**ВВЕДЕНИЕ**

Объектом моделирования дисциплины ТРПО являются системы.

Многообразие моделей системы очевидна из общепринятой классификации::



***Объектом моделирования в данной дисциплине будут дискретные системы, а ещё точнее дискретные системы с непрерывным временем.***

**ПОНЯТИЕ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ**

Система в самом общем виде представляется структурой и алгоритмом функционирования. Структурой системы называется набор элементов (компонент) и связей между ними. Алгоритм функционирования системы задаёт последовательность взаимодействия элементов системы во времени, обеспечивающая реализацию задач, для которых предназначена система. При описании процесса функционирования системы, то есть при представлении системы в виде модели, всё разнообразие типов описания систем (типов моделей системы) можно классифицировать по типу двух параметров:

- состояний (S), в которых может находиться система (непрерывное или дискретное множество состояний), и

- моментов времени (T) переключения системы из одного состояния в другое (время в моделях может быть представлено также непрерывным или дискретным).

Всевозможные сочетания типов этих параметров дают четыре варианта типов моделей:

1. S — непрерывное, T — непрерывное. Этот тип моделей математически представляет собой **систему интегральных и дифференциальных уравнений** и позволяет описывать такое поведение системы, при котором для любого состояния системы невозможно определить соседнее состояние из-за неограниченного и непрерывного множества состояний, например, при колебании маятника.
2. S — дискретное, T — дискретное. Модели такого типа относятся к классу систем, называемых **конечными автоматами**. Примерами конечных автоматов могут быть комбинационные (логические) схемы и схемы памяти электронно-вычислительной аппаратуры (ЭВА), состояния которых определяются либо только набором значений входных сигналов — логические схемы (дешифратор, шифратор, мультиплексор, сумматор), либо включая и внутренние состояния — схемы памяти (регистр, счетчик), а время считается дискретным и единицей измерения времени является длительность периода синхроимпульсов, поступающих от генератора тактовых импульсов.
3. S — непрерывное, T — дискретное. Такое представление системы связано с разработкой **методов компьютерного решения систем интегральных и дифференциальных уравнений, основанных на конечных приращениях времени**.
4. S — дискретное, T — непрерывное. К моделям такого типа относится большой класс систем, называемых **системами массового обслуживания (СМО),** которые и являются предметом нашего рассмотрения.

**Задачи, решаемые методами моделирования.**

В общем случае моделирование направлено на решение следующих задач:

1. **Задачи оценки** численных значений характеристик некоторого варианта организации структуры и алгоритма функционирования системы.
2. **Задачи анализа вариантов построения системы,** решаемые при проектировании структур и алгоритмов функционирования схем ЭВА с применением методов моделирования. Такие задачи возникают как при разработке новых систем, так и при исследовании существующих систем с целью их совершенствования. Например, при проектировании средств вычислительной техники возникает необходимость оценки быстродействия процессора для некоторого класса программ (вычислительных, информационных, игровых, управления, регулирования), производительности отдельного компьютера или компьютерной системы, загрузки цифровой аппаратуры, пропускной способности канала, порта ввода-вывода. При исследовании вариантов организации производства или систем обслуживания возникают задачи оценки производительности участка производства, загруженности обслуживающего персонала, эффективности работы склада, оценки влияния алгоритмов диспетчеризации (дисциплин обслуживания) на характеристики качества работы логистического предприятия и т. д.
3. **Задачи оптимизации** структур и алгоритмов функционирования ЭВА — решаются сочетанием методов моделирования, численных методов оптимизации и методов планирования многофакторных экспериментов.

Методы моделирования, применяемые при решении этих задач, делятся на два класса:

* аналитические — методы теории массового обслуживания, включающие основы теории вероятностей, теорию марковских процессов, методы и алгоритмы построения системы дифференциальных уравнений и способы их решения;
* имитационные — методы, основанные на построении алгоритмов, описывающих поведение системы, и на применении средств программной реализации этих алгоритмов, то есть компьютерном моделировании поведения систем.

**Лекция1.**

**ТЕМА 1. Теоретические основы математического моделирования систем с дискретными состояниями и непрерывным временем**

**Марковский случайный процесс.**

Рассматриваемые здесь положения являются основой раздела исследования систем, который называется исследованием операций. Для нас это важно, так как практические задачи исследования многих классов систем, в том числе экономических систем и процессов, хорошо согласуются с теоретическими предпосылками теории марковских процессов. В стохастических задачах исследования операций часто затруднительно даже построение математической модели, уже не говоря об оптимизации. В большинстве случаев не удается построить простую математическую модель, позволяющую в аналитическом виде найти интересующие нас величины (характеристики исследуемого процесса, показатели его эффективности) в зависимости от условий выполнения процесса и элементов решения*.* Однако в некоторых особых случаях такую математическую модель удается построить. Например, когда исследуемая операция (процесс) представляет собой (точно или приближенно) так называемый **марковский случайный процесс**.

