САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

Г. Ш. ТАМАСЯН

ПРОГРАММНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2008

УДК 517.977
ББК 22.18
Т 17

Р е ц е н з е н т ы : докт. физ.-мат. наук, проф. *Н. В. Смирнов*
(Санкт-Петербургский государственный университет),
канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. *В. В. Кулагин*
(Институт проблем машиноведения РАН)

Печатается по постановлению Редакционно – издательского совета факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

Т 17 **Тамасян Г. Ш.**
Программные управления и наблюдаемость: Учеб. пособие / Тамасян Г. Ш. — СПб.: Издательство "СОЛО", 2008. — 74 с.

ISBN 979-5-98340-175-3

Настоящее пособие содержит материалы практических занятий курса "Теория управления", читаемого на факультете прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Рассматриваются разделы: программные управления и наблюдаемость. В каждом разделе приведены необходимые теоретические сведения, разобраны примеры.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области теории управления, математической теории моделирования, оптимизации и математического программирования.

Библиогр. 13 назв.

УДК 517.977
ББК 22.18

Работа над пособием осуществлялась при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант №06-01-00276.

ISBN 979-5-98340-175-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ ЗНАКИ

$\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное векторное пространство

$C^k[0,T]$ — множество k раз непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ функций

$\overline{1,N}$ — множество натуральных чисел от 1 до N

$A=[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ — квадратная $(n\times n)$-матрица с элементами a_{ij}

A^* — транспонированная матрица A

$x=(x_1,\ldots,x_n)^*$ — вектор-столбец

$\mathbf{0}=(0,\ldots,0)^*$ — нулевой вектор в $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{O}$ — матрица, все элементы которой равны нулю

E_n или просто E — единичная матрица, квадратная матрица n-го порядка, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю

$\det A$ — определитель (детерминант) матрицы A

$\operatorname{rang} A$ — ранг матрицы A

$\operatorname{Sp} A=\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$ — след матрицы $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^n$

$J=\operatorname{diag}(J_1,\ldots,J_r)$ — квазидиагональная (блочно-диагональная) матрица, то есть J — матрица, у которой на главной диагонали стоят квадратные матрицы $J_1,\ldots,J_r$, а все остальные элементы — нули.

ГЛАВА 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1.1. Фундаментальная матрица. Формула Коши

Рассмотрим линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых переменных, $P(t)$ — $(n \times n)$-матрица, элементы которой являются функции, определенные и непрерывные при $t \geqslant 0$.

Определение 1.1. Квадратная матрица n-го порядка $Y(t)$ называется *фундаментальной матрицей* системы (1.1), если ее элементы являются непрерывно-дифференцируемыми функциями при $t \geqslant 0$, а столбцы $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ представляют собой линейно независимые решения системы (1.1).

Определение 1.2. Фундаментальная матрица $Y(t)$ называется *нормированной* в точке $t = t_0$, если $Y(t_0) = E_n$, где E_n — единичная $(n \times n)$-матрица.

Определение 1.3. Определитель фундаментальной матрицы $Y(t)$ называется *определителем Вронского* или *вронскианом.*

Свойства фундаментальной матрицы:

1. Фундаментальная матрица $Y(t)$ удовлетворяет матричному уравнению
$$\dot{Y}(t) = P(t)Y(t).$$

2. Фундаментальная матрица $Y(t)$ является *невырожденной*, то есть $\det Y(t) \neq 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

3. Если $Y(t)$ — фундаментальная матрица, а $t_0 \in [0, \infty)$ — некоторое число, тогда справедлива формула Остроградского—Лиувилля
$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} P(\tau)\, d\tau\right),$$
где $\operatorname{Sp} P(t) = p_{11}(t) + \cdots + p_{nn}(t)$ — след матрицы $P(t)$.

4. Пусть S — произвольная неособенная постоянная матрица порядка n. Если $Y(t)$ — фундаментальная матрица, тогда $Y_1(t) = Y(t)S$ также является фундаментальной матрицей.

5. Для любой точки $t_0 \in [0, \infty)$ существует одна и только одна *нормированная* в этой точке фундаментальная матрица.

6. Если в системе (1.1) матрица P — постоянная, тогда

$$Y^{-1}(t) = Y(-t).$$

Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (1.1), тогда общее решение этой системы имеет вид

$$x(t) = Y(t)C, \tag{1.2}$$

где $C \in \mathbb{R}^n$ — вектор произвольных постоянных.

Замечание 1.1. Система (1.1) имеет бесконечное число фундаментальных матриц. Но в фиксированной точке $t_0 \in [0, \infty)$ существует *единственная* фундаментальная матрица, нормированная в этой точке.

Задача Коши. Среди всех решений (1.2) системы (1.1) найти то, которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Решение задачи Коши для системы (1.1) можно записать, используя ее фундаментальную матрицу

$$x(t, t_0, x_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0.$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = P(t)x + f(t), \tag{1.3}$$

где $f(t)$ — непрерывная вектор-функция размерности n.

Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы, соответствующей системе (1.3). Тогда общее решение неоднородной системы (1.3) дается формулой

$$x(t) = Y(t)\left[C + \int Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right],$$

где C — вектор произвольных постоянных.

Решение задачи Коши для системы (1.3) имеет вид

$$x(t,t_0,x_0) = Y(t)\left[Y^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right].$$

§ 1.2. Построение фундаментальной матрицы линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P\,x, \tag{1.4}$$

здесь P — постоянная $(n\times n)$-матрица.

Как видно из формулы (1.2), для того, чтобы решить систему (1.4), достаточно найти одну из ее фундаментальных матриц. В частности, фундаментальной матрицей системы (1.4) будет матрица e^{Pt}, определяемая как сумма ряда

$$e^{Pt} = E_n + Pt + P^2\frac{t^2}{2!} + \dots + P^k\frac{t^k}{k!} + \cdots . \tag{1.5}$$

Свойства матрицы e^{Pt}:

1. фундаментальная матрица e^{Pt} нормирована при $t_0 = 0$;
2. если A и B — постоянные матрицы и $AB = BA$, то
$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A;$$
3. пусть $P = SP_JS^{-1}$, тогда воспользовавшись формулой (1.5) и учитывая известные свойства квазидиагональных матриц, имеем
$$e^P = Se^{P_J}S^{-1};$$
4. используя предыдущее свойство, получаем
$$\det e^{Pt} = e^{t\,\mathrm{Sp}\,P}.$$

Ниже приведены два известных метода построения фундаментальных матриц систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1], [6], [11].

