

1.1 ЗАДАЧА 5

1.1.1 Задание

Для балки с нагрузкой, показанной на чертеже, требуется:

Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Подобрать квадратное поперечное сечение.

Для раскрытия статической неопределимости балки использовать два метода: метод сил и уравнение 3 моментов.

Данные для решения задачи выбрать из табл. 5, по предпоследней цифре зачётной книжки, расчетную схему по Рис. 1, по последней цифре зачётной книжки.

Таблица 1 – Расчётные данные для третьей задачи

№ строки	a	P	m
0	1/4	ql/4	ql ² /4
1	1/2	ql/2	ql ² /2
2	3l/4	ql/8	ql ² /8
3	1	ql	ql ²
4	1/4	ql/8	ql ² /8
5	1/2	ql/4	ql ² /4
6	3l/4	ql/2	ql ² /2
7	1	ql	ql ²
8	1/2	ql/4	ql ² /2
9	1/4	ql/2ql	ql ² /4

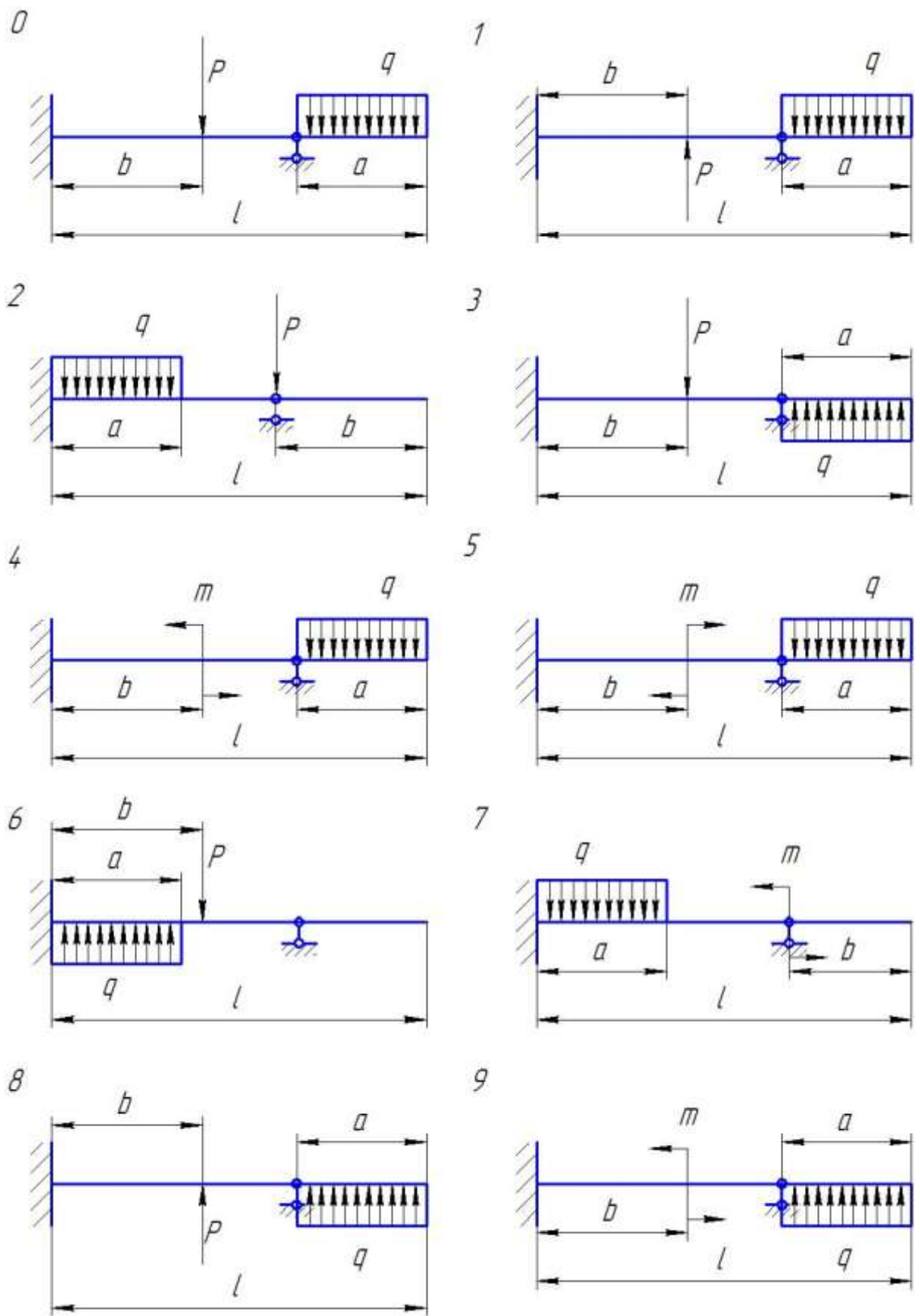


Рис. 1 – Расчётные схемы для пятой задачи

1.1.2 Пример решения задачи 5

I. МЕТОД СИЛ

Исходные данные:

$$a = l, P = ql, m = ql^2; l = 4 \text{ м}; q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

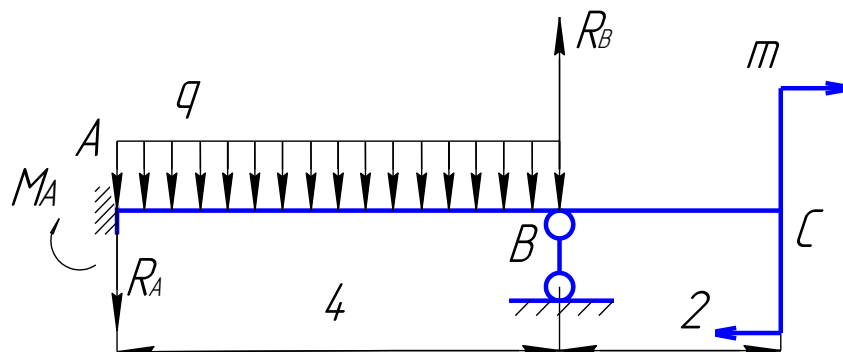


Рис. 2 – Расчётная схема

Составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций сил на ось

$$OY \sum F_y = 0:$$

$$-R_A - ql + R_B = 0$$

Отсюда получим

$$-R_A + R_B = 40 \quad (1)$$

Сумма моментов относительно т. А:

$$\sum M_A(F_i) = 0$$

$$-M_A - \frac{1}{2}ql^2 + R_B l - m = 0$$

Отсюда получим

$$-M_A + 4R_B = 240 \quad (2)$$

Два уравнения содержат три неизвестных. Система один раз неопределенна.

Выбираем «лишнюю» неизвестную и обозначаем ее через X_1 .

При расчете статически неопределимых систем по методу сил в качестве неизвестных принимают усилия, заменяющие действие

отброшенных (лишних) связей. Лишние связи – это связи, лишние с точки зрения обеспечения неподвижности бруса как жесткого целого.

Изображаем основную систему (О.С.) (Рис. 3).

