**ТЕМА 2. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ (аналитических) моделей дискретных процессов и систем**

**2.1. Уравнения Колмогорова** — **математическая основа расчета марковского процесса.**

Принципы построения по графу состояний системы уравнений Колмогорова, примеры решения системы уравнений.

Рассматривая марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, удобно представлять, что все переходы системы из состояния *Si* в состояние *Sj* происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, поток отка­зов, поток восстановлений и т. д.). Если все потоки со­бытий, переводящие систему из состояния *Si* в состояние *Sj*, простейшие, то процесс протекающий в системе, будет марковским. Это и естественно, так как про­стейший поток не обладает последействием: в нем «бу­дущее» не зависит от «прошлого».

Если система находится в каком-то состоянии *Si,* из которого есть непосредственный переход в другое состояние S*j* (стрелка, ведущая из *Si* в *Si* на графе состояний), то мы это будем представлять так, как будто на систему, пока она находится в состоянии *Si,* действует простейший поток событий, переводящий ее по стрелке *Si* –> *Sj.* Как только появится первое со­бытие этого потока, происходит «перескок» системы из *Si* в *Sj* .

Для наглядности на графе состояний у каждой стрелки принято проставлять интенсивность того по­тока событий, который переводит систему по данной стрелке. Обозначим ij интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния *Si* в *Sj.* На Рисунке 2.1 приведен пример графа состояний системы с проставленными интенсивностями переходов.

01

20

02

10

13

23

32

31

**Рисунок 2.1.** —  **Граф состояний системы с ребрами графа, размеченными интенсивностями переходов**

Интенсивности потоков событий, переводящих сис­тему из состояния в состояние, будем вычислять, пред­полагая, что среднее время ремонта узла не зависит от того, ремонтируется ли один узел или оба сразу. Это будет именно так, если ремонтом каждого узла занят отдельный специалист. Найдем все интенсивно­сти потоков событий, переводящих систему из состоя­ния в состояние. Пусть система находится в состоянии *Sо.* Какой поток событий переводит ее в состояние *S1?* Очевидно, это поток отказов первого узла. Его интенсив­ность 01 среднее время безотказной работы равна единице, деленной на первого узла. Какой поток собы­тий переводит систему обратно из *S1* в S0? Очевидно, поток «окончаний ремонтов» первого узла. Интен­сивность этого потока *10 =1/Tрем1 , где Tрем1* — среднее время ремонта первого узла. Аналогично вычисляются интен­сивности потоков событий, переводящих систему по всем стрелкам графа.

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний системы, легко построить математическую модель данного процесса. Пусть рассматривается система,имеющая *п* возможных состояний S1, *S2,* ..., *Sn.* Назо­вем вероятностью *i-го* состояния вероятность *Pi(t)* того, что в момент *t* система будет находиться в состоянии *Si .* Очевидно, что в любой момент времени система должна находиться в каком-либо одном из состояний, то есть для любого момента времени сумма всех вероятностей состояний равна единице:

n

∑ *Pi(t )=* 1

i=1

Имея в своем распоряжении размеченный граф со­стояний, можно найти все вероятности состояний *Pi(t)* как функции времени. Для это­го составляются и решаются так называемые уравнения Колмогорова — особого ви­да дифференциальные уравне­ния, в которых неизвестными функциями являются вероятно­сти состояний.

Покажем на конкретном примере, как эти уравнения со­ставляются. Пусть система имеет четыре состояния: *S0. S1. S2. S3*, размеченный граф которых показан на Рисунке 2.2. Отсутствие направленной связи между состояниями указывает на невозможность непосредственного перехода, например, из состояния S3 в состояние S0 и обратно.

**Рисунок 2.2** — **Размеченный граф состояний для построения уравнений Колмогорова**

20

02

12

13

32

3111

01

Рассмотрим вероятность того, что в некоторый момент времени *t* +Δt система окажется в состоянии *S1 . Как это может произойти? Возможны два варианта этого события: 1) в предыдущий момент времени t* *система находилась в этом состоянии и не перешла ни в какое другое состояние, в которое система могла бы перейти согласно графу состояний* — *это состояние S2. или S3, 2) в предыдущий момент времени система находилась в состоянии S0. и перешла в состояние S1 или система находилась в состоянии S3  и перешла в состояние S1.*

Найдем вероятность первого варианта. Вероятность того, что в момент *t* система была в состоянии *S1,* рав­на *P1(t).* Эту вероятность нужно умножить на веро­ятность того, что, находившись в момент *t* в состоянии S1*,* система за время *Δt не* перейдет из него ни в S2, ни в S3., то есть *P1(t)\*(1- λ12\**Δt - λ13Δt ). Суммарный поток событий, выводящий систе­му из состояния *S1,* тоже будет простейшим, с интен­сивностью λ12 + λ13 (при наложении — суперпозиции — двух простейших потоков получается опять простей­ший поток, так как свойства стационарности, ординарности и отсутствия последействия сохраняются). Зна­чит, вероятность того, что за время  *Δt* система выйдет из состояния *S1,* равна *(λ12* + λ13) Δt ; вероятность того, что не выйдет, равна: (1 — (λ12+λ13)Δt). Отсюда вероятность первого варианта равна *P1(t)(1 — (λ12 +λ 13) Δt).*