Построение e^{Pt} с использованием жордановой нормальной формы матрицы P. Пусть P — $(n\times n)$-матрица с вещественными коэффициентами.

Определение 1.1. Матрица $\lambda E_n - P$ называется *характеристической матрицей* для матрицы P.

Обозначим через $d_k(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров k-го порядка характеристической матрицы $\lambda E_n - P$. Заметим, что $d_n(\lambda)$ совпадает с *характеристическим полиномом*

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E_n - P).$$

Определение 1.2. Положим, $d_0(\lambda) \equiv 1$. Многочлены

$$i_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}, \quad k = \overline{1, n}$$

называются *инвариантными многочленами* характеристической матрицы $\lambda E_n - P$.

Замечание 1.1. Другой способ вычисления инвариантных многочленов [1], [4], основан на приведении характеристической матрицы при помощи элементарных операций к каноническому диагональному виду.

Пусть матрица P имеет s различных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $m_1, \ldots, m_s$, соответственно. Здесь $\sum\limits_{j=1}^{s} m_j = n$. Построим каноническое разложение инвариантных многочленов ненулевой степени над полем комплексных чисел:

$$\begin{aligned}
i_1(\lambda) =& (\lambda - \lambda_1)^{N_{11}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{N_{1s}}, \\
i_2(\lambda) =& (\lambda - \lambda_1)^{N_{21}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{N_{2s}}, \\
\vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\
i_n(\lambda) =& (\lambda - \lambda_1)^{N_{n1}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{N_{ns}},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $0 \leqslant N_{1k} \leqslant \ldots \leqslant N_{nk}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} N_{jk} = m_k$ для всех $k = \overline{1, s}$.

Определение 1.3. Множитель $(\lambda-\lambda_j)^{N_{kj}}$, входящий в разложение (1.6), называется *элементарным делителем* матрицы P.

Определение 1.4. ([12]). Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ — собственное число матрицы P. *Вещественной (обобщенной) клеткой Жордана* называется матрица вида

$$J(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} L(\alpha,\beta) & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ E_2 & L(\alpha,\beta) & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & E_2 & L(\alpha,\beta) \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

где

$$L(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

либо, в случае вещественного λ, вида

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Вещественная матрица Жордана P_J — это матрица, в которой по главной диагонали в некотором порядке стоят вещественные клетки Жордана:

$$P_J=\operatorname{diag}\big(J(\lambda_1),\dots,J(\lambda_r),J(\alpha_1,\beta_1),\dots,J(\alpha_q,\beta_q)\big).$$

Замечание 1.2. Такая жорданова каноническая форма матрицы единственна с точностью до порядка расположения клеток $J(\lambda_i)$ и $J(\alpha_j,\beta_j)$ вдоль главной диагонали.

Вычислив элементарные делители из (1.6) можно построить жорданову нормальную форму P_J. Клетки Жордана строятся исходя из собственных чисел λ_j, а размерности этих клеток определяются показателем N_{ij}. Число же клеток, содержащих λ_j, равно количеству ненулевых показателей N_{ij}.

Таким образом, получаем следующий алгоритм нахождения матрицы Жордана P_J для вещественной $(n \times n)$-матрицы P:

1) строим характеристическую матрицу $\lambda E - P$;

2) находим $d_k(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров k-го порядка характеристической матрицы $\lambda E_n - P$, где $k = \overline{1, n}$, $d_0(\lambda) \equiv 1$;

3) вычисляем инвариантные многочлены

$$i_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)} \quad \text{для всех } k = \overline{1, n};$$

4) строим каноническое разложение инвариантных многочленов $i_k(\lambda)$ ненулевой степени над полем комплексных чисел (1.6), то есть находим элементарные делители $(\lambda - \lambda_j)^{N_{kj}}$ матрицы P;

5) если λ_j — вещественное число, тогда элементарному делителю $(\lambda - \lambda_j)^{N_{kj}}$ сопоставим клетку Жордана $J(\lambda_j)$ (1.8) размерности $(N_{kj} \times N_{kj})$;

6) если $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ — комплексное число, тогда паре комплексно-сопряженных собственных чисел λ_j и $\overline{\lambda}_j$, *элементарным делителем* матрицы P над полем вещественных чисел будет многочлен вида

$$(\lambda - \lambda_j)^{N_{kj}} (\lambda - \overline{\lambda}_j)^{N_{kj}}.$$

Сопоставим данному элементарному делителю клетку Жордана $J(\alpha_j, \beta_j)$ (1.7) размерности $(2N_{kj} \times 2N_{kj})$;

7) число клеток Жордана, содержащих λ_j, равно количеству ненулевых показателей N_{kj}. Из полученных клеток Жордана строим искомую блочно-диагональную матрицу P_J:

$$P_J = \mathrm{diag}\big(J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_r), J(\alpha_1, \beta_1), \ldots, J(\alpha_q, \beta_q)\big).$$

Замечание 1.3. Пусть $\lambda_j \in \mathbb{R}$ для всех $j = \overline{1, n}$. Если все элементарные делители матрицы P первой степени, то есть $N_{ij} = 1$, тогда жорданова форма является диагональной матрицей, и в этом случае имеем

$$P_J = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Известно [1]–[5], что существует постоянная невырожденная матрица S, такая, что $P = SP_JS^{-1}$. Тогда фундаментальная матрица вычисляется по формуле

$$e^{Pt} = e^{SP_JS^{-1}t} =$$
$$= S\,\mathrm{diag}\left(e^{J(\lambda_1)t}, \ldots, e^{J(\lambda_r)t}, e^{J(\alpha_1,\beta_1)t}, \ldots, e^{J(\alpha_q,\beta_q)t}\right) S^{-1}, \qquad (1.9)$$