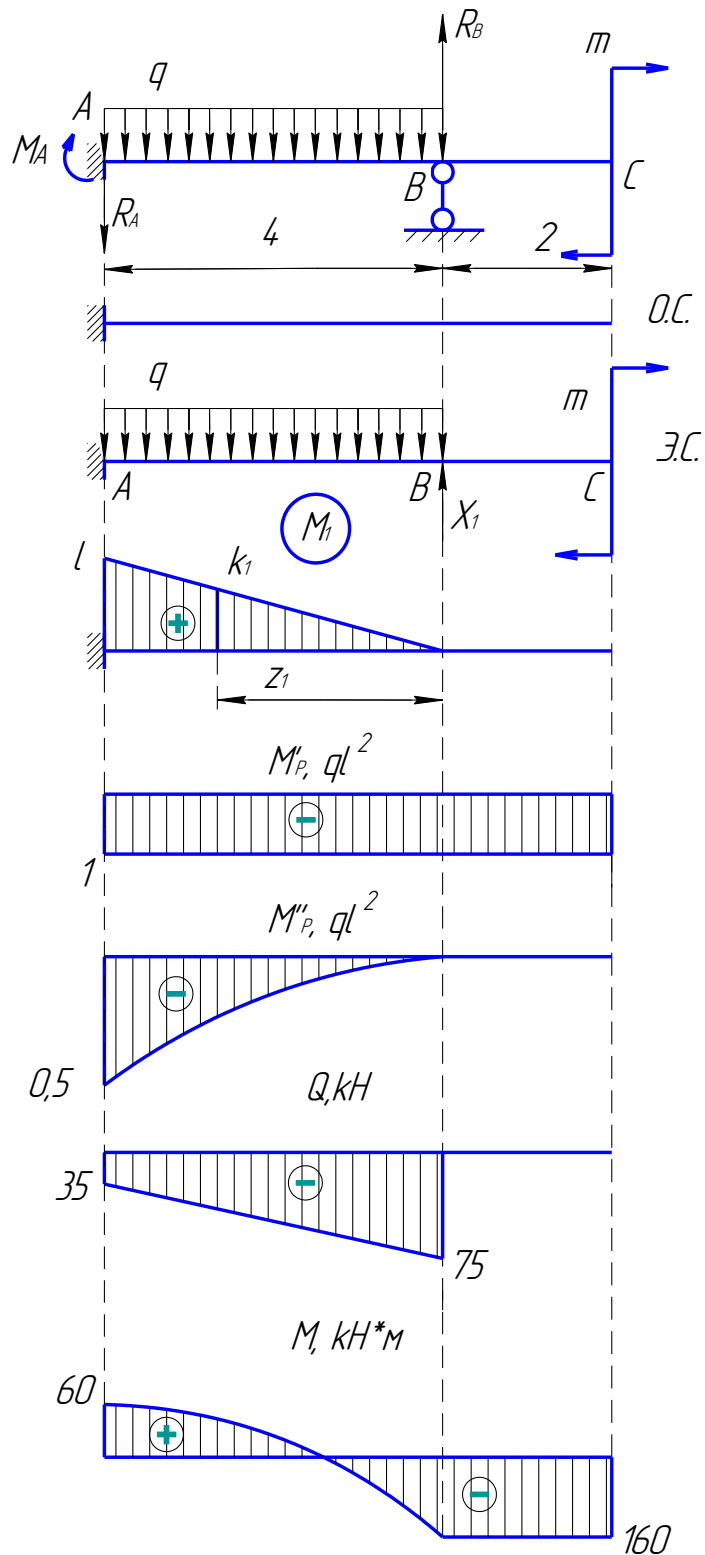


Рис. 3 – Построения к задаче 5

Выбор той или иной основной системы не оказывает влияния на окончательный результат расчета. Окончательные эпюры M и Q будут

одинаковы независимо от выбора основной системы. Однако от выбора основной системы зависит большая или меньшая трудоемкость расчета.

О.С. получается из статически неопределимой заданной системы путем отбрасывания лишних опорных закреплений (связей). За основную систему можно принять балку на двух опорах (лишняя неизвестная: момент в заделке M_A) (Рис. 4,а) или консольную балку (лишняя неизвестная: реакция на опоре R_B) (Рис. 4,б):



Рис. 4

Эквивалентная система (Э.С.) получается путем загрузки О.С. заданными силами и «лишними» неизвестными (Рис. 2,в). Вертикальные перемещения в т. В должны равняться нулю.

Записываем каноническое уравнение метода сил (число уравнений зависит от числа лишних неизвестных):

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1p} = 0. \quad (3)$$

Определяем коэффициенты канонического уравнения.

δ_{11} - перемещение сечения В по направлению X_1 , вызванное действием единичной силы X_1 .

Чтобы определить δ_{11} будем считать $X_1 = 1$ и построим эпюру изгибающих моментов заданной системы в отсутствии действующих нагрузок.

В данном случае балка имеет в точке «А» жёсткую заделку, поэтому, двигаясь от точки В влево, определяем

$$M = X_1 \cdot z,$$

где $0 \leq z \leq l$.

При $z = 0$ (точка В) $M = 0$;

при $z = l$ (точка А) $M = X_1 \cdot l = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}$, так как $X_1 = 1 \cdot ql$.

Эпюра моментов M_1 от действия единичной силы в точке В изображена на Рис. 2.

Коэффициент δ_{11} определяется перемножением этой эпюры на саму себя.

Применяем правило Верещагина.

площадь эпюры

$$\omega_1 = \frac{1}{2} l \cdot l = \frac{l^2}{2}.$$

Расстояние до центра тяжести

$$z_1 = \frac{2}{3} l.$$

Ордината центра тяжести

$$k_1 = \frac{2}{3} l$$

Перемножаем эпюру саму на себя

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\omega_1 \cdot k_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{l^3}{3EI}$$

δ_{1p} - перемещение сечения В по направлению X_1 , вызванное действием внешних сил.

Для определения δ_{1p} необходимо построить эпюру изгибающих моментов от сил

Чтобы определить δ_{1p} построим эпюру изгибающих моментов (грузовую эпюру) заданной системы в отсутствии силы X_1 .

Для того, чтобы было удобнее перемножать эпюры, грузовую эпюру построим от каждой нагрузки отдельно M'_p и M''_p . Ось OZ направляем справа налево, $0 \leq z \leq l$.

Эпюра M'_p от сосредоточенного момента m .

$$M = -m = -ql^2$$

Эпюра M''_p от распределённой нагрузки.

$$M = -\frac{1}{2} qz^2$$

При $z = 0$ $M = 0$, при $z = l$ $M = -\frac{1}{2} ql^2 = -0,5ql^2$.

По полученным данным строим эпюры M_1, M_2, M'_P и M''_P .

Коэффициент δ_{1P} определяется перемножением этой эпюры на эпюру единичной нагрузки.

$$\delta_{1P} = M_1 \cdot (M'_P + M''_P)$$

$$M_1 \cdot M'_P = -\frac{1}{EI} \cdot ql^2 \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -0,5 \frac{ql^4}{EI}$$

$$M_1 \cdot M''_P = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4}l = -0,125 \frac{ql^4}{EI}$$

$$\delta_{1P} = -0,5 \frac{ql^4}{EI} - 0,125 \frac{ql^4}{EI} = -0,625 \frac{ql^4}{EI}$$

Подставляем значения найденных коэффициентов в (3)

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - 0,625 \frac{ql^4}{EI} = 0 \quad (3)$$

Отсюда находим

$$X_1 = 3 \cdot 0,625 ql = 1,875 ql.$$

Таким образом, неопределённость раскрыта. Найденная величина является реакцией

$$R_B = X_1 = 1,875 ql = 75 \text{ кН}$$

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (Рис. 3).

Направляем ось OZ справа налево из точки С и рассматриваем два участка нагружения.

Участок СВ, $0 \leq z \leq 2$

$$Q = 0.$$

$$M = -m = -160 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок ВА, $2 \leq z \leq 6$

$$Q = -R_B + q(z - 2) = -75 + 10(z - 2);$$

$$\begin{aligned} M &= -m + R_B \cdot (z - 2) - \frac{1}{2} q(z - 2)^2 = \\ &= -160 + 75 \cdot (z - 2) - 5(z - 2)^2 \end{aligned}$$

При $z = 2$ $Q = -75$ кН; $M = -160$ кН · м;

при $z = 6$ $Q = -35$ кН; $M = 60$ кН · м

Определение размеров квадратного поперечного сечения

По эпюре M находим максимальное значение $M_{max.} = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из условия прочности

$$\frac{M_{max.}}{W} \leq [\sigma]$$

Находим

$$W \geq \frac{M_{max.}}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,001 \text{ м}^3 = 1000 \text{ см}^3$$

Для квадратного сечения

$$W = \frac{a^3}{6}.$$

Тогда

$$a = \sqrt[3]{6W} = \sqrt[3]{6 \cdot 1000} = 18,2 \text{ см} \approx 200 \text{ мм}$$

Из условия прочности выбираем балку квадратного сечения со стороной

$$a = 200 \text{ мм}.$$

II . ТЕОРЕМА О 3-Х МОМЕНТАХ

По теореме о 3 моментах за основную систему принимают балку с шарнирами, врезанными в сечение над промежуточными опорами, и за «лишние» неизвестные принимают изгибающие моменты, действующие в сечениях над опорами.

Для балок с глухой заделкой эту теорему применяют следующим образом.

Рассмотрим глухую заделку, состоящую из 2-х опор: шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной, поставленную на бесконечно близком расстоянии (рис.22).

Записываем уравнение 3 моментов:

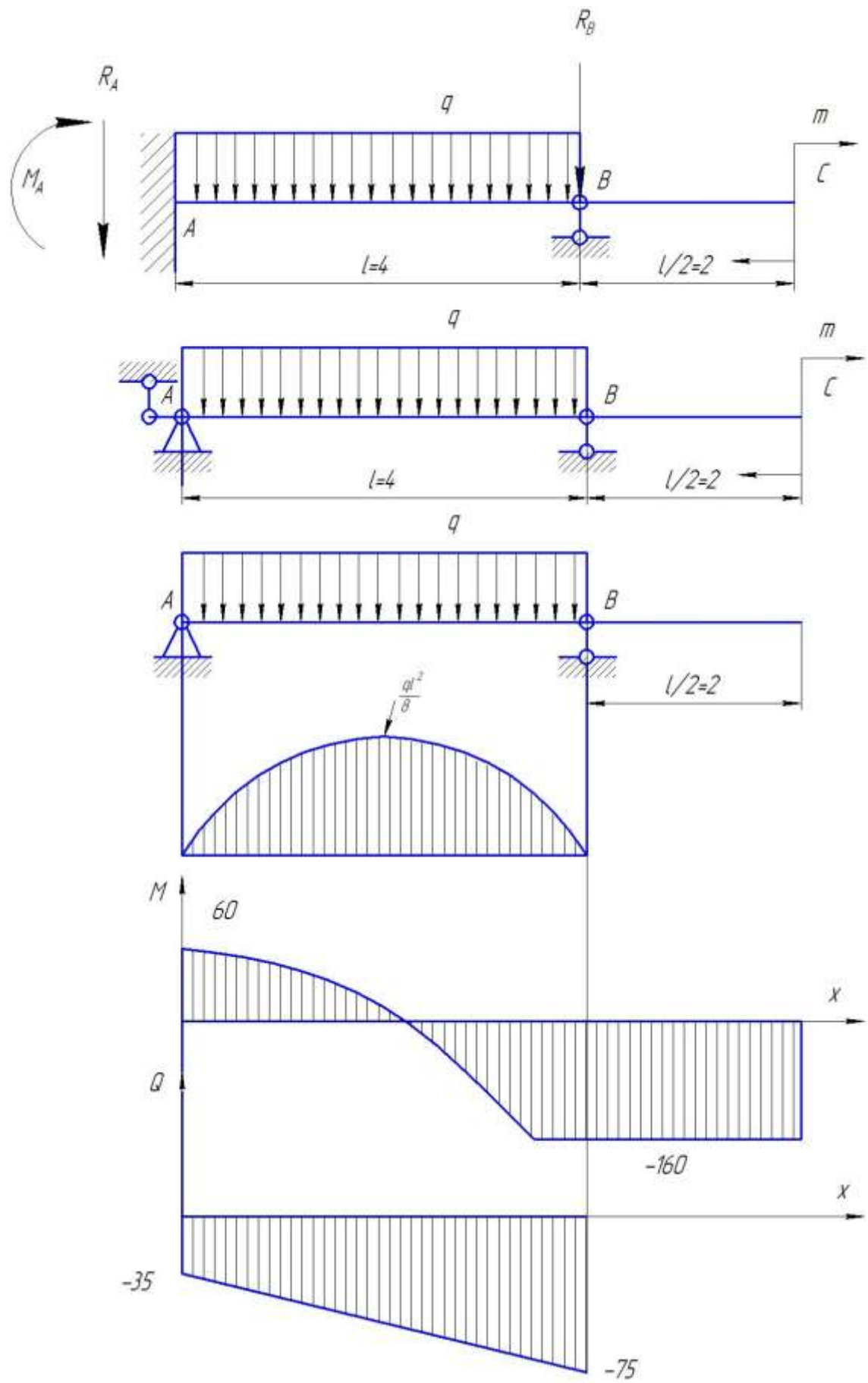


Рис. 5 – Построения к задаче 5

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n \cdot (l_{n-1} + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}} \right),$$

где M_{n-1}, M_n, M_{n+1} - изгибающие моменты, действующие в сечениях балки на 1, 2, 3 опорах;

l_n - длина пролета слева от n-ой опоры;

l_{n+1} - длина пролета справа от n-ой опоры;

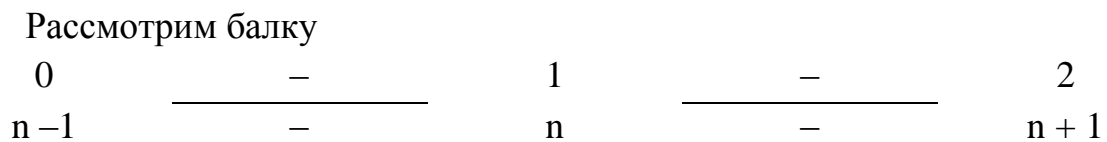
ω_{n+1} - площадь эпюры изгибающих моментов от заданных сил, действующих в пролете справа от опоры n;

ω_n - площадь эпюры изгибающих моментов от заданных сил, действующих в пролете слева от опоры n;

b_{n+1} - расстояние от центра тяжести площади ω_{n+1} до (n+1) опоры;

a_n - расстояние от центра тяжести площади ω_n до (n-1) опоры.

Эпюры изгибающих моментов от сил заданных строим, предполагая, что балка представляет собой две однопролетных балки, поставленных на шарнирные опоры (рис.23).



$$l_n = 0;$$

$$l_{n+1} = l;$$

$$M_{n-1} = M_0 = 0;$$

$$M_n = M_1 = ?;$$

$$M_{n+1} = M_2 = m = -ql^2.$$

Записываем теорему о трех моментах для нашей схемы:

$$0 + 2M_1(0+l) - ql^2 \cdot l = -6 \cdot \left(\frac{\omega_1 \cdot a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 \cdot b_2}{l_2} \right), \quad (6)$$

$$\text{где } \omega_{n+1} = \omega_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l = \frac{ql^3}{12}; \quad \omega_n = \omega_1 = 0;$$

$$a_n = a_1 = 0; \quad b_{n+1} = b_2 = \frac{l}{2};$$

Подставляя значения (12) в уравнение (11), получаем:

$$0 + 2M_1(0+l) - ql^2 \cdot l = -6 \cdot \left(0 + \frac{\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2}}{l} \right), \quad (7)$$

$$M_1 = \frac{3}{8} ql^2.$$

Строим эпюру от опорных моментов (Рис. 5).

Эпюру изгибающих моментов строим методом наложения эпюры изгибающих моментов от заданных силовых факторов и эпюры от опорных моментов (M_0 , M_1 , M_2) (Рис. 5).

Для построения эпюр поперечных сил (Q) необходимо найти реакции на опорах R_0 , R_1 (R_A), R_2 (R_B).

Опорные реакции будем определять с помощью суммарной эпюры изгибающих моментов. Для определения R_1 (R_A) записываем выражение момента для сечения на опоре В, рассматривая левую часть балки:

$$-R_A \cdot l + M_A - \frac{ql^2}{2} = -ql^2;$$

отсюда определяем:

$$R_1 = \frac{7}{8} ql.$$

Для определения R_2 (R_B) записываем выражение момента для сечения на опоре 1, рассматривая правую часть балки:

$$R_B \cdot l - \frac{ql^2}{2} \cdot -ql^2 = \frac{3}{8}ql^2.$$

Отсюда определяем:

$$R_B = \frac{15}{8}ql.$$

Проверяем правильность определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad -R_A - \frac{ql}{2} + R_B = 0 \quad (7)$$

Строим эпюру поперечных сил Q (Рис. 5).

Определение размеров квадратного поперечного сечения

По эпюре M находим максимальное значение $M_{max.} = 160 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из условия прочности

$$\frac{M_{max.}}{W} \leq [\sigma]$$

Находим

$$W \geq \frac{M_{max.}}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,001 \text{ м}^3 = 1000 \text{ см}^3$$

Для квадратного сечения

$$W = \frac{a^3}{6}.$$

Тогда

$$a = \sqrt[3]{6W} = \sqrt[3]{6 \cdot 1000} = 18,2 \text{ см} \approx 200 \text{ мм}$$

Из условия прочности выбираем балку квадратного сечения со стороной

$$a = 200 \text{ мм}.$$

1.2 ЗАДАЧА 6

1.2.1 Задание

Для балки с нагрузкой, указанной на Рис. 6, построить эпюры Q и M и подобрать двутавровое сечение, если дано:

$$l = 4 \text{ м}, q = 10 \text{ кН/м}, [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

При решении задачи использовать метод сил.

Данные для расчёта выбираются из Таблица 2 по предпоследней цифре зачётной книжки, а расчётная схема выбирается из Рис. 6, по последней цифре зачётной книжки.

Таблица 2 – Расчётные данные для первой задачи

N строки	a	b	P	m
0	1/4	1/2	ql	ql ² /2
1	1/2	3l/4	ql/4	ql ² /4
2	1/4	1/2	ql	ql ² /2
3	1/2	3l/4	ql/4	ql ² /4
4	3l/4	1/4	ql/8	ql ² /8
5	1/2	3l/4	ql/4	ql ² /4
6	3l/4	1/4	ql/8	ql ² /8
7	1/4	1/2	ql	ql ² /2
8	1/2	3l/4	ql/4	ql ² /4
9	3l/4	1/4	ql/8	ql ² /8

