

1.1 ЗАДАЧА 3

1.1.1 Задание

Для заданной схемы балки требуется:

1. Построить эпюры Q и M в долях ql и ql^2 .
2. Подобрать номер двутаврового сечения из условия прочности.
3. Определить прогиб и угол поворота сечения на свободном конце аналитическим методом **или** по Верещагину.

Данные для расчёта выбираются из Таблица 1 по предпоследней цифре зачётной книжки, а расчётная схема выбирается из Рис. 1, по последней цифре зачётной книжки.

Таблица 1 - Расчётные данные для третьей задачи

№ строки	P	M	a	b
0	$ql/4$	$ql^2/8$	$1/4$	1
1	$ql/2$	$ql^2/4$	$1/2$	$3l/4$
2	ql	$ql^2/2$	$3l/4$	$1/2$
3	$ql/4$	ql^2	1	$1/4$
4	$ql/2$	$ql^2/8$	$3l/4$	1
5	ql	$ql^2/4$	$1/2$	$1/4$
6	$ql/4$	$ql^2/2$	$1/4$	$1/2$
7	$ql/2$	ql^2	1	$3l/4$
8	ql	$ql^2/4$	$1/2$	1
9	$ql/2$	$ql^2/2$	$1/4$	$1/2$

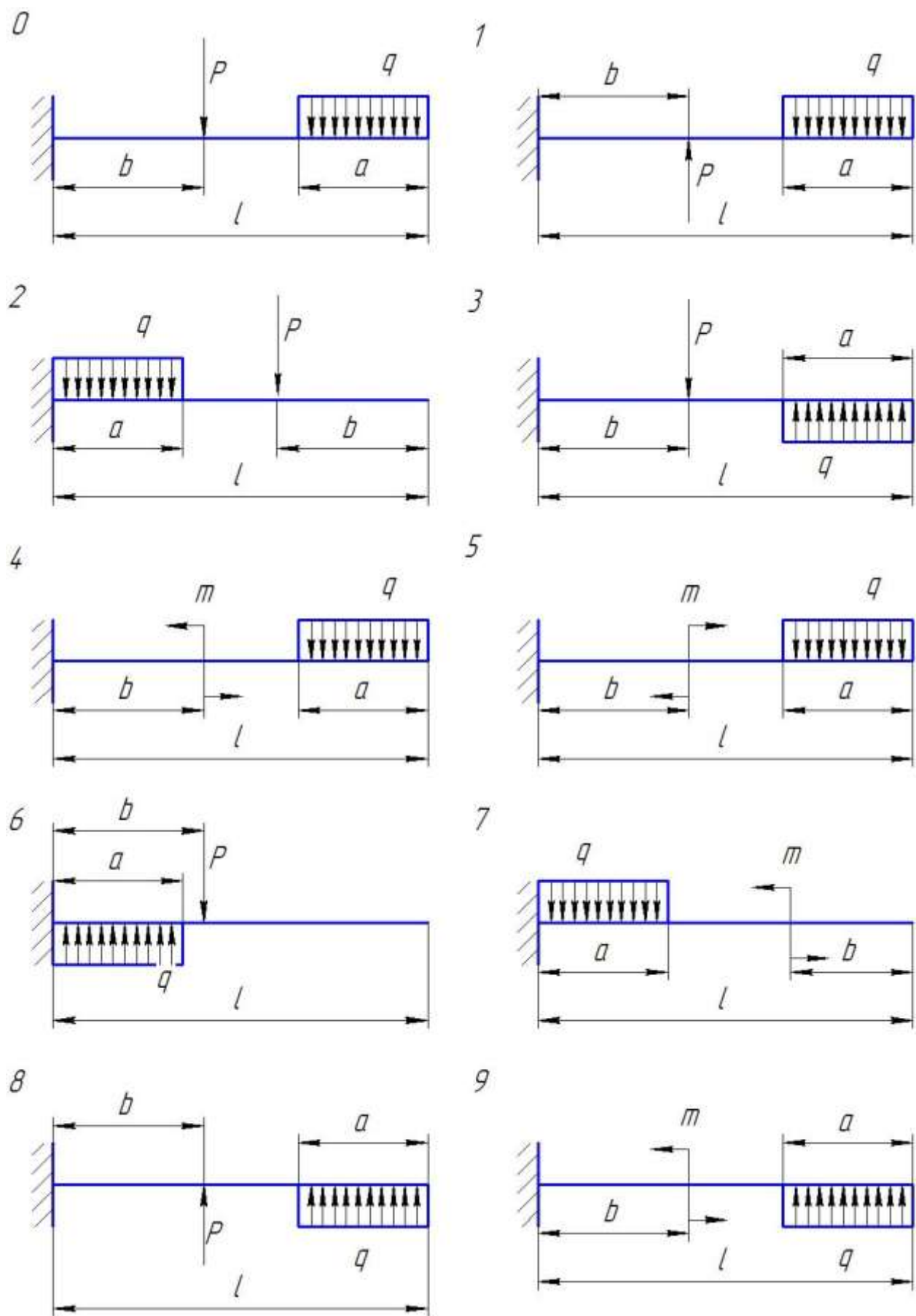


Рис. 1 - Расчётные схемы для третьей задачи

1.1.2 Пример решения задачи 3

При построении эпюр необходимо учитывать следующее:

а) поперечная сила Q в рассматриваемом сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения Рис. 2.;

б) изгибающий момент M в рассматриваемом сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести сечения.

в) правила знаков для Q и M , четко представляя, какую часть балки рассматривают: левую или правую (см. рис. Рис. 2 и Рис. 3).

