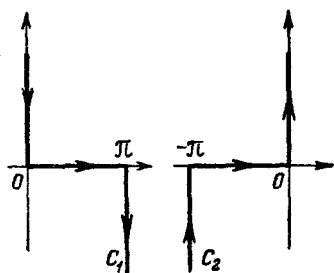


Рис. 199.

$$\left. \begin{aligned} H_{\lambda}^{(1)}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{iz \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta, \\ H_{\lambda}^{(2)}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{C_2} e^{iz \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

которые называются *цилиндрическими функциями 3-го рода, или функциями Ханкеля\**).

2) Связь цилиндрических функций 1- и 3-го рода. Если сложить обе формулы (4), то интеграл по мнимой полуоси сократится и, вспоминая интеграл Шлеффли (см. формулу (10) предыдущего пункта), мы получим:

$$H_{\lambda}^{(1)}(z) + H_{\lambda}^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} e^{iz \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta = 2J_{\lambda}(z)$$

( $\Pi$  — контур рис. 198). Таким образом, для всех комплексных значений  $\lambda$  в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  бесселева функция равна

$$J_{\lambda}(z) = \frac{H_{\lambda}^{(1)}(z) + H_{\lambda}^{(2)}(z)}{2}. \quad (5)$$

Для того чтобы найти выражение ханкелевых функций через бесселевы, найдем сначала связь между ханкелевыми функциями порядков, отличающихся лишь знаком. Имеем, например,

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{iz \sin \zeta + i\lambda \zeta} d\zeta$$

и вводя новую переменную интегрирования  $\omega = -\zeta + \pi$ , отчего

\*) Цилиндрические функции 2-го рода будут введены ниже. Функции  $H_{\lambda}^{(1,2)}(z)$  ввел в 1902 г. Нильсен и назвал их в честь Ханкеля, на работе которого (1869) основаны исследования, приведшие к этим функциям. Интегральные представления (4) получены А. Зоммерфельдом (1896).

контур  $C_1$  перейдет в контур  $C_1^-$ , совпадающий с  $C_1$ , но проходящий в противоположном направлении, получаем:

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z) = -\frac{e^{i\lambda\pi}}{\pi} \int_{C_1^-} e^{iz \sin \omega - i\lambda \omega} d\omega = e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^{(1)}(z).$$

Аналогично, вводя  $\omega = -\zeta - \pi$ , получим формулу для  $H_{\lambda}^{(2)}(z)$ . Таким образом,

$$H_{-\lambda}^{(1)}(z) = e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^{(1)}(z), \quad H_{-\lambda}^{(2)} = e^{-i\lambda\pi} H_{\lambda}^{(2)}(z). \quad (6)$$

Теперь, если наряду с соотношением (5) рассмотреть формулу

$$J_{-\lambda}(z) = \frac{H_{-\lambda}^{(1)}(z) + H_{-\lambda}^{(2)}(z)}{2} = \frac{e^{i\lambda\pi} H_{\lambda}^{(1)}(z) + e^{-i\lambda\pi} H_{\lambda}^{(2)}(z)}{2}$$

(мы воспользовались формулами (6)), то из этих двух формул найдем выражение ханкелевых функций через бесселевы

$$H_{\lambda}^{(1)}(z) = i \frac{e^{-i\lambda\pi} J_{\lambda}(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}; \quad H_{\lambda}^{(2)}(z) = -i \frac{e^{i\lambda\pi} J_{\lambda}(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda\pi}. \quad (7)$$

Строго говоря, формулы (7) получены для  $\lambda$ , отличных от целых чисел, однако они остаются справедливыми и в случае целых  $\lambda$ , если в правых частях раскрыть неопределенность вида  $\frac{0}{0}$  по правилу Лопиталя. Мы можем тогда утверждать, что формулы (7) дают аналитическое продолжение  $H_{\lambda}^{(1)}(z)$  и  $H_{\lambda}^{(2)}(z)$  на всю плоскость комплексного переменного  $z$ . Как и бесселевы функции  $H_{\lambda}^{(1,2)}(z)$  оказываются, вообще говоря, *многозначными функциями с точкой ветвления  $z = 0$* .

Из формул (7) для ханкелевых функций получаются соотношения, аналогичные таким же соотношениям с бесселевыми функциями. Например, пользуясь рекуррентной формулой (23) предыдущего пункта, находим рекуррентные формулы

$$H_{\lambda-1}(z) + H_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} H_{\lambda}(z), \quad H_{\lambda-1}(z) - H_{\lambda+1}(z) = 2H'_{\lambda}(z) \quad (8)$$

(здесь  $H_{\lambda}$  может означать как  $H_{\lambda}^{(1)}$ , так и  $H_{\lambda}^{(2)}$ ). Пользуясь формулами (24) и (25) предыдущего пункта, получим:

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}; \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz}. \quad (9)$$

Выше мы отмечали аналогию между бесселевыми и тригонометрическими функциями; формулы (5) и (9) указывают на аналогию между функциями  $H_{\lambda}(z)$  и  $e^{\pm iz}$ .

3) Функции Вебера. Формула (5) показывает, что функции  $J_\lambda$  строятся из функций  $H_\lambda$ , как косинус из функций  $e^{\pm iz}$ . Рассматривают также функции, которые строятся из  $H_\lambda$  как синус:

$$Y_\lambda(z) = \frac{H_\lambda^{(1)}(z) - H_\lambda^{(2)}(z)}{2i}. \quad (10)$$

Эти функции называются *цилиндрическими функциями 2-го рода или функциями Вебера*; их называют также *функциями Неймана* и тогда обозначают через  $N_\lambda(z)$  \*).

Так как при действительных значениях  $z$  и  $\lambda$  функции  $J_\lambda(z)$  действительны, то из формул (7) вытекает, что для таких значений  $z$  и  $\lambda$

$$\overline{H_\lambda^{(1)}(z)} = H_\lambda^{(2)}(z).$$

Но тогда из (10) видно, что для действительных значений  $z$  и  $\lambda$  функции Вебера принимают действительные значения.

Пользуясь формулами (7), из (10) получаем также выражение функций Вебера через функции Бесселя:

$$Y_\lambda(z) = \frac{\cos \lambda \pi J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin \lambda \pi}. \quad (11)$$

Последняя формула справедлива для нецелых  $\lambda$ ; при  $\lambda$ , стремящемся к целому числу  $n$ , мы получаем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получаем для целых  $\lambda = n$ :

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} \cos \lambda \pi - \pi \sin \lambda \pi J_\lambda(z) - \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda}}{\pi \cos \lambda \pi} \Big|_{\lambda=n} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для функций Вебера остаются справедливыми рекуррентные соотношения

$$Y_{\lambda-1}(z) + Y_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} Y_\lambda(z), \quad Y_{\lambda-1}(z) - Y_{\lambda+1}(z) = 2Y'_\lambda(z); \quad (13)$$

для их проверки достаточно подставить выражение  $Y_\lambda$  через  $H_\lambda$  (формула (10)) и воспользоваться соотношениями (8).

\*) Функции  $Y_\lambda(z)$  ввел Вебер в 1873 г. Нейман в 1867 г. ввел функции, несколько отличающиеся от  $Y_\lambda(z)$ ; именно они равны

$$\frac{\pi}{2} Y_\lambda(z) + (\ln 2 - C) J_\lambda(z),$$

где  $C$  — постоянная Эйлера.

Функции Вебера порядка, равного целому числу с половиной, также выражаются через элементарные функции, ибо из формулы (11) вытекает при  $\lambda = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)$ :

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(z); \quad Y_{-n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (14)$$

Найдем выражение функций Вебера целочисленного порядка в виде степенного ряда. Для этого можно воспользоваться формулой (12) и разложением в ряд

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(\lambda + k + 1)}. \quad (15)$$

Получим сначала вспомогательные формулы из теории гамма-функции. Из формулы (9) п. 89 для логарифмической производной гамма-функции, полагая в ней  $z = n - 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), получаем:

$$\begin{aligned} \psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} &= -C - \left(\frac{1}{n} - 1\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{3}\right) - \dots \\ &\dots = -C + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \end{aligned} \quad (16)$$

(остальные члены сокращаются). Отсюда для  $n = 1, 2, 3, \dots$  имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} \Big|_{t=n} = -\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma^2(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \left(C - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n-1}\right)$$

(мы заменили  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ). В точках  $t = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) гамма-функция имеет полюсы первого порядка с вычетами  $(-1)^n \frac{1}{n!}$  (см. п. 89), следовательно, в окрестности точки  $t = -n$  справедливо разложение

$$\frac{1}{\Gamma(t)} = (-1)^n n! (t+n) \{1 + C_1(t+n) + \dots\}.$$

Отсюда видно, что для  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right) \Big|_{t=-n} = (-1)^n n!.$$

Теперь, дифференцируя (15) по  $\lambda$ , находим:

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} = \ln \frac{z}{2} J_\lambda(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} \Big|_{t=\lambda+k+1}$$

и

$$\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = -\ln \frac{z}{2} J_{-\lambda}(z) - \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(t)} \Big|_{t=-\lambda+k+1}.$$

Для целых положительных  $\lambda = n$  отсюда на основании формулы (12) и уже вычисленных значений  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(t)} \right)$  получаем:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+k} + \right. \\ \left. + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right\}^*), \quad (17)$$

а для  $n=0$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right). \quad (18)$$

Мы видим, что в то время как бесселевы функции целочисленного порядка являются целыми, в разложение  $Y_n(z)$ , кроме степеней  $z$ , входит еще  $\ln z$ .

4) Общее решение уравнения цилиндрических функций. По построению функции Ханкеля  $H_\lambda^{(1)}(z)$  и  $H_\lambda^{(2)}(z)$  служат решениями уравнения

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = 0. \quad (1)$$

В следующем пункте мы увидим, что эти решения линейно независимы, следовательно, по известному свойству линейных дифференциальных уравнений, общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$w = C_1 H_\lambda^{(1)}(z) + C_2 H_\lambda^{(2)}(z), \quad (19)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Так как функции  $J_\lambda(z)$  и  $Y_\lambda(z)$  выражаются через  $H_\lambda^{(1)}(z)$  и  $H_\lambda^{(2)}(z)$  линейно и с отличным от нуля определителем

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}$$

---

\*) Выражение в фигурных скобках для первого слагаемого ( $k=0$ ) равно  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

(см. формулы (5) и (10)), то и функции  $J_\lambda(z)$ ,  $Y_\lambda(z)$  являются линейно независимыми решениями уравнения (1). Следовательно, общее решение этого уравнения при любых  $\lambda$  можно представить также в виде

$$w = C_1 J_\lambda(z) + C_2 Y_\lambda(z), \quad (20)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Кроме того, так как  $H_\lambda^{(1)}$  и  $H_\lambda^{(2)}$  выражаются через  $J_\lambda$  и  $J_{-\lambda}$  линейно и с определенным

$$\begin{vmatrix} i \frac{e^{-i\lambda\pi}}{\sin \lambda\pi} & -\frac{i}{\sin \lambda\pi} \\ -i \frac{e^{i\lambda\pi}}{\sin \lambda\pi} & \frac{i}{\sin \lambda\pi} \end{vmatrix} = \frac{2i}{\sin \lambda\pi},$$

отличным от нуля и конечным при любом нецелом  $\lambda$ , то при нецелом  $\lambda$  общее решение можно представить еще в виде

$$w = C_1 J_\lambda(z) + C_2 J_{-\lambda}(z). \quad (21)$$

При  $\lambda = n$  целом функции  $J_n$  и  $J_{-n}$  становятся линейно зависимыми, ибо  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ , и вместо (21) надо брать общее решение в виде (19) или (20).

5) Цилиндрические функции мнимого аргумента. В некоторых приложениях встречаются цилиндрические функции чисто мнимого аргумента  $z = ix$ . Из формулы (28) предыдущего пункта вытекает, что функция  $y = J_\lambda(ix)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (22)$$

Из разложения  $J_\lambda(z)$  в ряд находим:

$$J_\lambda(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^\lambda i^{2k}}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} = i^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}.$$

Отсюда видно, что если мы хотим получить функцию, действительную при действительных  $\lambda$  и  $x$ , мы должны умножить  $J_\lambda(ix)$  на постоянный множитель  $i^{-\lambda} = e^{-\lambda\pi i/2}$ . Такое произведение обозначается символом

$$I_\lambda(x) = e^{-\lambda\pi i/2} J_\lambda(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}. \quad (23)$$

Функция  $I_{-\lambda}(z)$  также является решением уравнения (22), и если  $\lambda$  не равно целому числу, то  $I_\lambda(x)$  и  $I_{-\lambda}(x)$  — линейно



независимы. Если же  $\lambda = n$  — целое, то из (23) и соотношения  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$  получаем:

$$I_{-n}(z) = I_n(z). \quad (24)$$

Для получения второго решения линейно независимого с  $I_n$ , здесь надо воспользоваться функциями, получающимися из других цилиндрических функций. Наиболее употребительна из них функция, которая получается из первой функции Ханкеля от мнимого аргумента умножением на некоторый постоянный множитель (Макдональд, 1899 г.)

$$K_\lambda(x) = \frac{\pi i}{2} e^{-\lambda \pi i / 2} H_\lambda^{(1)}(ix). \quad (25)$$

Важность этой функции для приложений обусловлена тем, что она является решением уравнения (22), положительным и стремящимся к 0 при  $x \rightarrow \infty$  по экспоненциальному закону (см. формулы (17) следующего пункта). Пользуясь выражением (7) функций Ханкеля через функции Бесселя, находим для нецелых  $\lambda$ :

$$K_\lambda(x) = -\pi \frac{e^{-\lambda \pi i / 2} J_\lambda(ix) - e^{\lambda \pi i / 2} J_{-\lambda}(ix)}{2 \sin \lambda \pi},$$

или, вводя по формуле (23) функции  $I_\lambda(x)$ :

$$K_\lambda(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\lambda}(x) - I_\lambda(x)}{\sin \lambda \pi}. \quad (26)$$

Переходя здесь к пределу при  $\lambda$ , стремящемся к целому числу  $n$ , и раскрывая неопределенность, получаем:

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[ \frac{\partial I_{-\lambda}(x)}{\partial \lambda} - \frac{\partial I_\lambda(x)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=n}. \quad (27)$$

Отсюда можно получить и разложение  $K_n(x)$  в ряд так, как мы делали это для функций Вебера. Например, для  $n = 0$  получим

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k} \psi(k+1), \quad (28)$$

где  $\psi$  — логарифмическая производная гамма-функции. На основании формул (25) и (6) этого пункта для любых  $\lambda$  получаем:

$$K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x).$$

Легко проверить, что функции  $I_\lambda(z)$  и  $K_\lambda(z)$  удовлетворяют несколько видоизмененным рекуррентным соотношениям:

$$I_{\lambda-1}(z) - I_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} I_\lambda(z); \quad I_{\lambda-1}(z) + I_{\lambda+1}(z) = 2I'_\lambda(z). \quad (29)$$

$$K_{\lambda-1}(z) - K_{\lambda+1}(z) = -\frac{2\lambda}{z} K_\lambda(z); \quad K_{\lambda-1}(z) + K_{\lambda+1}(z) = -2K'_\lambda(z), \quad (30)$$

В частности,

$$I'_0(z) = I_1(z); \quad K'_0(z) = -K_1(z). \quad (31)$$

При  $\lambda$ , равном целому числу с половиной, эти функции выражаются через элементарные; например,

$$\begin{aligned} I_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sh} z, \quad I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{ch} z; \\ K_{1/2}(z) &= K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-z}. \end{aligned} \quad (32)$$

В некоторых задачах встречаются еще цилиндрические функции аргумента  $z = x\sqrt{-i} = e^{3i\pi/4}x$ . Для действительных и мнимых частей этих функций введены специальные обозначения

$$\left. \begin{aligned} J_\lambda(x\sqrt{-i}) &= e^{\lambda\pi i/2} I_\lambda(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber}_\lambda x + i \operatorname{bei}_\lambda x, \\ e^{-\lambda\pi i/2} K_\lambda(x\sqrt{i}) &= \operatorname{ker}_\lambda x + i \operatorname{kei}_\lambda x, \\ H_\lambda(x\sqrt{-i}) &= \operatorname{her}_\lambda x + i \operatorname{hei}_\lambda x. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Для  $\lambda = 0$  индекс обычно опускается, например,

$$J_0(x\sqrt{-i}) = I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x. \quad (34)$$

**97. Асимптотические выражения для цилиндрических функций.** Асимптотические выражения имеют различный вид в зависимости от того, считаем ли мы большим порядок  $\lambda$ , аргумент  $x$ , или обе эти величины (мы предполагаем, что они действительные). В соответствии с этим будем различать три случая:

1) *Асимптотические выражения для больших порядков.* Рассмотрим сначала первую функцию Ханкеля, которую мы возьмем в виде интеграла (4) предыдущего пункта

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{ix \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta, \quad (1)$$

где  $C_1$  — контур рис. 199. Мы будем считать  $\lambda > x$  и обозначим меньшее 1 число  $\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}$ . Формула (1) примет вид:

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{\lambda \left( i \frac{\sin \zeta}{\operatorname{ch} \alpha} - i\zeta \right)} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{\lambda f(\zeta)} d\zeta, \quad (2)$$

где

$$f(\zeta) = i \frac{\sin \zeta}{\operatorname{ch} \alpha} - i\zeta = -\cos s \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \alpha} + \sigma + i \left( \sin s \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{ch} \alpha} - s \right) \quad (3)$$

(мы полагаем  $\zeta = s + i\sigma$ ). Для получения асимптотической формулы мы воспользуемся методом перевала п. 77. Седловые точки

находятся из уравнения

$$f'(\xi_0) = i \left( \frac{\cos \xi_0}{\operatorname{ch} \alpha} - 1 \right) = 0,$$

откуда  $\cos \xi_0 = \operatorname{ch} \alpha$  и

$$\xi_0 = \pm i\alpha. \quad (4)$$

Линия наибольшего ската, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\operatorname{Im} f(\xi) = \sin s \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{ch} \alpha} - s = 0 \quad (5)$$

(действительно, в седловых точках  $s = 0$ ,  $\sigma = \pm \alpha$ ), откуда

$$\operatorname{ch} \sigma = \operatorname{ch} \alpha \frac{s}{\sin s}.$$

Она имеет вид, указанный на рис. 200 пунктиром, и состоит из мнимой оси и двух дуг, асимптотически приближающихся к прямым  $s = \pm \pi$ . Из дуг этой линии можно составить путь интегрирования, дающий интегралу (1) то же значение, что и путь  $C_1$ . Мы обозначаем этот путь  $\tilde{C}_1$  и отмечаем его на рис. 200 жирным пунктиром; этот путь состоит из луча  $(i\infty, -\alpha i)$ , идущего вдоль мнимой оси, и правой половины нижней дуги линии наибольшего ската \*).

Так как согласно (5) на кривой  $\tilde{C}_1$  имеем  $\operatorname{Im} f(\xi) = 0$ , то на ней

$$f(\xi) = -\cos s \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \alpha} + \sigma.$$

На оси  $\sigma$  функция  $f(i\sigma) = \sigma - \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch} \alpha}$  достигает максимума  $\alpha - \operatorname{th} \alpha$  в точке  $\sigma = \alpha$  и минимума  $\operatorname{th} \alpha - \alpha$  в точке  $\sigma = -\alpha$  (это вытекает непосредственно из рассмотрения производной  $\frac{df}{d\sigma} = -\frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{ch} \alpha} + 1$ ).

Легко видеть, что максимум в точке  $\xi_0 = \alpha i$  — единственный максимум функции  $f(\xi)$  на линии  $\tilde{C}_1$ . Так как  $f(\xi_0) = \alpha - \operatorname{th} \alpha$ ,  $f''(\xi_0) = \operatorname{th} \alpha$  и угол наклона линии наибольшего ската в точке

\*) Для доказательства того, что  $C_1$  и  $\tilde{C}_1$  дают интегралу (1) одинаковые значения, достаточно заметить, что  $C_1$  может быть переведен в  $\tilde{C}_1$  посредством деформации в ограниченной области и в полуполосе  $\pi - \varepsilon < s < \pi$ ,  $\sigma < -M$ , где  $\varepsilon$  сколь угодно мало, а  $M$  сколь угодно велико (эта область заштрихована на рис. 200), причем интегралы по частям  $C_1$  и  $\tilde{C}_1$ , лежащим в этой полуполосе, сколь угодно малы.

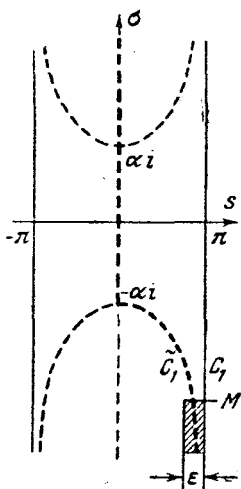


Рис. 200.

перевала  $\vartheta = -\pi/2$ , то по формуле (18) п. 77 мы получаем

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} e^{\lambda(\alpha - \text{th } \alpha)} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{th } \alpha}} e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \text{th } \alpha}} e^{\lambda(\alpha - \text{th } \alpha)}.$$

Заменяя здесь  $\text{th } \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \alpha}} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - x^2} = \frac{\mu}{\lambda}$ , где  $\mu = \sqrt{\lambda^2 - x^2}$  и  $\alpha = \text{arth } \frac{\mu}{\lambda}$ , получаем окончательно искомое асимптотическое выражение первой ханкелевой функции большого порядка  $\lambda$ :

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx -i \sqrt{\frac{2}{\pi \mu}} e^{-\mu + \lambda \text{arth } \frac{\mu}{\lambda}} \quad (6)$$

(здесь надо считать  $x < \lambda$ ).

Совершенно аналогично находится и асимптотическое выражение второй ханкелевой функции большого порядка

$$H_{\lambda}^{(2)}(x) \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi \mu}} e^{-\mu + \lambda \text{arth } \frac{\mu}{\lambda}}. \quad (7)$$

С помощью формулы (5) предыдущего пункта из оценок (6) и (7) находим асимптотическое выражение бесселевых функций большого порядка

$$J_{\lambda}(x) = \frac{H_{\lambda}^{(1)}(x) + H_{\lambda}^{(2)}(x)}{2} \approx 0. \quad (8)$$

Если провести совершенно аналогичные выкладки, рассматривая вместо (2) интеграл Шлеффли

$$J_{\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} e^{ix \sin \zeta - i\lambda \zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} e^{\lambda f(\zeta)} d\zeta$$

(формула (10) п. 95; функция  $f(\zeta)$  имеет то же выражение, что и выше), и заменить контур  $\Pi$  рис. 198 контуром  $\tilde{\Pi}$  рис. 201 — частью линии наибольшего ската поверхности  $\tau = \text{Re } f(\zeta)$ , то вместо (8) получим другое асимптотическое выражение для больших  $\lambda$

$$J_{\lambda}(x) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu}} e^{\mu - \lambda \text{arth } \frac{\mu}{\lambda}}. \quad (9)$$

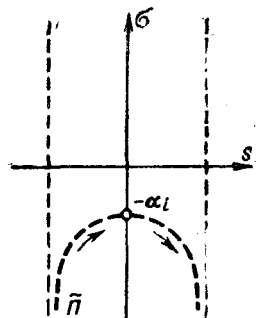


Рис. 201.

Подробнее на этих выкладках мы не останавливаемся.

По формуле (10) предыдущего пункта на основании (6) и (7) находим еще асимптотическое выражение для функций

# Вебера большого порядка

$$Y_{\lambda}(x) = \frac{H_{\lambda}^{(1)}(x) - H_{\lambda}^{(2)}(x)}{2i} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} e^{-\mu + \lambda \operatorname{arctg} \frac{\mu}{\lambda}}. \quad (10)$$

2) Асимптотические выражения для больших значений аргументов. Будем считать  $x > \lambda$  и обозначим меньшее 1 число  $\frac{\lambda}{x} = \cos \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ). Первую функцию Ханкеля можно переписать в виде

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{x(i \sin \zeta - i \zeta \cos \alpha)} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{xg(\zeta)} d\zeta, \quad (11)$$

где

$$g(\zeta) = i \sin \zeta - i \zeta \cos \alpha = -\cos s \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cos \alpha + i(\sin s \cdot \operatorname{ch} \sigma - s \cos \alpha) \quad (12)$$

лишь постоянным множителем отличается от функции  $f(\zeta)$  из формулы (3). Седловые точки находятся из уравнения  $g'(\zeta) = i(\cos \zeta_0 - \cos \alpha) = 0$ , откуда  $\zeta_0 = \pm \alpha$ . Линии наибольшего ската, проходящие через эти точки, определяются уравнениями

$$\operatorname{Im} g(\zeta) = \sin s \cdot \operatorname{ch} \sigma - s \cos \alpha = \pm (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

или

$$\operatorname{ch} \sigma = \cos \alpha \frac{s}{\sin s} \pm \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\sin s}.$$

Эти линии имеют вид, указанный на рис. 202, каждая из них состоит из двух ветвей, пересекающихся в седловых

точках и асимптотически приближающихся к мнимой оси и прямым  $s = \pm \pi$ .

Мы выбираем контур  $\tilde{C}_1$ , представляющий одну из ветвей линии наибольшего ската, проходящей через точку  $\zeta_0 = \alpha$ ,

$$\operatorname{ch} \sigma = \cos \alpha \frac{s}{\sin s} + \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\sin s},$$

по которому интеграл (17) имеет то же значение, что и по  $C_1$ ; на рис. 202 этот контур отмечен жирным пунктиром. На  $\tilde{C}_1$  имеется только одна точка стационарности функции

$$\tau = \operatorname{Re} g(\zeta) = -\cos s \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cos \alpha,$$

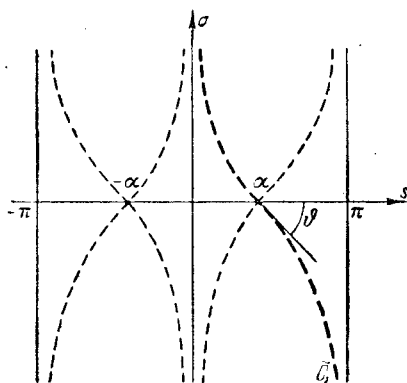


Рис. 202.

именно, седловая точка  $\zeta_0 = \alpha$ , и при приближении к обоим концам  $\tilde{C}_1$  эта функция стремится к  $-\infty$ . Отсюда следует, что  $\zeta_0 = \alpha$  является единственной на  $\tilde{C}_1$  точкой максимума функции  $\tau = \operatorname{Re} g(\zeta)$ .

Так как у нас  $g(\zeta_0) = i(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ ,  $g''(\zeta_0) = -i \sin \alpha$  и  $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$  \*), то по формуле (18) п. 77 мы получаем:

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin \alpha}} e^{ix(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - i\frac{\pi}{4}},$$

откуда, заменяя  $x \cos \alpha = \lambda$ ,  $\sin \alpha = v/x$ , где  $v = \sqrt{x^2 - \lambda^2}$  и  $\alpha = \arcsin \frac{v}{x}$ , получим *асимптотическое выражение первой ханкелевой функции большого аргумента*:

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{i\left(v - \lambda \arcsin \frac{v}{x} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (13)$$

Совершенно аналогично получается *асимптотическое выражение второй ханкелевой функции*

$$H_{\lambda}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{-i\left(v - \lambda \arcsin \frac{v}{x} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (14)$$

Если считать еще  $x \gg \lambda$ , так что  $v = \sqrt{x^2 - \lambda^2} \approx x$ ,  $\alpha = \arcsin \frac{v}{x} \approx \frac{\pi}{2}$ , то последние формулы упростятся:

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad H_{\lambda}^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (15)$$

Из формул (15), между прочим, вытекает утверждение, высказанное без доказательства в предыдущем пункте, о том, что при любом действительном  $\lambda$  функции Ханкеля  $H_{\lambda}^{(1)}(z)$  и  $H_{\lambda}^{(2)}(z)$  линейно независимы.