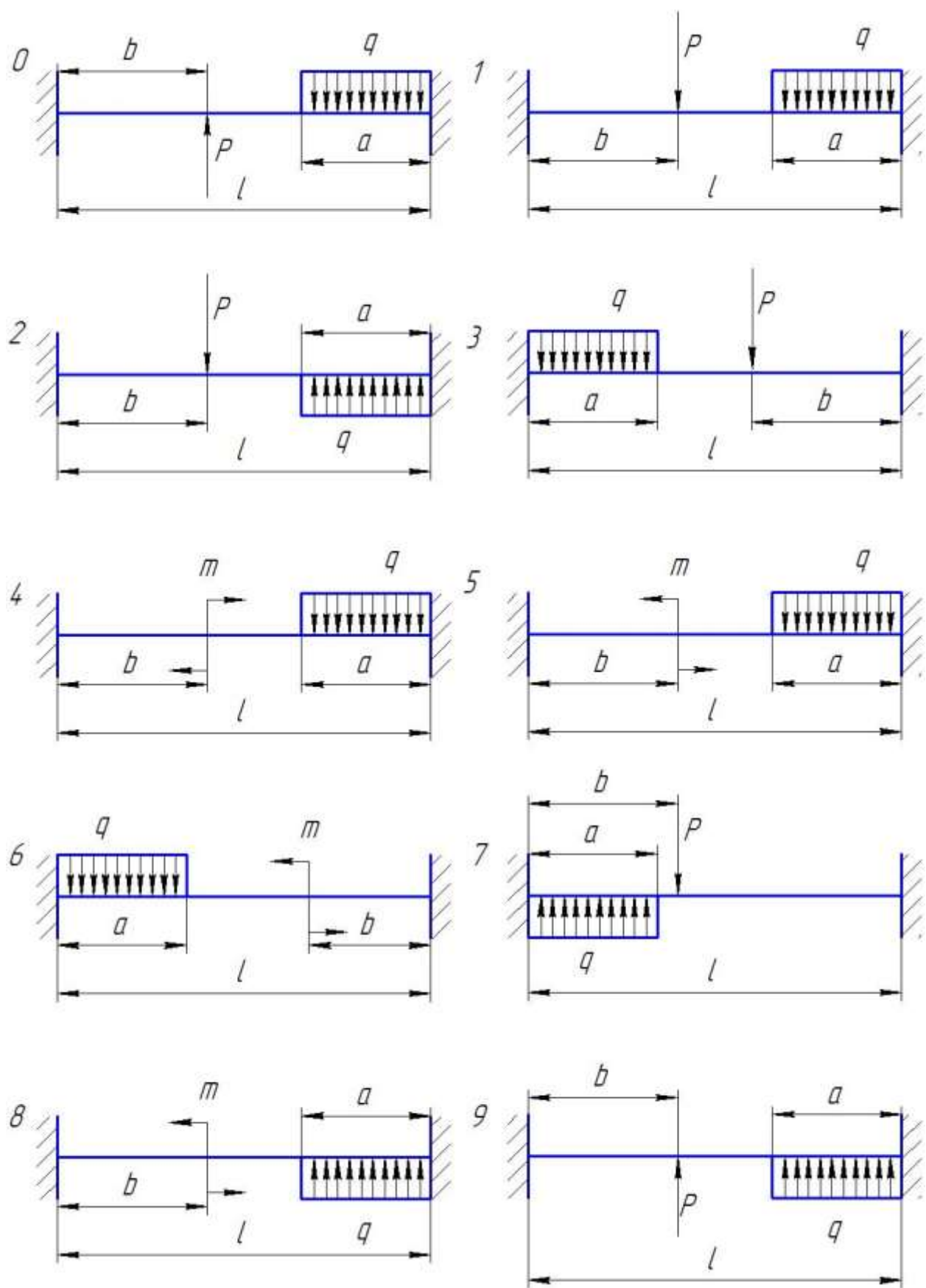


Рис. 6– Расчётные схемы для шестой задачи

1.2.2 Пример решения задачи 6

Исходные данные

$$a = l, b = \frac{l}{4}, P = \frac{1}{8}ql, m = ql^2, l = 4 \text{ м}; q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

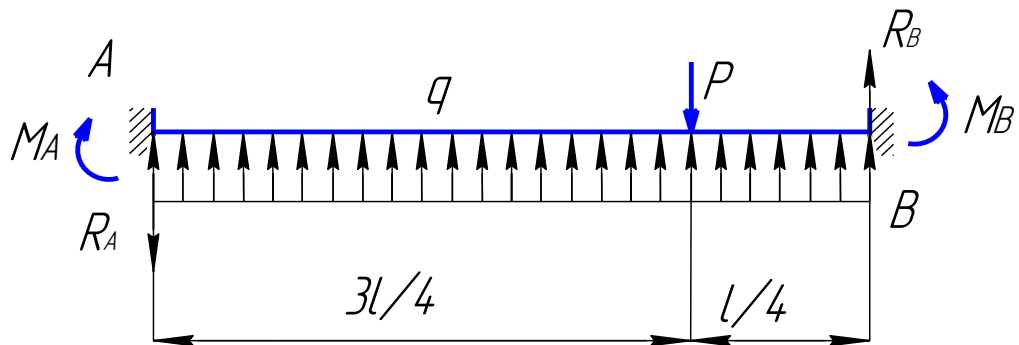


Рис. 7 – Расчётная схема

РЕШЕНИЕ

Показываем на чертеже реакции опор: M_A, M_B, R_A, R_B (Рис. 7).

Составляем уравнения равновесия статики.

Сумма проекций сил на ось

$$OY \sum F_y = 0:$$

$$-R_A + ql + R_B - P = 0$$

Отсюда получим

$$-R_A + R_B = -\frac{7}{8}ql \quad (1)$$

Сумма моментов относительно т. А:

$$\sum M_A(F_i) = 0;$$

$$-M_A + \frac{1}{2}ql^2 + R_B l - \frac{3}{4}Pl + M_B = 0.$$

Отсюда получим

$$-M_A + lR_B + M_B = -\frac{13}{32}ql^2 \quad (2)$$

Два уравнения содержат четыре неизвестных. Система два раза неопределенна. Применяем метод сил. Отбрасываем опору в точке В и получаем основную систему (О.С.). Вместо отброшенных связей в точке В прикладываем неопределённую пока силу, обозначив её X_1 и неопределённый пока момент, обозначив его X_2 . Записываем систему уравнений метода сил.

Дополнительные два уравнения канонического вида по методу сил имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Чтобы определить δ_{11} будем считать $X_1 = 1$ и построим эпюру изгибающих моментов заданной системы в отсутствии действующих нагрузок.

Чтобы определить δ_{22} будем считать $X_2 = 1$ и построим эпюру изгибающих моментов заданной системы в отсутствии действующих нагрузок. Чтобы определить $\delta_{12} = \delta_{21}$ перемножим полученные эпюры от единичных нагрузок $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$.

Чтобы определить δ_{1P} и δ_{2P} построим грузовую эпюру M_P : эпюру изгибающих моментов от приложенной нагрузки в отсутствии сил X_1 и X_2 .

Построение эпюры M_1

$$M_1 = -X_1 z.$$

При $z = 0$ $M_1 = 0$;

При $z = l$ $M_1 = -X_1 l = -l$.

Построение эпюры M_2

$$M_2 = X_2;$$

При $z = 0$ $M_2 = X_2 = 1$;

При $z = l$ $M_2 = X_2 = 1$.

Построение грузовой эпюры M_P

Для того, чтобы было удобнее перемножать эпюры, грузовую эпюру построим от каждой нагрузки отдельно M'_P и M''_P . Ось OZ направляем справа налево, $0 \leq z \leq l$.

Эпюра M'_P от распределённой нагрузки.

$$M' = -\frac{1}{2}qz^2$$

При $z = 0$ $M' = 0$;

при $z = l$ $M' = -\frac{1}{2}ql^2 = -0,5ql^2$

Эпюра от сосредоточенной силы P .

$$M'' = -P(z - l/4).$$

При $z = l/4$ $M'' = 0$;

при $z = l$ $M'' = \frac{3}{4}l \cdot \frac{1}{8}ql = \frac{3}{32}ql^2 \approx 0,094ql^2$.

По полученным данным строим эпюры M_1, M_2, M'_P и M''_P .

Пусть лишними неизвестными будут $X_1 = R_B$ и $X_2 = m_B$. Тогда основная система и эквивалентная система получают вид, указанный на Рис. 8.

Коэффициенты канонических уравнений (3) и (4) находим по методу Верещагина ($EJ=1$ при постоянной жесткости балки) или методом перемножения эпюр изгибающих моментов.