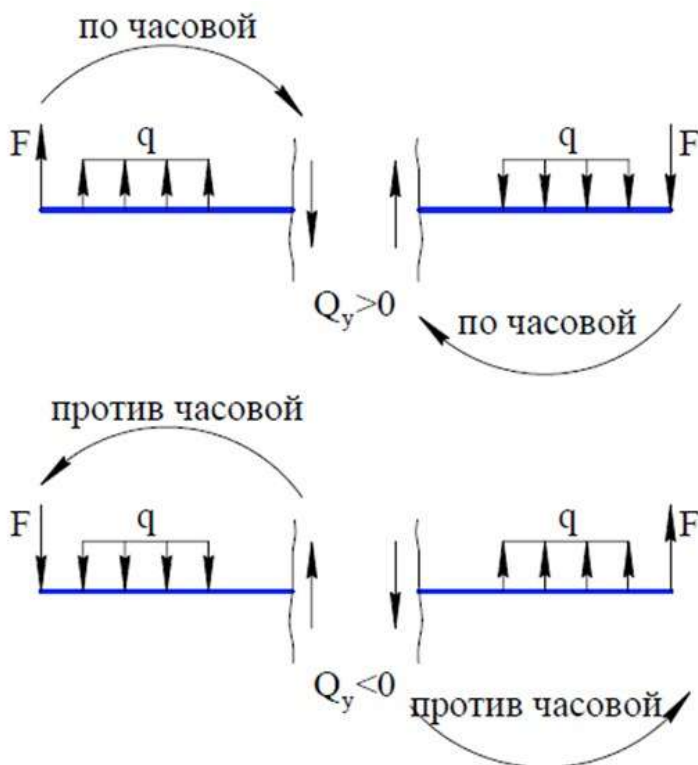


Рис. 2 – Правило знаков для поперечной силы

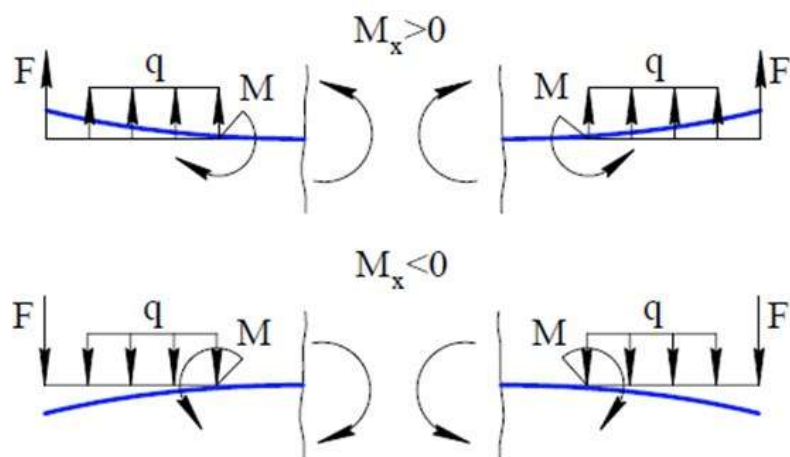


Рис. 3 – Правило знаков для изгибающего момента

Дано: $M = ql^2/2$, $P = ql/2$, $a_1 = l/2$, $a_2 = l$ (рис. 12,а).

Определение реакций

Обозначим точку глухой заделки буквой А. При таком способе крепления в заделке возникают реактивный момент M_A и реактивная сила R_A .

Чтобы найти эти реакции, необходимо составить уравнения моментов относительно двух точек балки, одна из которых должна быть точкой крепления, т.е. А:

$$\begin{aligned} \Sigma M(A) &= 0, \\ -M_A + q \frac{l}{2} \frac{l}{4} + M + Pl &= 0, \\ M_A &= q \frac{l^2}{8} + ql^2 + q \frac{l}{2} l = \frac{13}{8} ql^2. \end{aligned}$$

Вторая точка может быть любой, например В:

$$\begin{aligned} \Sigma M(B) &= 0, \\ -M_A + R_A l - q \frac{l}{2} \frac{3}{4} l + M &= 0, \\ R_A &= \frac{\frac{13}{8} ql^2 + \frac{3}{8} ql^2 - ql^2}{l} = ql. \end{aligned}$$

Для проверки необходимо спроецировать все внешние силы и реакции на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = R_A - q \frac{l}{2} - P = ql - q \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} = 0.$$

Результат «0» показывает, что реакции найдены верно.

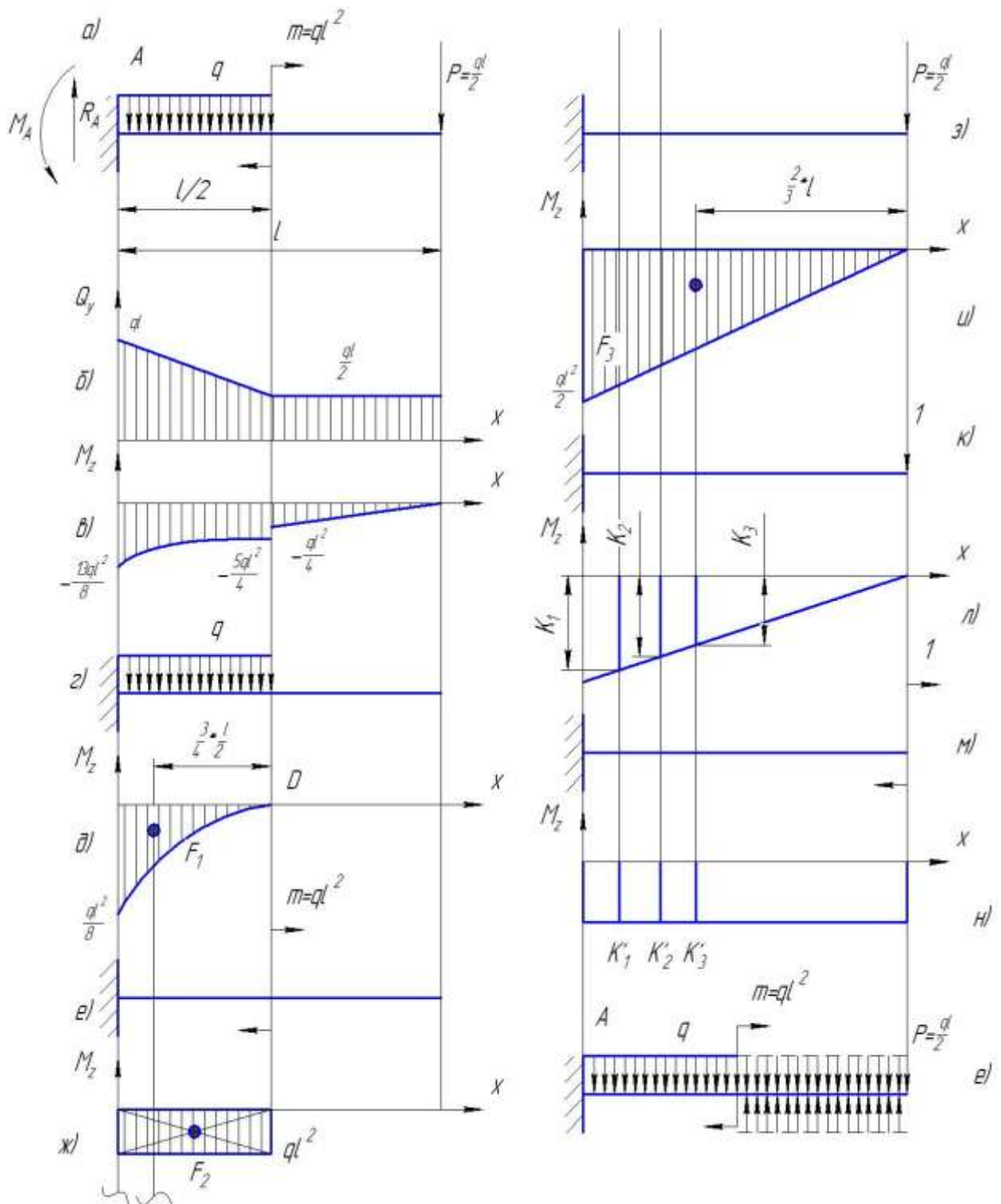


Рис. 4 – Построения к задаче 3

Построение эпюры поперечных сил Q_X и изгибающих моментов M_X . Балка имеет два участка.