Из тех же формул на основании формул (5) и (10) предыдущего пункта мы получаем *асимптотические выражения*

\*) Чтобы найти угол  $\vartheta$  заметим сначала, что линия  $\operatorname{Re} g(\zeta) = \operatorname{const}$ , проходящая через седловую точку  $\zeta_0 = \alpha$ , имеет уравнение

$$-\cos s \operatorname{sh} \sigma + \sigma \cos \alpha = 0,$$

главные члены которого в окрестности  $\zeta_0$  записываются в виде  $\sigma(s - \alpha) \sin \alpha + \dots = 0$  (мы заменили  $\cos s = \cos \alpha - \sin \alpha(s - \alpha) + \dots$  и  $\operatorname{sh} \sigma = \sigma + \dots$ ). Поэтому касательными к этой линии в точке  $\zeta_0$  служат прямые  $s = \alpha$  и  $\sigma = 0$ . Касательными к линии  $\operatorname{Im} g(\zeta) = \operatorname{const}$  в той же точке по свойству сопряженных гармонических функций служат биссектрисы этих прямых, т. е.  $\vartheta = \pm \frac{\pi}{4}$ , следовательно, нужно взять  $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ .

цилиндрических функций I и II рода для значений  $x \gg \lambda$

$$\begin{aligned} J_\lambda(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right); \\ Y_\lambda(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Интересно отметить, что для значений параметра  $\lambda = \pm \frac{1}{2}$  эти асимптотические выражения являются точными (для целых  $\lambda = n$  первая формула была получена выше в п. 77).

Совершенно аналогичным образом получаются асимптотические формулы цилиндрических функций мнимого аргумента для значений  $x \gg \lambda$ :

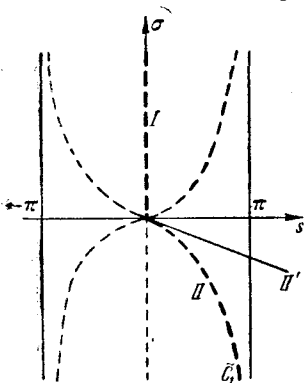


Рис. 203.

$$\left. \begin{aligned} I_\lambda(x) &= e^{-\frac{\lambda \pi i}{2}} J_\lambda(ix) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \\ K_\lambda(x) &= \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\lambda \pi i}{2}} H_\lambda^{(1)}(ix) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

На их выводе мы не будем останавливаться.

3) Асимптотические выражения для больших  $x$  и  $\lambda$ . Если считать  $x = \lambda$  и положить

$$g(\zeta) = i \sin \zeta - i\zeta, \quad (18)$$

то

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{x(i \sin \zeta - i\zeta)} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{xg(\zeta)} d\zeta, \quad (19)$$

и мы будем иметь лишь одну седловую точку в начале координат  $\zeta_0 = 0$ . Линия наибольшего ската

$$\operatorname{Im} g(\zeta) = \sin s \operatorname{ch} \sigma - s = 0 \quad (20)$$

состоит из трех ветвей, проходящих через начало координат: мнимой оси  $s = 0$  и двух дуг, асимптотически приближающихся к прямым  $s = \pm \pi$  (рис. 203). Из ветвей этой линии мы строим контур  $C_1$  (обозначен на рис. 203 жирным пунктиром), который дает интегралу (19) то же значение, что и  $C_1$ , и к этому контуру применяем метод перевала.

Здесь в отличие от предыдущих случаев в точке перевала  $g''(\zeta) = -i \sin \zeta$  обращается в нуль и лишь  $g'''(0) = -i$  отлична от нуля и поэтому формула (18) п. 77 неприменима. Элемент

тарный анализ показывает, что тем не менее точка  $\xi_0 = 0$  является точкой максимума функции  $g(\xi)$  на  $\tilde{C}_1$  и притом единственной. В соответствии с идеей метода перевала для получения асимптотического выражения мы можем заменить  $g(\xi) \approx \frac{g'''(0)}{3!} \xi^3 = -\frac{i}{6} \xi^3$  и кривую  $\tilde{C}_1$  малой окрестностью седловой точки, или с той же степенью точности

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} \left\{ \int_I e^{-\frac{ix}{6} \xi^3} d\xi + \int_{II'} e^{-\frac{ix}{6} \xi^3} d\xi \right\},$$

где  $I$  — положительная мнимая полуось, а  $II'$  — касательная к участку  $II$  (см. рис. 203). Уравнением этой касательной служит  $\sigma = -\frac{1}{\sqrt{3}} s$  (что нетрудно получить из тейлоровского разложения левой части (20)), и на ней  $\xi^3 = (s + i\sigma)^3 = i\sigma(3s^2 - \sigma^2) = 8i\sigma^3$ ,  $d\xi = e^{-i\frac{\pi}{6}} \sqrt{ds^2 + d\sigma^2} = -2e^{-i\frac{\pi}{6}} d\sigma$  (знак — объясняется тем, что у нас  $d\sigma < 0$ ).

Поэтому полагая еще на участке  $I$   $\xi = i\sigma$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} H_{\lambda}^{(1)}(x) &\approx \frac{1}{\pi} \left\{ i \int_{\infty}^0 e^{-\frac{x}{6} \sigma^3} d\sigma - 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \int_0^{\infty} e^{\frac{4}{3} x \sigma^3} d\sigma \right\} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left\{ i \sqrt[3]{\frac{6}{x}} - e^{-i\frac{\pi}{6}} 2 \sqrt[3]{\frac{3}{4x}} \right\} \int_0^{\infty} e^{-\xi^3} d\xi. \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi^3} d\xi = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-2/3} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

и мы получаем окончательно

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx -\frac{1}{3\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt[3]{\frac{6}{x}} \left( i - e^{-i\frac{\pi}{6}} \right). \quad (21)$$

В. А. Фок дал другую асимптотическую формулу для случая

$$\sqrt{\lambda^2 - x^2} \approx \lambda^{2/3}, \quad \lambda \gg 1$$

или, что то же самое, для конечных значений

$$t = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{\lambda^2}{x^2} - 1\right).$$

Эта формула имеет вид:

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx -\frac{i}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} w(t), \quad (22)$$



где

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L e^{t\zeta - \frac{\zeta^2}{3}} d\zeta \quad (23)$$

и  $L$  — контур, идущий от  $\zeta = \infty$  до 0 по лучу  $\arg \zeta = -2\pi/3$ , и от  $\zeta = 0$  до  $\infty$  по положительной полуоси  $\arg \zeta = 0$ . Эта функция исследована и для нее построены таблицы. На выводе формулы Фока мы не останавливаемся (см. В. А. Фок [10], стр. 55—60).

**98. Графики цилиндрических функций. Распределение нулей.** Мы приведем здесь графики наиболее употребительных цилиндрических функций для положительных значений аргумента. На

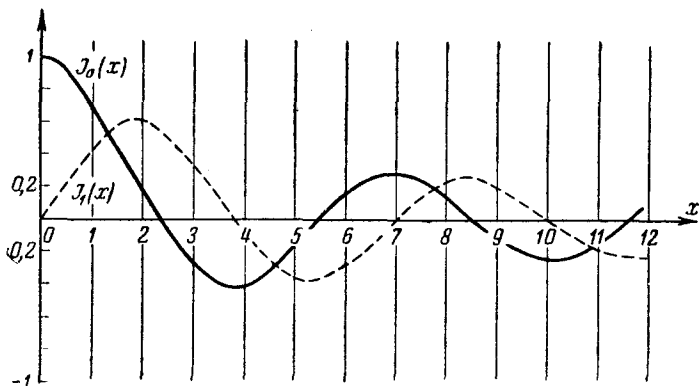


Рис. 204.

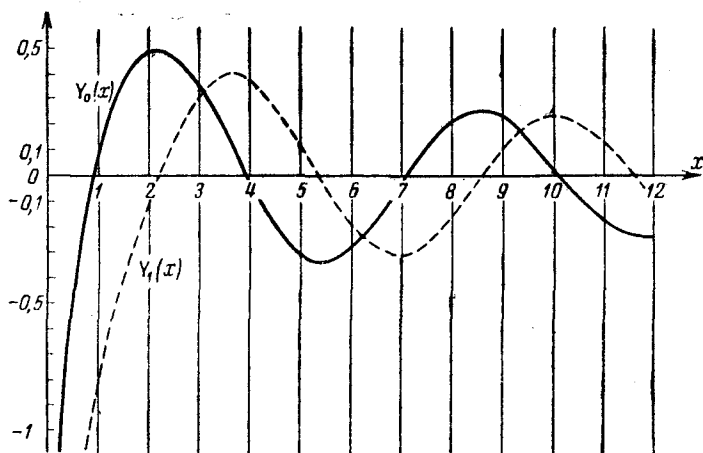


Рис. 205.

рис. 204 и 205 сплошными линиями изображены графики функций  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$ . Для малых значений аргументов характер

этих графиков можно выяснить из представлений  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  в виде рядов. Для больших значений  $x$  можно воспользоваться асимптотическими выражениями (24) предыдущего пункта, из которых следует

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1)$$

Пунктирными линиями на тех же рисунках изображены графики функций Бесселя и Вебера первого порядка. Они получаются из графиков  $J_0(x)$  и  $Y_0(x)$  посредством графического дифференцирования на основании соотношений  $J_1(x) = -J'_0(x)$ ,  $Y_1(x) = -Y'_0(x)$ .

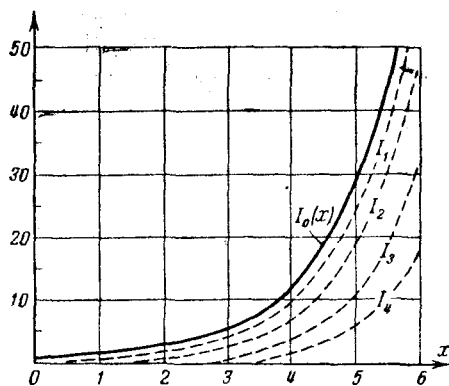


Рис. 206.

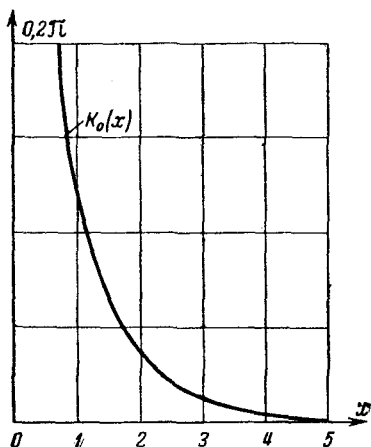


Рис. 207.

На рис. 206 и 207 приведены также графики цилиндрических функций мнимого аргумента

$$I_0(x) = J_0(ix) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad (2)$$

которые часто применяются в физике; на первом из них пунктиром указаны также графики  $I_n(x)$  для  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Функции  $J_n(x)$  и  $Y_n(x)$  имеют колебательный характер; их частота примерно постоянна, а амплитуда убывает как  $1/\sqrt{x}$ . При этом функции  $Y_n(x)$  при приближении к началу координат стремятся к  $-\infty$ .

Напротив, функции  $I_0(x)$  и  $K_0(x)$  не имеют колебательного характера: первая из них монотонно возрастает от значения 1 до  $\infty$  примерно со скоростью показательной функции, а вторая убывает от  $+\infty$  до нуля.

На рис. 208 приведен рельеф функции  $J_0(z)$ , на нем нанесены линии вдоль уровня модуля (через 0,2) и аргумента (через  $30^\circ$ ),

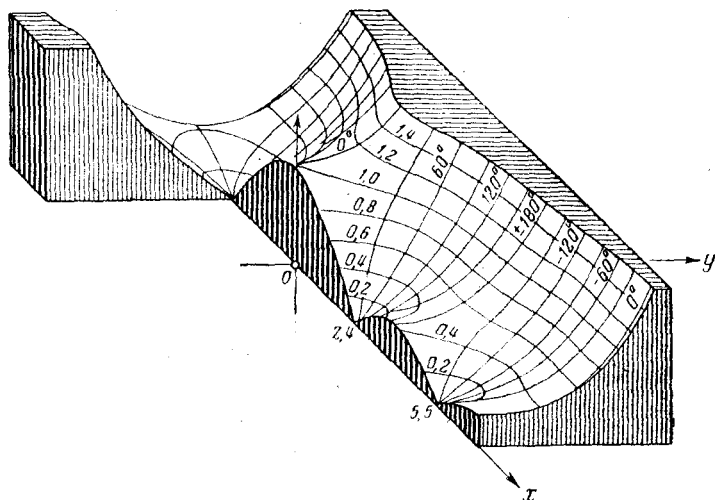


Рис. 208.

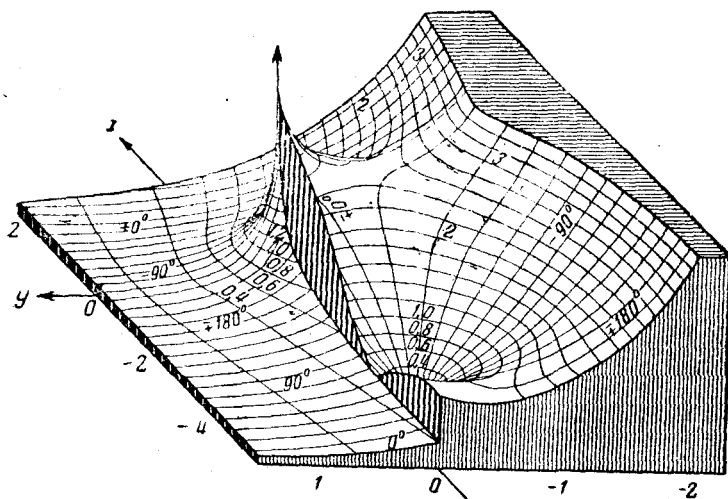


Рис. 209.

сечение вдоль действительной оси дает график  $|J_0(x)|$ . Рис. 209 показывает рельеф той ветви  $H_0^{(1)}(z)$ , которая терпит разрыв вдоль отрицательной действительной оси и стремится к 0 при  $y \rightarrow +\infty$ . На нем нанесены линии уровня модуля (через 0,2) и

аргумента (через  $15^\circ$ ). На рис. 210 показана зависимость  $J_\lambda(x)$  от двух действительных переменных  $x$  и  $\lambda$ ; линии на поверхности дают графики  $J_0(x)$ ,  $J_2(x)$ , ...,  $J_{10}(x)$  и  $J_\lambda(2)$ ,  $J_\lambda(4)$ , ...,  $J_\lambda(20)$ .

Для практики большое значение имеют нули цилиндрических функций. Рассмотрим вопрос о расположении нулей бесселевых

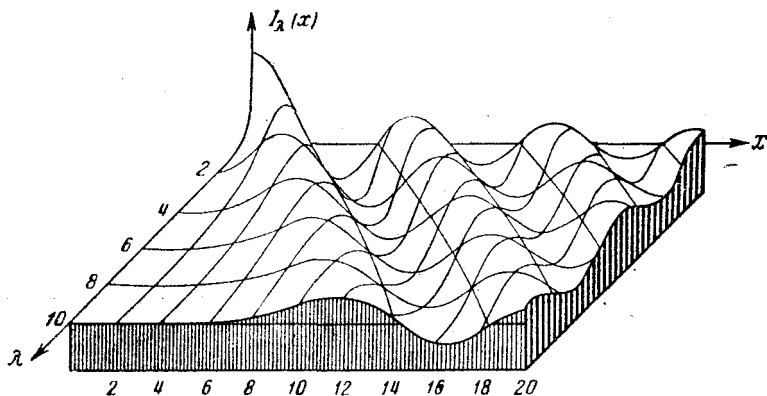


Рис. 210.

функций. Пусть  $\lambda$  — действительное число,  $\lambda > -1$ . Из формулы (33) п. 95, которую мы вывели при доказательстве ортогональности этих функций, для любых нулей  $z = \alpha$  и  $z = \beta$  функции  $J_\lambda(z)$  вытекает соотношение

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 J_\lambda(\alpha t) J_\lambda(\beta t) t dt = 0. \quad (3)$$

Так как все коэффициенты разложения

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (4)$$

действительны, то, очевидно,

$$J_\lambda(\bar{z}) = \overline{J_\lambda(z)}. \quad (5)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если  $z$  — комплексный корень уравнения  $J_\lambda(z) = 0$ , то и  $\bar{z}$  будет корнем того же уравнения. Полагая в формуле (3)  $\alpha = z$ ,  $\beta = \bar{z}$  и пользуясь формулой (5), согласно которой  $J_\lambda(z) J_\lambda(\bar{z}) = |J_\lambda(z)|^2$ , будем иметь:

$$(\bar{z}^2 - z^2) \int_0^1 |J_\lambda(tz)|^2 t dt = 0.$$

Но так как интеграл здесь не может равняться нулю, то  $\bar{z}^2 - z^2 = 0$ , откуда либо  $\bar{z} = z$ , либо  $\bar{z} = -z$ . Таким образом, при действительных  $\lambda > -1$  функция  $J_\lambda(z)$  может иметь лишь действительные или чисто мнимые нули.

Из полученной в предыдущем пункте для  $\lambda \geq 0$  асимптотической формулы

$$J_\lambda(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (6)$$

вытекает, что  $J_\lambda(x)$  имеет бесчисленное множество положительных нулей (в самом деле,  $J_\lambda(x)$  непрерывна и, как вытекает из (6), бесконечно часто меняет знак). Но из формулы

$$J_\lambda(-z) = e^{i\lambda\pi} J_\lambda(z), \quad (7)$$

непосредственно вытекающей из разложения (4), видно, что нули  $J_\lambda(z)$  расположены симметрично относительно начала координат. Следовательно,  $J_\lambda(z)$  имеет и бесчисленное множество отрицательных нулей.

Из (6) вытекает приближенная формула для нулей  $J_\lambda(x)$ :

$$\alpha_k^{(\lambda)} \approx \frac{3\pi}{4} + \lambda \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (8)$$

тем более точная, чем больше  $|k|$ . Приведем в качестве примера значения наименьших положительных нулей функции  $J_0(x)$ :

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha_k^{(0)}$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7415	14,9309	18,0711	21,2126

Заметим, что приближенная формула (8) дает при  $k = 6$  значение  $\alpha_6^{(0)} = 21,206$  (точность 0,01).

Чтобы исследовать вопрос о чисто мнимых корнях  $J_\lambda(z)$ , положим в формуле (4)  $z = xi$ , получим:

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)}. \quad (9)$$

Пусть  $\lambda$  — произвольное действительное число; так как  $\lambda + k + 1$  для всех  $k$ , кроме конечного числа, имеет положительные значения, то и все коэффициенты ряда (9), кроме конечного их числа, положительны. Так как, кроме того, знак правой части формулы (9) для больших  $|x|$  определяется знаком высоких

степеней, то мы можем утверждать, что  $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} > 0$  для достаточно больших  $|z|$ , т. е.  $J_\lambda(z) \neq 0$ . Но на конечном отрезке мнимой оси целая функция  $\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$  может иметь лишь конечное число нулей, следовательно, для любого действительного  $\lambda$  функция  $J_\lambda(z)$  может иметь лишь конечное число чисто мнимых нулей. В частности, при  $\lambda > -1$  все коэффициенты ряда (9) положительны, следовательно, функция  $J_\lambda(z)$  при  $\lambda > -1$  вовсе не имеет чисто мнимых нулей.

Выясним некоторые особенности распределения нулей бесселевых функций. Для этого, прежде всего, обозначим

$$y(x) = \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \quad (10)$$

и заметим, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xy'' + (2\lambda + 1)y' + xy = 0, \quad (11)$$

которое получается подстановкой  $J_\lambda = x^\lambda y$  в уравнение цилиндрических функций.

Пусть  $\alpha$  будет любой положительный нуль производной  $y'$ , тогда уравнение (11) при  $x = \alpha$  принимает вид  $y''(\alpha) + y(\alpha) = 0$ . Но  $y(\alpha)$  не может равняться нулю, ибо тогда из условий  $y(\alpha) = 0$ ,  $y'(\alpha) = 0$  по теореме единственности\*) решения начальной задачи дифференциального уравнения (11) следовало бы, что  $y(x) \equiv 0$ . Поэтому  $y(\alpha)$  и  $y''(\alpha)$  имеют различные знаки.

Пусть теперь  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\beta > \alpha$ ) будут два соседних положительных нуля  $y'(x)$ , так что  $y'(x) \neq 0$  на интервале  $(\alpha, \beta)$ . По известной теореме Ролля на интервале  $(\alpha, \beta)$  лежит хотя бы один нуль  $y''(x)$ , точнее, нечетное число таких нулей. Отсюда следует, что  $y''(\alpha)$  и  $y''(\beta)$ , а значит  $y(\alpha)$  и  $y(\beta)$ , имеют разные знаки, т. е. что на интервале  $(\alpha, \beta)$  лежит хотя бы один нуль  $y(x)$ . Но больше чем один нуль  $y(x)$  на  $(\alpha, \beta)$  лежать не может, ибо тогда на этом интервале лежал хотя бы один нуль  $y'(x)$ , что противоречит принятому нами условию. Таким образом, можно утверждать, что положительные корни  $y(x)$  и  $y'(x)$  взаимно разделяют друг друга. То же самое справедливо и для отрицательных нулей.

Далее заметим, что рекуррентное соотношение (18) п. 95 переписывается в виде

$$y'(x) = -\frac{J_{\lambda+1}(x)}{x^\lambda}. \quad (12)$$

\*) Точка  $x = \alpha$  является правильной точкой уравнения (11).

Следовательно, нули  $y'(x)$  совпадают с нулями  $J_{\lambda+1}(x)$ ; с другой стороны, из (10) видно, что нули  $y(x)$  совпадают с нулями  $J_{\lambda}(x)$ . Таким образом, полученное выше утверждение можно формулировать так: *нули бесселевых функций порядков, отличающихся на 1, взаимно разделяют друг друга*. Мы снова обнаруживаем сходство между бесселевыми и тригонометрическими функциями: нули  $\cos\left(x + \lambda \frac{\pi}{2}\right)$  и  $\cos\left[x + (\lambda + 1) \frac{\pi}{2}\right]$ , очевидно, также разделяют друг друга.

99. Примеры. Приложение. 1) Теорема сложения для бесселевых функций. Для любого целого  $n$  и комплексных  $z_1$  и  $z_2$

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2). \quad (1)$$

Доказательство вытекает из теоремы сложения для показательной функции и определения  $J_n$  с помощью производящей функции. Имеем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1 + z_2) w^n = e^{\frac{z_1 + z_2}{2} \left(w - \frac{1}{w}\right)} = e^{\frac{z_1}{2} \left(w - \frac{1}{w}\right)} e^{\frac{z_2}{2} \left(w - \frac{1}{w}\right)};$$

разложим теперь в ряды функции

$$e^{\frac{z_1}{2} \left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1) w^n, \quad e^{\frac{z_2}{2} \left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_2) w^k$$

и перемножим разложения, располагая произведение по степеням  $w$ . Будем иметь:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z_1 + z_2) w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2) \right\} w^n,$$

откуда в силу единственности разложения в ряд Лорана для любого  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  получаем формулу (1).

2) Примеры дифференциальных уравнений, решаемых в цилиндрических функциях. Важный класс примеров линейных дифференциальных уравнений второго порядка, решаемых в цилиндрических функциях, дает уравнение

$$x^2 y'' + ax y' + (b + cx^\alpha) y = 0, \quad (2)$$

где  $a, b, c$  и  $\alpha$  — некоторые постоянные, причем  $c$  и  $\alpha$  отличны от нуля \*).

Действительно, перейдем в уравнении (2) к новой независимой переменной  $t$  и новой некоей функции  $u$ , положив

$$x = kt^\mu, \quad y = t^\nu u, \quad (3)$$

\*) Если  $c$  или  $\alpha$  равно нулю, то уравнение (2) решается в элементарных функциях.

где  $\mu$ ,  $\nu$  и  $k$  — некоторые постоянные. Заменяем

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}, \quad y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

и вычислим производные в правой части этих формул, используя соотношения (3). Подставим эти выражения в уравнение (2). После сокращений приходим к уравнению вида

$$t^2 u'' + [2\nu + (a-1)\mu + 1] tu' + [c\mu^2 k^\alpha t^{\alpha\mu} + (a-1)\mu\nu + b\mu^2 + \nu^2] u = 0,$$

где  $u'$  и  $u''$  обозначают производные по  $t$ . Если подобрать постоянные  $\mu$ ,  $\nu$  и  $k$  так, чтобы

$$2\nu + (a-1)\mu = 0, \quad \alpha\mu = 2, \quad c\mu^2 k^\alpha = 1 \quad (4)$$

(это всегда возможно, если  $\alpha$  и  $c$  отличны от 0), то наше уравнение примет вид

$$t^2 u'' + tu' + (t^2 - \lambda^2) u = 0. \quad (5)$$

где

$$\lambda^2 = -[(a-1)\mu\nu + b\mu^2 + \nu^2] = \nu^2 - b\mu^2 \quad (6)$$

т. е. будет совпадать с уравнением цилиндрических функций с индексом  $\lambda$ .

3) Интегралы, содержащие бесселевы функции. Применяя теорему подобия п. 80 к формуле (7) п. 82 для изображения цилиндрической функции, найдем:

$$J_n(bt) = \frac{b^n}{V^{p^2+b^2} (V^{p^2+b^2} + p)^n}. \quad (7)$$

По формуле для преобразования Лапласа (заменяя в ней для симметрии  $p$  на  $a$ ) будем иметь:

$$\int_0^\infty e^{-at} J_n(bt) dt = \frac{b^n}{V^{a^2+b^2} (V^{a^2+b^2} + a)^n}. \quad (8)$$

При  $n = 0$  получим, в частности, интеграл (Липшица)

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{V^{a^2+b^2}}, \quad (8')$$

который сходится при  $\operatorname{Re} a \geq 0$ .

Заменяя в (8')  $a$  на  $ai$ , получаем:

$$\int_0^\infty e^{-ait} J_0(bt) dt = \begin{cases} \frac{1}{V^{b^2-a^2}}, & |a| < |b|, \\ \frac{-i}{V^{a^2-b^2}}, & |a| > |b| \end{cases}$$

(можно проследить, что  $V^-$  означает здесь ветвь, принимающую положительные значения при действительных  $a$  и  $b$ ). При действительных  $a$  и  $b$ ,



отделив действительные и мнимые части, найдем интегралы (Вебер)

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \cos bt \, dt = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & 0 \\ 0 & \end{cases}, \quad \int_0^{\infty} J_0(at) \sin bt \, dt = \begin{cases} 0, & \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} & \end{cases} \quad (9)$$

(верхняя строка относится к случаю  $a > b$ , нижняя — к случаю  $a < b$ ).

Пусть  $a > b$ ; интегрируя первую из формул (9) по  $b$ , найдем:

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \frac{\sin bt}{t} \, dt = \int_0^b \frac{db}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \arcsin \frac{b}{a} \quad (0 \leq b < a).$$

Интеграл слева сходится также при  $b = a$ , и в пределе при  $b \rightarrow a$  мы получаем для любого  $a > 0$

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \frac{\sin at}{t} \, dt = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

(законность предельного перехода можно обосновать). С другой стороны, интегрируя ту же формулу (9) на отрезке  $(b_0, b)$ ,  $a < b_0 < b$ , получаем:

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \left\{ \frac{\sin bt}{t} - \frac{\sin b_0 t}{t} \right\} dt = 0,$$

откуда, переходя еще к пределу при  $b_0 \rightarrow a$  (законность предельного перехода также можно обосновать), находим с учетом (10)

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \frac{\sin bt}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} \quad (b \geq a).$$

Таким образом, объединяя найденные результаты, мы получаем:

$$\int_0^{\infty} J_0(at) \frac{\sin bt}{t} \, dt = \begin{cases} \arcsin \frac{b}{a}, & \\ \frac{\pi}{2}, & \end{cases} \quad (11)$$

где первая строка относится к случаю  $0 \leq b \leq a$ , а вторая — к случаю  $b \geq a$ . Мы имели также формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \tau^{n/2} J_n(2\sqrt{\tau}) \, d\tau = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} \quad (12)$$

(см. (3) п. 82 и формулу Лапласа для преобразования); полагая в ней  $\tau = a^2 t^2/4$  и  $p = 4b^2/a^2$ , получаем еще один интеграл (Вебер)

$$\int_0^{\infty} J_n(at) e^{-b^2 t^2} t^{n+1} \, dt = \frac{a^n}{(2b^2)^{n+1}} e^{a^2/4b^2}. \quad (13)$$

4) Интегралы Сонина. Из представления  $J_m(x)$  в виде ряда находим:

$$J_m(x \sin t) \sin^{m+1} t \cos^{2n+1} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{m+2k}}{2^{m+2k} k! \Gamma(m+k+1)} \sin^{2m+2k+1} t \cos^{2n+1} t.$$

Интегрируя это соотношение почленно по  $t$  от 0 до  $\pi/2$  (это законно при  $m > -1$ ,  $n > -1$ ) и используя формулу (5) п. 90, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x \sin t) \sin^{m+1} t \cos^{2n+1} t dt &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{m+2k}}{2^{m+2k} k! \Gamma(m+k+1)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m+k+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+k+2)} = \\ &= \Gamma(n+1) \frac{2^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+n+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+n+2k+1} = \\ &= \Gamma(n+1) \frac{2^n}{x^{n+1}} J_{m+n+1}(x), \end{aligned}$$

или

$$J_{m+n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{2^n \Gamma(n+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x \sin t) \sin^{m+1} t \cos^{2n+1} t dt \quad (14)$$

( $m, n > -1$ ). Этот интеграл получен Н. Я. Сониним.