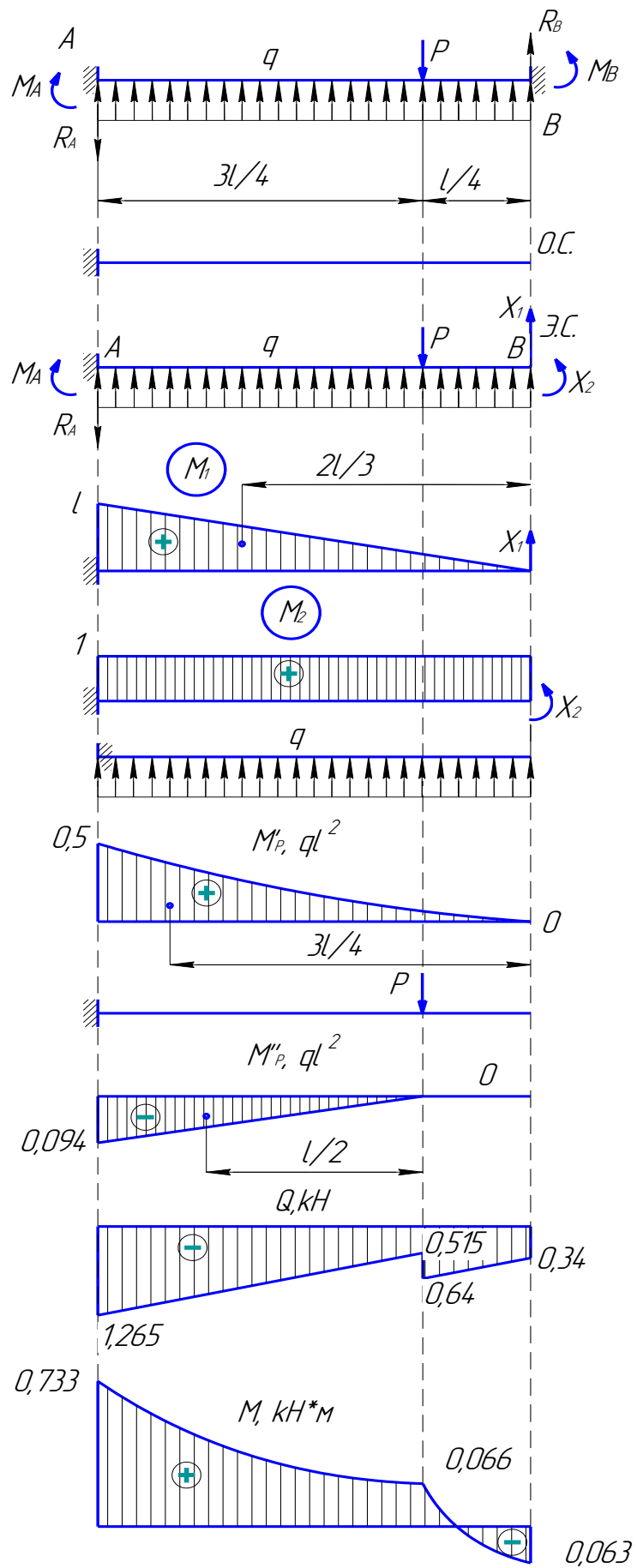


Рис. 8 – Эпюры к задаче 6

Напомним, что коэффициент δ_{ik} - это есть перемещение по направлению i -го силового фактора под действием единичного фактора, заменяющего k -й фактор.

Величина δ_{ip} - это перемещения в направлении лишней неизвестной X_i , возникающие под действием заданных внешних сил в эквивалентной системе. Основные перемещения в балках определяются изгибом.

Вычисляем коэффициенты системы уравнений метода сил.

$$\delta_{11} = M_1 \cdot M_1 = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{1}{3}l^3;$$

$$\delta_{22} = M_2 \cdot M_2 = 1 \cdot l \cdot 1 = l;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = M_1 \cdot M_2 = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot 1 = \frac{1}{2}l^2;$$

$$\delta_{1P} = M_1 \cdot (M'_P + M''_P);$$

$$M_1 \cdot M'_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4}l = 0,125ql^4;$$

$$M_1 \cdot M''_P = -\frac{1}{2} \cdot 0,094ql^2 \cdot \frac{3}{4}l \cdot \frac{3}{4}l = -0,0264ql^4;$$

$$\delta_{1P} = 0,125ql^4 - 0,026ql^4 = 0,0985ql^4;$$

$$\delta_{2P} = M_2 \cdot (M'_P + M''_P);$$

$$M_2 \cdot M'_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot 1 = \frac{1}{6}ql^3 = 0,167ql^3;$$

$$M_2 \cdot M''_P = -\frac{1}{2} \cdot 0,094ql^2 \cdot \frac{3}{4}l \cdot 1 = -0,035ql^3;$$

$$\delta_{2P} = 0,167ql^3 - 0,035ql^3 = 0,132ql^3.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{3}l^3 X_1 + \frac{1}{2}l^2 X_2 + 0,0985ql^4 = 0 \\ \frac{1}{2}l^2 X_1 + l X_2 + 0,132ql^3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы

$$X_1 = 0,39ql; X_2 = -0,063ql^2.$$

Тогда

$$R_B = X_1 = 0,39ql;$$

$$M_B = X_2 = -0,063ql^2.$$

Неопределённость раскрыта.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов заданной системы.

Ось OZ направляем справа налево.

Участок $0 \leq z \leq l/4$.

Поперечная сила.

$$Q = -R_B - qz.$$

При $z = 0$ получаем $Q = -0,39ql$;

При $z = l/4$ получаем $Q = -0,64ql$;

Изгибающий момент.

$$M = M_B + R_B z + \frac{1}{2} qz^2 = -0,063ql^2 + 0,39qlz + \frac{1}{2} qz^2.$$

При $z = 0$ получаем $M = -0,063ql^2$;

При $z = l/4$ получаем $M = 0,066ql^2$.

Участок 1

$l/4 \leq z \leq l$.

Поперечная сила.

$$Q = -R_B - qz + P = -0,265ql - qz.$$

При $z = l/4$ получаем $Q = -0,515ql$;

При $z = l$ получаем $Q = -1,265ql$.

Изгибающий момент.

$$M = M_B + R_B z + \frac{1}{2} q z^2 - P \left(z - \frac{l}{4} \right) =$$

$$= -0,063 q l^2 + 0,39 q l z + \frac{1}{2} q z^2 - 0,125 \left(z - \frac{l}{4} \right).$$

Находим

При $z = l/4$ получаем $M = 0,066 q l^2$;

При $z = l$ получаем $M = 0,733 q l^2$.

Выбор двутаврового сечения балки

По эпюре изгибающих моментов находим максимальный изгибающий момент

$$M_{max.} = 0,733 q l^2.$$

Условие прочности

$$W_{доп.} \geq \frac{M_{max.}}{[\sigma]},$$

где $W_{доп.} \geq$ - допустимое значение момента сопротивления сечения.

Находим:

$$W_{доп.} \geq \frac{M_{max.}}{[\sigma]} = \frac{0,733 \cdot 10^4 \cdot 4^2}{160 \cdot 10^6} = 0,000733 \text{ м}^3 = 733 \text{ см}^3.$$

Из таблиц прокатной стали выбираем двутавр № 36 $W_x = 743,0 \text{ см}^3$.

1.3 ЗАДАЧА 7

1.3.1 Задание

Для балки с нагрузкой, указанной на рис.18, требуется:

1. Построить эпюры Q и M.
2. Подобрать двутавровое поперечное сечение.
3. Определить прогиб балки посередине среднего пролета.

Данные для расчёта выбираются из Таблица 3 по предпоследней цифре зачётной книжки, а расчётная схема выбирается из Рис. 9, по последней цифре зачётной книжки.

Таблица 3 – Данные для седьмой задачи

N строки	P	m	q ₁	q ₂
0	ql	ql ²	q	q
1	ql/4	ql ² /2	-q	q
2	ql/2	ql ² /4	q	-q
3	-ql	-ql ²	-q	q
4	-ql/2	-ql ² /2	q	-q
5	-ql/4	ql ² /4	q	q
6	ql	ql ²	q	-q
7	ql/2	ql ² /2	-q	q
8	ql/4	ql ² /4	q	-q
9	-ql	-ql ²	-q	q

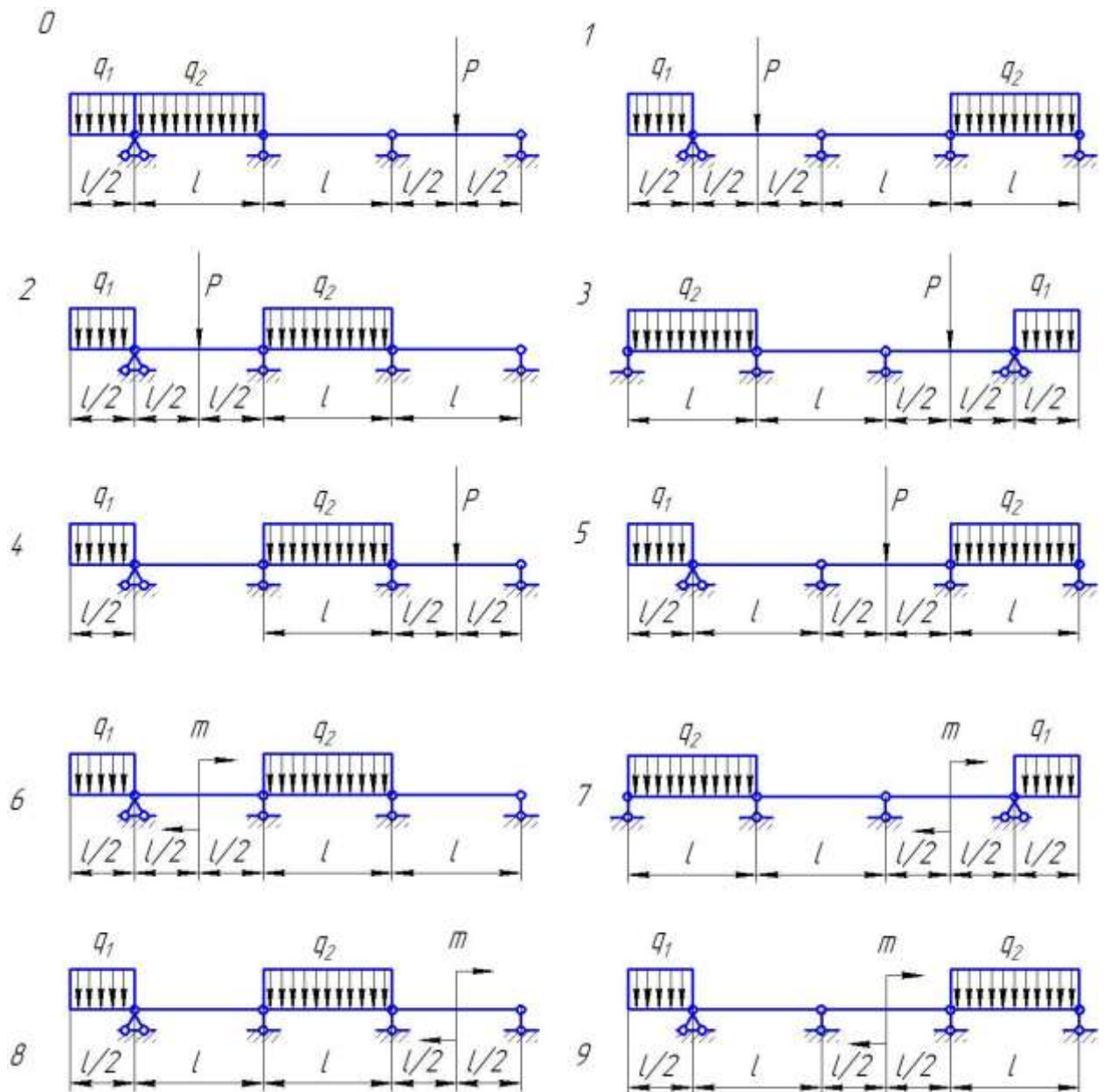


Рис. 9 – Расчётная схема для седьмой задачи

1.3.2 Пример решения задачи 7

Дано: $P = ql$, $l = 2\text{ м}$, $q = 10\text{ кН/м}$, $[\sigma] = 160\text{ МПа}$.