Определение этого понятия прежде всего связано с более общим понятием **«случайный процесс».**

Пусть некоторая физическая система характеризуется некоторым множеством состояний, а процесс функционирования системы во времени представляется изменением состояний (переход системы из одного состояния в другое). При этом моменты времени перехода заранее неизвестны, случайны. Тогда мы будем говорить, что в системе протекает случайный процесс.

Большинству процессов, протекающих в реальных системах, свойственны, в той или иной мере, черты случайности, неопределенности. Пусть, например, автомобиль, движущийся по шоссе. Его перемещение в пространстве и во времени неизбежно сопровождается случайными отклонениями от заданного курса, которые приходится корректировать. Поездка из дома на работу, обслуживание покупателя в магазине, ремонт оборудования в мастерской, телефонные звонки в офис, поиск информации в сети — всё это примеры операций, характеризующихся наличием случайных процессов.

Пусть физическая система *—* учебный класс персональных компьютеров, состоящий из ряда ПК, которые время от времени выходят из строя, заменяются или восстанавливаются. Процесс, протекающий в этой системе, безусловно, случаен. А станция техобслуживания? В ней время от времени могут образовываться и рассасываться очереди на выполнение определённых операций, возникать задержки в очереди из-за занятости технического персонала, боксов ремонта и прочее.

Вообще труднее привести пример «неслучайного» процесса, чем случайного. Наиболее вероятны неслучайные процессы могут быть связаны с работой автоматизированных или автоматических устройств типа робот. Но практически многие процессы в природе и в деятельности человека, мало влияющие на интересующие нас параметры, можно рассматривать как **детерминированные, неслучайные.** Необходимость учета случайностей возникает тогда, когда они прямо касаются нашей заинтересованности, то есть воздействуют на адекватность принимаемых решений или точность оценок искомых характеристик системы. Например, составляя расписание самолетов, можно пренебречь случайными колебаниями самолета вокруг центра массы, а проектируя автопилот — безусловно, нельзя пренебрегать этими колебаниями. Большинство процессов, которые мы изучаем в физике, технике, экономике, по существу являются случайными, но только некоторые из них мы изучаем как случайные — когда нам это «практически важно».

Одним из базовых понятий теории массового обслуживания является понятие марковского процесса.

***Случайный процесс называется марковским,*** *если для любого момента времени t0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.*

Пусть в настоящий момент *t0* система находится в определенном состоянии *S0.* Мы наблюдаем процесс со стороны и в момент *t0* знаем состояние системы *S0* и всю предысторию процесса, то есть всё, что было при *t < t0.* Нас, естественно, интересует будущее *(t* > *t0).* Можем ли мы его предугадать (предсказать)? В точности — нет, наш процесс случайный, значит — непредсказуемый. Но какие-то вероятностные характеристики процесса в будущем мы найти можем. Например, вероятность того, что через некоторое время *dt* система окажется в состоянии *Si* или сохранит состояние *S0,* и т. п.

Следует иметь в виду, что для марковского случайного процесса такое «вероятностное предсказание» оказывается гораздо проще, чем для немарковского. Если процесс — марковский, то предсказывать можно, только учитывая настоящее состояние системы *S0* и забыв о его «предыстории» (поведении системы при *t < t0).* Само состояние *S0*, разумеется, зависит от прошлого, но как только оно достигнуто, о прошлом можно забыть, то есть можно сказать, что **в марковском процессе «будущее зависит от прошлого только через настоящее»**.

Пример марковского процесса: система — счетчик Гейгера, на который время от времени попадают космические частицы; состояние системы в момент *t* характеризуется показанием счетчика — числом частиц, пришедших до данного момента. Пусть в момент *t0* счетчик показывает *S0.* Вероятность того, что в момент *t > t0* счетчик покажет то или другое число частиц*,* разумеется, зависит от *S0,* но не зависит от того, в какие именно моменты приходили частицы до момента *t0.*

На практике часто встречаются процессы, которые если не в точности марковские, то могут быть в каком-то приближении рассмотрены как марковские. Пример, система *S —* группа самолетов, участвующих в воздушном бою. Состояние системы характеризуется числом самолетов «красных» — *х* и «синих» — *y*, сохранившихся (не сбитых) к какому-то моменту. В момент *t0* нам известны численности самолетов обеих сторон — *x0* и *у0.* Нас интересует вероятность того, что в какой-то момент *t0* + *dt* численный перевес будет на стороне «красных». От чего зависит эта вероятность? В первую очередь от того, в каком состоянии находится система в данный момент *t0*, а не от того, когда и в какой последовательности погибали самолеты, сбитые до момента *t0*.