где для вещественных λ_j, имеем

$$e^{J(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{t^2}{2!} & t & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{t^{N_{kj}-1}}{(N_{kj}-1)!} & \dfrac{t^{N_{kj}-2}}{(N_{kj}-2)!} & \ldots & \dfrac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix},$$

а для комплексных $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

$$e^{J(\alpha_j,\beta_j)t} =$$
$$= e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} R & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ tR & R & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dfrac{t^2}{2!}R & tR & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{t^{N_{kj}-1}}{(N_{kj}-1)!}R & \dfrac{t^{N_{kj}-2}}{(N_{kj}-2)!}R & \ldots & \dfrac{t^2}{2!}R & tR & R \end{pmatrix},$$
$$R = \begin{pmatrix} \cos(\beta_j t) & \sin(\beta_j t) \\ -\sin(\beta_j t) & \cos(\beta_j t) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для поиска матрицы S (преобразующей матрицы [1]) из (1.9) можно поступить следующим образом. Равенство

$$P = SP_JS^{-1}$$

переписывается так:

$$PS - SP_J = \mathbb{O}, \qquad (1.10)$$

где $\mathbb{O}$ — нулевая $(n\times n)$-матрица. Это матричное уравнение относительно S равносильно системе n^2 линейных однородных уравнений от n^2 неизвестных коэффициентов $[s_{ij}]$ матрицы S. Определение преобразующей матрицы S сводится к решению этой системы из n^2 уравнений. При этом из множества решений данной системы необходимо выбрать такое решение, для которого $\det S \neq 0$. Существование такого решения обеспечено тем, что матрицы P и P_J имеют одни и те же элементарные делители [1], [4], [11], [12].

Пример 1.1. Рассмотрим систему $\dot{x} = Px$, где

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти фундаментальную матрицу $Y(t) = e^{Pt}$.

Р е ш е н и е. Построим характеристическую матрицу $\lambda E - P$ и найдем наибольшие общие делители миноров k-го порядка $d_k(\lambda)$. Находим

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1 \quad \text{и} \quad d_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Так как $d_3(\lambda)$ совпадает с характеристическим полиномом, матрица системы имеет три простых вещественных собственных числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$. Далее, вычисляем инвариантные многочлены $i_1(\lambda) = i_2(\lambda) = 1$ и $i_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$. Получаем три элементарных делителя λ, $\lambda - 1$ и $\lambda + 1$. Сопоставим им клетки Жордана:

$$J(\lambda_1) = 0, \quad J(\lambda_2) = 1, \quad J(\lambda_3) = -1.$$

Матрица Жордана, соответствующая матрице P, принимает вид:

$$P_J = \operatorname{diag}\big(J(\lambda_1), J(\lambda_2), J(\lambda_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решив систему (1.10), найдем матрицу $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_4 & s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 & s_9 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$\begin{cases} 2s_1 - s_4 - s_7 = 0, \\ s_2 - s_5 - s_8 = 0, \\ 3s_3 - s_6 - s_9 = 0, \\ s_1 - s_7 = 0, \\ s_3 + s_6 - s_9 = 0, \\ 3s_1 - s_4 - 2s_7 = 0, \\ 3s_2 - s_5 - 3s_8 = 0, \\ 3s_3 - s_6 - s_9 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим семейство решений, из которых выберем то, при котором $\det S \neq 0$, например

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1, \\ s_6 = s_7 = s_8 = 1, \\ s_5 = 0, \\ s_9 = 2. \end{cases}$$

Используя (1.9), построим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = Se^{P_J t} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\operatorname{sh}(t) + 1 & 1 - e^t & e^{-t} - 1 \\ 1 - e^{-t} & 1 & e^{-t} - 1 \\ e^t - 2e^{-t} + 1 & 1 - e^t & 2e^{-t} - 1 \end{pmatrix}.$$

По построению, найденная фундаментальная матрица нормирована в точке $t_0 = 0$. Действительно, $Y(0) = E$.

Заметим, что фундаментальной матрицей будет и матрица

$$Y_1(t) = Se^{P_J t},$$

что следует из свойств фундаментальной матрицы

$$Y_1(t) = Se^{P_J t} = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 1 & 0 & e^{-t} \\ 1 & e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Однако, при этом нарушается свойство нормированности в точке $t_0 = 0$, то есть $Y_1(0) \neq E$.

Пример 1.2. Построить фундаментальную матрицу системы

$$\dot{x} = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} \right) x.$$

Р е ш е н и е. Характеристическая матрица имеет вид

$$\lambda E - P = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$d_1(\lambda) = 1 \quad \text{и} \quad d_2(\lambda) = (\lambda - 2 + i)(\lambda - 2 - i).$$

У матрицы P два простых комплексно-сопряженных собственных числа: $\lambda_1 = 2 + i$ и $\lambda_2 = 2 - i$. Находим инвариантные многочлены $i_1(\lambda) = 1$ и $i_2(\lambda) = (\lambda - 2 + i)(\lambda - 2 - i)$. Итак, получим один элементарный делитель $(\lambda - 2 + i)(\lambda - 2 - i)$ для матрицы P над полем вещественных чисел. Сопоставим ему вещественную клетку Жордана

$$J(\alpha_1, \beta_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это и есть матрица Жордана, соответствующая матрице P, то есть $P_J = J(\alpha_1, \beta_1)$.

Матрицу $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}$, приводящую P к жордановой форме, находим, решив систему (1.10). Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} s_2 - s_3 = 0, \\ s_1 + s_4 = 0, \end{array} \right. \qquad \text{откуда} \qquad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1, \\ s_2 = s_3 = 0, \\ s_4 = -1. \end{array} \right.$$

Используя (1.9), построим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = S e^{P_J t} S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} \left(\begin{array}{cc} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \left(\begin{array}{cc} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{array} \right).$$

Пример 1.3. Вычислив матрицу $Y(t) = e^{Pt}$, найти решение системы уравнений $\dot{x} = Px$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющее условию $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Построим характеристическую матрицу

$$\lambda E - P = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda - 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим наибольшие общие делители миноров k-го порядка $d_k(\lambda)$ матрицы $\lambda E - P$. Получим

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1 \quad \text{и} \quad d_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Матрица P имеет собственные числа: $\lambda_1 = 2$ кратности 2 и $\lambda_2 = 3$.