Аналогично получается второй интеграл Сонина

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_m(x \sin t) J_n(y \cos t) \sin^{m+1} t \cos^{n+1} t dt &= \\ &= \frac{x^m y^n J_{n+m+1}(\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^{(m+n+1)/2}} \quad (m, n > -1). \end{aligned} \quad (15)$$

Н. Я. Сонину принадлежит также формула

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_m(at) \frac{J_n(b\sqrt{t^2 + x^2})}{(t^2 + x^2)^{n/2}} t^{m+1} dt &= \\ &= \begin{cases} \frac{a^m}{b^n} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{x}\right)^{n-m-1} J_{n-m-1}(x\sqrt{a^2 - b^2}); & 0 < a < b, \\ 0; & a > b > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Для вывода этой формулы мы заметим, что в интеграле Сонина — Шлеф-фли (9) п. 95 при  $\lambda > -1$  по лемме Жордана можно заменить контур

интегрирования  $C^*$  прямой  $\text{Im } \xi = c > 0$ . Мы получим новое интегральное представление бесселевой функции (Сонин)

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi - \frac{z^2}{4\xi}} \xi^{-\lambda-1} d\xi. \quad (17)$$

Заменяв в левой части формулы (16)  $J_n(b\sqrt{t^2+x^2})$  по формуле (17), найдем, что эта левая часть равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty J_m(at) \left(\frac{b}{2}\right)^n t^{m+1} \left\{ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi - \frac{b^2(t^2+x^2)}{4\xi}} \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \right\} dt = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty J_m(at) t^{m+1} \left\{ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b}{2}\left(\omega - \frac{t^2+x^2}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega^{n+1}} \right\} dt \end{aligned}$$

(мы заменили  $2\xi/b = \omega$  и воспользовались тем, что при  $b > 0$  эта замена не изменяет пути интегрирования). Переставляя здесь порядок интегрирования и пользуясь интегралом Вебера (13), находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \omega^{-n-1} e^{\frac{b}{2}\left(\omega - \frac{x^2}{\omega}\right)} d\omega \int_0^\infty e^{-bt^2/2\omega} J_m(at) t^{m+1} dt = \\ = \frac{a^m}{2\pi i b^{m+1}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b^2-a^2}{2b}\omega - \frac{bx^2}{2\omega}} \omega^{m-n} d\omega. \quad (18) \end{aligned}$$

При  $a > b$  этот интеграл равен нулю; действительно, в этом случае коэффициент при  $\omega$  в показателе степени  $e$  отрицателен и по лемме Жордана интеграл можно получить как предел интеграла по отрезку  $(c-id, c+id)$ , дополненному правой полуокружностью, но внутри такого контура подинтегральная функция правильна. Вторая часть формулы (16) доказана.

При  $a < b$  по той же формуле Сонина (17) находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{b^2-a^2}{2b}\omega - \frac{bx}{2\omega}} \omega^{m-n} d\omega = \\ = \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^{n-m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\xi - \frac{b^2-a^2}{4\xi}x^2} \xi^{m-n} d\xi = \\ = \frac{1}{b^{n-m-1}} \left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{x}\right)^{n-m-1} J_{n-m-1}(x\sqrt{b^2-a^2}) \end{aligned}$$

(мы заменили  $\omega = \frac{2b}{b^2-a^2}\xi$  и применили формулу (17) для  $\lambda = n-m-1$ ,  $z = x\sqrt{b^2-a^2}$ ). Подставляя найденное значение интеграла в формулу (8,1) получим и первую часть формулы Сонина (16).

5) Интеграл теории электромагнитных волн. Выведем формулу

$$J_0(a\sqrt{t^2 - \tau^2}) \eta(t - \tau) = \frac{1}{V\rho^2 + a^2} e^{-\tau V\rho^2 + a^2}, \quad (19)$$

которой мы уже пользовались в п. 87 при решении задачи о распространении волн в длинных линиях. Мы исходим из интеграла Сопина (8) п. 95; положив в нем  $n=0$  и  $z=a\sqrt{t^2 - \tau^2}$ , будем иметь

$$J_0(a\sqrt{t^2 - \tau^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} e^{\frac{a\sqrt{t^2 - \tau^2}}{2} \left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Заменяем здесь

$$\omega = \sqrt{\frac{t+\tau}{t-\tau}} \xi;$$

окружность  $|\omega|=1$  перейдет при этом в окружность  $|\xi|=1$ , и так как подынтегральная функция имеет лишь одну особую точку  $\xi=0$ , то эту окружность можно заменить окружностью  $|\xi|=1$ . Мы получим:

$$J_0(a\sqrt{t^2 - \tau^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} e^{\frac{a\tau}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \frac{a\tau}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (20)$$

Пользуясь этой формулой, найдем изображение по Лапласу левой части (19); считая  $\tau > 0$  и, как всегда,  $\operatorname{Re} p > 0$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} J_0(a\sqrt{t^2 - \tau^2}) dt &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \left\{ \int_{\tau}^{\infty} e^{-t \left[ p - \frac{a}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \right]} dt \right\} e^{\frac{a\tau}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right)} \frac{d\xi}{\xi} \end{aligned} \quad (21)$$

(мы изменили порядок интегрирования). Во внутреннем интеграле действительная часть коэффициента при  $t$  в показателе степени равна

$$\operatorname{Re} \left[ p - \frac{a}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \right] = \operatorname{Re} (p - ai \sin \varphi) = \operatorname{Re} p > 0$$

(мы полагаем  $\xi = e^{i\varphi}$  и считаем  $a$  действительным числом); поэтому интеграл сходится и легко вычисляется:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-t \left[ p - \frac{a}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \right]} dt = \frac{e^{-\tau \left[ p - \frac{a}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \right]}}{p - \frac{a}{2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right)}.$$

Подставив это значение в интеграл (21), найдем:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} J_0(a\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau = -\frac{e^{-\xi p}}{\pi i} \int_{|\xi|=1} e^{a\tau \xi} \frac{d\xi}{\xi^2 - \frac{2p}{a} \xi - 1}.$$

Подынтегральная функция имеет здесь два полюса:  $\xi_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + a^2}}{a}$ , из которых один лежит внутри круга  $|\xi| < 1$ , а другой — вне его, ибо  $\xi_1 \xi_2 = -1$ . При условии  $\operatorname{Re} p > 0$ ,  $\operatorname{Re} \sqrt{p^2 + a^2} > 0$  внутри круга лежит корень  $\xi_2 = \frac{1}{a} (p - \sqrt{p^2 + a^2})$  и по теореме о вычетах последний интеграл равен

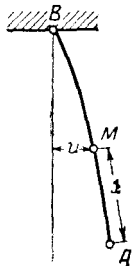
$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} J_0(a \sqrt{t^2 - \tau^2}) dt = -\frac{e^{-\tau p}}{\pi i} 2\pi i \frac{e^{a\tau \xi_2}}{2\xi_2 - 2\frac{p}{a}} = \frac{e^{-\tau \sqrt{p^2 + a^2}}}{\sqrt{p^2 + a^2}},$$

что совпадает с формулой (19).

Точно таким же образом получается более общий результат: для любого целого неотрицательного  $n$

$$\eta(t - \tau)(t - \tau)^n \frac{J_n(\sqrt{t^2 - \tau^2})}{(t^2 - \tau^2)^{n/2}} = \frac{e^{-\tau \sqrt{p^2 + 1}} (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (22)$$

6) Задача Бернулли о колебаниях висющей цепи. В 1732 г. Даниил Бернулли поставил и решил задачу о колебаниях вертикально висющей тяжелой цепи. Пусть однородная тяжелая цепь  $AMB$  длины  $l$  подвешена вертикально в точке  $B$  и под действием силы тяжести совершает малые колебания вокруг положения равновесия. Если обозначить через  $t$  — время,  $x$  — длину цепи от точки  $A$  до переменной точки  $M$  и через  $u = u(x, t)$  — отклонение точки  $M$  от вертикали (рис. 211), то уравнение малых колебаний будет иметь вид:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (23)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести. Следуя Бернулли, будем решать это уравнение методом разделения переменных. Для этого прежде всего найдем его частное решение, имеющее вид произведения двух функций, из которых одна зависит лишь от переменной  $x$ , а другая лишь от  $t$ :

$$u = X(x) T(t).$$

Подставляя это в (23), после простых преобразований будем иметь:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = g \frac{xX''(x) + X'(x)}{X(x)}.$$

Так как слева здесь стоит функция одного  $t$ , а справа — функция одного  $x$ , то равенство возможно лишь в том случае, когда обе части равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим через  $-\omega^2$  (\*). Тогда последнее уравнение разобьется на два:

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0; \quad xX''(x) + X'(x) + \frac{\omega^2}{g} X(x) = 0. \quad (24)$$

Решение первого уравнения имеет вид:

$$T(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

\*) Эта постоянная должна быть отрицательной, ибо в противном случае, как видно хотя бы из первого уравнения (24), решение не будет иметь колебательного характера, что противоречит физическим соображениям.

где  $A$  и  $\varphi$  — некоторые постоянные, а второе уравнение имеет вид уравнения (2) этого пункта при  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = \frac{\omega^2}{g}$ ,  $\alpha = 1$ . По формулам (4) находим  $\mu = 2$ ,  $\nu = 0$ ,  $k = \frac{g}{4\omega^2}$  и, следовательно, подстановка (3), которая в нашем случае имеет вид \*)  $x = \frac{g}{4\omega^2} t^2$ , или  $t = 2\omega \sqrt{\frac{x}{g}}$ , приводит уравнение к виду уравнения цилиндрических функций с индексом  $\lambda = 0$ , как видно из соотношения (6). Таким образом, общее решение второго из уравнений (24) имеет вид:

$$X(x) = BJ_0\left(2\omega \sqrt{\frac{x}{g}}\right) + CY_0\left(2\omega \sqrt{\frac{x}{g}}\right),$$

где  $B$  и  $C$  — постоянные. Из физических соображений ясно, что при  $x \rightarrow 0$  решение должно оставаться ограниченным, следовательно,  $C = 0$ ; постоянную  $B$  можно считать равной 1, ибо в выражение для  $T$  уже входит произвольный множитель  $A$ . Таким образом мы находим частное решение уравнения (23) в виде

$$u = AJ_0\left(2\omega \sqrt{\frac{x}{g}}\right) \sin(\omega t + \varphi). \quad (25)$$

Величина  $\omega$  здесь не может иметь произвольного значения, ибо из того условия, что цепь подвешена в точке  $B$ , мы находим, что  $u(l, t) = 0$  для всех  $t$ . Это возможно лишь в том случае, если

$$J_0\left(2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}\right) = 0, \quad (26)$$

откуда  $\omega = \omega_k = \frac{\alpha_k}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$ , где  $\alpha_k$  — нули бесселевой функции нулевого порядка.

Уравнение (25) показывает, что все точки цепи совершают гармонические колебания с одинаковой частотой  $\omega_k =$

$= \frac{\alpha_k}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$  и с амплитудой, меняю-

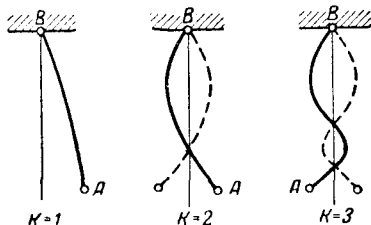


Рис. 212.

щейся от точки к точке по закону  $AJ_0\left(2\omega_k \sqrt{\frac{x}{g}}\right) = AJ_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right)$  \*\*).

Частоты колебаний и форма колеблющейся цепи могут быть различными, в зависимости от того, какой нуль  $\alpha_k$  функции  $J_0(x)$  рассматривается; на рисунке 212 изображены законы изменения амплитуд точек цепи при  $k = 0, 1, 2$ . Обычно колебания цепи представляют собой наложение колебаний (25) с различными амплитудами и начальными фазами

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k J_0\left(\alpha_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) \sin(\omega_k t + \varphi_k). \quad (27)$$

\*) Замена неизвестной функции излишня, ибо  $\nu = 0$ .

\*\*) При  $x = 0$  функция  $J_0(x) = 1$ , следовательно, постоянная  $A$  означает амплитуду колебаний свободного конца цепи.

Чтобы определить коэффициенты  $A_k$  и  $\varphi_k$ , надо задать начальные отклонение и скорость точек цепи, т. е.  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x)$ . Тогда будем иметь условия

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k J_0 \left( \alpha_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) \sin \varphi_k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \omega_k J_0 \left( \alpha_k \sqrt{\frac{x}{l}} \right) \cos \varphi_k,$$

которые, обозначая  $\sqrt{x/l} = \tau$  и  $f(l\tau^2) = F(\tau)$ ,  $g(l\tau^2) = G(\tau)$ , можно переписать в виде обобщенных разложений Фурье

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \varphi_k J_0(\alpha_k \tau), \quad G(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \omega_k \cos \varphi_k J_0(\alpha_k \tau). \quad (28)$$

Из этих двух разложений по формулам (38) п. 95 можно найти все коэффициенты  $A_k$  и  $\varphi_k$ .

В работе, опубликованной в 1732 г. в комментариях в Петербургской Академии наук, Д. Бернулли решает второе уравнение (24) с помощью ряда, приходит к условию (26) и замечает, что цепь может иметь бесчисленное множество форм колеблющейся нити.

7) Задача Эйлера о колебаниях круглой мембраны. Прогиб  $u = u(x, y, t)$  — отклонение от равновесного состояния мембраны\*), совершающей малые колебания под действием сил натяжения, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (29)$$

где  $a^2 = T/\sigma$ ,  $T$  — натяжение и  $\sigma$  — поверхностная плотность. В работе, опубликованной в 1764 г., Л. Эйлер рассмотрел задачу о колебаниях круглой мембраны. Эйлер исходил из уравнений

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (30)$$

соответствующего уравнению (29) в полярных координатах. Для построения частных решений уравнения (30) Эйлер полагает  $u = R(r) \sin(\omega t + \gamma) \sin(\lambda \varphi + \delta)$ , где  $\omega$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  — постоянные, и после подстановки в (30) получает

$$r^2 R'' + r R' + \left( \frac{\omega^2}{a^2} r^2 - \lambda^2 \right) R = 0. \quad (31)$$

После перехода от  $r$  к новой переменной  $\rho = r\omega/a$  последнее уравнение принимает обычный вид уравнения цилиндрических функций

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2 - \lambda^2) R = 0. \quad (32)$$

Из физических соображений ясно, что период функции по  $\varphi$  должен быть равен  $2\pi$ , следовательно,  $\lambda$  должно быть целым числом. Для таких значений  $\lambda$  Эйлер дал решение уравнения (31) в виде ряда\*\*). Таким образом,

\*) Мембраной называется тонкий слой из свободно гнущегося и мало растягивающегося материала, пример — барабанная пленка.

\*\*) В более поздней работе Л. Эйлер рассмотрел также случай нецелого  $\lambda$ .

Эйлер получил частное решение уравнения (31) вида

$$u = AJ_n \left( \frac{\omega r}{a} \right) \sin(\omega t + \gamma) \sin(n\varphi + \delta). \quad (33)$$

Если мембрана закреплена на концах, то при  $r = r_0$ , где  $r_0$  — радиус мембраны, должно быть  $J_n \left( \frac{\omega r_0}{a} \right) = 0$ , откуда  $\omega = \omega_k^{(n)} = \frac{a}{r_0} \alpha_k^{(n)}$ , где  $\alpha_k^{(n)}$  —  $k$ -й нуль функции  $J_n(x)$ . Эйлер замечает также, что существует бесчисленное множество возможных колебаний мембраны.

При  $n = 0$  функция  $u$  не зависит от  $\varphi$ :

$$u = A_k J_0 \left( \alpha_k \frac{r}{r_0} \right) \sin(\omega_k t + \gamma_k), \quad (34)$$

т. е. все точки мембраны, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра, колеблются одинаково. Точки мембраны совершают гармонические

колебания, с одинаковой частотой  $\omega_k = \frac{a \alpha_k}{r_0}$  и с

амплитудой  $A_k J_0 \left( \alpha_k \frac{r}{r_0} \right)$ , зависящей от расстоя-

ния точки до центра. На рис. 213 изображены законы изменения амплитуды колебаний отдельных точек мембраны при  $k = 0, 1, 2$ .

Самый общий вид колебаний мембраны получается сложением всех колебаний (33) при различных  $n$  и  $k$

$$u = \sum_{n, k=0}^{\infty} A_{nk} J_n \left( \alpha_k^{(n)} \frac{r}{r_0} \right) \sin(\omega_k^{(n)} t + \gamma_{nk}) \sin(n\varphi + \delta_{nk}). \quad (35)$$

При заданных начальном положении и отклонении мембраны коэффициенты  $A_{nk}$ ,  $\gamma_{nk}$ ,  $\delta_{nk}$  можно найти, пользуясь ортогональностью систем тригонометрических и цилиндрических функций.

8) Мгновенный цилиндрический источник тепла. Плоско-параллельный поток тепла, в котором распределение температуры  $u$  во всех плоскостях (II), перпендикулярных какому-либо фиксированному направлению, одинаково, описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (36)$$

где  $t$  — время,  $a$  — постоянный коэффициент и  $x, y$  — декартовы координаты в одной из плоскостей II. Непосредственным дифференцированием проверяется, что функция

$$u = \frac{A}{t} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}}, \quad (37)$$

где  $A, \xi$  и  $\eta$  — постоянные, удовлетворяет уравнению (36). Очевидно, что при  $t \rightarrow 0$  в любой точке  $z = x + iy$ , отличной от  $\zeta = \xi + i\eta$ , функция  $u \rightarrow 0$ , а в точке  $\zeta$  эта функция  $\rightarrow \infty$ . Можно поэтому говорить, что (37) физически означает температуру, возникающую в точке  $z$  от действия мгновенного точечного источника тепла, помещенного в момент  $t = 0$  в точке  $\zeta$ .



Вычислим суммарную температуру, возникающую в точке  $z$  от действия мгновенных точечных источников тепла, при  $t = 0$  равномерно размещенных вдоль окружности  $|\zeta| = \rho$ . Мы будем считать, что эффект от источников, размещенных на малой дуге  $\rho d\vartheta$  этой окружности, равен эффекту от одного точечного источника. Тогда температура от действия этих источников определится по формуле (37)\*):

$$du = \frac{A d\vartheta}{t} e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{4a^2t}} = \frac{A d\vartheta}{t} e^{-\frac{r^2+\rho^2-2\rho r \cos \vartheta}{4a^2t}},$$

где мы считаем  $z = re^{i\varphi}$ ,  $\zeta = \rho e^{i(\vartheta+\varphi)}$  (рис. 214). Интегрируя это выражение по  $\vartheta$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , найдем искомую суммарную температуру

$$u = \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{\rho r}{2a^2t} \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Функцию  $\cos \vartheta$  здесь можно заменить на  $\sin \vartheta$ , ибо эта замена сводится лишь к замене переменного  $\vartheta$  на  $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ ; вместо пределов интегрирования

$-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  можно снова взять  $-\pi, \pi$ , что не меняет величины интеграла. Вспоминая тогда интегральное представление Бесселя (11) п. 95 для функции  $J_0(z)$ , мы получаем выражения для  $u$  в виде

$$u = \frac{2\pi A}{t} e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right). \quad (38)$$

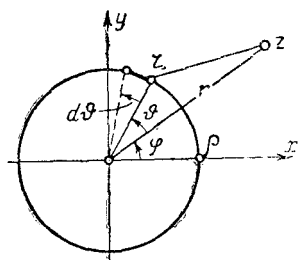


Рис. 214.

Для выяснения физического смысла константы  $A$  подсчитаем суммарное количество тепла, которое нужно для того, чтобы получить в плоскости  $z$  наше распределение температур.

Если обозначить через  $c$  удельную теплоемкость и через  $\sigma$  — поверхностную плотность вещества, то количество тепла на элементе площади  $r dr d\varphi$  будет  $dQ = c\sigma r dr d\varphi$ , а на всей плоскости

$$Q = c\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} u r dr = \frac{2\pi A c \sigma}{t} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right) r dr.$$

Учитывая интеграл Вебера (13) этого пункта (в нем  $n, a$  и  $b^2$  в нашем случае равны соответственно  $0, \frac{\rho t}{2a^2t}$  и  $\frac{1}{4a^2t}$ ), находим:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right) r dr = 2a^2te^{\frac{\rho^2}{4a^2t}}.$$

\*) Мы пишем  $du$  и  $A d\vartheta$  вместо  $u$  и  $A$ , чтобы подчеркнуть, что наши величины относятся лишь к малой дуге  $\rho d\vartheta$ .

Следовательно,  $Q = 8\pi^2 A c \sigma a^2$  и выражение для  $u$  примет окончательный вид

$$u = \frac{Q}{4\pi a^2 c \sigma t} e^{-\frac{r^2 + \rho^2}{4a^2 t}} I_0\left(\frac{\rho r}{2a^2 t}\right). \quad (39)$$

Переходя от плоского теплового поля к пространственному плоско-параллельному, можно считать, что формула (39) дает выражение для температуры, возникающей от действия мгновенных источников тепла, в момент  $t = 0$  равномерно размещенных на некотором цилиндре (*цилиндрический источник тепла*). При этом  $Q$  означает суммарное количество тепла, заключенное в полосе шириной  $l$  и перпендикулярной к оси цилиндра.

9) Задача на теплопроводность в круглом цилиндре. Пусть на поверхности круглого цилиндра радиуса  $\rho$  поддерживается температура, равная  $u_0 \cos \omega t$ . Найдем распределение температур при условии, что начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

Поскольку задача обладает осевой симметрией, естественно перейти к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, z$ . Но так как здесь  $u$  не будет зависеть от  $z$  и от  $\varphi$ , то уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (40)$$

причем начальными и краевыми условиями будут  $u|_{t=0} = 0$ ,  $u|_{r=\rho} = u_0 \cos \omega t$ . Задачу будем решать операторным методом. Переходя к преобразованию Лапласа по переменной  $t$ , получим операторное уравнение

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{p}{a^2} U = 0,$$

которое надо решить при условии

$$U|_{r=\rho} = \frac{p u_0}{p^2 + \omega^2}.$$

Общим решением операторного уравнения согласно формулам (32) п. 95 и (20) п. 96 будет:

$$U = A I_0 \left( \frac{\sqrt{p}}{a} i r \right) + B Y_0 \left( \frac{\sqrt{p}}{a} i r \right)$$

(у нас  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = \frac{\sqrt{p}}{a} i$ ), причем, так как  $U$  должно быть ограниченным при  $r \rightarrow 0$ , то  $B = 0$  и

$$U = A I_0 \left( \frac{\sqrt{p}}{a} r \right).$$

Подставляя граничное условие, найдем  $A I_0 \left( \frac{\sqrt{p}}{a} \rho \right) = \frac{p u_0}{p^2 + \omega^2}$ , и следовательно, операторное решение имеет вид:

$$U = u_0 \frac{I_0 \left( r \frac{\sqrt{p}}{a} \right)}{I_0 \left( \rho \frac{\sqrt{p}}{a} \right)} \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (41)$$

Функция  $U(p)$  имеет бесчисленное множество полюсов, из которых два чисто мнимые:  $p = \pm i\omega$ , а остальные отрицательные:  $p_k = -\left(\frac{\alpha \alpha_k}{\rho}\right)^2$ ,  $\alpha_k$  — нули

$J_0(x)$  ( $k=0,1,\dots$ ). Согласно первой теореме разложения п. 82 оригинал найдется как сумма вычетов функции  $U(p)e^{pt}$  во всех ее полюсах, т. е.

$$u(r, t) = u_0 \left\{ \operatorname{Re} \frac{I_0 \left( r \frac{\sqrt{\omega}}{a} e^{i \frac{\pi}{4}} \right)}{I_0 \left( \rho \frac{\sqrt{\omega}}{a} e^{i \frac{\pi}{4}} \right)} e^{i\omega t} + 2a^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0 \left( \frac{r}{\rho} \alpha_k \right)}{J'_0(\alpha_k)} \frac{\alpha_k^3 e^{-\left( \frac{a\alpha_k}{\rho} \right)^2}}{a^4 \alpha_k^4 + \rho^4 \omega^2} \right\},$$

где первый член дают полюсы  $p = \pm i\omega$ , а сумма относится к полюсам  $p_k = -\left( \frac{a\alpha_k}{\rho} \right)^2$ . Если заменить согласно формуле (34) п. 96

$$I_0 \left( x e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = I_0(x \sqrt{i}) = \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x$$

и для простоты записи обозначить  $\frac{\sqrt{\omega}}{a} = \lambda$ ,  $\frac{\alpha_k}{\rho} = \beta_k$ , то последняя формула переписется в следующем окончательном виде:

$$u(r, t) = u_0 \left\{ \frac{\operatorname{ber} \lambda r \operatorname{ber} \lambda \rho + \operatorname{bei} \lambda r \operatorname{bei} \lambda \rho}{\operatorname{ber}^2 \lambda \rho + \operatorname{bei}^2 \lambda \rho} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ber} \lambda r \operatorname{bei} \lambda \rho - \operatorname{bei} \lambda r \operatorname{ber} \lambda \rho}{\operatorname{ber}^2 \lambda \rho + \operatorname{bei}^2 \lambda \rho} \sin \omega t + \frac{2a^4}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a^2 \beta_k^2 t} \frac{J_0(r \beta_k)}{J'_0(\rho \beta_k)} \frac{\beta_k^3}{a^4 \beta_k^4 + \omega^2} \right\}. \quad (42)$$

#### § 4. Эллиптические функции

В этом параграфе мы рассмотрим свойства эллиптических интегралов и эллиптических функций. С одним эллиптическим интегралом и обращающей его функцией  $\operatorname{sn}$  мы уже встречались в п. 39, когда рассматривали задачу о конформном отображении прямоугольника на полуплоскость. Эллиптические функции встречаются во многих задачах динамики твердого тела, аэродинамики, электротехники, теории упругости и др.

Эллиптические интегралы изучались еще Лежандром в конце XVIII столетия, теория эллиптических функций создана, в основном, в XIX столетии совместными усилиями крупнейших математиков (Абель, Якоби, Лиувилль, Вейерштрасс).

Мы начинаем с изложения общих свойств мероморфных периодических функций, в совокупность которых входит, в частности, и класс эллиптических функций.

**100. Периодические функции.** Функция  $f(z)$  называется *периодической*, если для всех значений  $z$  из области своего определения она удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(z + T) = f(z), \quad (1)$$

где  $T \neq 0$  — некоторая постоянная, называемая *периодом* функции \*).

Периодическая функция непременно обладает бесчисленным множеством периодов. Действительно, имеет место

**Теорема 1.** Если  $T_1, T_2, \dots, T_k$  ( $k \geq 1$ ) являются периодами функции  $f(z)$ , то и любая их линейная комбинация с целыми (отрицательными, нулевыми или положительными) коэффициентами

$$T = n_1 T_1 + n_2 T_2 + \dots + n_k T_k$$

также является периодом этой функции.

В самом деле, для неотрицательных  $n_v$  утверждение очевидно, ибо многократное прибавление периода к аргументу не изменяет значения функции. Чтобы доказать его для отрицательных  $n_v$ , достаточно показать, что наряду с  $T_v$  периодом  $f(z)$  служит и  $-T_v$ . Но, действительно, для любого  $z$ , в силу уравнения (1),

$$f(z - T_v) = f[(z - T_v) + T_v] = f(z),$$

а это и означает, что  $-T_v$  является периодом  $f(z)$ .

Во всем дальнейшем изложении мы будем считать функцию  $f(z)$  однозначной и мероморфной — мы особо выделяем условие однозначности, чтобы подчеркнуть, что для многозначных аналитических функций излагаемая теория не имеет места. Ради наглядности формулировок мы будем изображать периоды  $f(z)$  точками плоскости  $z$ . Перейдем к выяснению структуры множества периодов. Докажем прежде всего одну лемму.