Участок I. Введем текущую координату x_1 на первом участке (рис.12,а):

$$0 \leq x_1 \leq l/2 .$$

$$Q_{x_1} = R_A - qx_1 \quad \text{при } x_1=0 \quad Q_X = R_A = ql,$$

$$\text{при } x_1 = l/2 \quad Q_X = R_A - ql/2 = ql/2.$$

Наносим эти точки на эпюру Q_X и соединяем прямой линией, т.к. зависимость $Q_{X1}(x_1)$ линейна (Рис. 4,б):

$$M_{X1} = -M_A + R_A x_1 - q \frac{x_1^2}{2}, \quad \text{при } x_1 = 0 \quad M_{X1} = -M_A = -\frac{13}{8} ql^2,$$

$$\text{при } x_1 = \frac{l}{2} \quad M_{X1} = -\frac{13}{8} ql^2 + \frac{1}{2} ql^2 - \frac{1}{8} ql^2 = -\frac{5}{4} ql^2.$$

Наносим эти две точки на эпюру M_X (Рис. 4,в) . Зависимость $M_{X1}(x_1)$ квадратична, поэтому на первом участке эпюра M_X будет изображаться квадратичной параболой выпуклостью вверх. Определим положение вершины параболы

$$\text{Т.к. } M'_{x1} = Q_{x1}, \text{ то } Q_{x1} = R_A - qx_1 = 0,$$

откуда

$$x_1 = R_A/q = ql/q = l,$$

т.е. вершина параболы находится за пределами участка $0 \leq x_1 \leq l/2$.

Участок 2. Введем текущую координату x_2 на втором участке (Рис. 4,а):

$$l/2 \leq x_2 \leq l,$$

$$Q_{X2} = R_A - ql/2 = ql/2.$$

Строим эту прямую на втором участке эпюры Q_X (Рис. 4,б):

$$M_{X2} = -M_A + R_A \cdot x_2 - q \frac{l}{2} \left(x_2 - \frac{l}{4} \right) + M,$$

$$\text{при } x_2 = \frac{l}{2} \quad M_{X2} = -\frac{13}{8} ql^2 + ql \cdot \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right) + ql^2 = \frac{1}{4} ql^2,$$

$$\text{при } x_2 = l \quad M_{X2} = -\frac{13}{8} ql^2 + ql \cdot l - q \frac{l}{2} \left(l - \frac{l}{4} \right) + ql^2 = 0.$$

Наносим эти две точки на втором участке эпюры M_X и соединяем прямой линией, т.к. зависимость $M_{X2}(x_2)$ линейна (Рис. 4,в):

$$|Q_{X \max}| = ql, \quad |M_{X \max}| = \frac{13}{8} ql^2.$$

Определение размеров поперечного сечения балки

Из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеем

$$\frac{|M_{X \max}|}{W} \leq [\sigma],$$

где W – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.
Тогда

$$W = \frac{|M_{X \max}|}{[\sigma]}.$$

Чтобы найти численное значение W , необходимо подсчитать величину $M_{X \max}$:

$$M_{X \max} = 13/8 ql^2 = 13/8 \cdot 10 \cdot 103 \cdot 22 = 6,5 \cdot 10^4 \text{ Нм},$$

тогда

$$W = \frac{6,5 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^6} = 8,13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

С другой стороны, для прямоугольного сечения $W = \frac{bh^3}{6}$. С учетом, что $h/b = 2$ $W = 2/3 b^3$. Тогда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W}{2}} = 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 8,13}{2}} = 0,23 \text{ м},$$

$$h = 0,46 \text{ м}.$$

Построение эпюры касательных напряжений по высоте сечения
Определим максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_{\max}|}{bh} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,23 \cdot 0,46} = 28,4 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,28 \text{ МПа},$$

где $Q_{X \max} = ql = 10 \cdot 103 \cdot 2 = 2 \cdot 10^4 \text{ Н}$.

Касательное напряжение в т.С.:

$$\tau_c = \frac{9}{8} \frac{|Q_{\max}|}{bh} = \frac{9}{8} \frac{2 \cdot 10^4}{0,23 \cdot 0,46} = 21,3 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,21 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений по высоте сечения (Рис. 4.).

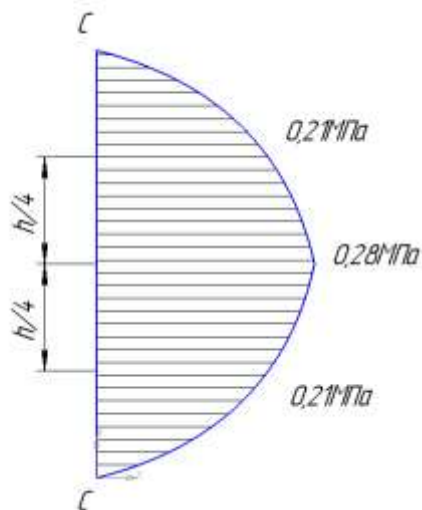


Рис. 5 – Эпюра касательных напряжений

Определение угла поворота и прогиба на свободном конце балки аналитическим способом

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки на первом участке имеет вид

$$EJy_1'' = -M_A + R_A x_1 - q \frac{x_1^2}{2}.$$

Проинтегрировав, получаем:

$$EJy_1' = -M_A x_1 + R_A \frac{x_1^2}{2} - q \frac{x_1^3}{6} + c_1,$$

$$EJy_1 = -M_A \frac{x_1^2}{2} + R_A \frac{x_1^3}{6} - q \frac{x_1^4}{24} + c_1 x_1 + c_2.$$

Точка А крепления балки принадлежит первому участку. Из условий крепления: при $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $y_1' = 0$. Подставив во второе и третье уравнения эти данные, получим:

$$c_1 = 0, c_2 = 0.$$

Для составления дифференциальных уравнений на втором участке необходимо по условиям Клебша продолжить распределенную нагрузку q до правого конца балки, уравновесив это продолжение такой же нагрузкой, но противоположно направленной (Рис. 6).

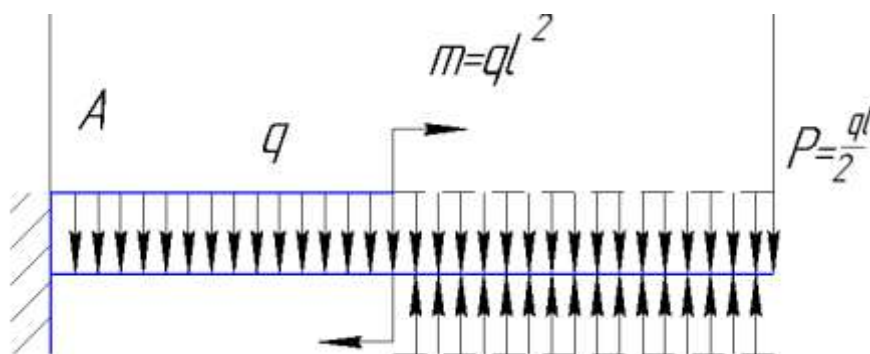


Рис. 6 – Учет условий Клебша

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$EJy_2'' = -M_A + R_A x_2 - q \frac{x_2^2}{2} + M \left(x_2 - \frac{l}{2} \right)^0 + q \frac{\left(x_2 - \frac{l}{2} \right)^2}{2}.$$

Проинтегрировав с учетом $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, получаем:

$$EJy_2' = -M_A x_2 + R_A \frac{x_2^2}{2} - q \frac{x_2^3}{6} + M \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) + q \frac{\left(x_2 - \frac{l}{2} \right)^3}{6},$$

$$EJy_2 = -M_A \frac{x_2^2}{2} + R_A \frac{x_2^3}{6} - q \frac{x_2^4}{24} + M \frac{\left(x_2 - \frac{l}{2} \right)^2}{2} + q \frac{\left(x_2 - \frac{l}{2} \right)^4}{24}.$$

Точка В (свободный конец балки) принадлежит второму участку и имеет координату $x_2 = l$. Чтобы найти угол поворота θ_B в этой точке, необходимо подставить $x_2 = l$ в уравнение углов поворота второго участка:

$$\theta_B = \frac{1}{EJ} \left[-M_A l + R_A \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} + M \left(l - \frac{l}{2} \right) + q \frac{\left(l - \frac{l}{2} \right)^3}{6} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left[-\frac{13}{8} q l^2 l + q l \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} + q l^2 \frac{l}{2} + q \frac{l^3}{48} \right] = -\frac{37}{48} \frac{q l^3}{EJ}.$$

Знак «-» показывает, что сечение В повернется по часовой стрелке.