Далее, находим инвариантные многочлены $i_1(\lambda) = i_2(\lambda) = 1$ и $i_3(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$. Таким образом, элементарными делителями матрицы P являются $(\lambda - 2)^2$ и $\lambda - 3$. Сопоставим им клетки Жордана

$$J(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J(\lambda_2) = 3.$$

Матрица Жордана, соответствующая матрице P, принимает вид

$$P_J = \operatorname{diag}\bigl(J(\lambda_1), J(\lambda_2)\bigr) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решив систему (1.10), найдем матрицу $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_4 & s_5 & s_6 \\ s_7 & s_8 & s_9 \end{pmatrix}$.

Имеем

$$\begin{cases} -s_1 - s_2 + s_4 - s_7 = 0, \\ -s_2 + s_5 - s_8 = 0, \\ -2s_3 + s_6 - s_9 = 0, \\ -s_1 - s_5 - s_7 = 0, \\ -s_2 - s_8 = 0, \\ -s_3 - s_6 - s_9 = 0, \\ 2s_1 - s_4 + 2s_7 - s_8 = 0, \\ 2s_2 - s_5 + 2s_8 = 0, \\ 2s_3 - s_6 + s_9 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим семейство решений, из которых выберем то, при котором $\det S \neq 0$, например

$$\begin{cases} s_1 = s_5 = s_7 = 0, \\ s_2 = s_4 = s_6 = 1, \\ s_3 = 2, \\ s_8 = -1, \\ s_9 = -3. \end{cases}$$

Используя (1.9), построим фундаментальную матрицу

$$Y(t) = Se^{P_J t}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3+t)e^{2t} - 2e^{3t} & te^{2t} & (2+t)e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -(3+t)e^{2t} + 3e^{3t} & -te^{2t} & -(2+t)e^{2t} + 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Искомое решение исходной системы уравнений имеет вид

$$x(t) = e^{Pt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

По построению, найденная фундаментальная матрица нормирована в точке $t_0 = 0$. Действительно, $Y(0) = E$.

Заметим, что фундаментальной матрицей будет и матрица

$$Y_1(t) = Se^{P_J t} = \begin{pmatrix} te^{2t} & e^{2t} & 2e^{3t} \\ e^{2t} & 0 & e^{3t} \\ -te^{2t} & -e^{2t} & -3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Однако, при этом нарушается свойство нормированности в точке $t_0 = 0$, то есть $Y_1(0) \neq E$.

Построение фундаментальной матрицы с помощью интерполяционного полинома. Рассмотрим характеристический многочлен матрицы P

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda E_n - P) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Из теоремы Гамильтона—Кэли [1] известно, что матрица P является корнем своего характеристического полинома, то есть $\varphi(P) = \mathbb{O}$, тогда

$$P^n = -a_1P^{n-1} - a_2P^{n-2} - \cdots - a_{n-1}P - a_nE_n.$$

Далее, по индукции легко показать, что матрица P^k для всех $k \geqslant n$ может быть выражена в виде линейной комбинации матриц P^m при $m = \overline{0, n-1}$. Используя этот факт и (1.5), получаем

$$e^{Pt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)P^k, \tag{1.11}$$

где $b_k(t)$ — неизвестные функции подлежащие поиску.

Пусть S — постоянная неособенная матрица, приводящая P к жордановой форме (в общем случае к комплексной):

$$P_J = S^{-1}PS = \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & J_2 & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & J_m \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

здесь $\mathbb{O}$ —нулевая матрица, $J_1, \ldots, J_m$ — жордановы клетки вида

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

причем собственные числа λ_j могут быть комплексными.

Из (1.12) следует, что $P = SP_JS^{-1}$, тогда из формул (1.9) и (1.11) получаем уравнение

$$e^{P_J t} = b_0(t)E + b_1(t)P_J + \dots + b_{n-1}(t)P_J^{n-1}.$$

Учитывая известный вид матрицы $e^{P_J t}$ (1.9), находим, что для выполнения равенства (1.11), необходимо и достаточно, чтобы для каждой жордановой клетки J_i порядка k_i искомые функции $b_0(t), \dots, b_{n-1}(t)$ удовлетворяли линейной системе:

$$\begin{cases} e^{\lambda_j t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_j + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_j^{n-1}, \\ te^{\lambda_j t} = b_1(t) + 2b_2(t)\lambda_j + \dots + (n-1)b_{n-1}(t)\lambda_j^{n-2}, \\ \qquad \vdots \\ t^{k_i-1}e^{\lambda_j t} = (k_i-1)!b_{k_i-1}(t) + \dots + \dfrac{(n-1)!}{(k_i-1)!}b_{n-1}(t)\lambda_j^{n-k_i}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда у характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ имеются только простые различные вещественные корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Решение следующей линейной неоднородной системы однозначно определяют $b_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_1 + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}, \\ e^{\lambda_2 t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_2 + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}, \\ \qquad \vdots \\ e^{\lambda_n t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_n + \dots + b_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Единственность решение системы (1.13) следует из невырожденности ее матрицы, так как это матрица Вандермонда при различных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Замечание 1.4. Определитель матрицы Вандермонда равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

В случае, когда характеристический полином имеет m ($m < n$) различных корней, то есть

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m},$$

где k_j — кратность λ_j, $j = \overline{1, m}$, $k_1 + \cdots + k_m = n$, строим систему