Найдем вероятность второго варианта. Она равна, во-первых, вероятности того, что в момент *t* система будет в со­стоянии S0, а за время *Δt* перейдет из него в состоя­ние S1, т. е. она равна *P0(t)λ01Δt, и во-вторых,* вероятности того, что в момент *t* система будет в со­стоянии S3, а за время *Δt* перейдет из него в состоя­ние S1, т. е. она равна *P3(t)λ31Δt .*

Складывая вероятности обоих вариантов (по прави­лу сложения вероятностей), получим:

*P1(t* +Δt*)*= *P1(t)[*1-(λ12+λ13)Δt]+ *P0(t)λ01Δt + P3(t)λ31Δt.*

Раскроем квадратные скобки, перенесем *P1(t)* в ле­вую часть и разделим обе части на *Δt*:

*[P1(t* +Δt*) - P1(t)] / Δt =* - *P1(t)* (λ12+λ13)+ *P0(t)λ01 + P3(t)λ31.*

Устремляя, как и полагается в подобных случаях, *Δt* к нулю (время перехода системы из одного состояния в другое в моделях ТМО считается бесконечно малым), в левой части равенства получим в пределе первую производную функции *P1(t),* то есть *dP1(t)/dt*, а вправой части –– выражение для вычисления значения этой производной*.* Таким образом, запишем дифферен­циальное уравнение для *P1(t):*

*dP1/dt* =- *P1(t)* (λ12+λ13)+ *P0(t)λ01 + P3(t)λ31*

Сформулируем теперь общее правило составления уравнений Колмогорова. В левой части каждого из них стоит производная вероятности какого-то (i-ro) состоя­ния. В правой части — сумма произведений вероятно­стей всех состояний, *из которых идут стрелки в дан­ное состояние,* на интенсивности соответствующих по­токов событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, *выводящих систему из данного состояния,* умноженная на вероятность данного (i-ro) состояния.

Пользуясь этим правилом, запишем уравнения Кол­могорова для системы, размеченный граф состояний которой дан на Рисунке 2.2:

*dP0/dt* = - *P0(t)* (λ01+λ02)+ *P2(t)λ20*

*dP1/dt* = - *P1(t)* (λ12+λ13)+ *P0(t)λ01 + P3(t)λ31*

*dP2/dt* = - *P2(t)* λ20+*P0(t)λ02+P1(t)λ12+P3(t)λ32*

*dP3/dt* = - *P3(t)(λ31+ λ32)+P1(t)* +λ13

Чтобы решить уравнения Колмогорова и найти ве­роятности состояний, прежде всего надо задать на­чальные условия. Если мы точно знаем начальное со­стояние системы Si, то в начальный момент (при t = 0) Рi(0) = 1, а все остальные начальные вероятно­сти равны нулю. Так, например, уравнения естественно решать при начальных условиях Р0(0) = 1, P1(0) = Р2(0) =Рз(0) = 0 (в начальный момент оба уз­ла исправны).

Таким образом, уравнения Колмогорова дают воз­можность найти все вероятности состояний как функ­ции времени.

Поставим теперь вопрос: что будет происходить с вероятностями состояний при *t –*» ∞ ? Будут ли Р*1(t), Р2(t),...* стремиться к каким-то пределам? Если эти пределы существуют и не зависят от начального со­стояния системы, то они называются финальными вероятностями состояний. В теории случай­ных процессов доказывается, что *если число п состоя­ний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое, то финальные вероятности существуют.*

Предположим, что это условие выполнено и фи­нальные вероятности существуют:

*Lim Рi(t) = Рi , (i= 1,2, ...,n).*

*t -»∞*

Финальные вероятности мы будем обозначать теми же буквами Р*1, Р2,* ..., что и сами вероятности состоя­ний, но разумея под ними уже не переменные величи­ны (функции времени), а постоянные числа. Очевидно, они тоже образуют в сумме единицу:

*n*

*∑ Рi =1.*

*i=1*

Как понимать эти финальные вероятности? При *t* -»∞ в системе устанавливается предельный, ста­ционарный режим, в ходе которого система случайным образом меняет свои состояния, но их вероятности уже не зависят от времени. Финальную вероятность состоя­ния можно истолковать как среднее относи­тельное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если система имеет четыре состояния *S0. S1. S2. S3*, и их финальные вероятности рав­ны 0,2, 0,3, 0,1 и 0,4, это значит, что в предельном, стацио­нарном режиме система в среднем две десятых време­ни проводит в состоянии *S0,* три десятых — в состоя­нии S1, одну десятую –– в состоянии *S2.* и четыре десятых времени — в состоянии *S3*.