Чтобы найти прогиб на свободном конце, подставим $x_2 = l$ в уравнение прогибов для второго участка:

$$y_B = \frac{1}{EJ} \left[-M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} + M \frac{\left(l - \frac{l}{2} \right)^2}{2} + q \frac{\left(l - \frac{l}{2} \right)^4}{24} \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left(-\frac{13}{8} q l^2 \frac{l^2}{2} + q l \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} + q l^2 \frac{l^2}{8} + q \frac{l^4}{384} \right) = -\frac{215}{384} \frac{q l^4}{EJ}.$$

Знак «-» показывает, что т. В сместится вниз, в сторону отрицательных значений «у».

Определение угла поворота и прогиба на свободном конце балки методом Верещагина

Как было показано ранее, эпюра M_{X1} на первом участке изображается квадратичной параболой, причем вершина параболы находится за

пределами первого участка. Поэтому, применяя метод Верещагина, нельзя использовать способ расчленения эпюры. Необходимо использовать

способ расчленения нагрузки. Для этого построим эпюры изгибающих моментов от каждой нагрузки по отдельности.

Построим эпюру M_{pq} (Рис. 4,д) от распределенной нагрузки q (Рис. 4,г). Будем использовать левую систему координат, чтобы не находить реакции в т.А от каждого силового фактора:

$$0 \leq x_1 \leq l/2, M_{pq1} = 0,$$

$$l/2 \leq x_2 \leq l, \quad M_{pq1} = -q \frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2}; \quad \text{при } x_2 = l/2 \quad M_{pq1} = 0,$$

$$\text{при } x_2 = l \quad M_{pq2} = -q \cdot l^2/8.$$

Чтобы найти положение вершины параболы, приравняем Q_{pq2} к нулю:

$$Q_{pq2} = q(x_2 - l/2) = 0, \text{ отсюда } x_2 = l/2,$$

т.е. вершина параболы находится в т.Д.

$$\text{Площадь эпюры равна } F_1 = \frac{1}{3} \left(-\frac{ql^2}{8} \right) \frac{l}{2} = -\frac{ql^3}{48}.$$

Строим эпюру M_{pM} (рис. 12,ж) от момента M (рис. 12,е):

$$0 \leq x_1 \leq l/2, M_{pM1} = 0,$$

$$l/2 \leq x_2 \leq l, \quad M_{pM2} = -M = -ql^2.$$

$$\text{Площадь эпюры равна } F_2 = (-ql^2) \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^3}{2}.$$

Строим эпюру M_{pP} (рис. 12,и) от силы P (рис. 12,з):

$$0 \leq x \leq l, M_{pP} = -P \cdot x, \quad \text{при } x = 0 \quad M_{pP} = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad M_{pP} = -q \cdot l^2/2.$$

$$\text{Площадь эпюры равна } F_3 = \frac{1}{2} \left(-q \frac{l^2}{2} \right) \cdot l = -\frac{ql^3}{4}.$$

Построим единичную эпюру M_1 (Рис. 4,л) от силы, равной единице, приложенной на свободном конце балки (Рис. 4,к):

$$0 \leq x \leq l, M_1 = -1 \cdot x, \quad \text{при } x = 0 \quad M_1 = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad M_1 = -l,$$

$$\text{tg } \alpha = -l/l = -1.$$

Проецируя центры тяжести площадей F_1 , F_2 и F_3 на эпюру M_1 , получим

$$K_1 = \left(\frac{3l}{4} + \frac{l}{2} \right) \text{tg } \alpha = -\frac{7}{8}l, \quad K_2 = \left(\frac{1l}{2} + \frac{l}{2} \right) \text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}l, \quad K_3 = \left(\frac{2}{3}l \right) \text{tg } \alpha = -\frac{2}{3}l.$$

Построим единичную эпюру M^1_1 (Рис. 4,н) от момента, равного единице, приложенного на свободном конце балки (Рис. 4,м):

$$0 \leq x \leq l, \quad M^1_1 = -1.$$

Проецируя центры тяжести площадей F_1 , F_2 и F_3 на эпюру M_1 , получим

$$K^1_1 = K^1_2 = K^1_3 = -1.$$

Угол поворота сечения В равен:

$$\theta_B = \frac{1}{EJ} (F_1 K^1_1 + F_2 K^1_2 + F_3 K^1_3) = \frac{ql^3}{EJ} \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{37}{48} \frac{ql^3}{EJ}.$$

Знак «+» показывает, что сечение «В» повернется в сторону единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

Учитывая, что $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,23 \cdot 0,46^3}{12} = 18,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$, получим численное значение угла поворота:

$$\theta_B = \frac{37}{48} \cdot \frac{10^4 \cdot 2^3}{10^{10} \cdot 18,7 \cdot 10^{-4}} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Прогиб т. В равен :

$$y_B = \frac{1}{EJ} (F_1 K_1 + F_2 K_2 + F_3 K_3) = \frac{ql^4}{EJ} \left(\frac{1}{48} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{215}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Знак «+» показывает, что т.В сместится в сторону, соответствующую направлению единичной силы, т.е. вниз.

Численное значение прогиба равно:

$$y_B = \frac{215 \cdot 10^4 \cdot 2^4}{384 \cdot 10^{10} \cdot 18,7 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,24 \text{ см.}$$

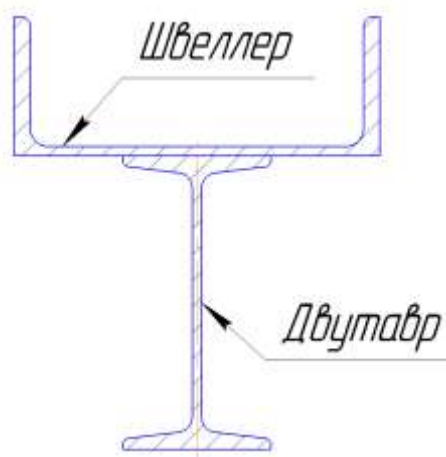
1.2 ЗАДАЧА 4

1.2.1 Задание

Для данной расчетной схемы стальной балки, сечение которой состоит из швеллера и двутавра, требуется:

Построить эпюры Q и M в долях ql^2 .

Определить положение нейтральной оси и вычислить осевой момент инерции сечения относительно этой оси. Форма сечения



Построить эпюру распределения нормальных напряжений по высоте опасного сечения.

Нарисовать характер изогнутой оси балки.

Определить прогиб балки в пролете аналитическим методом.