**Лемма.** Множество периодов мероморфной функции  $f(z) \not\equiv \text{const}$  не может содержать никакой последовательности, сходящейся к конечной точке плоскости.

Действительно, пусть существует последовательность периодов  $T_v$ , сходящаяся к конечной точке  $T$ , и пусть  $z_0$  — произвольная правильная точка  $f(z)$ . Сходящаяся к нулю последовательность  $\tilde{T}_v = T_{v+1} - T_v$  по теореме 1 снова будет последовательностью периодов  $f(z)$ . Таким образом, для любого  $v = 1, 2, \dots$

$$f(z_0 + \tilde{T}_v) = f(z_0).$$

Но последовательность точек  $z_v = z_0 + \tilde{T}_v$  сходится к  $z_0$  и в точках этой последовательности  $f(z)$  принимает одно и то же значение; по теореме единственности отсюда следует, что  $f(z) \equiv \text{const}$ , а это противоречит условиям теоремы.

Полную характеристику множества периодов дает следующая

\*) Область определения периодической функции должна, следовательно, вместе с любой точкой  $z$  содержать и точку  $z + T$ .

**Теорема 2 (Абель).** Мероморфная функция  $f(z)$  может иметь самое большее два линейно независимых периода. Иными словами, существуют два периода  $\tau$  и  $\tau'$  таких, что любой период  $T$  функции  $f(z)$  имеет вид:

$$T = n\tau + n'\tau', \quad (2)$$

где  $n$  и  $n'$  — целые числа.

Доказательство разобьем на две части:

1) Пусть на некоторой прямой  $L$ , проходящей через начало, лежит хотя бы один период  $T^0$  функции  $f(z)$ ; покажем, что тогда множество всех периодов  $f(z)$ , лежащих на  $L$ , имеет вид:

$$T = n\tau, \quad (3)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и  $\tau$  — некоторое комплексное число. Действительно, на отрезке  $OT^0$  прямой  $L$  по лемме может лежать лишь конечное число периодов  $f(z)$  (в противном случае на  $L$  существовала бы последовательность периодов, сходящаяся к конечной точке).

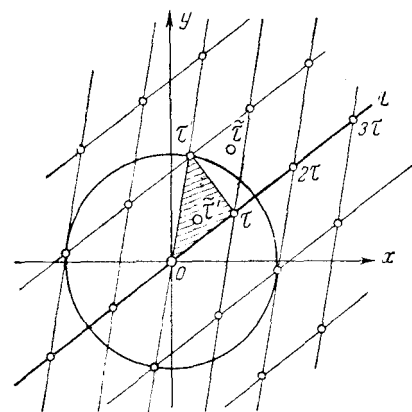


Рис. 215.

Поэтому на  $OT^0$  существует наименьший по модулю период  $f(z)$ . Обозначим этот период через  $\tau$  и покажем, что любой период  $f(z)$ , лежащий на  $L$ , имеет вид (3). Предполагая противное, допустим, что на  $L$  существует период  $\tilde{T}$ , лежащий между какими-либо двумя точками  $n\tau$  и  $(n+1)\tau$ . Тогда  $\tilde{T}$  представляется в виде  $\tilde{T} = (n + \vartheta)\tau$ , где  $0 < \vartheta < 1$  и по теореме 1 периодом  $f(z)$  будет служить также  $\tilde{\tau} = \vartheta\tau$ .

Но этот период должен лежать на отрезке  $O\tau$ , где по нашему построению нет периодов  $f(z)$ . Противоречие и доказывает утверждение.

2) Предположим, что наряду с периодами (3)  $f(z)$  обладает еще какими-либо периодами, не лежащими, следовательно, на прямой  $L$ . По лемме существует наибольший круг с центром в точке  $z = 0$ , который не содержит таких периодов (периоды, лежащие на  $L$ , мы не принимаем во внимание). По той же лемме на окружности этого круга лежит лишь конечное число периодов и, следовательно, существует период, ближайший к прямой  $L$  при движении против часовой стрелки от положительного направления  $L$ ; этот период мы и обозначим через  $\tau'$  (рис. 215). Покажем, что любой период  $f(z)$  имеет вид (2). Для этого, пред-

полагая противное, допустим, что существует период

$$\tilde{T} = (n + \vartheta)\tau + (n' + \vartheta')\tau',$$

где  $n$  и  $n'$  — какие-либо целые числа и  $0 \leq \vartheta \leq 1$ ,  $0 \leq \vartheta' \leq 1$ , причем  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  не являются оба целыми (равными 0 или 1). По теореме 1 тогда и

$$\tilde{\tau} = \vartheta\tau + \vartheta'\tau'$$

будет периодом  $f(z)$ . Но этот период лежит в параллелограмме с вершинами  $0$ ,  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $\tau + \tau'$  и не совпадает ни с одной из его вершин. По нашему построению он не может лежать в части параллелограмма, заштрихованной на рис. 215, т. е. внутри треугольника  $O\tau\tau'$ . Следовательно, он лежит в другой части, но тогда точка  $\tilde{\tau}' = \tau + \tau' - \tilde{\tau}$ , которая также является периодом  $f(z)$ , лежит в треугольнике  $O\tau\tau'$  и не совпадает ни с одной из его вершин, что противоречит нашему построению, ибо в этом треугольнике нет периодов  $f(z)$ . Теорема доказана.

Числа  $\tau$  и  $\tau'$ , участвующие в доказанной теореме (а также  $-\tau$  и  $-\tau'$ ), называются *основными периодами* функции  $f(z)$ . Из этой теоремы вытекает, что все мероморфные функции делятся на три класса:

1) *Непериодические функции*. Для них оба основных периода равны нулю,  $\tau = \tau' = 0$ .

2) *Просто-периодические функции*. Для них один из основных периодов, например  $\tau' = 0$ , равен нулю, а другой отличен от нуля. По теореме 2 все периоды просто периодической функции представляют собой целое кратное основного периода  $\tau$ . Примеры таких функций дают элементарные функции  $e^z$  (основной период  $\tau = \pm 2\pi i$ ),  $\sin z$ ,  $\cos z$  (основной период  $\tau = \pm 2\pi$ ),  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{ctg} z$  (основной период  $\tau = \pm \pi$ ) и др.

3) *Двоякопериодические функции*. Для них оба основных периода  $\tau$  и  $\tau'$  отличны от нуля. По теореме 2 тогда отношение  $\tau/\tau'$  не может быть действительным и все периоды функции имеют вид:

$$T = n\tau + n'\tau' \quad (n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Двоякопериодические мероморфные функции и называются *эллиптическими*.

Основным свойством эллиптических функций будут посвящены следующие пункты этого параграфа. Здесь же мы приведем ряд предложений, относящихся к любым (просто или двояко) периодическим функциям.

Обозначим через  $\tau$  основной период функции  $f(z)$  и через все точки  $n\tau$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), лежащие на прямой  $L$ , проведем прямые, параллельные какому-либо направлению, отличному от направления  $L$ . При этом вся плоскость разобьется на

полосы равной ширины, которые называются *полосами периодов*. Ясно, что все значения, которые  $f(z)$  принимает в какой-либо полосе периодов, периодически повторяются в соседних полосах. Таким образом, периодическую функцию достаточно изучить лишь в какой-нибудь из этих полос.

Обозначим через  $G$  двусвязную область, получающуюся из вспомогательной плоскости  $\xi$  удалением двух точек  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$ , и в этой области рассмотрим многозначную функцию

$$z = \frac{\tau}{2\pi i} \operatorname{Ln} \xi. \quad (4)$$

Значения функции (4), принимаемые ею в какой-либо точке  $\xi$ , отличаются друг от друга слагаемыми, целыми кратными  $\tau$ , поэтому сложная функция

$$f\left(\frac{\tau}{2\pi i} \operatorname{Ln} \xi\right) = \varphi(\xi) \quad (5)$$

однозначна в области  $G$ . В каждой точке  $\xi$ , для которой соответствующие точки  $z$  являются правильными точками  $f$ , эта

функция, очевидно, аналитична, а в точках, соответствующих полюсам  $f$ , она также имеет полюсы\*). Подставляя в (5) функцию, обратную к (4),

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{\tau} z} = e^{i\omega z}, \quad (6)$$

где  $\omega = 2\pi/\tau$  — «частота» функции  $f$ , получим представление  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \varphi(e^{i\omega z}). \quad (7)$$

Из этого представления мы и получим некоторые теоремы о периодических функциях.

**Теорема 3.** В любой полосе, ограниченной прямыми  $L'$  и  $L''$ , параллельными прямой периодов  $L$  (рис. 216) и не содержащей особых точек  $f(z)$ , эта функция представляется рядом Фурье

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega z}. \quad (8)$$

\*) Для доказательства достаточно рассмотреть какую-нибудь однозначную в окрестности точки ветвь функции (4) и воспользоваться теоремой об аналитичности сложной функции.

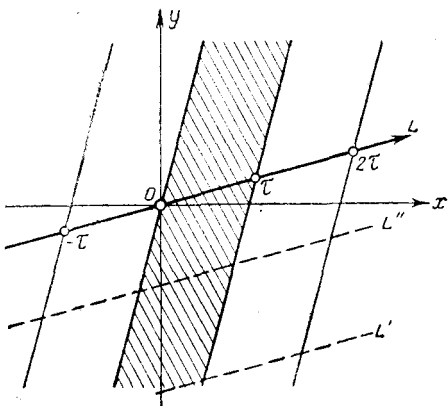


Рис. 216

В самом деле, прямым  $L'$  и  $L''$  плоскости  $z$ , на которых, соответственно,

$$z = z' + t\tau, \quad z = z'' + t\tau$$

( $z'$  и  $z''$  — фиксированные точки  $L'$  и  $L''$ ,  $t$  — действительный параметр, изменяющийся от  $-\infty$  до  $\infty$ ), в плоскости  $\xi$  в силу (6) соответствуют concentрические окружности

$$\xi = e^{iz'\omega} e^{2\pi i t}, \quad \xi = e^{iz''\omega} e^{2\pi i t}$$

с центрами в точке  $\xi = 0$  и радиусами  $r' = |e^{iz'\omega}|$ ,  $r'' = |e^{iz''\omega}|$ . В кольце между этими окружностями функция  $\varphi(\xi)$  аналитична, следовательно, представляется рядом Лорана

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \xi^k.$$

Подставляя сюда  $\xi = e^{i\omega z}$  и пользуясь формулой (7), получим искомое разложение (8).

В частности, отсюда получается

**Теорема 4.** *Целая периодическая функция  $f(z)$  представляется рядом Фурье (8), сходящимся для всех значений  $z$ .*

Далее отметим следующие простые теоремы:

**Теорема 5.** *Если целая периодическая функция ограничена в полосе периодов, то она постоянна.*

Следует непосредственно из теоремы Лиувилля, ибо из ограниченности функции в полосе периодов вытекает ее ограниченность во всей плоскости.

**Теорема 6.** *Если целая периодическая функция  $f(z)$  при  $z$ , стремящемся к концам полосы периодов, стремится к конечным или бесконечным пределам \*), то она является тригонометрическим многочленом*

$$f(z) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega z}. \quad (9)$$

Действительно, в наших условиях точки  $\xi = 0$  и  $\xi = \infty$  являются самое большее полюсами функции  $\varphi(\xi)$ , следовательно, разложение (8) может содержать лишь конечное число отличных от нуля членов.

Справедлива и более общая

**Теорема 7.** *Если мероморфная периодическая функция  $f(z)$  стремится к конечным или бесконечным пределам при  $z$ , стремящемся к концам полосы периодов, то она является отношением двух тригонометрических многочленов.*

\*) По теореме 5 эти пределы не могут быть оба конечными, если  $f(z) \neq \text{const.}$



**101. Общие свойства эллиптических функций.** Пусть  $f(z)$  — произвольная эллиптическая, т. е. двоякопериодическая мероморфная функция с основными периодами  $\tau$  и  $\tau'$ . Множество всех периодов  $\hat{f}(z)$  имеет вид:

$$T = n\tau + n'\tau' \quad (n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1)$$

Мы условимся любые две точки  $z_1$  и  $z_2$ , отличающиеся на некоторый период:  $z_1 - z_2 = T$ , называть *конгруэнтными* и записывать это в виде

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{\tau, \tau'} \quad (2)$$

(читается « $z_1$  сравнимо с  $z_2$  по модулям  $\tau$  и  $\tau'$ »). Множество  $M_1$  и множество  $M_2$ , состоящее из всех точек, конгруэнтных точкам  $M_1$  (при данном  $T$ ), мы также будем называть *конгруэнтными*.

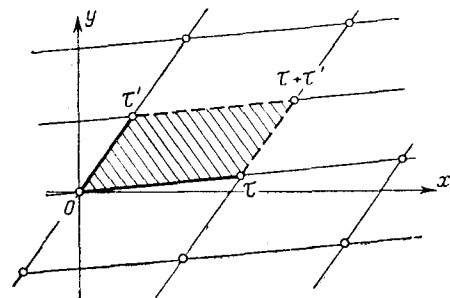


Рис. 217.

Отношение  $\tau'/\tau$  не может быть действительным (см. предыдущий пункт), следовательно, точки  $O, \tau, \tau + \tau'$  и  $\tau'$  образуют невырожденный параллелограмм (рис. 217). Это параллелограмм, а также все параллелограммы, конгруэнтные ему, мы будем называть *параллелограммами периодов*. Для

конкретности мы предположим, что вершины  $O, \tau, \tau + \tau', \tau'$  расположены в порядке положительного обхода границы параллелограмма, — для этого, очевидно, достаточно предположить, что

$$\operatorname{Im} \frac{\tau'}{\tau} > 0.$$

Кроме того, мы условимся причислять к этому параллелограмму стороны  $O\tau, O\tau'$  без вершин  $\tau$  и  $\tau'$  и не причислять остальную часть границы и то же самое будем делать для всех конгруэнтных параллелограммов. Тогда параллелограммы периодов не будут содержать никакой пары конгруэнтных точек и для каждой точки  $z$  плоскости в любом параллелограмме найдется конгруэнтная ей точка.

Перечислим основные свойства эллиптических функций.

**Теорема 1.** Сумма, разность, произведение и частное двух эллиптических функций с одними и теми же периодами  $\tau$  и  $\tau'$  и вообще любая рациональная комбинация  $R(f_1, f_2, \dots, f_n)$  таких функций также является эллиптической функцией с периодами  $\tau$  и  $\tau'$ . То же верно и для производной эллиптической функции.

Доказательство теоремы следует из того, что и свойство мероморфности и свойство периодичности при указанных операциях не нарушаются.

**Теорема 2 (Лиувилль).** *Если двойкопериодическая функция является целой, то она постоянна.*

Действительно, наша функция должна быть ограниченной в параллелограмме периодов, но тогда она ограничена и во всей плоскости и, следовательно, постоянна.

Таким образом, в параллелограмме периодов (дополненном так, как указано выше) должен лежать хотя бы один полюс  $f(z)$ . В силу мероморфности  $f(z)$  общее число полюсов, принадлежащих параллелограмму периодов, должно быть конечным; это число (причем каждый полюс считается столько раз, какова его кратность) называется *порядком эллиптической функции*.

**Теорема 3 (Лиувилль).** *Сумма вычетов эллиптической функции  $f(z)$  относительно всех ее полюсов, принадлежащих параллелограмму периодов, равна нулю.*

Для доказательства достаточно выяснить, что интеграл по любому замкнутому контуру  $C$ , содержащему все полюсы, принадлежащие параллелограмму периодов, и только эти полюсы, равен 0. Если на контуре параллелограмма нет полюсов, то в качестве  $C$  можно принять этот контур. В противном случае в качестве  $C$  мы выбираем контур, получающийся из контура параллелограмма параллельным сдвигом вершины 0 в точку  $z_0$  так, как это указано на рис. 218 (на этом рисунке полюсы отмечены звездочками; напомним, что к параллелограмму не причисляются стороны, изображенные пунктиром). Имеем:

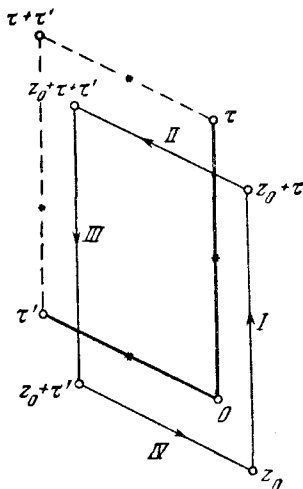


Рис. 218.

$$\int_C f(z) dz = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}, \quad (3)$$

но в первом и третьем интегралах элементы интегрирования  $f(z)dz$ , соответствующие конгруэнтным точкам, отличаются лишь знаком, ибо значения функции  $f(z)$  в конгруэнтных точках равны, а  $dz$  отличаются знаком, поэтому сумма первого и третьего интегралов равна нулю. То же самое можно сказать о сумме второго и четвертого интегралов. Теорема доказана

В качестве следствия отметим, что *не существует эллиптической функции первого порядка*. В самом деле, по определению такая функция должна иметь в параллелограмме периодов один полюс первого порядка и, следовательно, интеграл (3) должен быть отличен от нуля. Из теоремы 2 следует также, что *не существует эллиптической функции нулевого порядка*.

**Теорема 4 (Лиувилль).** *Эллиптическая функция в параллелограмме периодов принимает каждое комплексное значение  $a$  одинаковое число раз<sup>\*</sup>), равное порядку эллиптической функции.*

Для  $a = \infty$  утверждение следует непосредственно из определения порядка эллиптической функции. Для  $a \neq \infty$  вспомним, что по принципу аргумента п. 23 разность между числом  $a$ -точек и числом полюсов функции  $f(z)$  в параллелограмме периодов равна

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) dz}{f(z) - a}, \quad (4)$$

где  $C$  — контур, введенный в предыдущей теореме (нужно только еще предположить, что он не проходит через  $a$ -точки функции  $f(z)$ ). Функция  $\frac{f'(z)}{f(z) - a}$  по теореме 1 является эллиптической функцией с теми же периодами  $\tau$  и  $\tau'$ , что и  $f(z)$ , поэтому по теореме 3 интеграл (4) равен 0, а это и доказывает утверждение.

**Теорема 5.** *Сумма всех точек  $z$  параллелограмма периодов, в которых  $f(z)$  принимает любое фиксированное значение  $a$ , конгруэнтна сумме всех полюсов из параллелограмма периодов.*

Для  $a = \infty$  утверждение очевидно. Для  $a \neq \infty$  разность между суммой всех  $a$ -точек и суммой всех полюсов из параллелограмма периодов равна (п. 23)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z) dz}{f(z) - a}, \quad (5)$$

где  $C$  — контур, применявшийся в теореме 4. Представим

$$\int_C z \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$$

(рис. 218) и убедимся в том, что сумма первого и третьего интегралов, так же как сумма второго и четвертого, равны некоторым периодам  $f(z)$  — это и будет доказывать теорему. Но,

<sup>\*</sup>) Каждая точка  $z$ , в которой  $f(z) = a$ , засчитывается столько раз, какова кратность этой точки.

действительно, пусть  $z$  и  $\xi$  будут переменные точки отрезков  $I$  и  $III$ ; тогда можно считать  $\xi = z + \tau'$ , и так как  $\tau'$  является периодом функции  $\frac{f'(z)}{f(z) - a}$  и направления интегрирования вдоль отрезков  $I$  и  $III$  противоположны, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_I z \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} + \frac{1}{2\pi i} \int_{III} \xi \frac{f'(\xi) d\xi}{f(\xi) - a} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_I (z - \xi) \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = - \frac{\tau'}{2\pi i} \text{Ln} \frac{f(z_0 + \tau) - a}{f(z_0) - a} = \tau' n', \end{aligned}$$

где  $n'$  — целое число ( $\tau$  является периодом  $f(z)$ , следовательно, дробь, стоящая под знаком  $\text{Ln}$ , равна 1 и ее логарифм можно считать равным  $-2n'\pi i$ ). Совершенно аналогично получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{II} + \frac{1}{2\pi i} \int_{IV} = n\tau,$$

где  $n$  — также целое число. Таким образом, интеграл (5) равен  $n\tau + n'\tau' = T$ , и теорема доказана.

**Теорема 6.** *Между любыми двумя эллиптическими функциями  $f(z)$  и  $g(z)$  с одинаковыми периодами  $\tau$  и  $\tau'$  существует алгебраическое соотношение вида*

$$P[f(z), g(z)] = 0, \quad (6)$$

где  $P(Z, W)$  — многочлен относительно  $Z$  и  $W$  с постоянными коэффициентами.

В самом деле, обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_m$  все точки параллелограмма периодов, в которых одна из функций  $f(z)$  и  $g(z)$  или обе одновременно имеют полюсы. Пусть  $p_h$  будет наибольший из порядков полюсов этих функций в точке  $a_h$  и  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_m$ . С другой стороны, пусть  $Q(Z, W)$  будет некоторый многочлен степени  $n$  относительно своих аргументов  $Z$  и  $W$ . Если заменить в нем  $Z = f(z)$  и  $W = g(w)$ , то по теореме 1 мы получим некоторую эллиптическую функцию  $F(z)$  с теми же периодами  $\tau$  и  $\tau'$ , что и данные функции. Покажем, что многочлен  $Q$  можно выбрать так, что эта функция сводится к тождественной постоянной  $C$ ; тогда теорема будет доказана, ибо в качестве многочлена  $P$  в формуле (6) можно выбрать многочлен  $Q - C$ .

Функция  $F(z)$  может иметь полюсы лишь в точках  $a_h$  (и конгруэнтных им), и для того, чтобы она была постоянной, по теореме 2 достаточно равенство нулю ее главных частей во всех точках  $a_h$ . Но для  $F(z)$  точка  $a_h$  является полюсом порядка не

выше  $np_k$ , следовательно, условие равенства нулю главных частей  $F(z)$  во всех точках  $a_k$  сводится не более чем к  $n(p_1 + p_2 + \dots + p_m) = np$  уравнениям, линейным и однородным относительно коэффициентов многочлена  $Q$ . Этот многочлен имеет всего  $n(n+3)/2$  коэффициентов (свободный член мы не учитываем), следовательно, выбирая  $n+3 > 2p$ , мы получим, что коэффициентов будет больше, чем уравнений. Тогда уравнения будут иметь хотя бы одну систему решений, отличную от нуля, и многочлен  $Q$  с коэффициентами из этой системы, будет искомым. Теорема доказана.

Так как производная  $f'(z)$  является эллиптической функцией с теми же периодами, что и  $f(z)$ , то из теоремы 6 непосредственно вытекает

*Теорема 7. Любая эллиптическая функция  $f(z)$  удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению вида*

$$P[f(z), f'(z)] = 0, \quad (7)$$

где  $P(Z, W)$  — многочлен относительно своих аргументов.

В качестве примера проиллюстрируем доказанные теоремы на эллиптической функции второго порядка, имеющей в параллелограмме периодов два простых полюса (эллиптические функции с одним полюсом второго порядка мы рассмотрим в п. 103).

Функции второго порядка играют особую роль в теории эллиптических функций, ибо как оказывается, любую эллиптическую функцию можно выразить рационально через эллиптическую функцию второго порядка и ее производную (доказательство мы опускаем). Обозначим полюсы эллиптической функции второго порядка  $f(z)$  через  $a_1$  и  $a_2$ ; не нарушая общности, можно предположить, что  $a_1 + a_2 = 0$ , ибо сдвигом плоскости  $z$  (заменой аргумента  $z$  через  $z + c$ ) всегда можно достичь того, чтобы начало координат попало в середину отрезка  $a_1 a_2$ . В качестве параллелограмма периодов мы выберем параллелограмм с центром в точке  $z = 0$ . Точки  $a_1$  и  $a_2$  не могут лежать на границе этого параллелограмма, ибо тогда они должны были бы лежать на противоположных сторонах, что невозможно (параллелограмм содержит лишь по одной из каждой пары противоположных сторон). По теореме 4 функция  $f(z)$  в параллелограмме периодов принимает любое значение дважды, именно, в точках  $z_1$  и  $z_2$ , сумма которых по теореме 5 конгруэнтна сумме полюсов, т. е. нулю:

$$z_1 + z_2 \equiv 0 \pmod{\tau, \tau'}.$$

Но так как сумма двух точек, лежащих в параллелограмме периодов, не может быть конгруэнтной 0 и не равной 0, то

$z_1 + z_2 = 0$ . Иными словами, для любого  $z$  справедливо соотношение  $f(-z) = f(z)$ , т. е.  $f(z)$  является четной функцией.

Отсюда следует, что производная нашей функции нечетна:  $f'(-z) = -f'(z)$  и так как  $f'(z)$  правильна всюду в параллелограмме периодов, кроме точек  $a_1$  и  $a_2$ , где она имеет полюсы второго порядка, то она является эллиптической функцией четвертого порядка. Из нечетности и непрерывности  $f'(z)$  в точке  $z = 0$  следует, что она равна там 0. Далее, имеем:

$$f'\left(\frac{\tau}{2}\right) = -f'\left(-\frac{\tau}{2}\right) = -f'\left(-\frac{\tau}{2} + \tau\right) = -f'\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

откуда видно, что  $z = \tau/2$  также является нулем  $f'(z)$ . Аналогично находим еще два нуля  $f'(z)$ : точки  $z = \tau'/2$  и  $(\tau + \tau')/2$ . Таким образом, мы знаем все четыре нуля в параллелограмме периодов.

По теореме 7 между  $f(z)$  и  $f'(z)$  существует алгебраическое соотношение

$$P[f(z), f'(z)] = 0. \quad (7)$$

Полагая  $f(z) = Z$ ,  $f'(z) = W$ , мы можем высказать следующие утверждения: а) каждому значению  $Z$  уравнение (7) ставит в соответствие два значения  $W$ ; б) эти значения отличаются лишь знаком; в) каждому  $W$  соответствует четыре значения  $Z$ ; г) функции  $Z$  и  $W$  одновременно обращаются в бесконечность.

Действительно, для проверки а) и б) заметим, что так как  $Z = f(z)$  — четная функция второго порядка, то каждому  $Z$  соответствуют два значения  $z$ , отличающиеся лишь знаком, а так как  $W = f'(z)$  — нечетная функция, то соответствующие значения  $W$  также отличаются лишь знаком. Утверждение в) проверяется так же, как а), а утверждение г) справедливо, так как полюсы  $f(z)$  и  $f'(z)$  совпадают.

Из а) и в) следует, что многочлен в левой части (7) имеет вид:

$$P(Z, W) = A_0(Z)W^2 + A_1(Z)W + A_2(Z),$$

где  $A_k(z)$  — многочлены степени не выше четвертой, из б) можно заключить, что  $A_1(Z) \equiv 0$ , и, наконец, из г) — что  $A_0(Z) = \text{const}$  (в противном случае из уравнения  $W^2 = -A_2/A_0$ , к которому сводится (7), вытекает, что в точках  $z$ , которые обращают в нуль  $A_0(Z)$ , непременно  $W = \infty$ ).

Таким образом, уравнение (7) сводится к виду  $W^2 = cA_2(Z)$ , где  $c$  — некоторая постоянная и  $A_2$  — многочлен четвертой степени. Так как нули последнего совпадают с нулями  $W$ , которые мы знаем, то окончательно получаем дифференциальное

уравнение вида

$$[f'(z)]^2 = c [f(z) - f(0)] \left[ f(z) - f\left(\frac{\tau}{2}\right) \right] \left[ f(z) - f\left(\frac{\tau'}{2}\right) \right] \left[ f(z) - f\left(\frac{\tau + \tau'}{2}\right) \right]. \quad (8)$$

Иначе полученный результат можно выразить так: функция  $Z = f(z)$  является обращением интеграла:

$$z = \int_{w_0}^w \frac{dw}{V c (w - w_1) (w - w_2) (w - w_3) (w - w_4)}, \quad (9)$$

где  $c$  и  $w_0$  — постоянные и

$$w_1 = f(0), \quad w_2 = f\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad w_3 = f\left(\frac{\tau'}{2}\right), \quad w_4 = f\left(\frac{\tau + \tau'}{2}\right). \quad (10)$$

Интеграл (9) носит название *эллиптического интеграла*. С частным случаем такого интеграла

$$z = \int_0^w \frac{dw}{V (1 - w^2) (1 - k^2 w^2)} \quad (11)$$

мы уже встречались в п. 39, когда рассматривали конформное отображение верхней полуплоскости на прямоугольник. Функцию, обращающую этот интеграл, мы обозначили

$$w = \operatorname{sn} z \quad (12)$$

и называли *эллиптическим синусом*. Она является одной из эллиптических функций Якоби, к изучению которых мы и переходим.