Теперь выскажем парадоксальное утверждение, которое является основополагающим в теории исследования операций: в сущности, любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из «прошлого», от которых зависит «будущее», включить в «настоящее». Например, пусть известно, что некоторое техническое устройство в какой-то момент *t0*  работает исправно и нас интересует вероятность того, что оно проработает еще время *t*. Если за настоящее состояние устройства принять состояние «устройство исправно», то процесс безусловно будет не марковским, потому что вероятность того, что оно не откажет за время *t*, зависит в общем случае от того, сколько времени оно уже проработало и когда был последний ремонт. Если оба эти параметра (общее время работы и время после последнего ремонта) включить в настоящее состояние данного устройства, то процесс уже можно будет считать марковским. Однако такое «обогащение настоящего за счет предыстории» далеко не всегда бывает полезно, так как (если число параметров прошлого велико) оно зачастую приводит к «проклятию многомерности». Поэтому в дальнейшем, говоря о марковском процессе, мы будем подразумевать его простым, «бесхитростным», с небольшим числом параметров, определяющих «настоящее».

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются, но нередко приходится иметь дело с процессами, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь. При изучении таких процессов можно с успехом применять марковские модели.

При исследовании экономических процессов как случайных процессов, рассматриваемых в рамках дисциплины «Математическое и имитационное моделирование», большое значение имеют так называемые марковские случайные процессы с **дискретными состояниями и с непрерывным временем**. Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния *S1, S2, S3,...* можно заранее перечислить (перенумеровать, если даже их количество неограничено), и переход системы из одного состояния в некоторое другое состояние происходит «скачком», практически мгновенно. **Процессом с непрерывным временем** называется процесс, в котором моменты возможных переходов из одного состояния в другое не фиксированы заранее, а случайны. Далее будем рассматривать только **процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем**.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями *S1, S2,* ..., *Sn* удобно пользоваться графическим представлением переходов системы из одного состояния в другое, которое называется **графом состояний**. Состояниям системы соответствуют вершины графа, а возможные переходы из состояния в состояние обозначаются направленными ребрами графа (стрелками), соединяющими состояния.

Например, система *S* состоит из двух подсистем, каждая из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт подсистемы, продолжающийся некоторое заранее неизвестное, случайное время. Возможные состояния системы обозначим следующим образом: *S0 —* обе подсистемы исправны, *S1 —* первая подсистема ремонтируется, вторая исправна, *S2* — вторая подсистема ремонтируется, первая исправна, S3— обе подсистемы ремонтируются.

Переходы системы из одного состояния в другое происходят в случайные моменты времени (например, время работы подсистемы до отказа, называемое временем наработки на отказ, и время ремонта данной подсистемы) и отображаются на графе состояний соответствующими направленными ребрами графа (Рисунок 1). Факт выхода из строя первой подсистемы при работающей второй отображается ребром перехода из *S0* в *S1,* выход второй подсистемы после выхода первой –– ребром перехода из *S1* в *S3* , факт окончания ремонт отображается соответствующим ребром перехода в обратном направлении (например, из *S1* в *S0* — при окончании ремонта первой подсистемы и при работающей второй).



**Рисунок 1 — Граф состояний СМО (на примере технического устройства)**

Возникает вопрос, почему нет стрелок, ведущих непосредственно из *S0* в S3 и обратно? Разве не может быть, что обе подсистемы откажут одновременно, например, вследствие короткого замыкания? Так внимание: здесь и далее будем предполагать, что подсистемы выходят из строя независимо друг от друга, и **вероятностью** того, что обе **(**а в общем случае – несколько) подсистемы могут выйти из строя **строго одновременно, пренебрегаем** (ниже будет дано более точно обоснование этого допущения).

Почему так важно понятие марковского процесса? Потому что если процесс, протекающий в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, является марковским, то для его описания можно построить довольно простую математическую модель.