Данные для решения задачи выбрать из **Таблица 2**, по предпоследней цифре зачётной книжки, расчетную схему по **Рис. 7**, по последней цифре зачётной книжки.

Таблица 2 - Расчётные данные для четвёртой задачи

№ варианта	$P, кН$	$M, кНм$	a	b	c	N <i>швеллера</i>	N <i>двутавра</i>
1	10	2	l	$3/4l$	$l/2$	16	12
2	20	5	$3/4l$	$l/2$	$l/8$	18	14
3	30	10	$l/2$	$l/4$	$l/4$	20	16
4	40	12	$l/4$	$l/8$	$3/4l$	22	18
5	10	8	$l/2$	$l/4$	$l/2$	24	20
6	20	2	$3/4l$	$l/2$	$l/4$	27	22
7	30	5	$l/2$	$3/4l$	$l/8$	30	24
8	40	15	$l/4$	$l/4$	$l/4$	33	27
9	20	5	$l/4$	$l/8$	$l/2$	36	30
0	30	4	$l/2$	$l/2$	$3/4l$	40	33

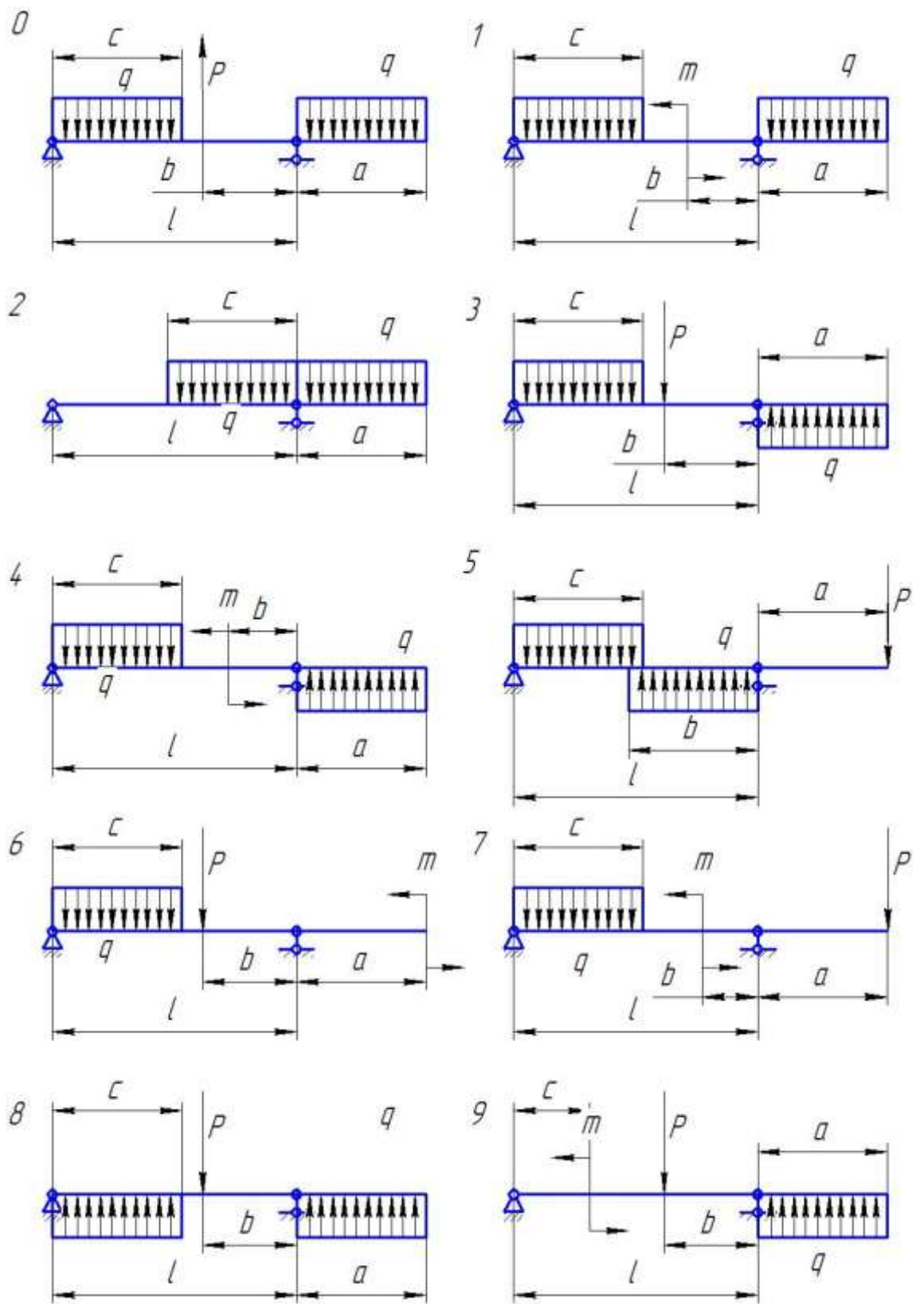


Рис. 7 – Расчётные схемы для четвёртой задачи

1.2.2 Пример решения задачи 4

Дано: $m = ql^2/4$, $a_1 = l/2$, $a_2 = l$ Расчётная схема на Рис. 8,а.