**102. Эллиптические интегралы и функции Якоби.** *Эллиптическим интегралом* называется вообще интеграл вида

$$\int R[w, \sqrt{P(w)}] dw, \quad (1)$$

где  $R$  — рациональная функция своих аргументов и  $P(w)$  — многочлен третьей или четвертой степени. В отдельных случаях этот интеграл может выражаться через элементарные функции, как, например, интеграл

$$\int \frac{w dw}{V w^4 + 1} = \frac{1}{2} \ln(w^2 + \sqrt{w^4 + 1}) + C.$$

Тогда его называют *псевдоэллиптическим*.

Вообще же интеграл (1) не выражается в элементарных функциях. Можно показать\*), что с помощью элементарных под-

\*) См., например, Фихтенгольц, т. 2, стр. 103—105.

становок и преобразований эллиптический интеграл преобразуется к одной из трех *канонических форм*

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dw}{V(1-w^2)(1-k^2w^2)}, \quad \int V \frac{1-k^2w^2}{1-w^2} dw, \\ \int \frac{dw}{(1+l^2w^2)V(1-w^2)(1-k^2w^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $k$  и  $l$  — постоянные. Интегралы (2) называют эллиптическими интегралами *в форме Лежандра*, соответственно, первого, второго и третьего рода. Число  $k$  называется *модулем* интеграла.

Подстановка

$$w = \sin \varphi \quad (3)$$

приводит интегралы (2) к тригонометрической форме

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{V1-k^2\sin^2\varphi}, \quad \int V1-k^2\sin^2\varphi d\varphi, \\ \int \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)V1-k^2\sin^2\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Аргумент  $\varphi$  называется *амплитудой* эллиптического интеграла. Для интегралов в форме (4) приняты следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{V1-k^2\sin^2\varphi}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi V1-k^2\sin^2\varphi d\varphi, \\ \Pi(k, l, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)V1-k^2\sin^2\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Особенно часто встречаются интегралы с амплитудой  $\varphi = \pi/2$ ; они называются *полными* и для первых двух из них приняты специальные обозначения

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k), \quad E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k). \quad (6)$$

Часто вводят еще один аргумент  $\alpha$  из соотношения

$$\sin \alpha = k, \quad (7)$$

который называется *модулярным углом*. Эллиптические интегралы первого и второго рода, рассматриваемые как функции амплитуды  $\varphi$  и модулярного угла  $\alpha$ , табулированы. Пятизначные их таблицы, составленные через  $1^\circ$  для  $\varphi$  и через  $5^\circ$  для  $\alpha$ , приведены в сборнике Янке и Эмде [14] (стр. 162—171); там же



имеются указания о более подробных таблицах и таблицах полных эллиптических интегралов как функции  $\alpha$  через  $1^\circ$  (стр. 177) и как функции  $k^2$  через 0,01 от 0 до 1 (стр. 180 и 182).

На рис. 219 мы приводим также рельеф над плоскостью  $k^2 = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  той ветви функции  $K = K(\lambda)$ , которая равна  $\pi/2$  при  $\lambda = 0$  и терпит разрыв на отрезке  $(1, \infty)$  оси  $\lambda_1$ . Из рисунка видно, что функция обращается в бесконечность при  $\lambda = 1$ , где она имеет точку ветвления. На рельефе изображены линии постоянного модуля (через 0,2) и аргумента (через 0,01 прямого угла), вертикальной стрелкой отмечено положение начала координат.

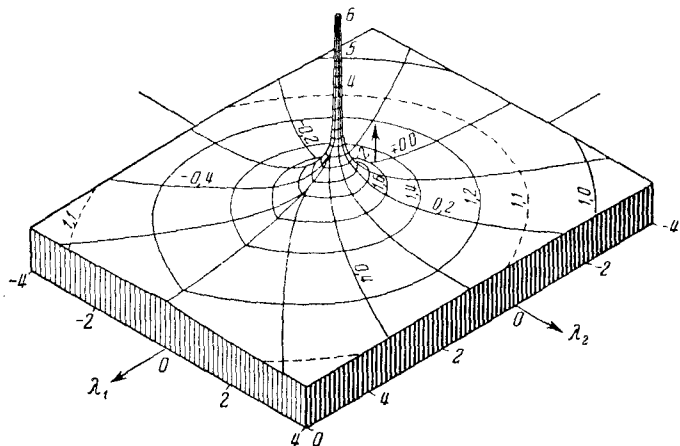


Рис. 219.

Остановимся несколько подробнее на свойствах эллиптического интеграла первого рода в форме (2), т. е. рассматриваемого как функция комплексного переменного  $w = \sin \varphi$ :

$$z = \int_0^w \frac{dw}{V(1-w^2)(1-k^2w^2)}. \quad (8)$$

В п. 39 мы уже убедились, в том, что обращение этого интеграла, т. е. функция Якоби — *эллиптический синус*

$$w = \operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z, k) \quad (9)$$

является двоякопериодической мероморфной, т. е. эллиптической функцией с основными периодами

$$4 \int_0^1 \frac{dt}{V(1-t^2)(1-k^2t^2)} = 4K, \quad 2i \int_1^{1/k} \frac{dt}{V(t^2-1)(1-k^2t^2)} = 2iK', \quad (10)$$

где  $K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$  и  $K' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$  — полные эллиптические интегралы, соответствующие модулю  $k$  и так называемому *дополнительному модулю*

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \cos \alpha \quad (11)$$

(чтобы убедиться в этом, достаточно в первом интеграле заменить  $t = \sin \varphi$  и тогда он перейдет в  $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ ; второй же интеграл после

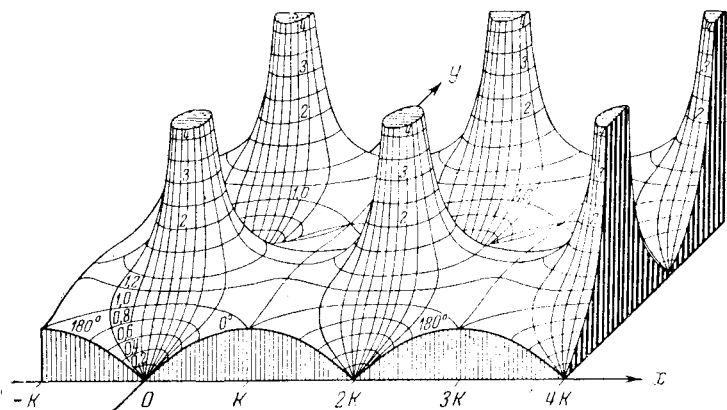


Рис. 220.

подстановки  $t = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \tau^2}}$  переходит в  $\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k'^2 \tau^2)}}$ .

Мы нашли также следующие значения  $\operatorname{sn} z$  в параллелограмме периодов:

$\begin{array}{c} x \\ y \end{array}$	0	$K$	$2K$	$3K$
0	0	1	0	-1
$K'$	$\infty$	$1/k$	$\infty$	$-1/k$

(12)

и убедились, что она является нечетной функцией:

$$\operatorname{sn}(-z) = -\operatorname{sn} z. \quad (13)$$

На рис. 220 мы приводим рельеф функции  $\operatorname{sn} z$  для  $k = 0.8$ . Из него видно, что полюсы этой функции лежат в точках

$z = 2nK + (2n' + 1)K'i$  и нули — в точках  $z = 2nK + 2n'K'$ , где  $n$  и  $n'$  — произвольные целые числа (это находится в полном соответствии с тем, что мы говорили в п. 39).

Из двоякопериодичности функции (9) следует, что обратная функция  $z = F(w, k)$  — эллиптический интеграл первого рода, рассматриваемый в зависимости от  $w$ , — является бесконечно-значной. Любое ее значение получается из какого-либо одного добавления периода  $T = 4nK + 2in'K'$ :

$$\int_0^w \frac{dw}{V(1-w^2)(1-k^2w^2)} = \int_0^{L_0} \frac{dw}{V(1-w^2)(1-k^2w^2)} + 4nK + 2in'K'. \quad (14)$$

Здесь  $L$  означает произвольный путь, соединяющий точки 0 и  $w$ , а  $L_0$  — какой-либо фиксированный путь, скажем, прямолинейный отрезок (ср. аналогичное свойство  $\text{Ip } w$  в п. 8). На

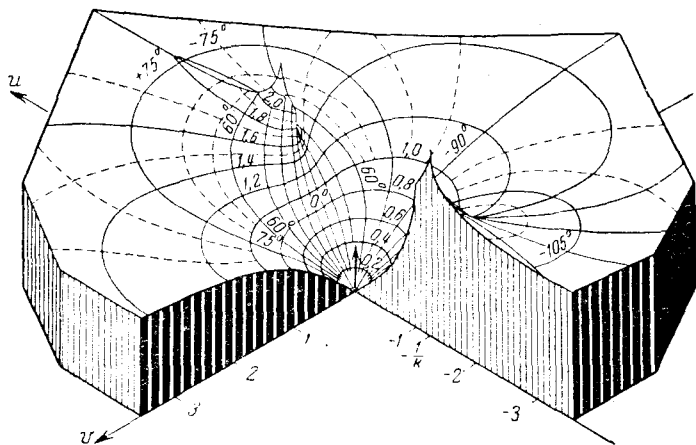


Рис. 221.

рис. 221 изображен рельеф одной из ветвей эллиптического интеграла  $F(w, k)$  при  $k = 0,8$ . На нем ясно видны точки ветвления, лежащие над точками  $w = \pm 1$  и  $w = \pm \frac{1}{k}$  плоскости  $w$ .

Если ввести, как раньше, переменную  $\varphi$  (амплитуду), так что  $w = \sin \varphi$ , то интеграл (8) перейдет в интеграл

$$z = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{V1 - k^2 \sin^2 \varphi}; \quad (15)$$

обратная функция — амплитуда эллиптического интеграла  $z$  — имеет специальное обозначение

$$\varphi = \operatorname{am} z. \quad (16)$$

Эллиптический синус Якоби можно будет тогда представить в виде

$$w = \operatorname{sn} z = \sin \operatorname{am} z; \quad (17)$$

и называть *синусом амплитуды*. Это название и обозначение ввел сам Якоби; в настоящее время более принято обозначение  $\operatorname{sn}$ . Якоби рассматривал также функции *косинус амплитуды* и *дельта амплитуды*

$$\begin{aligned} \cos \operatorname{am} z &= \sqrt{1 - w^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, \\ \Delta \operatorname{am} z &= \sqrt{1 - k^2 w^2} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}, \end{aligned} \quad (18)$$

в настоящее время для этих функций чаще употребляют обозначения

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z} \quad (19)$$

(читаются по буквам «це эн  $z$ » и «де эн  $z$ »). На рис. 222 мы приводим графики  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  и  $\operatorname{dn}$  для действительных значений

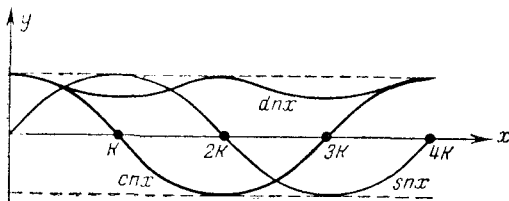


Рис. 222.

аргумента  $z=x$  и небольших положительных  $k$ . Заметим, что при  $k=0$  из формулы (8) вытекает, что  $z = \arcsin w$ , следовательно,  $\operatorname{sn}(z, 0) = \sin z$ ; тогда формулы (19) дают  $\operatorname{cn}(z, 0) = \cos z$ ,  $\operatorname{dn}(z, 0) = 1$ .

Можно было бы доказать, что функции  $\operatorname{sn} z$  и  $\operatorname{dn} z$ , как и  $\operatorname{sn} z$ , являются эллиптическими функциями второго порядка и что их основные периоды, соответственно, равны  $4K$ ,  $2K + 2K'i$  (для  $\operatorname{sn}$ ) и  $2K$ ,  $4K'i$  (для  $\operatorname{dn}$ )\*. Здесь мы приведем лишь формулы дифференцирования и теоремы сложения для эллиптических функций Якоби, из которых ясно видна аналогия между ними и обычными тригонометрическими функциями.

\*) Доказательство см. А. И. Маркушевич, стр. 598.

Для вывода первой формулы дифференцирования мы от-  
правляемся от соотношения (8), из которого получаем:

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$

или, подставляя  $w = \operatorname{sn} z$ ,

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \cdot \operatorname{dn} z. \quad (20)$$

Для получения других формул дифференцируем соотношения

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 z + \operatorname{dn}^2 z = 1, \quad (21)$$

которые непосредственно следуют из равенств (19); тогда полу-  
чаем:

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \quad \frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z. \quad (22)$$

Заметим, что при  $k = 0$  формула (20) и первая из формул (22) обращаются в известные формулы дифференцирования  $\sin z$  и  $\cos z$ . Отметим еще, что из формул (22), если выразить в них с помощью (21)  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{dn}$  через  $\operatorname{cn}$  и, соответственно,  $\operatorname{sn}$  и  $\operatorname{cn}$  через  $\operatorname{dn}$ , получаются следующие дифференциальные уравнения для  $w = \operatorname{sn} z$  и  $w = \operatorname{dn} z$ :

$$\frac{dw}{dz} = -\sqrt{(1-w^2)(k'^2 + k^2w^2)}, \quad \frac{dw}{dz} = -\sqrt{(1-w^2)(w^2 - k'^2)}, \quad (23)$$

где  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  — дополнительный модуль. Учитывая, что  $\operatorname{sn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1$  (это следует из (19) и равенства  $\operatorname{sn} 0 = 0$ ) и что  $\operatorname{sn} z$  и  $\operatorname{dn} z$  — четные функции, мы видим из формулы (23), что эти функции обращают, соответственно, интегралы

$$z = \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k'^2 + k^2w^2)}}; \quad z = \int_1^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(w^2 - k'^2)}}. \quad (24)$$

Для вывода теорем сложения мы воспользуемся методом, идея которого восходит еще к Эйлеру и который послужил первым толчком для исследования эллиптических интегралов. Следуя Эйлеру, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} + \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} = 0.$$

Найдя независимым образом два его интеграла и сравнивая эти интегралы, мы получим искомое соотношение, выражающее тео-

рему сложения. Первый из таких интегралов получается непосредственно

$$\int_0^w \frac{d\omega}{V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} + \int_0^w \frac{d\omega}{V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} = C. \quad (25)$$

Для получения второго интеграла заменим наше дифференциальное уравнение системой

$$\frac{d\omega}{du} = V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2), \quad \frac{d\omega}{du} = -V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2), \quad (26)$$

где  $u$  — вспомогательное переменное. Дифференцируя эти уравнения, находим:

$$\frac{d^2\omega}{du^2} = \omega(2k^2\omega^2 - 1 - k^2), \quad \frac{d^2\omega}{du^2} = \omega(2k^2\omega^2 - 1 - k^2),$$

откуда

$$\omega \frac{d^2\omega}{du^2} - \omega \frac{d^2\omega}{du^2} = \frac{d}{du} \left( \omega \frac{d\omega}{du} - \omega \frac{d\omega}{du} \right) = 2k^2\omega\omega(\omega^2 - \omega^2).$$

С другой стороны, из формул (26) находим:

$$\omega^2 \left( \frac{d\omega}{du} \right)^2 - \omega^2 \left( \frac{d\omega}{du} \right)^2 = (\omega^2 - \omega^2)(1 - k^2\omega^2\omega^2),$$

и, деля на это уравнение предыдущее, получаем:

$$\frac{\frac{d}{du} \left( \omega \frac{d\omega}{du} - \omega \frac{d\omega}{du} \right)}{\omega \frac{d\omega}{du} - \omega \frac{d\omega}{du}} = \frac{2k^2\omega\omega \left( \omega \frac{d\omega}{du} + \omega \frac{d\omega}{du} \right)}{k^2\omega^2\omega^2 - 1},$$

или

$$\frac{d}{du} \ln \left( \omega \frac{d\omega}{du} - \omega \frac{d\omega}{du} \right) = \frac{d}{du} \ln (k^2\omega^2\omega^2 - 1).$$

Отсюда  $\omega \frac{d\omega}{du} - \omega \frac{d\omega}{du} = C'(1 - k^2\omega^2\omega^2)$  и, пользуясь формулой (26), находим второй интеграл

$$\frac{\omega V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2) + \omega V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}{1 - k^2\omega^2\omega^2} = C_1. \quad (27)$$

Обозначая

$$\int_0^w \frac{d\omega}{V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} = z, \quad \int_0^w \frac{d\omega}{V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} = \xi,$$

откуда  $\omega = \operatorname{sn} z$ ,  $\omega = \operatorname{sn} \xi$ , и подставляя это в формулы (25) и (27), находим интегралы нашего дифференциального уравнения в виде

$$z + \xi = C, \quad \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi + \operatorname{sn} \xi \operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \xi} = C_1. \quad (28)$$

Так как эти интегралы по теореме единственности решения дифференциального уравнения должны вытекать один из другого, то  $C_1$  должна быть функцией  $C$ , пусть  $C_1 = \varphi(C) = \varphi(z + \xi)$ . Подставим это соотношение во второе из уравнений (28) и для нахождения вида функции  $\varphi$  подставим еще  $\xi = 0$ . Получим  $\varphi(z) = \operatorname{sn} z$ , следовательно, в окончательной форме теорема сложения запишется так:

$$\operatorname{sn}(z + \xi) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} \xi \operatorname{dn} \xi + \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \xi}. \quad (29)$$

При  $k = 0$  эта формула будет совпадать с известной теоремой сложения для синуса.

Аналогичные формулы справедливы и для других функций Якоби, так

$$\operatorname{cn}(z + \xi) = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{cn} \xi - \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \xi \operatorname{dn} z \operatorname{dn} \xi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \xi}, \quad (30)$$

$$\operatorname{dn}(z + \xi) = \frac{\operatorname{dn} z \operatorname{dn} \xi - k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{sn} \xi \operatorname{cn} z \operatorname{cn} \xi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 \xi}. \quad (31)$$

Из этих основных формул сложения получаются другие, аналогичные известным формулам тригонометрии. Их можно найти, например, в справочнике А. М. Журавского [13], стр. 76—77.

В заключение заметим, что так как функции Якоби зависят лишь от одного (комплексного) параметра  $k$ , то их периоды не могут выбираться произвольно. Оказывается, можно задавать произвольно лишь отношение

$$\kappa = \frac{K'}{K}, \quad (32)$$

или, что то же самое, величину

$$q = e^{-\pi \kappa} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}. \quad (33)$$

Тогда величины  $K$  и  $k$  могут быть определены по формулам \*)

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2} \right\}, \quad k = 4 \left\{ \frac{\sum_{v=0}^{\infty} q^{\left(v + \frac{1}{2}\right)^2}}{1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2}} \right\}^2. \quad (34)$$

---

\*) Ряды (34) сходятся, ибо по условию (1) п. 79  $\operatorname{Im} \frac{\tau'}{\tau} = \operatorname{Im} \frac{K'i}{2K} = \operatorname{Re} \frac{K'}{K} > 0$ , следовательно,  $|q| < 1$ . Вывод формул (34) см., например, в книге Н. И. Ахизера [11], стр. 94—95.

Приведем график зависимости  $q$  от  $k^2$  на интервале  $(0, 1)$  (рис. 223). На нем сплошными линиями изображены графики  $q$  и  $10q$  и пунктиром — график  $q$  на интервале  $(0,999; 1)$ ; для последнего графика значения  $k^2$  надо брать на верхней шкале.

В сборнике Янке и Эмде имеются пятизначные таблицы для десятичного логарифма  $q$  в зависимости от модулярного угла  $\alpha$

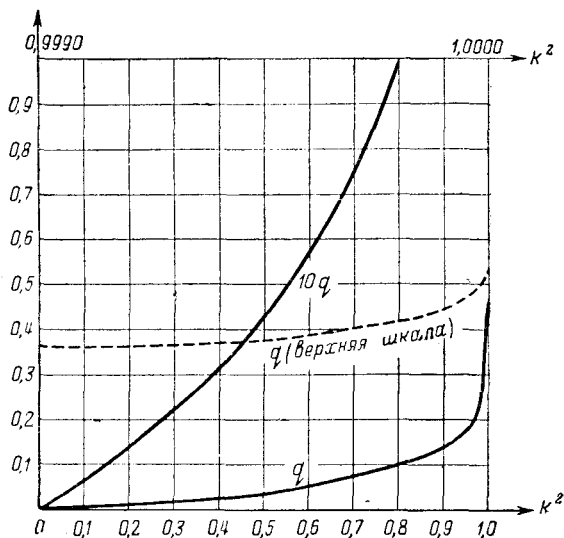


Рис. 223.

для  $\alpha$ , изменяющегося от 0 до  $90^\circ$  с интервалом в  $5'$  (стр. 147—149). Из них можно найти  $k$  по данному  $q$  и тогда по таблицам полных эллиптических интегралов найдется  $K$  — так можно избежать применения формул (34).

**103. Функции Вейерштрасса. Тэта-функции.** 1) Функции Вейерштрасса  $\wp$  и  $\wp'$ . Функции Якоби являются эллиптическими функциями второго порядка, имеющими в параллелограмме периодов по два простых полюса. Вейерштрасс построил эллиптические функции второго порядка, имеющие в параллелограмме периодов один кратный полюс. В отличие от функций Якоби эти функции зависят от двух комплексных параметров и периоды  $\tau$ ,  $\tau'$  можно задавать произвольно с одним лишь общим условием

$$\operatorname{Im} \frac{\tau'}{\tau} > 0. \quad (1)$$

Свойства функций Вейерштрасса аналогичны свойствам функций Якоби. Заметим, что в теоретических рассмотрениях функции



Вейерштрасса почти всегда оказываются более удобными, однако в практических задачах чаще встречаются функции Якоби.

Докажем одно вспомогательное предложение.

Лемма. *Каковы бы ни были комплексные числа  $\tau$  и  $\tau'$ , удовлетворяющие условию (1), ряд*

$$\sum'_{n, n'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n\tau + n'\tau')^3}, \quad (2)$$

в котором суммирование распространяется на все целые значения  $n$  и  $n'$ , кроме  $n = n' = 0$ , абсолютно сходится.

Точки  $T = n\tau + n'\tau'$  лежат в вершинах сети параллелограммов. Рассмотрим сначала параллелограмм  $\Pi_1$ , на котором лежит 8 точек  $T$  (рис. 224). Обозначая через  $l$  кратчайшее расстояние

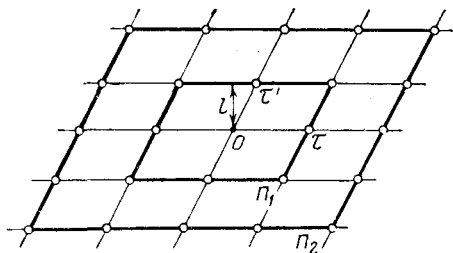


Рис. 224.

от  $z = 0$  до точек  $\Pi_1$ , заметим, что для каждой из этих 8 точек  $\left| \frac{1}{T^3} \right| \leq \frac{1}{l^3}$ , так что сумма, на них распространенная, удовлетворяет неравенству

$$\sum'_{\Pi_1} \frac{1}{|T|^3} \leq \frac{8}{l^3}.$$

Аналогично на параллелограмме  $\Pi_2$  (рис. 224) лежит

$8 \cdot 2 = 16$  точек  $T$ , каждая из них удалена от начала не менее чем на  $2l$ , и сумма, на них распространенная,

$$\sum_{\Pi_2} \frac{1}{|T|^3} \leq \frac{8}{2^2 l^3}.$$

Вообще для параллелограмма  $\Pi_n$ , на котором лежит  $8n$  точек, удаленных от начала не менее чем на  $nl$ , имеем:

$$\sum_{\Pi_n} \frac{1}{|T|^3} \leq \frac{8}{n^2 l^3}.$$

Таким образом ряд (2) мажорируется сходящимся рядом

$\frac{8}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  и, следовательно, сходится абсолютно. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что ряд

$$f(z) = \sum_{n, n'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\tau - n'\tau')^3} = \sum \frac{1}{(z - T)^3} \quad (3)$$

сходится абсолютно и равномерно в любом круге  $|z| \leq R$ , если исключить из него конечное число членов, имеющих полюсы в этом круге (здесь значения  $n = n' = 0$  допускаются). Действительно, рассматривая лишь члены, для которых  $|T| > 2R$ , имеем  $\left| \frac{z}{T} \right| < \frac{1}{2}$  и

$$\left| \frac{1}{(z-T)^3} \right| \leq \frac{1}{\left(1 - \left| \frac{z}{T} \right| \right)^3} \cdot \frac{1}{|T|^3} < \frac{8}{|T|^3},$$

откуда по лемме и получаем наше утверждение.

Представляя  $f(z)$  для  $z$  из круга  $|z| < R$  в виде

$$f(z) = \sum_{|T| \leq R} \frac{1}{(z-T)^3} + \sum_{|T| > R} \frac{1}{(z-T)^3},$$

мы видим, что первая сумма есть рациональная функция, имеющая в каждой точке  $T$  полюс третьего порядка с главной частью  $\frac{1}{(z-T)^3}$ , а вторая, по только что доказанному, — функция, аналитическая в круге  $|z| \leq |R|$ . Таким образом, можно утверждать, что  $f(z)$  является мероморфной функцией.

Далее ясно, что  $f(z)$  будет иметь  $\tau$  и  $\tau'$  своими основными периодами. Действительно, например,

$$f(z + \tau) = \sum \frac{1}{[z - (T - \tau)]^3} = f(z),$$

ибо  $T - \tau$  снова является периодом и пробегает всю совокупность периодов вместе с  $T$ . Следовательно,  $\tau$  и, аналогично,  $\tau'$  являются периодами  $f(z)$ . Но если  $\tilde{T}$  — произвольный период  $f(z)$ , то из того, что  $T$  является полюсом  $f(z)$ , можно заключить, что и  $T + \tilde{T} = T'$  является полюсом. Отсюда  $\tilde{T} = T' - T$ , т. е. является целочисленной комбинацией  $\tau$  и  $\tau'$ ; следовательно,  $\tau$  и  $\tau'$  являются основными периодами  $f(z)$ .

Итак,  $f(z)$  является эллиптической функцией третьего порядка с заданными периодами  $\tau$  и  $\tau'$ . Кроме того, она нечетна; действительно,

$$f(-z) = \sum \frac{1}{(-z-T)^3} = - \sum \frac{1}{[z - (-T)]^3} = -f(z),$$

ибо  $-T$  пробегает всю совокупность периодов вместе с  $T$ .

Отправляясь от  $f(z)$ , с помощью интегрирования можно построить четную эллиптическую функцию второго порядка: если  $z_0$  и  $z$  — точки, отличные от периодов, то, интегрируя почленно ряд (3) вдоль кривой, соединяющей  $z_0$  с  $z$  и не содержащей периодов, получаем:

$$\varphi(z) = C + \int_{z_0}^z f(z) dz = C - \frac{1}{2} \sum \left[ \frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{(z_0-T)^2} \right].$$

Выделяя в сумме член с  $T = 0$ , мы перепишем последнюю формулу в виде

$$\wp(z) + \frac{1}{2z^2} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum' \left[ \frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{(z_0-T)^2} \right]. \quad (4)$$

Правая часть здесь правильна в точке  $z = 0$ , поэтому постоянную  $C$  можно выбрать так, чтобы значение этой правой части при  $z = 0$  равнялось нулю:

$$C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum' \left[ \frac{1}{T^2} - \frac{1}{(z_0-T)^2} \right] = 0. \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4), находим:

$$\wp(z) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum' \left[ \frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2} \right] \right\}.$$

Мероморфная функция, стоящая в фигурных скобках, называется функцией Вейерштрасса и обозначается символом  $\wp(z)$  (читается «пе от з»):

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left[ \frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2} \right]. \quad (6)$$

Ряд (6) сходится абсолютно, ибо модуль его общего члена для достаточно больших  $|T|$  оценивается неравенством

$$\left| \frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2} \right| = \left| \frac{(2T-z)z}{T^2(z-T)^2} \right| = \frac{2}{|T|^3} \frac{\left| 1 - \frac{z}{2T} \right|}{\left| 1 - \frac{z}{T} \right|^2} |z| < \frac{A|z|}{|T|^3},$$

где  $A$  — некоторая константа. Пользуясь этим, мы доказываем, что  $\wp(z)$  — четная функция:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{[z-(-T)]^2} - \frac{1}{(-T)^2} \right\} = \wp(z), \quad (7)$$

ибо замена  $T$  на  $-T$  сводится лишь к перестановке членов ряда.