**Потоки событий. Простейший поток событий.**

**Событием в системе** называется переход системы из одного состояния в другое.

**Потоком событий** называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов (сбоев) ЭВМ, поток покупателей в магазин, поток автомобилей к заправочной станции и т. д.

Говоря о «потоке событий», нужно иметь в виду, что здесь термин «событие» имеет значение, несколько отличное от того, к которому мы привыкли в теории вероятностей. Там «событием» (или «случайным событием») называется какой-то исход опыта, обладающий той или другой вероятностью. События, образующие поток, сами по себе вероятностями не обладают, вероятностями обладают другие, производные от них события, например: «на интервале времени *dt* выпадет ровно два события», или «на интервал времени *dt вы*падет хотя бы одно событие», или «промежуток времени между двумя соседними событиями будет не меньше *t1*».

Важнейшей характеристикой потока событий является его интенсивность, далее обозначаемая греческой буквой .



**Интенсивностью называется** среднее число событий, появляющихся за единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной (= const), так и переменной, зависящей от времени *t (= f(t)).* Например, поток автомашин, движущихся по улице, днем интенсивнее, чем ночью, в часы пик — интенсивнее, чем в другие часы.



**Поток событий называется регулярным,** если события следуют одно за другим через определенные, равные промежутки времени. На практике чаще встречаются потоки не регулярные, со случайными интервалами.

**Поток событий называется стационарным**, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока должна быть постоянной. Это отнюдь не значит, что фактическое число событий, появляющихся за определенный интервал времени, (например, за 5 мин) постоянное, — нет, поток неизбежно (если только он не регулярный) имеет какие-то случайные сгущения и разрежения. Важно, что для стационарного потока эти сгущения и разрежения не носят закономерного характера: на один участок длины *dt* может попасть больше, а на другой участок такой же длины — меньше событий, но среднее число событий, появляющихся за единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

Как правило, отклонения от стационарности могут быть объяснены какими-то физическими причинами. Например, совершенно естественно, интенсивность потока вызовов, поступающих на АТС ночью, меньше, чем днем. На практике часто встречаются потоки событий, которые (по крайней мере на ограниченном участке времени) могут считаться стационарными. Например, поток пассажиров на транспорте между 13 и 14 часами практически стационарен, тот же поток в течение суток уже не стационарен, его интенсивность утром и вечером существенно выше.

**Поток событий называется потоком без последействия**, если для любых двух непересекающихся участков времени *t1* и *t2* число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. По сути это означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга, вызванные каждое своими собственными причинами. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А вот поток покупателей, отходяших от привавков с купленными торварами, уже имеет последействие, потому что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время *t2* обслуживания каждого из них). Так же обстоит дело и с потоком поездов, подходящих к станции (между ними всегда существует какой-то минимальный интервал *t0,* выбираемый из соображений безопасности). Впрочем, если минимальный интервал между событиями много меньше среднего интервала между ними *tс* =1/, иногда наличием последействия можно пренебречь.



**Поток событий называется ординарным**, если события в нем появляются поодиночке, а не группами — по нескольку сразу. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую или к зубному врачу, обычно ординарен, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в загс для регистрации брака. Поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов — неординарен. Если поток событий ординарен, то предполагается, что вероятностью попадания на малый участок времени *dt* двух или более событий можно пренебречь, так как она несоизмеримо меньше, чем вероятность попадания одного события.

**Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он обладает всеми тремя свойствами: свойством стационарности, свойством без последействия и свойством ординарности*.***

Название «простейший» обусловлено тем, что процессы, связанные с простейшими потоками, имеют наиболее простое математическое описание.

***Примечание***: следует иметь ввиду, что ***регулярный поток не является «простейшим»,*** так как *обладает последействием*: моменты появления событий в таком потоке связаны жесткой, функциональной зависимостью. Без специальных усилий по поддержанию его регулярности такой поток обычно не создается.

Простейший поток играет среди других потоков особую роль, в чем-то подобную роли нормального закона среди других законов распределения.

*При этом математически доказано, что* ***при суммировании достаточно большого числа независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к простейшему****.*

Важно: ***для простейшего потока с интенсивностью интервал Т между соседними событиями имеет так называемое*** **показательное распределение** ***с плотностью распределения*** *f(t) = e -(t), (t* >= 0).



Величина в этой формуле называется параметром показательного закона. Для случайной величины *t,* имеющей показательное распределение, математическое ожидание *тt* есть величина, обратная параметру, а среднеквадратическое отклонение D*t* равно математическому ожиданию, то есть *mt* = *Dt =* 1/.