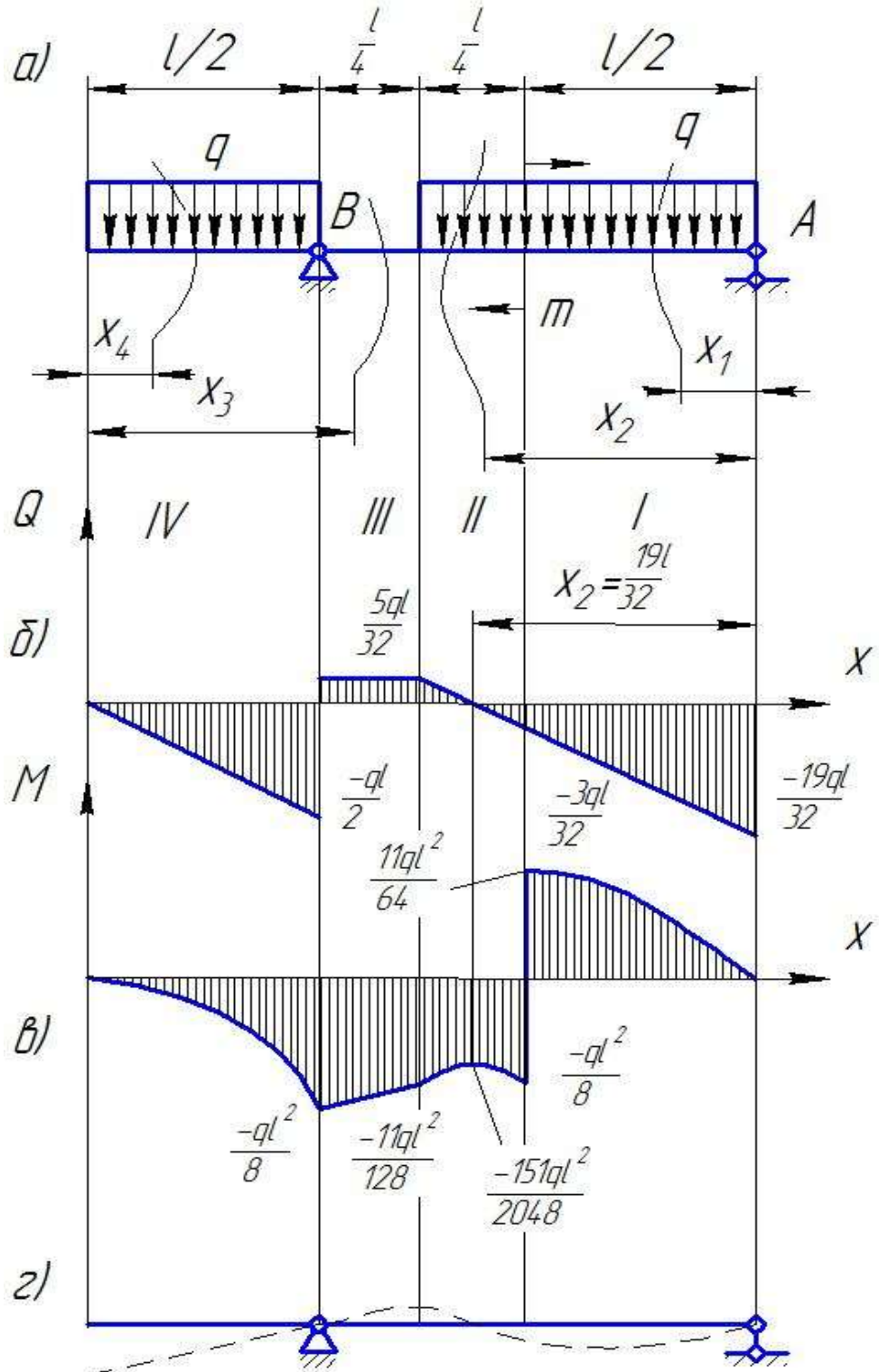


Рис. 8 - Построения к задаче 4

Построение эпюр Q и M

Назначаем и определяем опорные реакции R_A и R_B . Для балок на двух опорах со сложной нагрузкой реакции целесообразно определить, используя два уравнения равновесия – сумма моментов внешних сил относительно точек А и В, а сумму проекций всех сил на ось Y – оставляя для проверки правильности определения реакций:

$$\sum M_A=0 \quad ql/2 \cdot 5l/4 - R_B \cdot l - m + 3ql/4 \cdot 3l/8=0,$$

$$R_B = 21ql/32,$$

$$\sum M_B=0 \quad ql/2 \cdot 1/4 - m - 3ql/4 \cdot (1/4+3l/8)+R_A \cdot l=0,$$

$$R_A=19ql/32.$$

Проверка

$$\sum y=0 R_A+R_B-ql/2 - 3ql/4=0,$$

$$19ql/32+21ql/32 - 40ql/32=0.$$

Реакции вычислены правильно. Отмечаем 4 участка на балке. На каждом участке балку разрезаем, координируем сечение абсциссой x и для рассматриваемой левой или правой части записываем выражения для Q и M.

1 участок $0 \leq x_1 \leq l/2$

$$Q = - R_A+qx_1.$$

При $x_1=0, Q = -R_A = - 19ql/32$.

При $x_1=l/2, Q = - 19ql/32+ql/2 = - 3ql/32$.

Поперечная сила изменяется по линейному закону, так на этом участке действует распределенная нагрузка:

$$M = R_A \cdot x_1 - qx_1^2/2.$$

При $x_1 = 0, M = 0$.

При $x_1 = l/2, M = 19ql/32 \cdot l/2 - ql^2/8 = 11ql^2/64$.

Изгибающий момент изменяется по параболе, не имеющей вершины, поперечная сила на 1 участке не пересекает ось X.

2 участок $1/2 \leq x_2 \leq 3l/4$

$$Q = -R_A + qx_2.$$

При $x_2 = 1/2$, $Q = -19ql/32 + ql/2 = -3ql/32.$

При $x_2 = 3l/4$, $Q = -19ql/32 + 3ql/4 = 5ql/32.$

На этом участке Q изменяется также по закону прямой (наклонной) линии:

$$M = R_A \cdot x_2 - qx^2/2 - m.$$

При $x_2 = 1/2$, $M = 19ql/32 \cdot 1/2 - ql^2/8 - ql^2/4 = -5ql^2/64.$

При $x_2 = 3l/4$, $M = 19ql/32 \cdot 3l/4 - 9ql^2/32 - ql^2/4 = -11ql^2/128.$

Изгибающий момент изменяется по параболе, имеющей вершину, т.к. поперечная сила пересекает ось X . Найдем максимальное значение на параболе:

$$dM/dx_2 = R_A - qx_2 = 0,$$

$$x_2 = R_A/q = 19ql/32,$$

$$M_{\max} = 19ql/32 \cdot 19l/32 - (19l/32)^2 \cdot q/2 - ql^2/4 = -151 \cdot ql^2/64 \cdot 32.$$

4 участок $0 \leq x_4 \leq 1/2$

$$Q = -q x_4.$$

При $x_4 = 0$, $Q = 0$. При $x_4 = 1/2$ $Q = -ql/2.$

Q изменяется по прямой, проходящей через начало координат:

$$M = -q x_4^2/2.$$

При $x_4 = 0$, $M = 0.$

При $x_4 = 1/2$, $M = -ql^2/8.$

Изгибающий момент изменяется по параболе, имеющей вершину (максимум) в начале координат

3 участок $1/2 \leq x_3 \leq 3l/4$

$$Q = -ql/2 + R_B = -ql/2 + 21ql/32 = 5ql/32.$$

Поперечная сила на этом участке постоянная:

$$M = -ql/2(x_3 - 1/4) + R_B(x_3 - 1/2).$$

При $x_3 = 1/2$, $M = -ql^2/8$.

При $x_3 = 3/4l$, $M = -ql/2 \cdot 2l + 21ql/32 \cdot 1/4 = -11ql^2/128$.

Изгибающий момент изменяется по закону прямой (наклонной) линии.

2. Определение положения нейтральной оси для сечения

При изгибе балки симметричного, относительно оси y сечения для определения положения нейтральной оси достаточно знать два момента:

- а) нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения,
- б) нейтральная ось перпендикулярна плоскости действующих сил.

Следовательно, для проведения нейтральной оси в сечении необходимо найти координаты центра тяжести.

Для определения положения центра тяжести сечения выберем произвольную систему координат xu (см. Рис. 9).