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_1 + \cdots + b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}, \\ te^{\lambda_1 t} = b_1(t) + 2b_2(t)\lambda_1 + \cdots + (n-1)b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2}, \\ \qquad \vdots \\ t^{k_!-1}e^{\lambda_! t} = (k_1 - 1)!b_{k_1-1}(t) + \cdots + \dfrac{(n-1)!}{(k_1-1)!}b_{n-1}(t)\lambda_1^{n-k_1}, \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ e^{\lambda_m t} = b_0(t) + b_1(t)\lambda_m + \cdots + b_{n-1}(t)\lambda_m^{n-1}, \\ te^{\lambda_m t} = b_1(t) + 2b_2(t)\lambda_m + \cdots + (n-1)b_{n-1}(t)\lambda_m^{n-2}, \\ \qquad \vdots \\ t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} = (k_m - 1)!b_{k_m-1}(t) + \cdots + \dfrac{(n-1)!}{(k_m-1)!}b_{n-1}(t)\lambda_m^{n-k_m}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Из алгебры [1] известно, что система (1.14) однозначно определяет функции $b_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Итак, опишем следующий алгоритм построения фундаментальной матрицы e^{Pt}:

1) строим характеристический полином матрицы P, находим его корни λ_j и соответствующие им кратности k_j, $j = \overline{1, m}$, где $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n$;

2) при условии, что все собственные числа λ_j — простые, то есть $k_j = 1$ для всех $j = \overline{1, n}$, составляем систему (1.13), в противном случае — (1.14). Решение системы единственно и определяет искомые функции $b_k(t)$, $k = \overline{0, n-1}$;

3) строим фундаментальную матрицу

$$e^{Pt} = b_0(t)E_n + b_1(t)P + \cdots + b_{n-1}(t)P^{n-1}.$$

Замечание 1.5. Если среди корней характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ есть комплексный λ_1, то обязательно будет и комплексно-сопряженный $\overline{\lambda}_1$, так как полином $\varphi(\lambda)$ имеет только вещественные коэффициенты.

Алгоритм построения фундаментальной матрицы в случае с комплексными корнями в характеристическом полиноме остается практически прежний. А именно, берется только один из пары комплексно-сопряженных корней и подставляется в систему (1.13) в случае, если оно простое, в противном случае — в систему (1.14). Затем из уравнений с комплексными коэффициентами выделяют и приравнивают соответствующие вещественные и мнимые части, тем самым образуются два уравнения из одного. Все остальные шаги остаются без изменений.

Пример 1.4. Найти общее решение для системы из примера 1.1.

Р е ш е н и е. Фундаментальную матрицу будем искать в виде

$$Y(t) = b_0(t)E + b_1(t)P + b_2(t)P^2.$$

Так как у матрицы P три простых вещественных собственных числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$, то составим систему (1.13) для определения неизвестных функций $b_0(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$. Имеем

$$\begin{cases} b_0(t) = 1, \\ b_0(t) + b_1(t) + b_2(t) = e^t, \\ b_0(t) - b_1(t) + b_2(t) = e^{-t}. \end{cases}$$

Получаем решение $b_0(t) = 1$, $b_1(t) = \operatorname{sh}(t)$ и $b_2(t) = \operatorname{ch}(t) - 1$. Итак, фундаментальная матрица принимает вид

$$Y(t) = E + \operatorname{sh}(t)P + (\operatorname{ch}(t) - 1)\,P^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\operatorname{sh}(t) + 1 & 1 - e^t & e^{-t} - 1 \\ 1 - e^{-t} & 1 & e^{-t} - 1 \\ e^t - 2e^{-t} + 1 & 1 - e^t & 2e^{-t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид $x(t) = Y(t)C$, где C — произвольный постоянный вектор. Заметим, что по построению фундаментальная матрица нормирована в точке $t_0 = 0$.

Пример 1.5. Построить фундаментальную матрицу для системы из примера 1.2.

Р е ш е н и е. Характеристический полином матрицы P имеет вид $\det(\lambda E - P) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$, откуда находим два комплексно-сопряженных собственных числа: $\lambda_1 = 2 + i$ и $\lambda_2 = 2 - i$. Согласно замечанию 1.5, возьмем один из пары комплексно-сопряженных корней, например, $\lambda_1 = 2 + i$. Так как λ_1 — простой корень, то составим систему (1.13) для определения неизвестных функций $b_0(t)$, $b_1(t)$:

$$b_0(t) + b_1(t)(2+i) = e^{(2+i)t}.$$

Применяя формулу Эйлера, имеем

$$\begin{cases} b_0(t) + 2b_1(t) = e^{2t}\cos(t), \\ b_1(t) = e^{2t}\sin(t). \end{cases}$$

Получаем решение $b_0(t) = e^{2t}\left(\cos(t) - 2\sin(t)\right)$, $b_1(t) = e^{2t}\sin(t)$. Итак, искомая фундаментальная матрица примет вид

$$Y(t) = e^{2t}\big(\cos(t) - 2\sin(t)\big)E + e^{2t}\sin(t)P = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы

$$x(t) = Y(t)C = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1\cos(t) - C_2\sin(t) \\ C_1\sin(t) + C_2\cos(t) \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 1.6. Найти общее решение для системы из примера 1.3.

Р е ш е н и е. Фундаментальную матрицу будем искать в виде

$$Y(t) = b_0(t)E + b_1(t)P + b_2(t)P^2.$$

Так как у матрицы P имеются вещественные собственные числа $\lambda_1 = 2$ кратности 2 и $\lambda_2 = 3$, то составим систему (1.14) для определения неизвестных функций $b_0(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$. Имеем

$$\begin{cases} b_0(t) + 2b_1(t) + 4b_2(t) = e^{2t}, \\ b_1(t) + 4b_2(t) = te^{2t}, \\ b_0(t) + 3b_1(t) + 9b_2(t) = e^{3t}. \end{cases}$$

Получаем решение

$$\begin{aligned}
b_0(t) =& 4e^{3t} - 3e^{2t}(2t+1),\\
b_1(t) =& e^{2t}(5t+4) - 4e^{3t},\\
b_2(t) =& e^{3t} - e^{2t}(t+1).
\end{aligned}$$

Итак, фундаментальная матрица примет вид

$$\begin{gathered}
Y(t) = \left(4e^{3t} - 3e^{2t}(2t+1)\right)E +\\
+ \left(e^{2t}(5t+4) - 4e^{3t}\right)P + \left(e^{3t} - e^{2t}(t+1)\right)P^2 =\\
= \begin{pmatrix} (3+t)e^{2t} - 2e^{3t} & te^{2t} & (2+t)e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -(3+t)e^{2t} + 3e^{3t} & -te^{2t} & -(2+t)e^{2t} + 3e^{3t} \end{pmatrix}.
\end{gathered}$$

Общее решение системы имеет вид $x(t) = Y(t)C$, где C — произвольный постоянный вектор. Заметим, что по построению фундаментальная матрица нормирована в точке $t_0 = 0$.