Пронумеруем опоры и покажем неизвестные опорные реакции A_0 , A_1 , A_2 и A_3 (см. Рис. 10,а). Поскольку статика для плоской системы параллельных сил дает два уравнения равновесия, а неизвестных четыре, балка два раза статически неопределима. Поэтому уравнение трех моментов следует написать два раза: для “средней” опоры 1 и для “средней” опоры 2.

Для составления выражений теоремы о трех моментах потребуются эпюры изгибающих моментов от внешних нагрузок для основной системы. Эти эпюры построены на Рис. 10,б.

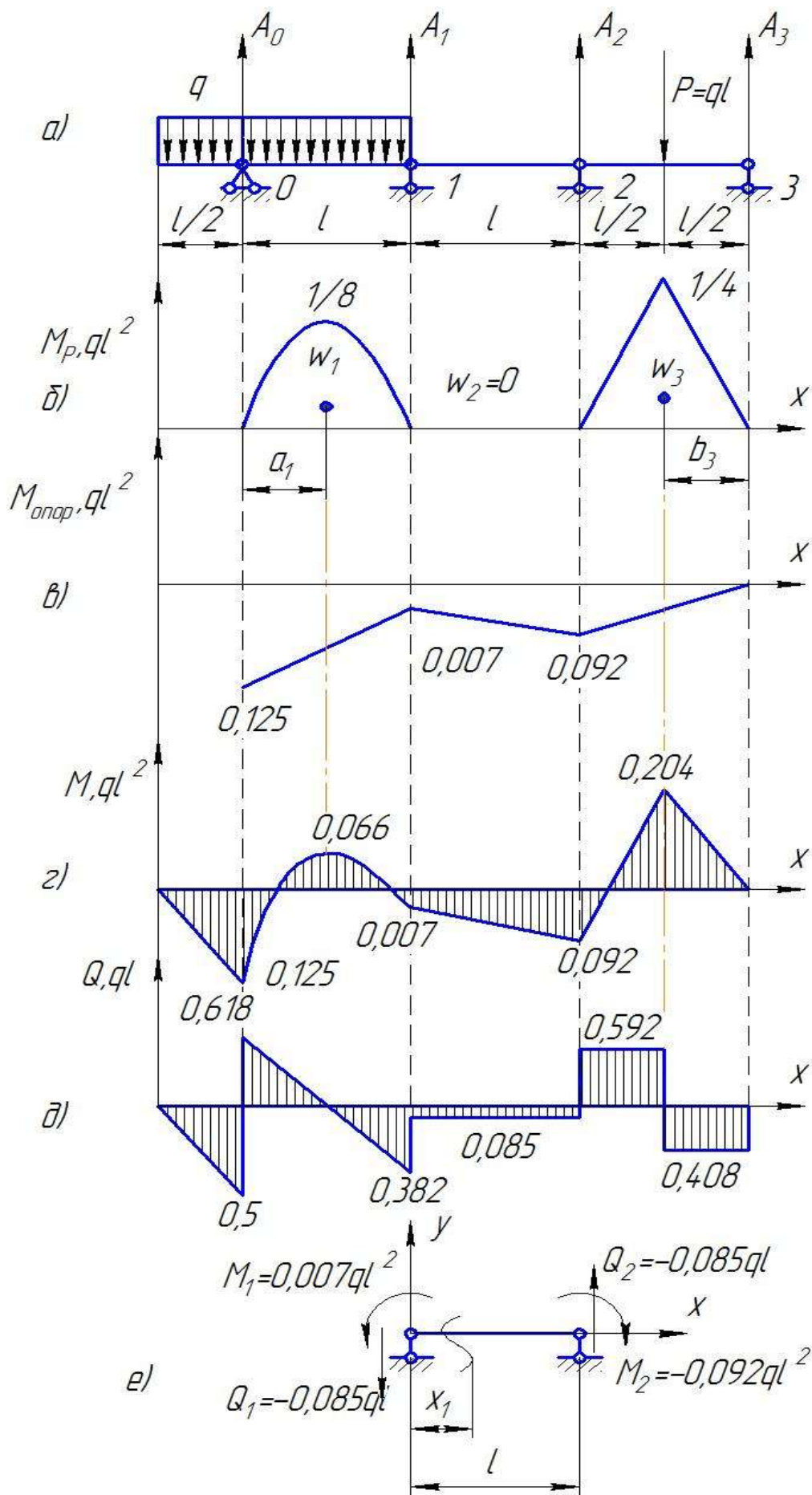


Рис. 10– Эпюры к задаче 7

Уравнения способа трех моментов

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n \cdot (l_{n-1} + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{\omega_n \cdot a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{l_{n+1}} \right),$$

Для средней опоры $n = 1$ (балка 0-1-2) имеем

$$M_{n-1} = M_0 = -ql^2/8, \quad \omega_n = \omega_1 = 2l/3 \cdot ql^2/8 = ql^3/12,$$

$$\omega_{n+1} = \omega_2 = 0, \quad a_n = l/2, \quad l_1 = 1.$$

Уравнение получает вид

$$-ql^2/8 \cdot 1 + 2M_1(1+1) + M_2 \cdot 1 = -6 \omega_1 \cdot a_1 / l_1 = -ql^3/4,$$

или

$$4M_1 + M_2 = -ql^2/8. \quad (1)$$

Переходим к опоре $n = 2$.

Тогда

$$M_{n-1} = M_1, \quad l_3 = 1, \quad M_{n+1} = M_3 = 0,$$

$$\omega_{n+1} = \omega_3 = 1/2 \cdot ql^2/4 = ql^3/8, \quad \omega_{n+1} = b_3 = l/2.$$

Второе уравнение трех моментов получает вид:

$$M_1 \cdot 1 + 2M_2(1+1) + 0 = -6 \omega_3 \cdot b_3 / l_3,$$

Или

$$M_1 + 4M_2 = -6ql^2/16. \quad (2)$$

Лишние неизвестные (опорные изгибающие моменты M_1 и M_2) определяются из уравнений (1) и (2): $M_1 = -0,007 ql^2$, $M_2 = -0,092 ql^2$.

Строим эпюру опорных изгибающих моментов $M_{\text{опор}}$ (Рис. 10,в). Графически (с соблюдением масштаба) складываем эпюры изгибающих моментов $M_{\text{опор}}$ с эпюрой M_P - от внешней нагрузки для основной системы,

получаем искомую суммарную эпюру M (Рис. 10,г) изгибающих моментов для заданной неразрезной балки.

Приступаем к определению опорных реакций A_0 , A_1 , A_2 и A_3 по известным изгибающим опорным моментам. Сумму моментов всех сил слева от опоры 1 относительно этой опоры приравняем значению опорного момента M_1 :

$$M_1 = - 0,007 ql^2 = A_0 l - 3ql/2 \cdot 3l/4.$$

Отсюда $A_0 = 1,118 ql$.

Аналогично для опоры 2 от сил справа

$$M_2 = - 0,092 ql^2 = A_3 \cdot l - P \cdot l/2, A_3 = 0,408 ql,$$

$$M_1 = - 0,007ql^2 = A_2 \cdot l - P \cdot 3l/2 + A_3 \cdot 2l, A_2 = 0,677 ql,$$

$$M_2^{\text{слева}} = - 0,092 ql^2 = A_1 \cdot l + A_0 \cdot 2l - 3ql/2 (1+3l/4), A_1 = 0,297 ql.$$

у

Определим номер двутаврового сечения балки. Условие прочности балки имеет вид

$$\sigma_{\max} = \pm |M_{\max}| / W_{H.O} \leq [\sigma].$$

Отсюда момент сопротивления сечения

$$W_{HO} \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{0,204ql^2}{160 \cdot 10^6} = \frac{0,204 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^2}{160 \cdot 10^6} = 51 \cdot 10^{-6} = 51 \text{ см}^3.$$

Из таблиц прокатной стали выбираем двутавр № 12 с $W_{H.O}^{\text{табл}} = 53 \text{ см}^3$ и $J_{H.O.} = 318 \text{ см}^4$.