Производная функция Вейерштрасса

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum' \frac{1}{(z-T)^3} = -2 \sum \frac{1}{(z-T)^3} = -2f(z)$$

лишь множителем отличается от функции  $f(z)$ , определяемой по (3), и, следовательно, является двоякопериодической с периодами  $\tau$  и  $\tau'$ . Таким образом,

$$\wp'(z + \tau) - \wp'(z) = 0, \quad \wp'(z + \tau') - \wp'(z) = 0,$$

и, интегрируя, получим:

$$\wp(z + \tau) - \wp(z) = C, \quad \wp(z + \tau') - \wp(z) = C_1.$$

Полагая здесь  $z = -\tau/2$  и  $z = -\tau'/2$  и пользуясь четностью  $\wp(z)$ , найдем  $C = C_1 = 0$ , откуда следует, что  $\wp(z)$  является эллиптической функцией с периодами  $\tau$  и  $\tau'$ . Она, очевидно, является функцией второго порядка и в каждом параллелограмме периодов имеет двойной полюс в точке  $T$  с главной частью  $1/(z - T)^2$ .

Производная  $\wp'(z)$  — нечетная эллиптическая функция третьего порядка. Как и в п. 101, мы найдем три ее нуля в точках  $z = \tau/2, \tau'/2, (\tau + \tau')/2$  (сумма нулей  $\tau + \tau' \equiv 0 \pmod{\tau, \tau'}$ , как и должно быть по теореме 5 п. 101). Следовательно, эти точки являются двукратными для  $\wp(z)$ , так что значения

$$\wp\left(\frac{\tau}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{\tau + \tau'}{2}\right) = e_2, \quad \wp\left(\frac{\tau'}{2}\right) = e_3 \quad (8)$$

(так же, как и значение  $\infty$ ) принимаются функцией  $\wp$  в слившихся точках. Другие значения  $\wp(z)$  принимает в двух различных точках, ибо в противном случае мы получили бы еще один

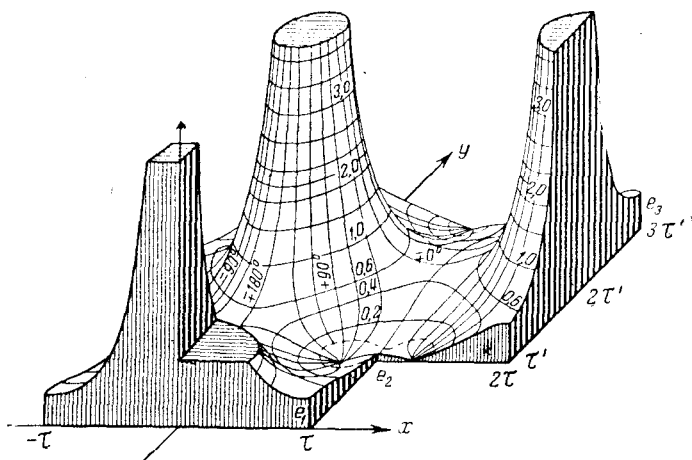


Рис. 225.

нуль  $\wp'(z)$  в параллелограмме периодов, что невозможно. На рис. 225 мы приводим рельеф функции  $\wp(z)$ .

Чтобы получить дифференциальное уравнение, которому на основании теоремы 7 п. 101 удовлетворяет  $\wp(z)$ , найдем разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности  $z = 0$ . Для любого  $T \neq 0$  имеем:

$$\frac{1}{(z - T)^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{T^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{T}\right)^{-2} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{T^{n+2}} z^n,$$

следовательно, пользуясь выражением (6) и тем, что в силу четности  $\wp(z)$  наше разложение содержит лишь четные степени  $z$ , мы получаем:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3z^2 \sum' \frac{1}{T^4} + 5z^4 \sum' \frac{1}{T^6} + \dots$$

Вводя принятые обозначения

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{T^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{T^6}, \quad (9)$$

мы получаем искомое разложение в виде

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \quad (10)$$

Дифференцируя ряд (10), найдем разложение

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \dots \quad (11)$$

Отправляясь от разложений (10) и (11), мы найдем искомое дифференциальное уравнение, составляя рациональную комбинацию  $\wp$  и  $\wp'$ , не имеющую полюсов в параллелограмме периодов и, следовательно, постоянную (теорема 2 п. 101). Имеем:

$$\begin{aligned} [\wp'(z)]^2 &= \frac{4}{z^6} \left\{ 1 - \frac{g_2}{10} z^4 - \frac{g_3}{7} z^6 + \dots \right\}, \\ [\wp(z)]^3 &= \frac{1}{z^6} \left\{ 1 + \frac{3g_2}{20} z^4 + \frac{3g_3}{28} z^6 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

следовательно, искомой комбинацией будет

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + g_2\wp(z) = -g_3 + c_2 z^2 + c_3 z^4 + \dots \quad (12)$$

Действительно, левая часть (12) есть эллиптическая функция с периодами  $\tau$  и  $\tau'$  (теорема 1 п. 101); единственным ее полюсом в параллелограмме периодов могла служить бы точка  $z = 0$ , но, как показывает правая часть (12), функция правильна в этой точке. Следовательно, эта функция постоянна и равна своему значению при  $z = 0$ , т. е.  $-g_3$ . Таким образом, мы получаем искомое дифференциальное уравнение

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3. \quad (13)$$

Выше мы нашли нули  $\wp'(z)$  и обозначили значения в них  $\wp(z)$  — см. (8). Учитывая это, равенство (13) можно переписать в виде

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3]. \quad (14)$$

Сравнение формул (13) и (14) по известным из алгебры свойствам корней уравнений дает соотношения

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{g_3}{4}. \quad (15)$$

Обозначая  $\wp(z) = w$ , мы переписываем уравнение (13) в виде

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}},$$

откуда заключаем, что  $\wp(z)$  является обращением интеграла

$$z - z_0 = \int_{w_0}^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}} \quad (w_0 = \wp(z_0)).$$

Устремляя здесь  $z_0$  к 0, отчего  $w_0$  устремляется в  $\infty$ , получаем эллиптический интеграл в форме Вейерштрасса

$$z = \int_{\infty}^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2w - g_3}}, \quad (16)$$

обращением которого является функция  $\wp(z)$ .

В заключение отметим без доказательства теорему сложения для  $\wp(z)$ :

$$\wp(z + \zeta) + \wp(z) + \wp(\zeta) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\wp'(z) - \wp'(\zeta)}{\wp(z) - \wp(\zeta)} \right\}^2; \quad (17)$$

ее вывод можно найти, например, в книге Н. И. Ахиезера [11], стр. 60—63.

2) Функции Вейерштрасса  $\zeta$  и  $\sigma$ . Среди периодических функций аналогом  $\wp(z)$  является функция  $1/\sin^2 z$ , также имеющая в своих периодах  $T = n\pi$  двойные полюсы с главными частями  $1/(z - T)^2$ . По аналогии с функцией

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \int_0^z \left( \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} \right) dz; \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Вейерштрасс ввел функцию  $\zeta(z)$  («дзета-функция») соотношением

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left( \wp(z) - \frac{1}{z^2} \right) dz; \quad \zeta'(z) = -\wp(z). \quad (18)$$

Подставляя вместо  $\wp(z)$  ее разложение (6) на простейшие дроби и интегрируя, получаем:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum' \left( \frac{1}{z - T} + \frac{1}{T} + \frac{z}{T^2} \right). \quad (19)$$

Дзета-функция нечетна. Действительно,

$$[\zeta(z) + \zeta(-z)]' = \zeta'(z) - \zeta'(-z) = \wp(-z) - \wp(z) = 0$$

для всех  $z$ , следовательно,  $\zeta(z) + \zeta(-z) = C$ . Устремив  $z \rightarrow 0$ , из формулы (18) найдем, что  $C = 0$  и  $\zeta(-z) = -\zeta(z)$ .

Функция  $\zeta(z)$  имеет простые полюсы в периодах  $T$  и поэтому не может быть эллиптической (п. 101). Однако при изменении аргумента на величину периода она изменяется лишь на постоянное слагаемое; действительно, например,

$$\{\zeta(z + \tau) - \zeta(z)\}' = \wp(z) - \wp(z + \tau) = 0$$

при любом  $z$  и аналогично для  $\tau'$ , следовательно:

$$\zeta(z + \tau) - \zeta(z) = \delta, \quad \zeta(z + \tau') - \zeta(z) = \delta'. \quad (20)$$

Между величинами  $\tau$ ,  $\tau'$  и  $\delta$ ,  $\delta'$  существует простая зависимость. Чтобы найти ее, проинтегрируем  $\zeta(z)$  по контуру параллелограмма с вершинами  $\pm \frac{\tau}{2} \pm \frac{\tau'}{2}$ . Так как внутри параллелограмма функция имеет лишь один полюс  $z = 0$  с вычетом 1, то этот интеграл равен  $2\pi i$ . С другой стороны, объединяя интегралы по противоположным сторонам параллелограмма и учитывая соотношение (20), находим, что этот интеграл равен  $\delta\tau' - \delta'\tau$ . Таким образом,

$$\delta\tau' - \delta'\tau = 2\pi i. \quad (21)$$

Это соотношение получено Л е ж а н д р о м.

По аналогии с функцией

$$\sin z = ze^{\int_0^z \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}\right) dz}; \quad (\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z$$

введем  $\sigma(z)$  — «сигма-функцию» Вейерштрасса:

$$\sigma(z) = ze^{\int_0^z \left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) dz}; \quad \{\ln \sigma(z)\}' = \zeta(z). \quad (22)$$

Подставляя разложение (19) для  $\zeta(z)$ , интегрируя почленно и потенцируя, находим представление  $\sigma(z)$  в виде бесконечного произведения:

$$\sigma(z) = ze^{\sum' \ln \left(1 - \frac{z}{T}\right) + \frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2}} = z\Pi' \left(1 - \frac{z}{T}\right) e^{\frac{z}{T} + \frac{z^2}{2T^2}}. \quad (23)$$

Из этого представления видно, что  $\sigma(z)$  является целой функцией с простыми нулями в точках  $z = T$ . Она нечетна, ибо из (22), пользуясь нечетностью  $\zeta(z)$ , можно заключить, что

$$\sigma(-z) = -ze^{\int_0^{-z} \left\{\zeta(u) - \frac{1}{u}\right\} du} = -ze^{\int_0^z \left\{\zeta(v) - \frac{1}{v}\right\} dv} = -\sigma(z)$$

(мы заменили  $u = -v$ ). Из соотношений (22) и (20) находим:

$$\frac{\sigma'(z + \tau)}{\sigma(z + \tau)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \delta;$$

интегрируя и потенцируя, имеем:

$$\sigma(z + \tau) = \sigma(z) e^{\delta z + \gamma}.$$

Подставляя здесь  $z = -\tau/2$  и пользуясь нечетностью  $\sigma(z)$ , получаем  $-1 = e^{-\frac{\delta\tau}{2} + \gamma}$ , откуда  $e^\gamma = -e^{\frac{\delta\tau}{2}}$  и

$$\sigma(z + \tau) = -\sigma(z) e^{\delta(z + \frac{\tau}{2})}. \quad (24)$$

Таким образом, при изменении аргумента на величину периода  $\tau$  функция  $\sigma(z)$  приобретает показательный множитель  $-e^{\delta(z + \frac{\tau}{2})}$  (то же справедливо и для  $\tau'$ ).

Кроме  $\sigma(z)$ , вводят еще три *сигма-функции*:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(z) &= -\frac{e^{\delta z/2}}{\sigma(\frac{\tau}{2})} \sigma\left(z - \frac{\tau}{2}\right); & \sigma_2(z) &= -\frac{e^{\delta' z/2}}{\sigma(\frac{\tau'}{2})} \sigma\left(z - \frac{\tau'}{2}\right); \\ \sigma_3(z) &= -\frac{e^{\delta'' z/2}}{\sigma(\frac{\tau''}{2})} \sigma\left(z - \frac{\tau''}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где  $\tau'' = \tau + \tau'$  и  $\delta''$  — соответствующая этому периоду постоянная  $\delta$  из формул (20) и (24) (знак минус введен для того, чтобы  $\sigma_h(0) = 1$ , нумерация традиционна).

В заключение докажем следующую теорему:

**Теорема.** Любую эллиптическую функцию  $n$ -го порядка  $f(z)$  с нулями  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и полюсами  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  в параллелограмме периодов (каждый считается столько раз, какова его кратность) можно выразить через  $\sigma$ -функцию:

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - \alpha_1) \sigma(z - \alpha_2) \dots \sigma(z - \alpha_n)}{\sigma(z - \beta_1) \sigma(z - \beta_2) \dots \sigma(z - \beta_n)}, \quad (26)$$

где  $C$  — постоянная и

$$\tilde{\alpha}_1 = (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) - (\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n). \quad (27)$$

Действительно, в силу того, что по теореме 5 п. 101

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \equiv 0 \pmod{\tau, \tau'},$$

имеем  $\tilde{\alpha}_1 \equiv \alpha_1 \pmod{\tau, \tau'}$ . Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = \frac{\sigma(z - \tilde{\alpha}_1) \sigma(z - \alpha_2) \dots \sigma(z - \alpha_n)}{\sigma(z - \beta_1) \sigma(z - \beta_2) \dots \sigma(z - \beta_n)};$$



она имеет периоды  $\tau$  и  $\tau'$ , ибо в силу формулы (24), учитывая нечетность  $\sigma$ , получаем, например:

$$g(z + \tau) = e^{\delta(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - \bar{\alpha}_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n)} g(z) = g(z).$$

Кроме того, отношение  $f(z)/g(z)$  в параллелограмме периодов не имеет полюсов, ибо каждый полюс числителя является полюсом той же кратности для знаменателя и каждый нуль знаменателя является нулем той же кратности для числителя (мы учитываем, что  $\bar{\alpha}_1 \equiv \alpha_1 \pmod{\tau, \tau'}$ ). Таким образом, по теореме 2 п. 101 это отношение постоянно, и мы получаем искомую формулу (26).

Формула (26) аналогична представлению дробно-рациональной функции в виде отношения двух многочленов, разложенных в произведения линейных множителей. Совершенно так же доказывается теорема, аналогичная теореме о разложении дробно-рациональной функции на простейшие дроби: *если  $f(z)$  имеет в основном параллелограмме полюсы  $z = \beta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) с главными частями*

$$g_k(z) = \frac{c_{k1}}{z - \beta_k} + \frac{c_{k2}}{(z - \beta_k)^2} + \dots + \frac{c_{kn_k}}{(z - \beta_k)^{n_k}}, \quad (28)$$

то

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^m \left\{ c_{k1} \zeta(z - \beta_k) - c_{k2} \zeta'(z - \beta_k) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n_k-1} \frac{c_{kn_k}}{(n_k-1)!} \zeta^{(n_k-1)}(z - \beta_k) \right\}. \quad (29)$$

3) Тэта-функции Якоби. Для числовых расчетов с эллиптическими функциями удобно пользоваться их выражениями с помощью быстро сходящихся рядов, а между тем все разложения, которые мы до сих пор рассматривали, сходятся весьма медленно. Этот пробел восполняется тэта-функциями Якоби, которые представляются быстро сходящимися рядами и с помощью которых можно выразить все эллиптические функции.

Обратимся к формуле (24) и заметим, что легко указать целую функцию, которая при изменении аргумента на период приобретает такой же множитель, как и  $\sigma(z)$ , именно

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2\tau}(\delta z^2 - 2\pi iz)}. \quad (30)$$

В самом деле, имеем:

$$\varphi(z + \tau) = -e^{\frac{1}{2\tau}(\delta z^2 - 2\pi iz)} e^{\delta\left(z + \frac{\tau}{2}\right)} = -\varphi(z) e^{\delta\left(z + \frac{\tau}{2}\right)}.$$

Обозначим  $\psi(z) = \frac{\sigma(z)}{\varphi(z)}$ ; очевидно, — это целая функция, ибо  $\sigma$  и  $\varphi$  — целые и  $\varphi(z) \neq 0$ .

В силу (24), а также аналогичного соотношения для периода  $\tau'$  будем, следовательно, иметь:

$$\psi(z + \tau) = \psi(z),$$

$$\psi(z + \tau') = -\psi(z) e^{\frac{\delta'\tau - \delta\tau'}{\tau} \left(z + \frac{\tau'}{2}\right) + \pi i \frac{\tau'}{\tau}} = -\psi(z) e^{-\frac{2\pi iz}{\tau}} \quad (31)$$

(мы воспользовались соотношением Лежандра (21)). Первая из формул (31) выражает периодичность  $\psi(z)$ .

По теореме 4 п. 100 целая периодическая функция  $\psi(z)$  во всей плоскости  $z$  может быть представлена своим рядом Фурье

$$\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega z}, \quad (32)$$

где  $\omega = 2\pi/\tau$ . Для определения его коэффициентов мы воспользуемся вторым соотношением (31) и теоремой единственности разложения в ряд Фурье, которая в нашем случае вытекает из соответствующей теоремы для рядов Лорана. Подставляя в (32)  $z + \tau'$  вместо  $z$ , получаем:

$$\psi(z + \tau') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k q^{2k} e^{ik\omega z}, \quad q = e^{\frac{i\omega\tau'}{2}} = e^{i\pi \frac{\tau'}{\tau}}, \quad (33)$$

откуда, используя соотношения (31), находим

$$\psi(z) = -e^{i\omega z} \psi(z + \tau') = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k q^{2k} e^{i(k+1)\omega z}.$$

Сравнивая это разложение с (32), по теореме единственности имеем:

$$c_{k+1} = -c_k q^{2k} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Обозначая для удобства коэффициент  $c_0 = Cq^{\frac{1}{4}}$ , где  $C$  — некоторая постоянная, последовательно получаем:

$$c_1 = -Cq^{\frac{1}{4}}, \quad c_2 = Cq^{\frac{9}{4}} = Cq^{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad c_3 = -Cq^{\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2},$$

и вообще

$$c_k = (-1)^k Cq^{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (34)$$

(справедливость формулы (33) легко проверить методом полной индукции). Подставив это в разложение (32), получим окончательно:

$$\psi(z) = Ce^{\frac{i\omega z}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2} e^{i\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega z}. \quad (35)$$

Функция  $\psi(z)$  лишь несущественно отличается от одной из *тэта-функций Якоби*, именно, по определению

$$\vartheta_1(z) = \frac{i}{C} e^{-i\pi z} \psi(\tau z) = i \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i z}. \quad (36)$$

Вспоминая, что  $\sigma(z) = \psi(z)\varphi(z)$  и пользуясь формулами (36) и (30), мы находим выражение сигма-функции Вейерштрасса через  $\vartheta_1$ :

$$\sigma(z) = -iCe^{\frac{\delta z^2}{2\tau}} \vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\right).$$

Чтобы найти входящую сюда постоянную  $C$ , дифференцируем это соотношение по  $z$  в точке  $z = 0$  и учитываем, что в силу (23)

$\sigma'(0) = 1$ ; мы получим  $1 = -iC \frac{\vartheta_1'(0)}{\tau}$ , откуда

$$\sigma(z) = \frac{\tau e^{\frac{\delta z^2}{2\tau}}}{\vartheta_1'(0)} \vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}\right). \quad (37)$$

Учитывая известные свойства  $\sigma(z)$ , мы можем теперь утверждать, что  $\vartheta_1(z)$  — нечетная целая функция, периодическая\*) с периодом 2 и с простыми нулями в точках  $z = n + n' \frac{\tau'}{\tau}$ .

Так как по нашему условию  $\operatorname{Im} \frac{\tau'}{\tau} > 0$ , то из (33) мы находим  $|q| = e^{-\pi \operatorname{Im} \frac{\tau'}{\tau}} < 1$ , следовательно, ряд (36) для  $\vartheta_1(z)$  быстро сходится благодаря наличию в его членах множителей  $q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$ . С другой стороны, так как через  $\vartheta_1$  выражается  $\sigma$ , а через последнюю, как мы знаем, — любая эллиптическая функция, то любая эллиптическая функция выражается через  $\vartheta_1$ . Таким образом, *тэта-функция* действительно восполняет пробел, о котором мы говорили в начале этого раздела.

Кроме  $\vartheta_1(z)$  вводятся еще три *тэта-функции Якоби*:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2(z) &= \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i z}, \\ \vartheta_3(z) &= q^{\frac{1}{4}} e^{\pi i z} \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2k\pi i z}, \\ \vartheta_4(z) &= \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2k\pi i z}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

\*) То, что  $\vartheta_1(z)$  имеет период 2, проще усмотреть из (36); отсюда же видно, что  $\vartheta_1(z+1) = -\vartheta_1(z)$ .

Все они — целые четные функции;  $\vartheta_2(z)$  имеет период 2, а  $\vartheta_3(z)$  и  $\vartheta_4(z)$  — период 1. Через них выражаются  $\sigma_k$ -функции Вейерштрасса по формулам, отличающимся от (37) тем, что вместо  $\sigma$  слева стоит  $\sigma_h$ , а справа вместо  $\vartheta_1$  и  $\vartheta'$  — функции  $\vartheta_{h+1}$  и  $\vartheta'_{h+1}$ .

Если положить  $\kappa = -i \frac{\tau'}{\tau}$  (в силу нашего условия  $\text{Im} \frac{\tau'}{\tau} > 0$  эта величина положительна), то из (33) получаем  $q = e^{-\pi\kappa}$ . Поэтому тэта-функции Якоби зависят от  $\kappa$  как от параметра и их часто обозначают символами  $\vartheta_j(z, \kappa)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ). Дифференцируя ряды (36) и (38), мы найдем, что эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial z^2} = 4\pi \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \kappa} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (39)$$

Так, например,

$$\frac{\partial \vartheta_3}{\partial \kappa} = \frac{\partial \vartheta_3}{\partial q} (-\pi q) = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 q^{k^2} e^{2k\pi iz},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial z^2} = -4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} k^2 e^{2k\pi iz},$$

откуда и получается (39).

Как доказано выше, любая эллиптическая функция выражается через тэта-функции. Приведем без доказательства такие выражения для эллиптических функций Якоби:

$$\text{sn } z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{z}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2K}\right)}; \quad \text{cn } z = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{z}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2K}\right)}; \quad \text{dn } z = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{z}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{z}{2K}\right)};$$

здесь постоянную  $q$ , входящую в определение тэта-функций, следует выбирать не в виде  $e^{i\pi \frac{\tau'}{\tau}}$ , а в виде  $e^{-\pi \frac{k'}{k}}$ , что совпадает с формулой (33) предыдущего пункта. Через тэта-функции выражаются также величины  $K$  и  $k$ , фигурирующие в теории функций Якоби, — именно,

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0); \quad k = \left\{ \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \right\}^2 \quad (40)$$

(это совпадает с формулами (34) предыдущего пункта). Вывод формул (39) и (40) можно найти, например, в книге Н. И. Ахиезера [11], стр. 92—95.

**104. Примеры. Приложения.** 1) Вычисление длины дуги эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  приводит к эллиптическим интегралам. Действительно,

отрезок дуги, соответствующий изменению абсциссы от 0 до  $x$ , равен:

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx = a \int_0^{x/a} \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt, \quad (1)$$

где  $t = \frac{x}{a}$  и  $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ . Это — эллиптический интеграл второго рода в форме Лежандра см. (2) из п. 102. Полная длина эллипса выражается через полный эллиптический интеграл

$$l = 4a \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt = 4aE(k). \quad (2)$$

Этому обстоятельству и обязаны своим названием эллиптические интегралы, а также их обращения — эллиптические функции.

2) Эллиптические координаты также связаны с эллиптическими функциями. Чтобы ввести их, рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{\rho - a^2} + \frac{y^2}{\rho - b^2} + \frac{z^2}{\rho - c^2} - 1 = 0; \quad (3)$$

оно третьей степени и имеет при фиксированных  $x, y$  и  $z$  три действительных корня  $\lambda, \mu$  и  $\nu$ , удовлетворяющих неравенству  $\lambda > a^2 > \mu > b^2 > \nu > c^2$ . Эти корни и называются *эллиптическими координатами* точки  $(x, y, z)$ .

Система координат  $(\lambda, \mu, \nu)$  ортогональна, ибо поверхности  $\lambda = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$  и  $\nu = \text{const}$  представляют собой, соответственно, софокусные эллипсоид, однополосный и двуполосный гиперболоиды, т. е. взаимно ортогональные поверхности (рис. 226).

Нетрудно вывести формулы, выражающие декартовы координаты через эллиптические \*)

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda - a^2)(\mu - a^2)(\nu - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda - b^2)(\mu - b^2)(\nu - b^2)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \\ z^2 &= \frac{(\lambda - c^2)(\mu - c^2)(\nu - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

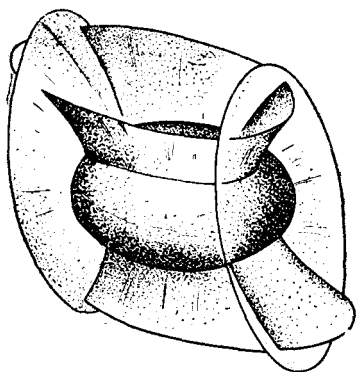


Рис. 226.

Отметим еще, что, как это доказывается в курсах векторного анализа, урав-

\*) Для этого достаточно привести левую часть (3) к общему знаменателю и, заметив, что в числителе при этом получится многочлен третьей степени относительно  $\rho$  со старшим коэффициентом  $-1$ , разложить его на линейные множители

$$\frac{x^2}{\rho - a^2} + \frac{y^2}{\rho - b^2} + \frac{z^2}{\rho - c^2} - 1 = - \frac{(\rho - \lambda)(\rho - \mu)(\rho - \nu)}{(\rho - a^2)(\rho - b^2)(\rho - c^2)}.$$

Чтобы получить (4), остается умножить обе части, соответственно, на  $(\rho - a^2)$ ,  $(\rho - b^2)$ ,  $(\rho - c^2)$  и положить  $\rho = a^2, b^2, c^2$ .