§ 1.3. Построение фундаментальной матрицы для нестационарной системы

Отметим два частных случая, в которых задача построения фундаментальной матрицы в линейных нестационарных системах решается легко [1], [11].

Случай Лаппо-Данилевского. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(t)\,x,$$

где $P(t)$ — $(n\times n)$-матрица. Предположим, что матрица $P(t)$ коммутирует со своим интегралом, то есть выполняется

$$P(t)\int_{t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau\; P(t). \tag{1.15}$$

В этом случае фундаментальная матрица представима в виде

$$Y(t) = e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} P(\tau)\,d\tau}. \tag{1.16}$$

Заметим, что матрица $Y(t)$ нормирована в точке $t = t_0$.

Пример 1.1. Найти фундаментальную матрицу системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Р е ш е н и е. Проверим, выполняется ли условие Лаппо-Данилевского ($t_0 = 0$). Вычисляем

$$\int_0^t P(\tau)\, d\tau = \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

и непосредственно убеждаемся в справедливости равенства (1.15). Представим матрицу $\int_0^t P(\tau)\, d\tau$ в виде

$$\int_0^t P(\tau)\, d\tau = B_1(t) + B_2(t),$$

где

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $B_1(t)$ и $B_2(t)$ коммутируют. Из этого следует, что

$$e^{\int_0^t P(\tau)\, d\tau} = e^{B_1(t)+B_2(t)} = e^{B_1(t)} e^{B_2(t)}.$$

Таким образом,

$$Y(t) = e^{\begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & t \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы $x(t) = Y(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} C_1 + \frac{t^2}{2}\, C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 1.2. Найти фундаментальную матрицу системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2t+1 & 15t \\ t & 1 \end{pmatrix} x.$$

Р е ш е н и е. Проверим, выполняется ли условие Лаппо-Данилевского ($t_0 = 0$). Вычисляем

$$\int_0^t P(\tau)\, d\tau = \begin{pmatrix} t^2+t & \frac{15}{2}t^2 \\ \frac{t^2}{2} & t \end{pmatrix}$$

и непосредственно убеждаемся в справедливости равенства (1.15). Как и в предыдущем примере, представим матрицу $\displaystyle\int_0^t P(\tau)\, d\tau$ в виде

$$\int_0^t P(\tau)\, d\tau = B_1(t) + B_2(t),$$

где

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad B_2(t) = \tfrac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $B_1(t)$ и $B_2(t)$ коммутируют, следовательно

$$Y(t) = e^{\displaystyle\int_0^t P(\tau)\, d\tau} = e^{B_1(t)+B_2(t)} = e^{B_1(t)} e^{B_2(t)}.$$

Вычислим $e^{B_2(t)}$, где $B_2(t) = \frac{t^2}{2}Q$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Представим матрицу Q в виде $Q = TQ_JT^{-1}$, где Q_J — жорданова форма матрицы Q. Собственные числа матрицы Q: $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -3$. Значит матрица Жордана Q_J имеет вид $Q_J = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Найдем такую невырожденную матрицу $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, чтобы $Q = TQ_JT^{-1}$. Для определения матрицы T получаем уравнение (1.10)

$$\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 2a+15c & 2b+15d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & -3b \\ 5c & -3d \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 5c - a = 0, \\ b + 3d = 0. \end{cases}$$

Одно из решений полученных уравнений есть $a = 5$, $b = -3$, $c = 1$, $d = 1$, поэтому в качестве T можно взять матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что обратная матрица к матрице T имеет вид

$$T^{-1} = \tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенство $e^{B_2(t)} = Te^{\frac{t^2}{2}Q_J}T^{-1}$, имеем

$$e^{B_2(t)} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}} \tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{5}{2}t^2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{2}t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 5e^{\frac{5}{2}t^2} + 3e^{-\frac{3}{2}t^2} & 15e^{\frac{5}{2}t^2} - 15e^{-\frac{3}{2}t^2} \\ e^{\frac{5}{2}t^2} - e^{-\frac{3}{2}t^2} & 3e^{\frac{5}{2}t^2} + 5e^{-\frac{3}{2}t^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем фундаментальную матрицу

$$Y(t) = e^{B_1(t)}e^{B_2(t)} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \tfrac{1}{8} \begin{pmatrix} 5e^{\frac{5}{2}t^2} + 3e^{-\frac{3}{2}t^2} & 15e^{\frac{5}{2}t^2} - 15e^{-\frac{3}{2}t^2} \\ e^{\frac{5}{2}t^2} - e^{-\frac{3}{2}t^2} & 3e^{\frac{5}{2}t^2} + 5e^{-\frac{3}{2}t^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{8} \begin{pmatrix} 5e^{\frac{5}{2}t^2} + 3e^{-\frac{3}{2}t^2} & 15e^{\frac{5}{2}t^2} - 15e^{-\frac{3}{2}t^2} \\ e^{\frac{5}{2}t^2} - e^{-\frac{3}{2}t^2} & 3e^{\frac{5}{2}t^2} + 5e^{-\frac{3}{2}t^2} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид $x(t) = Y(t)C$, где C — произвольный постоянный вектор.

Интегрирование систем, правые части которых удовлетворяют условиям Коши—Римана. Пусть дана система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2(t) = v(x_1, x_2), \end{cases} \tag{1.17}$$

где x_1 и x_2 — искомые вещественные функции от вещественной независимой переменной t. Предположим, что правые части этой системы имеют непрерывные частные производные и удовлетворяют условиям Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Введем в рассмотрение комплексную переменную z, положив $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$. Тогда, умножая второе из уравнений системы (1.17) на i и складывая с первым, получаем

$$\dot{z} = f(z),$$

где $f(z) = u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2)$. Проинтегрировав это уравнение имеем, что $x_1(t)$ является вещественной частью решения, а $x_2(t)$ — мнимой.