Как же вычислить финальные вероятности? Очень просто. Если вероятности *S0, S1, ..., S3* постоянны, то их производные равны нулю. Значит, чтобы найти фи­нальные вероятности, нужно все левые части в урав­нениях Колмогорова принять равными нулю и ре­шить полученную систему уже не дифференциальных, а линейных алгебраических уравнений.

Для первого состояния алгебраическое уравнение имеет вид:

- *P1(t)* (λ12+λ13)+ *P0(t)λ01 + P3(t)λ31* = 0

Пользуясь этим правилом, напишем линейные алгебраические уравнения для финальных вероятно­стей всех состояний системы:

- *P0(t)* (λ01+λ02)+ *P2(t)λ20* = 0

- *P1(t)* (λ12+λ13)+ *P0(t)λ01 + P3(t)λ31*  = 0

- *P2(t)* λ20+*P0(t)λ02+P1(t)λ12+P3(t)λ32* = 0

- *P3(t)(λ31+ λ32)+P1(t)* +λ13 = 0

Заметим, что, учитывая свойство стационарности, можно в дальнейшем параметр t не показывать, так как вероятности как интегральные характеристики состояний системы не зависят от времени. Кроме того, пользуясь тем, что в любой момент времени система должна находиться в одном из состояний и, следовательно, справедливо уравнение, которое назовем **нормирующим**: *P0 + P1+P2 +P3 = 1.*

При этом следует иметь ввиду, что одно из уравнений системы (любое, кроме нормирующего) получается лишним и его можно отбросить. Тогда решение системы уравнений состоит в определении любой из вероятностей *Рi как функций*, зависящих от интенсивностей, значения которых являются исходными данными i=0,1,2,3 можно выразить через другие.

Таким образом, для расчета характеристик моделируемой системы, представленной графом из 4-х состояний на Рисунке 2.2, записывается система из 4-х **уравнений Колмогорова**, содержащей четыре неизвестных переменных *P0,P1,P2,P3* , и нормирующего уравнения – суммы вероятностей всех состояний моделируемой системы:

- *P0* (λ01+λ02)+ *P2λ20* = 0

- *P1* (λ12+λ13)+ *P0λ01 + P3λ31*  = 0

- *P2* λ20+*P0λ02+P1λ12+P3λ32* = 0

- *P3(λ31+ λ32)+P1* +λ13 = 0

*P0+ P1 +P2+P3  = 1*

Решение системы уравнений сводится к получению формул - зависимостей вероятностей *P0, P1, P2,P3* всех состояний системы от известных параметоров, задаваемых в качестве исходных данных, а именно от интенсивностей переходов системы из одного состояния в другое.

В заключение этого параграфа сформулируем в общем виде правило построения системы алгебраических уравнений, основанных на системе уравнений Колмогорова. **Это надо понять и уметь применить:**

**Правило составления уравнений Колмогорова в общем виде..**

**Левая часть каждого из уравнений – это производная вероятности i-го состояния, которая при стационарном режиме работы СМО равна 0 (в большинстве случаев будем считать, что режим работы СМО стационарный – см.тему 1). В правой части уравнения записывается сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).**

**Примечание 1.** Следует иметь ввиду, что граф состояний должен включать ВСЕ состояния, возможные для данной системы, все возможные переходы из состояния в состояние, и в любой момент времени система должна находиться в каком-то из состояний, следовательно, сумма всех вероятностей состояний должна быть равна …???.(догадайтесь сами), и ***это уравнение называется нормировочным и ОБЯЗАТЕЛЬНО включается в систему уравнений Колмогорова, а какое-то из уравнений вероятности должно быть вычеркнуто из системы, чтобы количество уравнений системы равнялось количеству неизвестных (вероятностей состояний).***

**Примечание 2.** Для удобства нумерации состояний СМО предлагаю в дальнейшем за номер состояния принимать общее количество заявок , находящихся в системе (на обслуживании и в очереди).

**Внимание:** для проверки **понимания** того, что прочитали в файлах лекций 1 и 2 (ДВА ПРОСТЫХ ЗАДАНИЯ)…

Предлагаю прочитавшим эту лекцию попробовать следующее:

1) построить самостоятельно граф состояний простейшей системы массового обслуживания (СМО): на вашей кафедре один телефонный аппарат, на который поступают звонки в случайные моменты времени с некоторой интенсивностью (например, 4 звонка в мин), каждый разговор длится 1.5 минуты. Построить граф состояний и записать по нему уравнения Колмогорова **и решить систему уравнений** (вывести формулы вероятностей всех состояний этой системы в зависимости от интенсивностей потока входных звонков и потока обслуживания этих звонков).

2) построить самостоятельно **только граф состояний** (без вывода формул) этой же СМО, но при условии, что звонки, поступающие в момент занятости телефона, не теряются и образуют очередь - количество таких звонков неограничен и терпеливо ожидают ответа…

Это же задание я высылаю отдельно в виде файла к 1-й письменной работе по теме 2 с некоторыми рекомендациями по алгоритму выполнения задания.

Свои решения высылайте мне и на следующем занятии рассмотрим и обсудим ваши решения этой задачи.