1.2.2.1.1 Расстояния от центра тяжести сечения до этих осей найдутся по формулам:

$$1.2.2.1.2 x_c = S_y/F; \quad y_c = S_x/F,$$

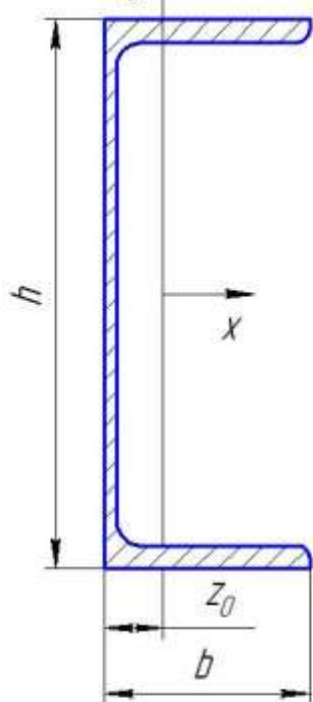
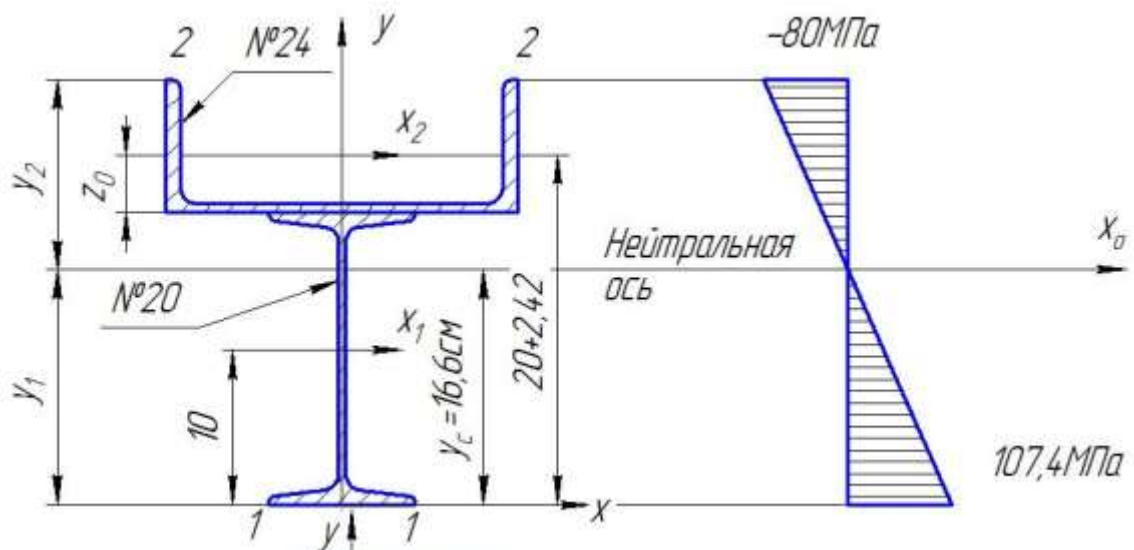
где S_x и S_y – статические моменты площади сечения относительно осей x и y ,
 F – площадь сечения.

Фигура симметрична относительно оси Y и очевидно, что $x_c = 0$.

Выберем из таблиц необходимые данные для двутавра №20 и швеллера №24, составляющих сечения. Номер швеллера и двутавра обозначает высоту фигуры в сантиметрах.

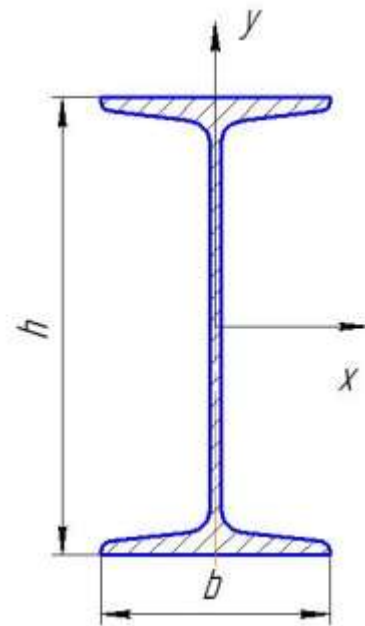
Определим координату y_c , рассматривая статический момент площади всей фигуры относительно оси x , как сумму статических моментов швеллера и двутавра относительно той же оси, а площадь F – как сумму площадей:

$$y_c = (S_{x_{дв}}^{дв} + S_{x_{шв}}^{шв}) / (F_{дв} + F_{шв}).$$



Швеллер №24

$$\begin{aligned}
 F &= 30.6 \text{ cm}^2; \\
 J_x &= 208 \text{ cm}^4; \\
 J_y &= 2.42 \text{ cm}^4; \\
 z_0 &= 2.42 \text{ cm}; \\
 h &= 24 \text{ cm}; \\
 b &= 9 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$



Двутавр №20

$$\begin{aligned}
 F &= 26.8 \text{ cm}^2; \\
 J_x &= 1840 \text{ cm}^4; \\
 J_y &= 115.6 \text{ cm}^4; \\
 h &= 20 \text{ cm}; \\
 b &= 10 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Рис. 9 – Напряжения в сечении

Проведем для ориентации центральные оси x_1 для двутавра и x_2 для швеллера.

Статический момент площади фигуры относительно любой оси равен произведению площади этой фигуры на координату центра тяжести относительно рассматриваемой оси:

$$y_c = [26,8 \cdot 10 + 30,6(20 + 2,42)] / (26,8 + 30,6) = 16,6 \text{ см.}$$

Откладываем эту координату и проводим нейтральную ось x_0 . Вычислим момент инерции сечения относительно нейтральной оси, применяя теорему о параллельных осях:

$$J_{нo} = J_{нo}^{дв} + J_{нo}^{шв},$$

где $J_{нo}^{дв}$, $J_{нo}^{шв}$ - осевые моменты инерции двутавра и швеллера относительно той же оси x_0 .

$$J_{нo} = 1840 + 26,8(16,6 - 10)^2 + 208 + 30,6(22,42 - 16,6)^2;$$

$$J_{нo} = 4252 \text{ см}^4.$$

Построение эпюры нормальных напряжений по высоте опасного сечения

Опасным сечением в балке является сечение, в котором действует наибольший по абсолютному значению изгибающий момент. Для рассматриваемой балки это сечение посередине пролета, где приложена пара сил:

$$M_{\max} = 11/64ql^2 = 11 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 4^2/64 = 27500 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Нормальные напряжения при изгибе определяются по формуле

$$\sigma = M \cdot y / J_{н.о.},$$

где M - изгибающий момент, действующий в рассматриваемом сечении;

$J_{н.о.}$ - момент инерции сечения относительно нейтральной оси проходящей через центр масс;

y - расстояние от нейтральной оси до точки, в которой вычисляется напряжение.

По высоте сечения нормальные напряжения изменяются по линейному закону и достигают максимальных значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Для построения эпюры необходимо вычислить напряжение в точках линии 1-1 (на полке двутавра) и 2-2 (на концах полок швеллера):

$$y_{1-1} = y_c = 16,6 \text{ см};$$
$$y_2 = (20 + 9) - 16,6 = 12,4 \text{ см}.$$

Нормальные напряжения в точках линии 1-1

$$\sigma_{1-1} = (27500 \cdot 16,6 \cdot 10^{-2}) / 4252 \cdot 10^{-8} = 107,4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 107,4 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения в точке 2.

$$\sigma_2 = (27500 \cdot 12,4 \cdot 10^{-2}) / 4252 \cdot 10^{-8} = 80 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 80 \text{ МПа}.$$

Характер напряжений – растяжение или сжатие в точках 1 и 2 - определим по эпюре изгибающих моментов, которая строится в положительном направлении на сжатых волокнах. В опасном сечении максимальный момент отрицательный и на эпюре откладывается ниже оси x (оси балки). Следовательно, в этом сечении сжатые волокна расположены ниже нейтральной оси, а растянутые – выше.