Пример 1.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = p(t)x_1 - q(t)x_2, \\ \dot{x}_2(t) = q(t)x_1 + p(t)x_2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что условия Коши—Римана для данной системы выполняются. Следуя изложенному методу, получим

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t)z,$$

где $\lambda(t) = p(t) + iq(t)$. Интегрируя, находим

$$z(t) = Ce^{\int \lambda(\tau)\, d\tau},$$

где $C = C_1 + iC_2$. Далее, применяя формулу Эйлера, получим

$$z(t) = (C_1 + iC_2)e^{\displaystyle\int p(\tau)\,d\tau} \left[\cos\left(\int q(\tau)\,d\tau\right) + i\sin\left(\int q(\tau)\,d\tau\right)\right].$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем решение исходной системы

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\displaystyle\int p(\tau)\,d\tau} \left[C_1\cos\left(\displaystyle\int q(\tau)\,d\tau\right) - C_2\sin\left(\displaystyle\int q(\tau)\,d\tau\right)\right], \\ x_2(t) = e^{\displaystyle\int p(\tau)\,d\tau} \left[C_1\sin\left(\displaystyle\int q(\tau)\,d\tau\right) + C_2\cos\left(\displaystyle\int q(\tau)\,d\tau\right)\right]. \end{cases}$$

Замечание 1.1. Изложенный метод интегрирования системы из двух уравнений, удовлетворяющих условиям Коши—Римана, можно распространить на систему любого порядка [1], [11].

ГЛАВА 2. ПРОГРАММНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ

§ 2.1. Постановка задачи программного управления

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u + f(t), \tag{2.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых переменных, u — r-мерный вектор управления, $P(t)$, $Q(t)$ — матрицы соответствующих размерностей, $f(t)$ — n-мерная вектор-функция. Будем считать, что элементы матриц $P(t)$, $Q(t)$ и компоненты вектора $f(t)$ заданы при $t \geqslant 0$, вещественны и непрерывны. Управление u принадлежит некоторой области управления U, которая может быть любым замкнутым ограниченным множеством евклидова пространства $\mathbb{R}^r$.

Определение 2.1. Будем называть управление $u(t)$ *допустимым*, если оно задано на конечном промежутке $[0, T]$, кусочно-непрерывно и суммируемо с квадратом, то есть

$$\int_0^T u^*(t)u(t)\,dt < +\infty.$$

Постановка задачи. Пусть заданы два постоянных вектора x_0 и x_1 — начальное и конечное положение системы (2.1). Требуется найти допустимое управление $u(t)$ такое, чтобы решение системы (2.1), начинающееся при $t = t_0 = 0$ в точке $x = x_0$, попадало при $t = T$ в точку $x = x_1$, и при этом интеграл $\int_0^T u^*(t)u(t)\,dt$ был ограничен.

Если такое управление $u(t)$ существует, то оно называется *программным*.

Решение задачи. Выберем произвольное допустимое управление $u(t)$ и подставим в (2.1), тогда мы получим линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x + Q(t)u(t) + f(t). \tag{2.2}$$

Пусть для соответствующей однородной системы

$$\dot{x} = P(t)x,$$

построена фундаментальная матрица $Y(t)$, такая, что $Y(0) = E_n$. Тогда общее решение системы (2.2) примет вид

$$x(t,0,x_0) = Y(t)\left[x_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau)\Big(Q(\tau)u(\tau) + f(\tau)\Big)\,d\tau\right]. \tag{2.3}$$

Заметим, что по построению, решение в форме Коши (2.3) обладает свойством $x(0,0,x_0) = x_0$, то есть "левое" граничное условие задачи выполнено. Осталось удовлетворить "правое" граничное условие: $x(T,0,x_0) = x_1$.

Далее, рассмотрим (2.3) при $t = T$

$$x(T,0,x_0) = Y(T)\left[x_0 + \int_0^T Y^{-1}(\tau)\Big(Q(\tau)u(\tau) + f(\tau)\Big)\,d\tau\right] = x_1. \tag{2.4}$$

Итак, мы получили интегральное уравнение, которому должно удовлетворять искомое управление $u(t)$

$$\int_0^T B(\tau)u(\tau)\,d\tau = \eta, \tag{2.5}$$

где η — постоянный n-мерный вектор, который равен

$$\eta = Y^{-1}(T)x_1 - x_0 - \int_0^T Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau$$

и $B(t) = Y^{-1}(t)Q(t)$ — $(n \times r)$-матрица.

Лемма 2.1. (О представлении семейства допустимых управлений [10]). *Всякое допустимое программное управление $u(t)$ можно представить в виде*

$$u(t) = B^*(t)C + v(t), \tag{2.6}$$

где C — постоянный n-мерный вектор, подлежащий определению, $v(t)$ — r-мерная вектор-функция удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_0^T B(t)v(t)\,dt = \mathbf{0} \tag{2.7}$$

и

$$\int_0^T v^*(t)v(t)\,dt < +\infty. \tag{2.8}$$

Далее, подставим (2.6) в (2.5)

$$\int_0^T B(t)\left[B^*(t)C + v(t)\right]\,dt = \eta$$

и используя условие (2.7), получим

$$\int_0^T B(t)B^*(t)C\,dt = \eta \quad \text{или} \quad \int_0^T B(t)B^*(t)\,dt\;C = \eta.$$

Итак, построили линейную неоднородную систему

$$AC = \eta, \tag{2.9}$$

где $A = \displaystyle\int_0^T B(t)B^*(t)\,dt$.

Ниже указанные определения и теоремы подробно изложены в [10], [9], [7], [8].