нение Лапласа в эллиптических координатах имеет вид:

$$\frac{\mu - \nu}{\Pi_\mu \Pi_\nu} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \Pi_\lambda \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{\nu - \lambda}{\Pi_\nu \Pi_\lambda} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \Pi_\mu \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) + \frac{\lambda - \mu}{\Pi_\lambda \Pi_\mu} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \Pi_\nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) = 0, \quad (5)$$

где

$$\Pi_\rho = \sqrt{(\rho - a^2)(\rho - b^2)(\rho - c^2)}, \quad (6)$$

а  $\Pi_\lambda, \dots$  получаются соответственно заменой  $\rho$  на  $\lambda, \dots$

Вместо эллиптических координат  $\lambda, \mu, \nu$  вводят еще другие координаты  $\alpha, \beta, \gamma$ , связанные с эллиптическими с помощью функции  $\wp$  Вейерштрасса. Для этого проще всего вместо  $\rho$  ввести переменную  $\sigma$  по формуле

$$\rho = \wp(\sigma) + A, \quad (7)$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Обозначим через  $e_1, e_2$  и  $e_3$  корни многочлена, который получится, если в выражение  $\Pi_\rho^2$  вместо  $\rho$  подставить (7), тогда

$$\Pi_\rho^2 = (\rho - a^2)(\rho - b^2)(\rho - c^2) = \{\wp(\sigma) - e_1\} \{\wp(\sigma) - e_2\} \{\wp(\sigma) - e_3\}.$$

Отсюда видно, что при  $\rho = a^2, b^2, c^2$ , соответственно,  $\wp(\sigma) = e_1, e_2, e_3$ . Подставив это в (7), найдем:  $a^2 = e_1 + A$ ,  $b^2 = e_2 + A$ ,  $c^2 = e_3 + A$ , откуда сложением получим

$$A = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Новые координаты  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются как значения  $\sigma$ , которые получаются при подстановке в (7)  $\rho = \lambda, \mu, \nu$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \wp(\alpha) + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \\ \mu &= \wp(\beta) + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \\ \nu &= \wp(\gamma) + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Отсюда получаем:

$$\lambda - a^2 = \wp(\alpha) + A - a^2 = \wp(\alpha) - e_1,$$

и аналогично для других разностей. Подставляя это в (4), найдем формулы перехода от координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$  к декартовым:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{\{\wp(\alpha) - e_1\} \{\wp(\beta) - e_1\} \{\wp(\gamma) - e_1\}}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 &= \frac{\{\wp(\alpha) - e_2\} \{\wp(\beta) - e_2\} \{\wp(\gamma) - e_2\}}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 &= \frac{\{\wp(\alpha) - e_3\} \{\wp(\beta) - e_3\} \{\wp(\gamma) - e_3\}}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Интересно отметить, что согласно формуле (14) п. 103 правые части выражений (9) являются квадратами однозначных функций, следовательно,  $x$ ,

$y$  и  $z$  представляют собой однозначные аналитические функции координат  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Далее, из (8) и дифференциального уравнения (13) п. 103 для функции  $\wp$  найдем:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{\Pi_\lambda}, \quad \frac{d\beta}{d\mu} = \frac{1}{\Pi_\mu}, \quad \frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{1}{\Pi_\nu},$$

следовательно, например,  $\Pi_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ , и уравнение Лапласа в новых координатах (если заменить разности  $(\mu - \nu)$ , ... по формулам (8)) принимает вид:

$$\{\wp(\gamma) - \wp(\beta)\} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \{\wp(\alpha) - \wp(\gamma)\} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \{\wp(\beta) - \wp(\alpha)\} \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} = 0. \quad (10)$$

3) Коэффициент взаимной индукции двух круговых токов по определению равен

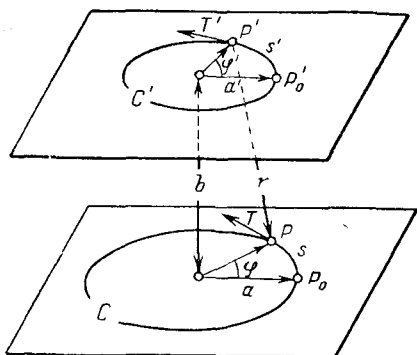


Рис. 227.

$$M = \int_C \int_{C'} \frac{\cos(PT, P'T')}{PP'} ds ds' =$$

$$= aa' \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi' - \varphi)}{r} d\varphi d\varphi',$$

где смысл обозначений ясен из рис. 227. Обозначим через  $Q$  проекцию точки  $P'$  на нижнюю плоскость (на рис. 227 не отмечена); тогда

$$r = \sqrt{P'Q^2 + PQ^2} =$$

$$= \sqrt{b^2 + a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\varphi' - \varphi)}.$$

Введем вместо  $\varphi'$  новую переменную  $\tau = \varphi' - \varphi + \pi$ , тогда, заменяя еще по известному свойству интегралов от периодической функции пределы интегрирования по  $\tau$ , равные  $\pi - \varphi$  и  $3\pi - \varphi$ , на 0 и  $2\pi$ , получаем:

$$M = aa' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\tau - \pi)}{r} d\tau = -4aa' \pi \int_0^\pi \frac{\cos \tau d\tau}{\sqrt{a^2 + a'^2 + b^2 + 2aa' \cos \tau}}$$

или, заменяя  $\tau = 2t$ :

$$M = 8\pi aa' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 t - 1) dt}{\sqrt{(a + a')^2 + b^2 - 4aa' \sin^2 t}}.$$

Если положить

$$k = \frac{2 \sqrt{aa'}}{\sqrt{(a + a')^2 + b^2}},$$

то получим окончательно.

$$M = 4\pi \sqrt{(a+a')^2 + b^2} \left\{ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt + \frac{1+k'^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \right\} = \\ = 4\pi \sqrt{(a+a')^2 + b^2} \left\{ \frac{1+k'^2}{2} K - E \right\}. \quad (11)$$

4) Конформное отображение верхней полуплоскости на данный прямоугольник. В п. 39 мы рассмотрели отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} w > 0$  на прямоугольник плоскости  $z$ , стороны которого определяются выбором параметра  $k$  эллиптической функции Якоби. Здесь мы будем считать прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$  произвольным, но расположенным так, чтобы его вершины попали в точки  $\pm \frac{a}{2}$  и  $\pm \frac{a}{2} + ib$ . Искомое отображение реализует функция

$$z = C \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \quad (12)$$

причем для определения параметров  $k$  и  $C$  мы имеем два уравнения (см. (1) и (2) п. 39):

$$\left. \begin{aligned} a &= 2C \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2CK(k), \\ b &= C \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = CK(k'). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из этих уравнений мы прежде всего находим:

$$\frac{2b}{a} = \frac{K(k')}{K(k)} = \kappa; \\ q = e^{-\pi\kappa} = e^{-\frac{2\pi b}{a}},$$

затем по известному  $q$  находим  $k^2$  из рис. 223 или таблицы, цитированной на стр. 703, или второй формулы (34) п. 102. Зная  $k$ , находим  $K$  по таблице полных эллиптических интегралов или непосредственно по  $q$  с помощью первой формулы (34). Наконец, зная  $K$  и  $a$ , из первой формулы (13) определяем  $C$ .

В качестве примера рассмотрим отображение верхней полуплоскости на квадрат со сторонами  $a = b = 1$ . Имеем  $\kappa = 2$ , следовательно,  $q = e^{-2\pi} \approx 0,00187$  (см. [14], стр. 58),  $\log q = \bar{3},27184$ ;  $\alpha = 9^\circ 53'$  (см. [14], стр. 147),  $K = 1,5825$  (см. [14], стр. 177). Таким образом,

$$C = \frac{a}{2K} = 0,3159, \quad k^2 = \sin^2 \alpha = 0,02943$$



и искомым отображением будет \*)

$$z = 0,3159 \int_0^w \frac{dw}{V(1-w^2)(1-0,02945w^2)}. \quad (14)$$

Если не требуется большой точности, то при решении задачи об отображении прямоугольника удобно пользоваться следующей таблицей, которую мы заимствуем из книги Морса и Фешбаха [16].

$\frac{1}{\kappa} = \frac{K}{K'}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$K$	1,571	1,571	1,571	1,571	1,573	1,583	1,604	1,643	1,699	1,768	1,854
$K'$	$\infty$	15,71	7,855	5,237	3,933	3,166	2,673	2,347	2,124	1,966	1,854
$k$	0	0	0,00156	0,0213	0,0784	0,171	0,265	0,407	0,520	0,622	0,707
$k'$	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,985	0,965	0,913	0,853	0,784	0,707
$\alpha$	0	0	5,4'	1° 11,7'	4° 30'	9° 50'	15° 22'	24° 0'	31° 23'	38° 30'	45°
$q = e^{-\pi\kappa}$	0	0	0	0	0,0004	0,0019	0,0053	0,0114	0,0197	0,0307	0,0432

Так, в рассмотренном выше случае  $1/\kappa = 0,5$ , из этой таблицы мы находим  $k = 0,171$ , откуда  $k^2 = 0,0292$ , и далее  $K = 1,583$ , откуда  $C = \frac{1}{2K} = 0,316$ .

При небольших  $k$  ( $0 < k < 0,1$ ) достаточно хорошим приближением служит  $k \approx 4e^{-\pi K'/2K} = 4\sqrt{q}$ . При  $\kappa > 1$  вместо  $K$ ,  $k$  и  $\alpha$  берут соответственно  $K'$ ,  $k'$  и  $90^\circ - \alpha$ .

5) Конформное отображение плоскости со щелями на круговое кольцо (рис. 228). Рассмотрим сначала отображение

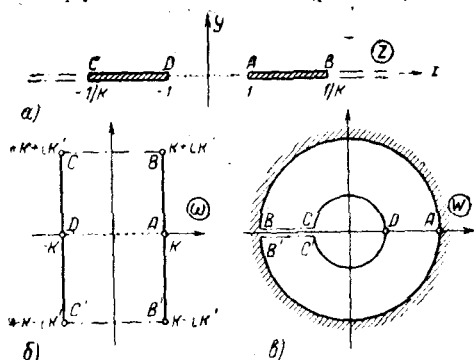


Рис. 228.

$$z = \operatorname{sn}(\omega; k) \quad (15)$$

верхней полуплоскости  $z$  на прямоугольник с вершинами  $\pm K$ ,  $\pm K + iK'$ . Продолжая отображение (15) через отрезок  $AD$ , получим отображение плоскости  $z$  с выброшенными лучами  $|z| > 1$ ,  $y = 0$  на вдвое больший прямоугольник плоскости  $\omega = \xi + i\eta$ . Функция

$w = e^{\frac{\pi}{K'}\omega}$  отображает этот прямоугольник на круговое

кольцо  $e^{-\frac{\pi K}{K'}} < |w| < e^{\frac{\pi K}{K'}}$ , причем точки  $\omega = \xi \pm iK'$  склеиваются.

Но это означает, что сложная функция

$$w = e^{\frac{\pi}{K'}\omega} = \exp \left\{ \frac{\pi}{K'} \int_0^z \frac{dz}{V(1-z^2)(1-k^2z^2)} \right\} \quad (16)$$

\*) Заметим, что в рассматриваемом случае, когда прямоугольник является квадратом, параметр  $k$  определяется точно. Именно, можно доказать, что в этом случае двойное отношение точек  $-1/k$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $1/k$  равно  $-1$  и, значит,  $k = 3 - 2\sqrt{2}$ . Отсюда  $k^2 = 17 - 12\sqrt{2} \approx 0,029437$ .

реализует искомое отображение. Правый отрезок  $AB$  переходит при этом во внешнюю окружность кольца, а левый — во внутреннюю.

б) Конформное отображение верхней полуплоскости на область рис. 229. Пусть точки  $z = 0, 1, \infty$  переходят, соответственно, в  $w = 0, D, \infty$ ; тогда функция, реализующая искомое конформное отображение, запишется в виде интеграла Шварца — Кристоффеля (п. 37):

$$w = C_1 \int_0^z \frac{z^2 - b^2}{\sqrt{(z^2 - 1) \left(z^2 - \frac{1}{k^2}\right)}} dz,$$

где  $C_1 > 0$ ,  $b > 1$  и  $\frac{1}{k} > 1$  — некоторые

постоянные, подлежащие определению.

После простых преобразований этот интеграл переписывается в виде комбинации эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$w = C \left\{ (k^2 b^2 - 1) \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} + \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz \right\}, \quad (17)$$

где  $C$  — некоторая положительная постоянная. Для определения постоянных воспользуемся соответствием точек  $z = 1, w = h$ ;  $z = \frac{1}{k}, w = h$  и  $z = b, w = h + ia$ . Из соответствия первой пары получаем:

$$h = C \{ (k^2 b^2 - 1) K + E \}, \quad (18)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответствующие модулю  $k$  (см. п. 102). Из соответствия второй пары, учитывая соотношение (18), получаем:

$$0 = (k^2 b^2 - 1) K' + E_1 = k^2 b^2 K' - E', \quad (19)$$

где  $K' = K(k')$ ,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  (см. п. 102), а

$$E_1 = \int_1^{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{t^2 - 1}} dt = K' - E' \quad (20)$$

и  $E' = E(k')$  (чтобы убедиться в последнем равенстве, достаточно заменить в интеграле  $t = \frac{\sqrt{1 - k'^2 \tau^2}}{k}$ ). Наконец, соответствие третьей пары с учетом соотношения (18) после сведения эллиптических интегралов к интегралам с пределами, меньшими 1 (это делается с помощью замены  $t = \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \tau^2}}$  в интеграле первого рода и замены, указанной в предыдущих скобках, для

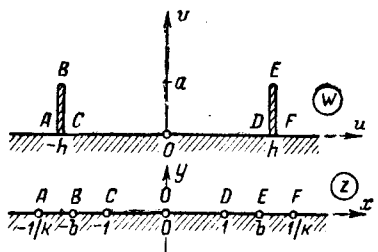


Рис. 229.

интеграла второго рода), дает:

$$a = C \{ (k^2 b^2 - 1) F(\alpha', k') + K' - F(\alpha'', k') + F(\alpha'', k') \}, \quad (21)$$

где  $\sin \alpha' = \frac{1}{bk'} \sqrt{b^2 - 1}$ ,  $\sin \alpha'' = \frac{1}{k'} \sqrt{1 - k^2 b^2}$ . Из формул (18), (19) и (21) можно приближенно найти неизвестные  $k$ ,  $b$  и  $C$ .

7) Электростатическое поле двух прямоугольных полюсов (рис. 230). Отобразим конформно верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на верхнюю половину поля с соответствием точек, указанным на рис. 230. Интеграл Шварца — Кристоффеля имеет вид:

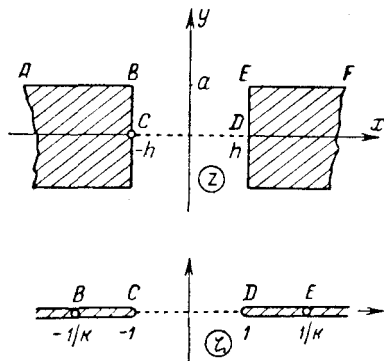


Рис. 230.

$$z = C \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1 - k^2 \xi^2}{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (22)$$

т. е. является эллиптическим интегралом второго рода. Из соответствия точек  $z = 1$ ,  $w = h$  и  $z = \frac{1}{k}$ ,  $w = h + ia$ , как в предыдущем примере, найдем:

$$h = CE(k), \quad a = C \{ K(k') - E(k') \}. \quad (23)$$

Отсюда, деля одно уравнение на другое, получаем соотношение для определения модуля  $k$ , а найдя  $k$  из (23), находим и  $C$ .

По принципу симметрии функция, обращающая интеграл (22), дает отображение всей области поля на плоскость  $\zeta$  с выброшенными лучами  $|\zeta| > 1$ ,  $\text{Im } \zeta = 0$ . Функция

$$\zeta = -\sin \frac{i\pi w}{2V} = \frac{1}{i} \text{sh } \frac{\pi w}{2V} \quad (24)$$

реализует отображение полосы  $-V < \text{Im } w < V$  на верхнюю полуплоскость  $\zeta$ , причем нижней границе полосы соответствует левый разрез, а верхней — правый.

Следовательно, формулы (22) и (24) дают параметрическое представление комплексного потенциала поля, которое получается, если левый полюс несет потенциал  $-V$ , а правый  $V$ . Вектор напряженности поля будет равен:

$$E = -i \frac{d\bar{w}}{dz} = -i \frac{d\bar{w}}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{2V}{\pi C} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \bar{\zeta}^2}}. \quad (25)$$

8) Электростатическое поле точечного заряда, расположенного внутри прямоугольника. Пусть заряд величины  $q$  расположен в точке  $\zeta = \xi + i\eta$  внутри прямоугольника  $0 \leq x \leq \frac{\tau}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\tau'}{2}$  с проводящими стенками (рис. 231). Потенциал поля  $U$  — функция, гармоническая всюду внутри прямоугольника, кроме точки  $\zeta$ , где она имеет особенность вида  $2q \ln \frac{1}{|z - \zeta|}$ , и равная нулю на стенках прямо-

угольника. Влияние стенок можно заменить системой зарядов  $\pm q$ , получаемых отражениями  $q$  в стенках заданного прямоугольника (рис. 231), что равносильно продолжению функции  $U$  на всю плоскость  $z$ .

После такого продолжения функция  $U$  будет двоякопериодической с периодами  $\tau$  и  $\tau'$ , причем в точках  $\xi$ ,  $\tau + i\tau' - \xi$  и конгруэнтных им, она будет

иметь особенности вида  $2q \ln \frac{1}{|z - \xi|}$ ,

а в точках  $\bar{\xi}$ ,  $\tau + i\tau' - \bar{\xi}$  — особенности вида  $2q \ln |z - \bar{\xi}|$ . Пусть  $V(z)$  — функция, сопряженная  $U(z)$ , тогда

$$w = f(z) = e^{\frac{1}{2q}(U + iV)} \quad (26)$$

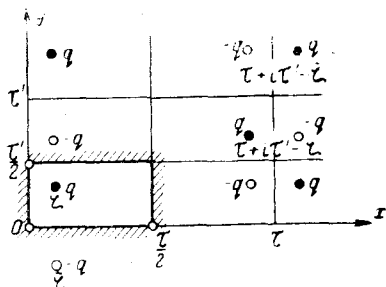


Рис. 231.

будет эллиптической функцией с основными периодами  $\tau$  и  $i\tau'$  и с простыми полюсами и нулями, конгруэнтными соответственно  $\xi$ ,  $-\xi$  и  $\bar{\xi}$ ,  $-\bar{\xi}$ . По теореме п. 101 функция  $f(z)$  представляется с помощью  $\sigma$ -функций Вейерштрасса:

$$f(z) = \frac{\sigma(z + \bar{\xi}) \sigma(z - \bar{\xi})}{\sigma(z + \xi) \sigma(z - \xi)} \quad (27)$$

(здесь  $C = 1$  в силу нашего выбора множителя при  $U + iV$  в формуле (26)). Искомый потенциал поля

$$U(z) = 2q \operatorname{Re} \ln \frac{\sigma(z + \bar{\xi}) \sigma(z - \bar{\xi})}{\sigma(z + \xi) \sigma(z - \xi)}. \quad (28)$$

9) Формула Ахизера — Голузина. В заключение мы приведем вывод формулы для конформного отображения кругового кольца на двусвязную область  $D$ , ограниченную двумя многоугольными контурами. Эта формула аналогична формуле Шварца — Кристоффеля п. 37; она была найдена в 30-х гг. независимо Н. И. Ахизером и Г. М. Голузиным (см. [11]).

Для определенности предположим, что область  $D$  плоскости  $w$  содержит бесконечно удаленную точку, т. е. представляет собой внешность двух замкнутых многоугольников без точек самопересечения, которые мы обозначим через  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . Вершины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  обоих многоугольников занумеруем общей нумерацией так, чтобы при их обходе в естественном порядке область  $D$  оставалась слева. Как и в п. 37, внутренний по отношению к  $D$  угол при вершине  $A_k$  мы обозначим через  $\alpha_k \pi$  ( $0 < \alpha_k < \pi$ ); по элементарной теореме о сумме внешних углов многоугольника

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) = 4. \quad (29)$$

Будем искать отображение на  $D$  кругового кольца  $K: r < |z| < 1$ , где число  $r$  ( $0 < r < 1$ ) должно определиться в процессе решения задачи (см. теорему 3 п. 35 и замечание вслед за ней). Предположим, что окружность  $C_0: |z| = 1$  переходит в контур  $\Gamma_0$ , а окружность  $C_1: |z| = r$  — в контур  $\Gamma_1$ . Прообраз вершины  $A_k$  обозначим через  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), через  $z = a$

обозначим прообраз точки  $w = \infty$ ; без ограничения общности можно считать, что  $a$  лежит на положительной полуоси, т. е. что  $r < a < 1$ .

Отображающая функция  $w = f(z)$  аналитична в кольце  $K$  всюду, кроме точки  $z = a$ , где она имеет полюс первого порядка (в силу однолиственности отображения). Поскольку эта функция непрерывно продолжается на границу и преобразует любую дугу окружностей  $C_0$  и  $C_1$ , лежащую между двумя последовательными точками  $a_k$  и  $a_{k+1}$ , в прямолинейный отрезок, то к ней применим принцип симметрии п. 35. Согласно этому принципу мы продолжим функцию  $f(z)$  в кольцо  $K_{-1}$ :  $1 < |z| < \frac{1}{r}$ , и она будет там аналитической всюду,

кроме точки  $z = \frac{1}{a}$ , где она имеет полюс первого порядка; кольцо  $K_{-1}$  эта функция отображает конформно на область  $D_{-1}$ , которая получается из  $D$  отражением в одной из сторон многоугольника  $\Gamma_0$ . Точно таким же образом мы продолжим эту функцию в кольцо  $K_1$ :  $r^2 < |z| < r$  и, вообще, в кольца  $K_j$ :  $r^{j+1} < |z| < r^j$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; кольцо  $K_0 = K$ ). Получим, как и в п. 37, многозначную аналитическую функцию с точками ветвления в концах дуг  $a_k$  и точках, симметричных с ними относительно граничных окружностей колец  $K_j$ , и с полюсами первого порядка в точке  $a$  и симметричных с ней точках.

Четное число, пусть равное  $2k$ , отражений в прямых на плоскости  $w$  сводится к линейному преобразованию  $W = b_k w + c_k$ , а в плоскости  $z$  ему соответствует преобразование  $Z = r^{2k} z$ . Поэтому ветви многозначной функции  $f(z)$ , которые для простоты мы обозначим той же буквой, должны удовлетворять соотношению  $f(r^{2k} z) = b_k f(z) + c_k$ . Дифференцируя его два раза и беря отношение второй производной к первой, мы получим

$$r^{2k} \frac{f''(r^{2k} z)}{f'(r^{2k} z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

(ср. вывод формулы Шварца — Кристоффеля в п. 37). Отсюда видно, что функция  $\Phi(z) = z \frac{f''(z)}{f'(z)}$ , удовлетворяющая соотношению

$$\Phi(r^{2k} z) = \Phi(z), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (30)$$

не зависит от выбора ветви функции  $f(z)$ , т. е. является однозначной функцией.

Функция  $\Phi(z)$  не изменяется, если ее аргумент умножается на  $r^2$ . Чтобы перейти от нее к периодической функции, фиксируем некоторое число  $\omega > 0$  и положим

$$\varphi(z) = \Phi\left(e^{\frac{\pi i}{\omega} z}\right). \quad (31)$$

В силу однозначности  $\Phi(z)$  и периодичности показательной функции получаем, что

$$\varphi(z + 2\omega) = \Phi\left(e^{2\pi i + \frac{\pi i}{\omega} z}\right) = \varphi(z).$$

Если же выбрать мнимое число  $\omega'$  так, чтобы было  $e^{\frac{\pi i}{\omega'} z} = r$ , то свойство (30) функции  $\Phi(z)$  даст

$$\varphi(z + 2\omega') = \Phi\left(r^2 e^{\frac{\pi i}{\omega'} z}\right) = \varphi(z).$$

Таким образом, функция  $\varphi(z)$  оказывается двоякопериодической, с периодами  $2\omega$  и  $2\omega'$ .

Выясним характер особенностей функции  $\varphi(z)$  в ее прямоугольнике периодов, скажем прямоугольнике  $\varepsilon \leq \operatorname{Re} z < 2\omega + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \leq \operatorname{Im} z < -2i\omega' + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  и невелико (мы взяли несколько сдвинутый прямоугольник, чтобы

на его границу не попали особые точки). При отображении  $Z = e^{\frac{\pi i}{\omega} z}$  этому

прямоугольнику соответствует кольцо  $\lambda r^2 \leq |Z| < \lambda$  (где  $\lambda = e^{-\frac{\pi \varepsilon}{\omega}} < 1$  и близко к 1) с разрезом вдоль луча  $\arg Z = \frac{\pi \varepsilon}{\omega}$ . Особыми точками функции  $\Phi(Z)$  в этом кольце являются точки  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), лежащие на окружностях  $C_0$  и  $C_1$ , а также точки  $a$  и  $\frac{1}{a}$ . Как и в п. 37, мы найдем, что

функция  $f(Z)$  в окрестности точек  $a_k$  допускает разложение вида

$$f(Z) = A + (Z - a_k)^{\alpha_k} \{c_0 + c_1 (Z - a_k) + \dots\},$$

а в окрестности точек  $a$  и  $\frac{1}{a}$

$$f(Z) = \frac{A'}{Z - a} + c'_0 + c'_1 (Z - a) + \dots,$$

$$f(Z) = \frac{A''}{aZ - 1} + c''_0 + c''_1 (aZ - 1) + \dots$$

Отсюда для функции  $\Phi(Z) = Z \frac{f''(Z)}{f'(Z)}$  получаем соответственно

$$\Phi(Z) = a_k \frac{\alpha_k - 1}{Z - a_k} + \dots, \quad \Phi(Z) = -\frac{2a}{Z - a} + \dots, \quad \Phi(Z) = -\frac{2}{aZ - 1} + \dots$$

(точками обозначена правильная часть разложений). Положим здесь снова

$Z = e^{\frac{\pi i}{\omega} z}$ ,  $\Phi(Z) = \varphi(z)$ , обозначим  $z_k = \frac{\omega}{\pi i} \ln a_k$  точку, соответствующую  $a_k$ , и заметим, что

$$Z - a_k = a_k \left( e^{\frac{\pi i}{\omega} (z - z_k)} - 1 \right) = a_k \frac{\pi i}{\omega} (z - z_k) + \dots;$$

мы получим разложение  $\varphi(z)$  в окрестности точки  $z_k$ :

$$\varphi(z) = \frac{\omega}{\pi i} \frac{\alpha_k - 1}{z - \frac{\omega}{\pi i} \ln a_k} + \dots$$

Точно так же в окрестности точек  $z = \pm \frac{\omega}{\pi i} \ln a$ , соответствующих точкам  $a$

и  $\frac{1}{a}$ , получим

$$\varphi(z) = -\frac{\omega}{\pi i} \frac{2}{z - \frac{\omega}{\pi i} \ln a} + \dots, \quad \varphi(z) = -\frac{\omega}{\pi i} \frac{2}{z + \frac{\omega}{\pi i} \ln a} + \dots$$

Таким образом, все особые точки двоякопериодической функции  $\varphi(z)$  в ее прямоугольнике периодов — полюсы, следовательно, эта функция является эллиптической. Все эти полюсы — простые и сумма вычетов в них, согласно соотношению (29),

$$\frac{\omega}{\pi i} \left\{ \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) - 4 \right\} = 0,$$

как и должно быть для эллиптических функций. Пользуясь разложением (29) п. 103, мы можем выразить  $\varphi(z)$  через дзета-функцию:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \frac{\omega}{\pi i} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \zeta \left( z - \frac{\omega}{\pi i} \ln a_k \right) - \frac{2\omega}{\pi i} \zeta \left( z - \frac{\omega}{\pi i} \ln a \right) - \\ - \frac{2\omega}{\pi i} \zeta \left( z + \frac{\omega}{\pi i} \ln a \right) + C, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $C$  — постоянная.

Теперь вспомним, что  $\varphi \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln z \right) = \Phi(z) = z \frac{f''(z)}{f'(z)}$ , и учтем, что по формуле (27) п. 103

$$\zeta \left[ \frac{\omega}{\pi i} (\ln z - \ln a_k) \right] = \frac{\pi i z}{\omega} \frac{d}{dz} \ln \sigma \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{z}{a_k} \right).$$

Подставляя это в (22), получим

$$\begin{aligned} \frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \frac{d}{dz} \ln \sigma \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{z}{a_k} \right) - \\ - 2 \frac{d}{dz} \ln \sigma \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{z}{a} \right) - 2 \frac{d}{dz} \ln \sigma \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln az \right), \end{aligned}$$

откуда, интегрируя и потенцируя, найдем выражение  $f'(z)$  через сигма-функцию:

$$f'(z) = C' \frac{\prod_{k=1}^n \sigma^{\alpha_k - 1} \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{z}{a_k} \right)}{\sigma^2 \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln \frac{z}{a} \right) \sigma^2 \left( \frac{\omega}{\pi i} \ln az \right)}.$$

Заменяя  $\sigma$  через тэта-функцию  $\vartheta_1$  по формуле (37) п. 103 (в которой  $\tau = 2\omega$ ), будем иметь

$$f'(z) = C'' z^c \frac{\prod_{k=1}^n \vartheta_1^{\alpha_k - 1} \left( \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a_k} \right)}{\vartheta_1^2 \left( \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a} \right) \vartheta_1^2 \left( \frac{1}{2\pi i} \ln az \right)},$$

где  $C''$  и  $c$  — постоянные. Рассуждением, которое мы опускаем (см. [11], стр. 186), можно доказать, что  $c = 2$ . Интегрируя еще раз, получим оконча-

тельную формулу для конформного отображения кольца  $r < |z| < 1$  на двусвязную многоугольную область, содержащую бесконечно удаленную точку:

$$f(z) = C \int \frac{\prod_{k=1}^n \vartheta_1^{\alpha_k-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a_k} \right)}{\vartheta_1^2 \left( \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a} \right) \vartheta_1^2 \left( \frac{1}{2\pi i} \ln az \right)} \frac{dz}{z^2}. \quad (33)$$

Точно так же доказывается аналог этой формулы для отображения кольца на ограниченную двусвязную многоугольную область, у которой внутренний (по отношению к области) угол при вершине  $A_k$  равен  $\alpha_k \pi$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$f(z) = C \int \prod_{k=1}^n \vartheta_1^{\alpha_k-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a_k} \right) \frac{dz}{z^2}. \quad (34)$$

Заметим, что, как и формулы Шварца — Кристоффеля, эти формулы содержат неизвестные параметры ( $C$ ,  $a_k$  и  $r$ ), которые должны определяться в процессе решения задачи. Трудности их определения ограничивают практические применения этих формул.