Для определения прогиба балки в середине среднего пролета разрезаем балку двумя поперечными сечениями, бесконечно близкими, от опоры 1 справа и от опоры 2 слева (см.Рис. 10,е). Показываем в этих поперечных сечениях соответствующие величины Q и M , внутренние усилия и верные направления.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в данном пролете имеет вид:

$$EJ_{H.O.} y'' = M = - 0,007 ql^2 - 0,085 ql \cdot x.$$

Интегрируя, получаем:

$$EJ_{н.о.} y' = - 0,007 ql^2 \cdot x - 0,085 ql \cdot x^2/2 + c_1, \quad (3)$$

$$EJ_{н.о.} y = - 0,007 ql^2 \cdot x^2 /2 - 0,085 ql \cdot x^3/6 + c_1x + c_2. \quad (4)$$

Исходя из физического смысла $c_2 = 0$. При $x = 1$ (рис.18, е), $y = 0$. Тогда из (4) следует

$$0 = - 0,0035 ql^3 - 0,0142 ql^3 + c_1, \quad c_1 = 0,0176 ql^3.$$

Искомый прогиб находим из уравнения (4) при $x = 1/2$:

$$y = \frac{\left(-\frac{0,007}{8} - \frac{0,0851}{48} + \frac{0,0176}{2} \right)}{EJ} ql^4 = \frac{0,0062}{EJ} ql^4$$

$$y = ql^4 (-0,007 \cdot 1/8 - 0,085 \cdot 1/48 + 0,0176 \cdot 1/2) / EJ = 0,0062ql^4 / EJ;$$

$$y = \frac{0,0062 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 2^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 318 \cdot 10^{-8}} = 0,0016 м = 1,6 мм$$

1.4 ЗАДАЧА 8

1.4.1 Задание

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент M_k .

Для внутреннего момента M_k принято следующее правило знаков, которым пользуются при построении эпюр M_k .

Крутящий момент считается положительным, если вызывающий его внешний крутящий момент действует относительно рассматриваемого сечения против часовой стрелки (Рис. 11).

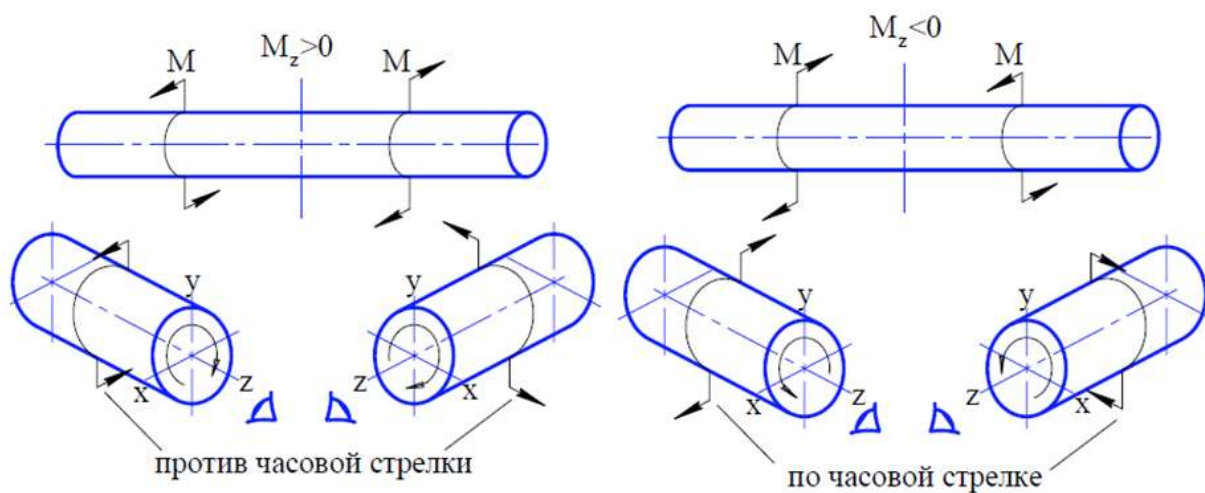


Рис. 11 – Правило знаков при кручении

В общем случае M_k в любом поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к оставленной (после мысленного разреза) части бруса.

К стальному валу приложены три известных момента: m_1 , m_2 , m_3 .

Требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. При заданном значении $[\tau]$ определить диаметры вала на всех участках из расчета на прочность и округлить его значение до ближайшего равного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100.
3. Построить эпюру углов закручивания.
4. Определить относительный наибольший угол закручивания (на 1 метр).

Данные для расчёта выбираются из Таблица 4 по предпоследней цифре зачётной книжки, а расчётная схема выбирается из Рис. 12, по последней цифре зачётной книжки.

Таблица 4 – Данные для восьмой задачи

№ строки	Расстояния, м			Моменты, кНм			[τ], МПа
	a	b	c	m ₁	m ₂	m ₃	
0	0,2	0,2	0,4	2,0	2,0	2,0	60
1	0,3	0,3	0,5	1,0	3,0	3,0	
2	0,4	0,4	0,6	3,0	1,0	10,0	
3	0,5	0,5	0,7	3,0	3,0	6,0	
4	0,6	0,6	0,8	1,0	2,0	9,0	
5	0,7	0,7	0,9	4,0	3,0	7,0	
6	0,8	0,8	1,0	3,0	6,0	8,0	
7	0,9	0,9	1,1	2,0	2,0	10,0	
8	1,0	1,0	1,2	2,0	2,0	10,0	
9	1,1	1,1	1,3	4,0	8,0	2,0	

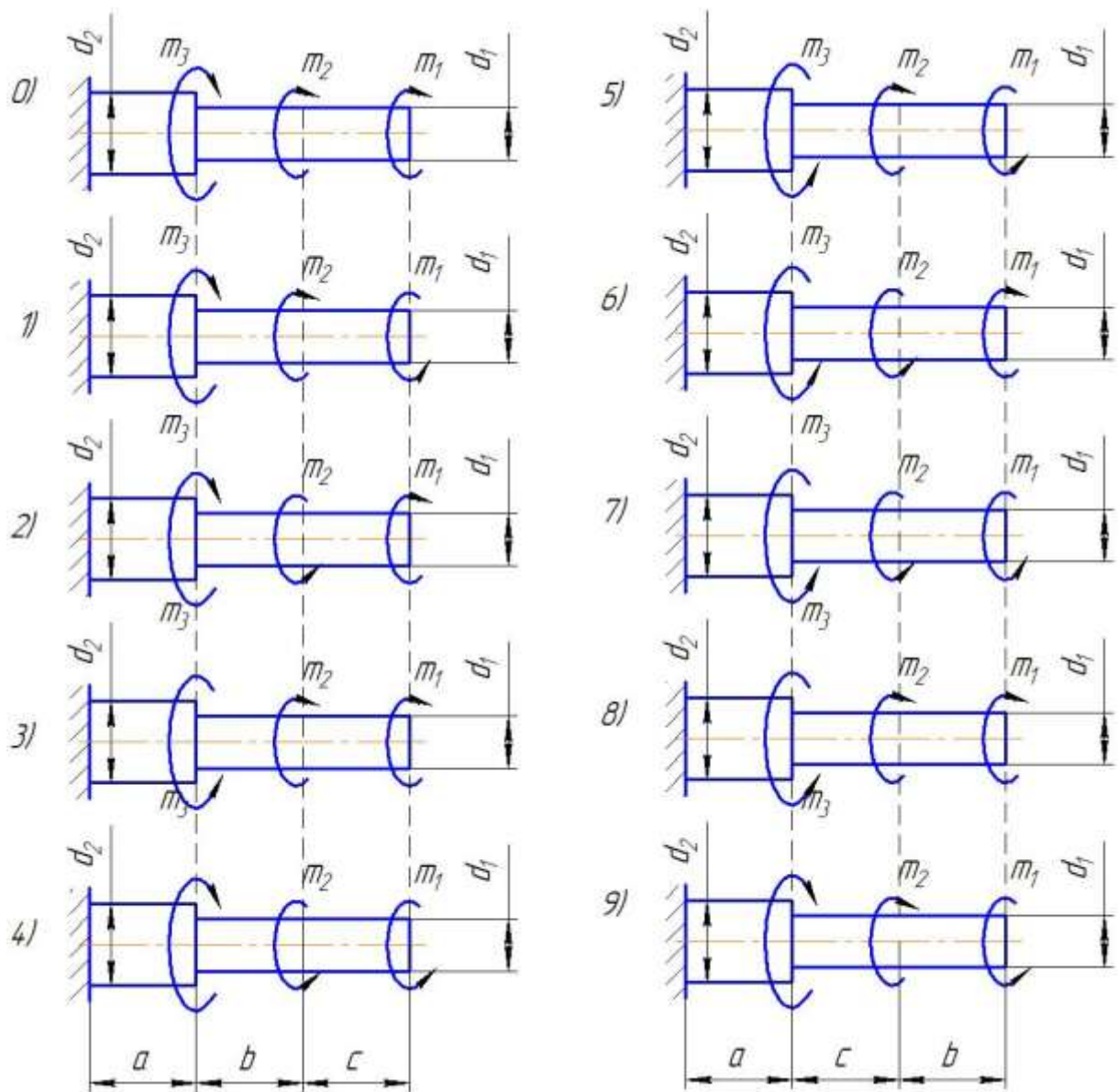


Рис. 12 – Расчётные схемы для восьмой задачи

1.4.2 Пример решения задачи 8

Дано: $a = 0,5\text{м}$; $b = 0,5\text{м}$; $c = 0,7\text{м}$;
 $m_1 = 3,0\text{кН} \cdot \text{м}$; $m_2 = 3,0\text{кН} \cdot \text{м}$; $m_3 = 6,0\text{кН} \cdot \text{м}$.