Это подтверждается правилами знаков изгибающего момента. Положительный изгибающий момент, который на эпюре расположен выше оси x (оси балки), изгибает балку выпуклостью вниз (сжатые волокна вверху), а отрицательный – выпуклостью вверх (сжатые волокна внизу).

На основании этого напряжения в точке 1 отрицательные (сжатие), а в точке 2 положительные (растяжение), см. Рис. 9.

Характер изогнутой оси балки

Вид изогнутой оси балки можно нарисовать, анализируя эпюру изгибающих моментов, которая показывает расположение сжатых волокон – выпуклость балки. Так как прогиб балки на опорах невозможен, деформированная ось проходит через опорные точки.

Определение прогиба балки в сечении посередине пролета аналитическим методом (рис.18)

Реакции R_A и R_B определены:

$$R_A = 19ql/32, R_B = 21ql/32.$$

Выбираем начало координат для данной балки. Удобнее начало координатной системы расположить на правой опоре А. Ось X направлена влево, ось Y вверх. В этом случае при выполнении условий Клебша вторая постоянная интегрирования $C_2 = 0$, т.к. прогиб на опоре А невозможен.

При выборе начала координат на левом конце балки ось X направлена вправо, ось Y -вверх, при тех же условиях две постоянные интегрирования C_1 и C_2 неизвестны; сечение на конце консоли перемещается и поворачивается. Определение двух постоянных требует составления двух граничных условий с двумя неизвестными, что усложняет решение.

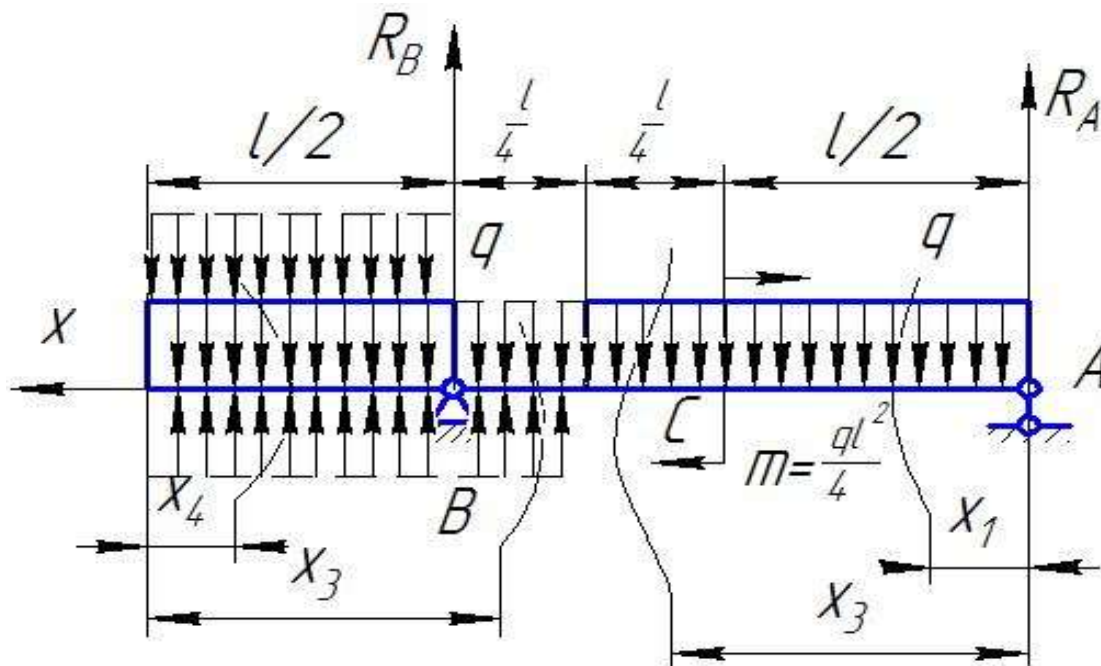


Рис. 10 – Условия Клебша

Записываем дифференциальное уравнение участка, которому принадлежит сечение C – середина пролета:

$$EJy'' = M = R_A \cdot x_1 - qx_1^2/2.$$

Интегрируем его два раза

$$EJy' = R_A \cdot x_1^2/2 - qx_1^3/6 + C_1;$$

$$EJy = R_A \cdot x_1^3/6 - qx_1^4/24 + C_1 \cdot x_1 + C_2 ; \quad (1)$$

$$C_2 = 0.$$

В этом можно убедиться, полагая $x_1 = 0$, так как уравнение (1) справедливо при $0 \leq x_1 \leq 1/2$, и тогда

$$EJy = R_A \cdot x_1^3/6 - qx_1^4/24 + C_1 \cdot x_1. \quad (2)$$

Для определения прогиба в сечении С достаточно в выражение (2) подставить $x_1 = 1/2$ – абсциссу сечения С.

Но постоянная C_1 неизвестна. Для ее определения необходимо использовать начальное условие (условие опирания) – на опоре В прогиб сечения равен нулю. Опора В принадлежит участку III и, чтобы определить C_1 , надо иметь уравнение упругой оси балки на этом участке. При этом нужно соблюдать одно из условий Клебша: если на балку действует распределенная нагрузка, не приложенная до конца балки, противоположного началу координат (см. конец II участка на длине от правой опоры), ее следует продолжить до конца балки и уравновесить по тому же закону – что и сделано пунктирными линиями на III и IV участках (**Рис. 10**).

Дифференциальное уравнение III участка балки:

$$EJy'' = R_A \cdot x_3 - qx_3^2/2 + q(x_3 - 3l/4)^2/2 - m,$$

$$EJy' = R_A \cdot x_3^2/2 - qx_3^3/6 + q(x_3 - 3l/4)^3/6 - m(x_3 - l/2),$$

$$EJy = R_A \cdot x_3^3/6 - qx_3^4/24 + q(x_3 - l/2)^4/24 - m(x_3 - l/2)^2/2 + C_1 x_3. \quad (3)$$

Соблюдая условия Клебша, интегрируют все члены, не раскрывая скобок, а величину m (пары сил) интегрируют не по x , а по $(x-a)$, где a – расстояние от начала координат до сечения, в котором приложена пара сил с моментом m .

Условие на опоре В: при $x_3 = l$, $y = 0$.

Подставляем эти значения в выражение (3) и определяем C_1 :

$$0 = 19ql/32 \cdot l^3/6 - ql^4/24 + ql^4/24 \cdot 256 - ql^4/4 \cdot 2 \cdot 4 + C_1 \cdot l;$$

$$C_1 = -161 \cdot 256 \cdot ql^3/24.$$

Подставим в уравнение (2) $x_1 = l/2$ (абсцисса сечения С) и найденное значение C_1 , определим прогиб балки в сечении посередине пролета:

$$y_c = [19ql/32 \cdot l^3/48 - ql^4/24 \cdot 16 - 161ql^3/24 \cdot 256 \cdot 1/2] / EJ;$$

$$y_c = - 41q l^4 / 12288 EJ.$$

При заданных значениях $q = 10$ кН/м, $l = 4$ м, вычисленном $J_{н.о.} = 4252 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, модуле продольной упругости для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, найдем прогиб

$$y_c = 41 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 4^4 / 12288 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4252 \cdot 10^{-8},$$
$$y_c = 0,001 \text{ м}, \quad y_c = 1 \text{ мм}.$$