### Литература к главе VII

- [1] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. II, Гостехиздат, 1949.
- [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, 1951.
- [3] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
- [4] Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.
- [5] Е. Уиттекер и Г. Ватсон, Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, 1963.
- [6] Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, 1948.
- [7] Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1 — теория, ч. 2 — таблицы, ИЛ, 1949.
- [8] Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.
- [9] Э. Грей и Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
- [10] В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Издательство АН СССР, 1946.
- [11] Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
- [12] Ю. С. Сикорский, Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
- [13] А. М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям, Издательство АН СССР, 1941.
- [14] Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.
- [15] А. Кратцер и В. Франц, Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.
- [16] Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. т. 1, 2, ИЛ, 1958.



# Предметный указатель

- Абель Н. 70  
Абеля теоремы 70, 684  
Автоморфизмы верхней полуплоскости 140  
— единичного круга 139  
Адиабатности условие 334  
Амплитуда эллиптического интеграла 695  
Аналитическая дуга 162  
— функция 38, 97  
— — полная 97  
Аналитическое продолжение 93, 95, 163  
— — гармонической функции 214  
— — непосредственное 53, 94  
Аналитичность в  $\infty$  92  
Аргумент комплексного числа 13  
— производной 111  
Аргумента принцип 88  
Арккосинус 41  
Арктангенс 42  
Арсинус 42  
Артангенс 42  
Асимптотическое выражение второй ханкелевой функции 659  
— — гамма-функции 452, 598  
— — многочленов Лежандра 488, 627  
— — первой ханкелевой функции 659  
— — функций Бесселя 486  
— — Вебера 660  
— разложение 471  
— обобщенное 475  
 $\alpha$ -точка 90  
Ахизера — Голузина формула 723  
Безциркулярное обтекание 256  
Бернулли Д. 676  
— задача 676  
— интеграл 334  
— теорема 399  
Бернулли — Эйлера формула 247  
Бесконечно удаленная точка 90  
Бесконечное произведение 432 и сл.  
Бесселевы функции 548, 637—674  
Бесселя интеграл 419  
Бета-функция Эйлера 586, 598  
— —, аналитическое продолжение 599  
Бигармоническая функция 276  
— —, комплексное представление 277  
Биномиальный ряд 487  
Буняковского неравенство 605  
Бурмана — Лагранжа ряд 422  
Вариационный принцип 359  
Вариация граничной производной 385  
— отображения 384  
— подъемной силы 393—397  
Вебера функции 652  
Вейерштрасс К. 10  
Вейерштрасса теоремы 68, 69, 436, 437  
— функции 703, 709  
Вектор потока тепла 249  
Векторное поле 235  
— — безвихревое 238  
— — потенциальное 238  
Векторное поле соленоидальное 237  
— — стационарное, плоскопараллельное 235  
Ветвь 27, 31, 35  
Вихревая точка 238  
Вихреисточник 242  
Вихрь поля 238, 241  
Волна длинная 401  
— малой амплитуды 401  
— уединенная 403  
Волновое уравнение 634  
Волны период 401  
Вторая краевая задача 229  
Вычет функции 84  
— — в полюсе 84  
— — —  $\infty$  92  
— — логарифмический 86  
Вышнеградского — Найквиста метод 464

- Гамма-функция 453, 591  
 — —, аналитическое представление 453  
 — —, асимптотическая формула 452, 598  
 — —, интегральные представления 453, 454, 595, 598  
 — —, свойства 591—598  
 — —, формулы Эйлера 595, 604  
 — —, функциональное уравнение 592  
 — —, — — второе 593  
 — —, — — третье 603  
 Гармоническая функция 199  
 — —, аналитическое продолжение 214  
 — —, многозначная 202  
 — —, сопряженная 200  
 Гаусс К. Ф. 105  
 Гахова теоремы 300, 303  
 Гельдера условие 117, 288  
 Гильберт Д. 296  
 Гильберта — Привалова краевая задача 296  
 Гиперболические функции 41  
 Гипергеометрический ряд 634  
 Гипергеометрическое уравнение 634  
 Главное значение интеграла 289  
 Годограф частотный 461  
 Годографа плоскость 337  
 — уравнение 338  
 Голоморфная функция 23  
 Граница области 16  
 Граничная задача 255  
 — теорема единственности 212  
 — точка 16, 57  
 — функция 115  
 Граничное значение 211  
 Грин Дж. 221  
 Грина формула 221  
 — функция 221  
 Грунтовые воды 406  
 Гука закон 274  
 Гурвиц А. 457  
 Гурвица критерий 457  
  
 Даламбер Ж. 9  
 Даламбера — Эйлера условия 16  
 Дарбу метод 486  
 Дарси закон 407  
 Движение грунтовых вод 406  
 — жидкости под действием силы тя-  
 жести 576  
 Двойной слой 243  
 Деление степенных рядов 420  
 Деформация 273  
 — контура 359  
 Дзета-функция Вейерштрасса 709  
  
 Дивергенция 236  
 Диполь 242  
 — точечный 242  
 Дирихле Л. 215  
 — задача 215  
 — — для круга 219  
 — — — полуплоскости 224  
 — — обобщенная 215  
 — —, формула для решения 221  
 Дифференциальные уравнения сме-  
 шанного типа 326  
 Дифференцирование изображения 505  
 — оригинала 504  
 Длинная волна 401  
 Дополнительный модуль 697  
 Дробно-линейные отображения 128  
 Дроссельный фильтр 555  
 Дуга аналитическая 162  
 — Ляпунова 116  
 Дюамеля интеграл 510  
 $\delta$ -функция 529  
  
 Единичная функция 495  
 Естественная граница функции 97  
  
 Жордана лемма 439  
 Жуковский Н. Е. 24  
 Жуковского профили 150, 264  
 — теорема 261  
 — формула 261  
 — функция 24, 29, 30  
  
 Задача Дирихле 215  
 — — обобщенная 215  
 — —, теорема единственности 216  
 — —, формула для решения 221  
 — наклонной производной 311, 312  
 — Неймана 229  
 — Трикоми 326  
 — о штампе 355  
 — Эйлера 678  
 Закон Гука 274  
 — Дарси 407  
  
 Извлечение корня из комплексных чи-  
 сел 12  
 Изображение дробных степеней 522  
 — интегралов Френеля 524  
 — функции (по Лапласу) 495, 536  
 Изолированная особая точка 78, 98  
 Изотермическая линия 249  
 Изотропное тело 274  
 Изэнтропичности условие 334

- Импеданс 548  
 Импульсные функции 529, 531, 532  
 Инверсия 15, 131  
 Интеграл Бернулли 334  
 — Бесселя 419  
 — вероятности ошибок 473  
 —, главное значение 289  
 — Дюамеля 510  
 — Лапласа 441, 496  
 — Лежандра 445  
 — Лишвица 671  
 — несобственный 61  
 — особый 289  
 — от функции комплексного переменного 43  
 — псевдоэллиптический 694  
 — —, модулярный угол 695  
 — — полный 695  
 — Пуассона 219, 224, 416, 444  
 — Раабе 602  
 — Сонина 639, 640, 673, 674  
 — Сонина — Шлеффли 640  
 —, сходящийся равномерно 62  
 — типа Коши 287  
 — Френеля 447  
 — Шварца 223  
 — — для полосы 227  
 — — — полуплоскости 224  
 — Шварца — Кристоффеля 175, 226  
 — Шлеффли 641  
 — Эйлера 417, 442, 443, 446  
 — эллиптический 184, 600, 694  
 — —, амплитуда 695  
 — —, модуль 695  
 — —, полный 600  
 Интегральная показательная функция 473  
 Интегральное преобразование 489  
 Интегральный косинус 417  
 — синус 417  
 Интегрирование изображения 506  
 — оригинала 506  
 Интенсивность вихря 241  
 — источника 240  
 Источник поля 237
- Кабель 569  
 Карлеман Т. 316  
 Карлемана система 316  
 Квадруполь 246  
 Квaziконформное отображение 321  
 Келдыша — Седова теорема 304  
 — — формула 306, 309  
 Келлога теорема 117  
 Колосов Г. В. 198  
 Колосова формула 278
- Комплексная плоскость открытая 91  
 — — полная 91  
 Комплексное представление напряжения 278  
 — — смещения 278  
 Комплексные числа 10  
 — — в показательной форме 33  
 — —, геометрическое изображение 13  
 Комплексный потенциал 239, 249, 252, 253  
 Компоненты смещения 274  
 Конденсатор Роговского 267  
 Контур звездный 49  
 — кусочно-гладкий 17  
 Конформное отображение 109  
 — — верхней полуплоскости на себя 140  
 — — — — — единичный круг 137  
 — — — — — прямоугольник 183  
 — — — с исключенными отрезками на верхнюю полуплоскость 166  
 — — внешности дуги на внешность круга 148  
 — — — круга с исключенными отрезками на внешность круга 165  
 — — — креста на внешность круга 164  
 — — второго рода 109  
 — — единичного круга на внешность «звезды» 123, 124  
 — — — — на себя 139  
 — — круга на внешность пятиугольной звезды 191  
 — — — — плоскость с исключенными лучами 123  
 — — — с выброшенной луночкой на круг 152  
 — — — с выброшенным отрезком радиуса на круг 143  
 — —, круговое свойство 109  
 — — многоугольников 170, 724  
 — — областей, ограниченных кривыми второго порядка 168  
 — —, основная задача 112  
 — — плоскости с выброшенными лучами на полосу 144  
 — — — с исключенными отрезками на плоскость с исключенными отрезками 168  
 — — — полосы на единичный круг 140  
 — — — с выброшенной луночкой на полосу 153  
 — — — с вырезом на полосу 145  
 — — — с горизонтальным вырезом 185  
 — — — полуплоскости с выброшенным отрезком на полуплоскость 142

- Конформное отображение полуплоскости с выброшенным сегментом на полуплоскость 150  
 — —, принцип соответствия границ 117  
 — —, свойство сохранения углов 109  
 — —, теорема единственности 160  
 — — эксцентричного кругового кольца на концентрическое 147  
 Конформность в  $\infty$  118  
 Косинус амплитуды 699  
 — интегральный 417  
 Коши О. 10  
 Коши — Адамара формула 71  
 — неравенство 64, 77  
 Коши — Римана условия 16, 21  
 — — — в полярных координатах 24  
 — — — обобщенные 23  
 — теорема 45, 49, 426  
 — — для многосвязных областей 54  
 — — о вычетах 85  
 — — обобщенная 49  
 — формула 54, 294  
 Коэффициент распространения волны 568  
 —, усиления 462  
 — фильтрации 407  
 Краевая задача 255  
 — — Гильберта — Привалова 296  
 — — Римана — Гильберта 310  
 — — смешанная 260  
 — — теории упругости 279  
 Краевые задачи на обтекание 255—265  
 — условия 215  
 Кратность точки 17  
 Кривая кусочно-гладкая 17  
 — простая 52  
 Кристоффель Э. 175  
 Критерий (метод) Вышнеградского — Найквиста 464  
 — Гурвица 457  
 — Найквиста — Михайлова 463  
 — устойчивости 461  
 Критические точки потока 247  
 Кумулятивный эффект 339 и сл.
- Лагранжа формула 401  
 Лаплас П. 494  
 Лапласа интеграл 441, 496  
 — метод 477  
 — преобразование 494  
 — — двустороннее 578  
 — —, свойства 504—512  
 — уравнение 199  
 — формулы обращения 499
- Лежандра интеграл 445  
 — многочлены 418, 613  
 — формула 602  
 Лемма Жордана 439  
 — Шварца 57  
 Линделёфа принцип 359  
 Линейные эллиптические системы 319  
 — эллиптические системы 319  
 Линия изотермическая 249  
 — наибольшего ската 484  
 — тока 237  
 — уровня 205, 359  
 Липшица интеграл 671  
 Лиувилль Ж. 64  
 Лиувилля теорема 64, 92  
 Логарифм комплексного числа 35  
 Логарифмическая производная 87  
 — функция 34  
 Логарифмический вычет 86  
 Локальная вариация 384  
 Лоран П. 77  
 Лорана ряд 74  
 — теорема 77
- Магнитное поле в зазоре электрической машины 267  
 — — тока 253  
 Маклорен К. 67  
 Массовые силы 273  
 Меллина преобразование 489, 578  
 — формула обращения 578  
 Мероморфные функции 83, 425  
 Метод аналогий 234  
 — Вышнеградского — Найквиста 464  
 — Дарбу 486  
 — интегральных преобразований 489  
 — итераций 233  
 — Лапласа 477  
 — операционный 492 и сл.  
 — перевала 477 и сл.  
 — последовательного отображения 412  
 — производящих функций 486  
 — сеток 232  
 — фрагментов 409  
 — Чаплыгина 337  
 — Янсена — Рэлея 335  
 Миттаг-Леффлер М. 429  
 Миттаг-Леффлера теорема 429  
 — — — обратная 429  
 Мнимая единица 10  
 Многочлены Лежандра 418, 613  
 — —, асимптотические формулы 627  
 — —, интегральные представления 626  
 — —, рекуррентные формулы 625  
 — ортогональные 610—636

- Многочлены Чебышева 418, 613  
 — —, экстремальное свойство 633  
 — Чебышева — Лагерра 614  
 — Чебышева — Эрмита 614  
 — Якоби 614  
 Модуль дополнительный 697  
 — комплексного числа 13  
 — производной 111  
 — эллиптического интеграла 695  
 Модулярный угол 695  
 Момент диполя 242  
 — квадруполя 246  
 Монте-Карло принцип 363  
 Морера Г. 65  
 Мореры теорема 65  
 Мультиполь 247
- Напряжение** 273  
 — касательное 273  
 —, комплексное представление 278  
 — нормальное 273  
 — операторное 548  
 Нейман К. 229  
 Неймана задача 229  
 Неопределенный интеграл 48  
 Непрерывность функции 20  
 — — равномерная 20  
 Неравенство Буняковского 605  
 — Коши 64, 77  
 Несобственный интеграл 61  
 Норма 604  
 Нормированная система функций 605  
 Носитель обобщенной функции 533  
 Нуль, порядок 73  
 — функции 73
- Область** 16  
 — замкнутая 16  
 — звездная 359  
 — многосвязная 17  
 — ограниченная 17  
 — односвязная 17  
 — существования аналитической функции 97  
 — сходимости ряда 71, 77  
 Обобщенная задача Дирихле 213  
 — теорема Коши 49  
 — функция класса  $\mathcal{A}^*$  532  
 — — класса  $\mathcal{B}^*$  536  
 Обобщенный оригинал 536  
 — принцип экстремума 211  
 — ряд степенной 99  
 — — Фурье 604  
 Обращение контурного интеграла 585  
 — степенных рядов 424
- Обтекание кругового цилиндра 261  
 — отрезка 269  
 — произвольного профиля 263  
 — профилей Жуковского 264  
 — со срывом струй 260  
 — тел газовыми потоками 333  
 Общая показательная функция 43  
 — степенная функция 42  
 Окрестность 16  
 — бесконечно удаленной точки 91  
 Операторная система уравнений 545  
 Операторное «напряжение» 548  
 — решение 541  
 — «сопротивление» 548  
 — уравнение 541  
 Операторный «закон Ома» 548  
 — метод расчета электрических контуров 548  
 — — решения дифференциальных уравнений 557  
 — «ток» 548  
 Операционный метод 492 и сл.  
 — —, предельные соотношения 521  
 — —, свойства 504—512  
 — —, теоремы разложения 515  
 Оригинал-функция 494  
 — — особый 523  
 Ортогональное преобразование 109  
 Ортогональности условия 109  
 Ортогональные многочлены 610  
 — системы функций 605  
 — — —, единственность 609  
 — — —, нормировка 605  
 — — — с весом 609  
 Основная теорема алгебры 455  
 Основной вариационный принцип 359  
 Основные функции 532  
 — —, сходимость 532  
 Особая точка 98  
 — — ветвления, алгебраическая 98  
 — — — конечного порядка 98  
 — — — трансцендентная 99  
 — — гармонической функции 205, 210  
 — — изолированная 78, 98  
 — — — в бесконечности 91  
 — — многозначного характера 98  
 — — однозначного характера 98  
 — —, существенно особая 78, 210  
 — — устранимая 78, 210  
 Остроградский М. В. 280  
 Ось действительная 12  
 — мнимая 12  
 Отображение 18  
 — дробно-линейное 129  
 — квазиконформное 321

- Отображение конформное 109  
 — однолистное (взаимно однозначное) 18  
 — суперпозиция 18  
 Отображения, главная линейная часть 105  
 Палатини формула 227  
 Параллелограмм периодов 688  
 Первообразная 48  
 Перевала метод 477  
 Период волны 401  
 — интеграла 53, 201  
 — функции 683  
 — — основной 685  
 Периодические функции 682  
 — —, полосы периодов 686  
 Плоскость годографа 537  
 Поверхность модуля 38  
 Подъемная сила крыла самолета 248, 393  
 Показатель роста 494  
 Показательная форма комплексного числа 33  
 — функция 32  
 Поле векторное 235  
 — — безвихревое 238  
 — —, вихрь или ротор 238  
 — —, дивергенция или расхождение 236  
 — — соленоидальное 237  
 — магнитное 253  
 — скоростей 245  
 — — стационарное плоскопараллельное 235  
 — — течения жидкости 245  
 — тепловое 248  
 — электростатическое 251, 265  
 Полная аналитическая функция 97  
 Полный эллиптический интеграл 600  
 Положительное направление обхода 17  
 Полосной фильтр 556  
 Полус 78, 210  
 Порядок нуля 73  
 — полюса 80  
 —  $\alpha$ -точки 90  
 — связности 17  
 — целой функции 437  
 Постоянная Эйлера 592  
 Потенциал 200  
 — двойного поля 244  
 — поля 239, 251  
 — — комплексный 239  
 — — плоского диска 584  
 — — простого слоя 243  
 Потенциальная функция поля 239  
 Поток адиабатный 334  
 — векторного поля 236  
 Правило дробных показателей 526  
 Правильная система контуров 426  
 Предельные соотношения преобразований Лапласа 521  
 Преобразование Лапласа 489, 499  
 — — двустороннее 578  
 — Меллина 489, 578  
 — Фурье 574, 575  
 — Ханкеля 581  
 Привалов И. И. 296  
 Принцип аналитического продолжения 163  
 — — — для гармонической функции 214  
 — аргумента 88  
 — Линделёфа 359  
 — локализации 388  
 — максимума модуля 56  
 — Монтея 363  
 — непрерывного продолжения 93  
 — отвердевания 251  
 — симметрии 158, 213  
 — соответствия границ 117  
 — экстремума 204  
 — — обобщенный 211  
 Проблема Рауса — Гурвица 456  
 Произведение комплексных чисел 11  
 Производная обобщенной функции 534  
 — функции 21  
 — —, геометрическая интерпретация 111  
 — — обратной 23  
 Производные высших порядков 63  
 Производящие функции 486, 614  
 Профили Жуковского 150  
 — —, обтекание 264  
 Пуассон С. 219  
 Пуассона интеграл 219, 224, 416, 444  
 Раабе интеграл 602  
 Равномерная непрерывность функции 20  
 — сходимости 58  
 — — интеграла 62  
 — — последовательности функций 58  
 — — ряда 60  
 Радиус сходимости степенного ряда 71  
 Распределение температур в канале 369  
 Рауса — Гурвица проблема 456  
 Регулярная функция 23

- Риман Б. 10  
 Римана — Гильберта краевая задача 310  
   — теорема 113  
 Риманова поверхность 100  
   — — арксинуса 102  
   — — корня 101  
   — — логарифма 102  
   — — функции, обратной к функции Жуковского 102  
 Ротор поля 238  
 Руше теорема 454  
 Ряд биномиальный 487  
   — Бурмана — Лагранжа 422  
   — Лорана 74, 415  
   — степенной 70  
   — Тейлора 67, 415  
   — тригонометрический 422  
   — функциональный 58  
   — — равномерно сходящийся 60  
   — Фурье 420  
   — Фурье — Бесселя 648  
  
 Свертка 510  
 Свертывание оригиналов 510  
 Седловая точка 483  
 Сигма-функция Вейерштрасса 710  
 Силовая функция 252  
 Силы массовые 273  
   — поверхностные 273  
 Симметрия относительно окружности 15, 131  
 Синус 36  
   — амплитуды 699  
   — интегральный 417, 442  
   — эллиптический 184, 694, 696  
 Система Карлемана 316  
   — с простой обратной связью 462  
 Скругление углов 192  
 Смешанные задачи для гармонических функций 313  
 Сонина интеграл 639, 673  
   — формула 673  
 Сонина — Шлеффли интеграл 640  
 Сопряженные гармонические функции 200  
   — комплексные числа 10  
 Сохоцкий Ю. В. 81  
 Сохоцкого теорема 81, 291  
   — формула 291  
 Спектральная функция 576  
 Степенная функция общая 42  
 Степенной ряд 70  
   — — обобщенный 99  
   — —, обращение 424  
   — —, радиус сходимости 71  
  
 Степенной ряд, теорема единственности 72  
 Степень комплексного числа 12  
 Стереографическая проекция 90  
 Стирлинга формула 482, 598  
 Стодолы условие 461  
 Сток 237  
 Суперпозиция отображений 18  
 Существенно особая точка 78, 210  
 Сферические функции 631  
  
 Таблица оригиналов и их изображений 538—540  
 Тейлора ряд 67, 415  
   — —, коэффициенты 415  
   — —, равномерная сходимость 67.  
   — формула 67  
 Тейлоровские разложения элементарных функций 68  
 Теорема Абеля 70, 684  
   — Бернулли 399  
   — Вейерштрасса 68, 69, 436, 437  
   — Гахова 300, 303  
   — Гурвица 457  
   — единственности 73, 211  
   — — граничная 212  
   — — разложений в ряд 72, 78  
   — Жуковского 261  
   — запаздывания 507  
   — Каратеодори 116  
   — Келдыша — Седова 304  
   — Келлога 117  
   — Коши 45, 49, 420  
   — — для многосвязных областей 54  
   — — обобщенная 49, 323  
   — Коши — Лиувилля 64, 92  
   — — — обобщенная 115  
   — Лорана 77  
   — Миттаг-Леффлера 429  
   — — — обратная 429  
   — Мореры 65  
   — о вычетах 85, 92  
   — — соответствии границ 115  
   — — среднем 56, 204  
   — — — обратная 206  
   — об ортогонализации 607  
   — подобия 504  
   — разложения 515, 517  
   — Римана 113  
   — Римана — Шварца 158  
   — Руше 319, 454  
   — сложения для бесселевых функций 670  
   — — — показательной функции 32  
   — смещения 502  
   — Сохоцкого 81, 291

- Теорема умножения 509  
 — — двойственная 511  
 — — обобщенная 512  
 — Шварца 537  
 — Шварца — Кристоффеля 175  
 — Эфроса 512  
 Тейлор Б. 67  
 Тейлора ряд 67  
 — формула 67  
 Теория пробивания 347  
 Тепловое поле 248  
 Тока линия 237  
 — трубка 237  
 — функция 237, 332  
 Тонкое сопло 330  
 Точка бесконечно удаленная 90  
 — ветвления 98  
 — — алгебраическая 98  
 — — конечного порядка 98  
 — — логарифмическая 99  
 — — трансцендентная 99  
 — граничная 16  
 — исключительная 468  
 — кратная 17, 206  
 — критическая 247  
 — наибольшей деформации 359, 368  
 — особая изолированная 78, 98  
 — — устранимая 78, 210  
 — перевала 483  
 — простая 17, 206  
 — разветвления потока 263  
 — седловая 483  
 — схода потока 263  
 Точки, симметричные относительно окружности 130  
 Тригонометрические функции 36, 39  
 — — обратные 41  
 Трикоми Ф. 326  
 — задача 326  
 Трубка тока 237  
 Тэта-функция Якоби 712
- Угол в бесконечно удаленной точке 133  
 — модулярный 695  
 Удар пластинки о воду 270  
 Ударные задачи 259  
 Уединенная волна 403  
 Упругость, основные уравнения 273—279  
 Уравнение Лапласа 199  
 — неразрывности 333  
 — цилиндрических функций 547  
 Уравнения газовой динамики 334  
 — годографа 338
- Уравнения движения 334  
 — равновесия 273  
 — с частными производными 315  
 Условия Гёльдера 117, 288  
 — Даламбера — Эйлера 21  
 — изэнтропичности 334  
 — Коши — Римана 16, 21  
 — ортогональности 109  
 — Стодолы 461  
 — Чаплыгина 263  
 — эллиптичности 320  
 Установившийся режим 520  
 Устойчивости критерий 461  
 Устранимая особая точка 78, 210
- Фильтр 554  
 — дроссельный 555  
 — полосной 556  
 Флюктует 407  
 Формула Бернулли — Эйлера 247  
 — Ахнезера — Голузина 723  
 — Грина 221  
 — Дюамеля 511  
 — Жуковского 261  
 — Колосова 278  
 — Келдыша — Седова 306, 309  
 — Коши 54  
 — — для неограниченных областей 294  
 — — — производных 63  
 — —, обобщение 325  
 — Коши — Адамара 70  
 — обращения Лапласа 499  
 — — Меллина 578  
 — — Фурье 575  
 — — Ханкеля 582  
 — Остроградского 280  
 — Палатини 227  
 — представления 317  
 — Римана — Грина 238  
 — Сонина 673  
 — Сохоцкого 291  
 — Стирлинга 282, 598  
 — Тейлора 67  
 — Чаплыгина 248  
 — Чизотти 228  
 — Фока 663  
 — Фурье — Бесселя 582  
 — — — обобщенная 607  
 — Шварца — Кристоффеля 175, 178, 179  
 — Эйлера 33, 595  
 Функции гиперболические 41  
 — — обратные 41  
 — тригонометрические 36, 39  
 — — обратные 41



## Функции ортогональные 605

— — с весом 609

## Функция аналитическая 23, 97

— — полная 97

— Бесселя 419, 637

— бета Эйлера 586, 598

— бигармоническая 276

— Вебера 652

— Вейерштрасса 703, 709

— вероятности ошибок 416, 473

— гамма Эйлера 453, 591

— гармоническая 199—215

— голоморфная 23, 83

— граничная 115

— Грина 221

— двоякопериодическая 685

— дифференцируемая 21

— дробная 83, 425

— единичная 495

— Жуковского 24, 29

— —, обратная 30

— изображение (по Лапласу) 495, 536

— импульсная 529

— — нулевого порядка 529

— — первого порядка 531

— конечного порядка 437

— Лежандра 629

— — второго рода 631

— — первого рода 630

— присоединенная 633

— линейная 18

— логарифмическая 34

— мероморфная 83, 425

— напряжения 275

— Неймана 652

— непрерывная 20

— — равномерно 20

— обратная 18

— общая степенная 42

— ограниченная 20

— периодическая 682

— показательная 32, 43

— потенциальная 239

— производящая 486

— просто периодическая 682

— регулярная 23

— силовая 252

— сложная 18

— спектральная 576

— сферическая 631

— тока 237

## Функция тока тепла 249

— тригонометрическая 36, 39

— целая 83

— цилиндрическая 419, 485, 637

— Чебышева — Эрмита 634

— Ханкеля 650

## Функция эллиптическая 184, 688

— —, свойства 688—692

— Якоби 184, 712

## Фурье преобразование 574

— формула обращения 575

## Ханкеля преобразование 581

— формула обращения 582

— функция 650

Характеристическое сопротивление  
линии 569

## Хевисайда метод 492, 495

## Циклическая постоянная 53, 201

## Цилиндрические функции 485, 637

— —, асимптотические формулы 486,  
660— —, интегральное представление  
639

— —, разложение в ряд 641

— —, рекуррентные соотношения 643

## Циркуляция поля 238

## Чаплыгин С. А. 198

Чаплыгина метод 337

— условие 263

Чаплыгина формула 248

Чебышев П. Л. 418

Чебышева многочлены 418, 613

Чебышева — Эрмита функция 634

Чизотти формула 228

## Шварц Г. 57

Шварца задача 223

— интеграл 223

— Кристоффеля интеграл 175, 179

— лемма 57

Шварц Л. 537

Шварца теорема 537

## Эйлер Л. 9

Эйлера задача 678

— постоянная 592

— формулы 33, 595

Экстремум, обобщенный принцип 211

Электростатическое поле 251

— — у краев плоского конденсатора  
265

## Эллиптические функции 688

— — Вейерштрасса 703, 709, 710

— — Якоби 184, 696, 699

Эллиптический интеграл 184, 694

— — полный 600

— синус 184, 694, 696