Брус круглого поперечного сечения, изображенного на Рис. 13, нагружен парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к его оси.

Определить из расчета по допускаемым напряжениям диаметры участков I, II, III, принимая $[\tau] = 60\text{ МПа}$. По найденным значениям диаметров построить эпюру углов закручивания вала и определить наибольший относительный угол закручивания.

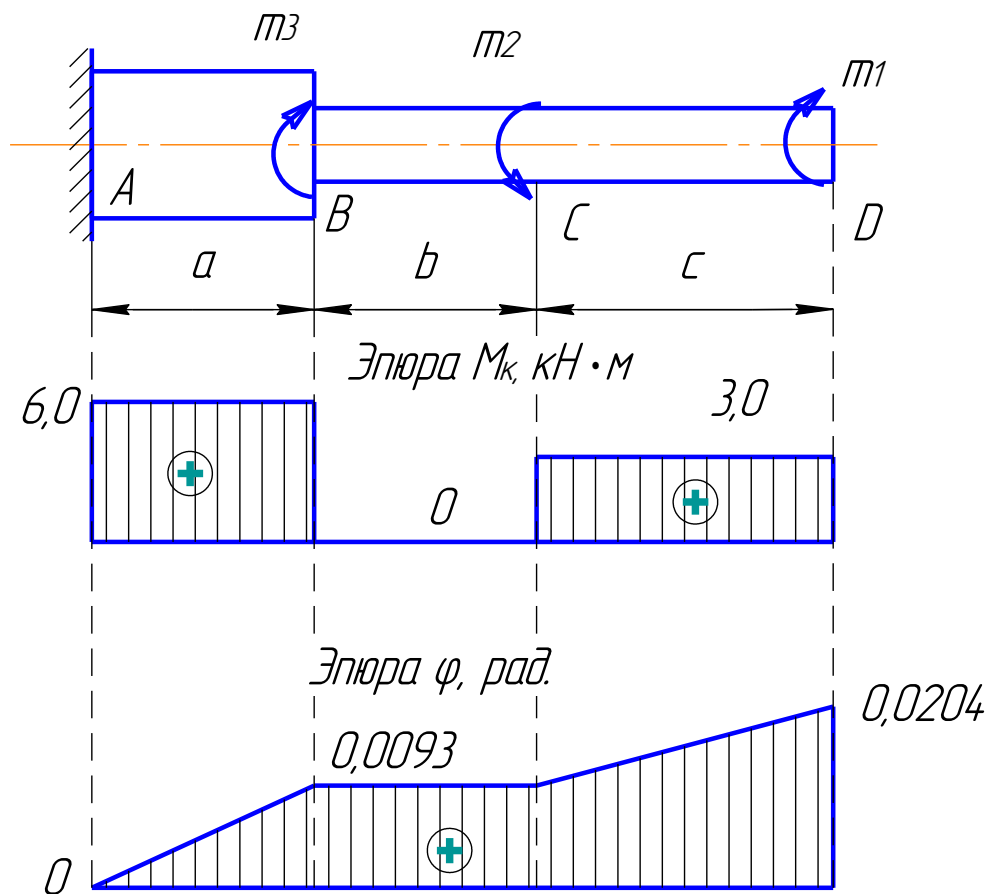


Рис. 13 – Эпюры к задаче 8

Решение. Строим эпюру крутящих моментов. В данном случае, применяя метод сечений, целесообразно оставить правую и отбросить левую часть бруса – это дает возможность не определять реактивный момент в опоре.

Проводим произвольное сечение на участке I и составляем уравнение равновесия для оставленной части бруса (Рис. 13,б)

$$M_1 = m_1 = 3,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

В любом сечении участка I крутящий момент равен $m_1 = 3,0$ кН·м. Поэтому эпюра M_k на этом участке прямая, параллельная оси x .

Аналогично вычисляем крутящие моменты на участке II и III:

$$M_2 = m_1 - m_2 = 3 - 3 = 0;$$

$$M_3 = m_1 - m_2 + m_3 = 3 - 3 + 6 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Заметим, что эпюра M_k , построенная по полученным данным, в местах соответственного приложения внешних моментов (пар сил) имеет скачки на величину этих моментов.

Условие прочности вала, испытывающего кручение, имеет вид

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]$$

Полярный момент сопротивления поперечного сечения (круга)

первого участка

$$W_{\rho 1} = \frac{M_1}{[\tau]} = \frac{3 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^3 (\text{мм}^3);$$

$$W_{\rho 3} = \frac{M_3}{[\tau]} = \frac{6 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 100 \cdot 10^3 (\text{мм}^3).$$

Известно, что

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Отсюда находим диаметры стержня на каждом участке

$$d_1 = d_2 = \sqrt[3]{\frac{16W_{\rho 1}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 50 \cdot 10^3}{\pi}} = 63,4 \text{ (мм)}$$

Принимаем $d_1 = 70$ мм.

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{16W_{\rho 3}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi}} = 79,8 \text{ (мм)}$$

Округлить окончательно размер диаметра следует по ГОСТ 6636-60.

Принимаем $d_3 = 80$ мм.

Так как результирующий крутящий момент на втором участке равен нулю, то диаметр вала на этом участке выбираем из технологических соображений равным диаметру вала на первом участке

Принимаем $d_2 = d_1 = 70$ мм.

Построим эпюры φ - углов закручивания. Начинаем от заделки или неподвижной опоры, в которой $\varphi = 0$.

Находим углы закручивания на каждом участке по формуле

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_p},$$

где M - действующий на участке закручивающий момент;

l - длина участка;

$G = 8 \cdot 10^{10}$ Па - модуль упругости сдвига для стали;
 I_ρ - полярный момент инерции сечения. Для круглого сечения

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

Произведение $G \cdot I_\rho$ называется жёсткостью сечения. Находим жёсткости сечений на каждом участке

$$G \cdot I_{\rho 1} = G \cdot \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (70 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 188560 \text{ (Н} \cdot \text{м}^2\text{)};$$

$$G \cdot I_{\rho 3} = G \cdot \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot (80 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 321675 \text{ (Н} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot c}{G \cdot I_{\rho 1}} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{188560} = 0,0111 \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 \cdot b}{G \cdot I_{\rho 2}} = 0;$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 \cdot c}{G \cdot I_{\rho 3}} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{321675} = 0,0093 \text{ рад}.$$

Для построения эпюры углов закручивания находим сумму углов по участкам, определяя угол закручивания в характерных точках стержня.

$\varphi_A = 0$ – так как в точке А имеется жёсткая заделка.

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_3 = 0,0093 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_2 = 0,0093 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_1 = 0,0204 \text{ рад}.$$

На Рис. 13 построена эпюра углов закручивания вала.

Находим относительные углы закручивания на участках

$$\theta_3 = \frac{\varphi_3}{a} = \frac{0,0093}{0,5} = 0,0186 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$
$$\theta_2 = 0;$$

$$\theta_1 = \frac{\varphi_1}{c} = \frac{0,0111}{0,7} = 0,016 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Таким образом, максимальный относительный угол закручивания

$$\theta_1 = 0,016 \frac{\text{рад}}{\text{м}}$$

находится на участке CD.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сборник задач по сопротивлению материалов : учебное пособие / Н.М. Беляев, Л.К. Паршин, Б.Е. Мельников, В.А. Шерстнев ; под редакцией Л. К. Паршина. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-0865-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/91908>
2. Куликов, Ю.А. Сопротивление материалов. Курс лекций : учебное пособие / Ю.А. Куликов. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 272 с. — ISBN 978-5-8114-2449-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/91882>
3. Кузьмин, Л.Ю. Сопротивление материалов / Л.Ю. Кузьмин, В.Н. Сергиенко, В.К. Ломунов. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 228 с. — ISBN 978-5-8114-2056-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/90004>
4. Кудрявцев, С.Г. Сопротивление материалов. Интернет-тестирование базовых знаний : учебное пособие / С.Г. Кудрявцев, В.Н. Сердюков. — Санкт-Петербург: Лань, 2013. — 176 с. — ISBN 978-5-8114-1393-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/5247>
5. Жуков, В.Г. Механика. Сопротивление материалов : учебное пособие / В.Г. Жуков. — Санкт-Петербург: Лань, 2012. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-1244-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: <https://e.lanbook.com/book/3721>