Определение 2.2. Пара точек $\{x_0, x_1\}$ называется *управляемой* на отрезке $[0, T]$, если для этой пары существует допустимое управление, при котором система (2.1) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

Само управление в этом случае называется *программным.*

Теорема 2.1. (Об управляемости пары точек). *Пара точек* $\{x_0, x_1\}$ *— управляема на отрезке* $[0, T]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, \eta).$$

Определение 2.3. Система (2.1) называется *полностью управляемой* на отрезке $[0, T]$, если для любой пары точек $\{x_0, x_1\}$ существует программное управление.

Теорема 2.2. (Об управляемости линейной системы). *Для того чтобы система (2.1) была полностью управляемой на отрезке* $[0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\det A \neq 0$.

§ 2.2. Достаточное условие полной управляемости

Для того чтобы проверить на полную управляемость систему (2.1) по теореме 2.2 требуется представление фундаментальной матрицы $Y(t)$ в аналитической форме. Как известно построение фундаментальной матрицы является нетривиальной задачей, поэтому актуальны такие критерии управляемости, которыми можно воспользоваться без ее привлечения.

Ниже приведено достаточное условие полной управляемости при следующих дополнительных ограничениях: $P(t) \in C^{n-2}[0,T]$, $Q(t) \in C^{n-1}[0,T]$.

Положим

$$
\begin{aligned}
&S_0(t) = Q(t),\\
&S_1(t) = \dot{S}_0(t) - P(t)S_0(t) = \dot{Q}(t) - P(t)Q(t),\\
&\quad \dots\dots\dots\\
&S_{n-1}(t) = \dot{S}_{n-2}(t) - P(t)S_{n-2}(t).
\end{aligned}
$$

Из матриц $S_k(t)$ $k = \overline{0, n-1}$ образуем матрицу

$$S(t) = \big[S_0(t), S_1(t), \dots, S_{n-1}(t)\big]_{n \times nr}.$$

Теорема 2.1. ([10], [9]). *Для того чтобы система (2.1) была полностью управляема на отрезке $[0,T]$, достаточно, чтобы существовал момент времени $t_* \in [0,T]$, для которого*

$$\operatorname{rang} S(t_*) = n.$$

§ 2.3. Управляемость линейных стационарных систем. Критерий Калмана

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Px + Qu + f(t), \tag{2.10}$$

где P и Q постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы, соответственно.

Теорема 2.1. (Критерий Калмана). *Линейная стационарная система (2.10) полностью управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}\left[Q, PQ, \ldots, P^{n-1}Q\right] = n.$$

Заметим, что для стационарной системы (2.10) матрица $S(t)$ из теоремы 2.1 постоянна и имеет вид

$$S = \left[Q, -PQ, \ldots, (-1)^{n-1}P^{n-1}Q\right].$$

При этом очевидно, что

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang}\left[Q, PQ, \ldots, P^{n-1}Q\right].$$

Теорема 2.2. (Уточненный критерий Калмана). *Пусть в системе (2.10)* $\operatorname{rang} Q = m$*, тогда для полной управляемости системы (2.10), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang}\left[Q, PQ, \ldots, P^{n-m}Q\right] = n.$$

§ 2.4. Примеры.

Ниже рассмотрены примеры построения программного управления и соответствующего ему *программного* движения.

Пример 2.1. Рассмотрим систему (2.10) второго порядка ($n = 2$):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется исследовать систему на полную управляемость и построить программное управление для заданной пары точек $\{x_0, x_1\}$ на отрезке $[0, 1]$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T = 1, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим полную управляемость системы. Поскольку она стационарная, то воспользуемся теоремой 2.1:

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Получаем, что имеет место полная управляемость.

2. Найдем фундаментальную матрицу $Y(t)$:

$$Y(t) = e^{Pt} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Строим матрицу $B(t)$:

$$B(t) = Y^{-1}(t)Q = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу A из (2.9):

$$A = \int_0^1 e^{-2t} \begin{pmatrix} t^2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5e^{-2} + 1 & 3e^{-2} - 1 \\ 3e^{-2} - 1 & -2e^{-2} + 2 \end{pmatrix}.$$

5. Вектор η находим по формуле (2.5):

$$\eta = e^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $AC = \eta$:

$$C = A^{-1}\eta = \begin{pmatrix} 3e^{-2} - 1 \\ 5e^{-2} - 1 \end{pmatrix} \frac{4e^{-1}}{-e^{-4} + 6e^{-2} - 1}.$$

7. Из условия ортогональности (2.7) находим $v(t)$:

$$\int_0^T B(t)v(t)\,dt = \int_0^1 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} v(t)\,dt = \mathbf{0}.$$

Например, если $v(t) = e^t(\alpha+\beta t+\gamma t^2)$, тогда можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов для построения $v(t)$. Имеем

$$\int_0^1 e^{-t}\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix} e^t(\alpha+\beta t+\gamma t^2)\,dt = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{3}-\dfrac{\gamma}{4}=0,\\ \alpha+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{3}=0. \end{cases}$$

Итак, $v(t) = e^t\left(\dfrac{1}{42}-\dfrac{5}{7}t+t^2\right)\gamma$, здесь γ — произвольная вещественная константа.

Следует отметить, что функция $v(t)\equiv 0$ всегда удовлетворяет условию ортогональности.

8. Искомое программное управление $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= B^*(t)C+v(t) = \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix}-t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3e^{-2}-1\\5e^{-2}-1\end{pmatrix}\frac{4e^{-1}}{-e^{-4}+6e^{-2}-1}+v(t) = \\ &= \frac{4e^{-1}}{-e^{-4}+6e^{-2}-1}e^{-t}\left[-t(3e^{-2}-1)+5e^{-2}-1\right]+v(t). \end{aligned}$$

Подставим в (2.3) найденное программное управление $u(t)$ и получим искомое программное движение $x(t)$.

Пример 2.2. Рассмотрим систему (2.10) второго порядка ($n=2$), где $f(t)=\mathbf{0}$, $T=5$,

$$P=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ Q(t)=\begin{pmatrix}t&0\\0&1\end{pmatrix},\ x_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ x_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Требуется исследовать систему на полную управляемость и построить программное управление для заданной пары точек $\{x_0,x_1\}$ на отрезке $[0,5]$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим систему на полную управляемость. Поскольку система нестационарная, то воспользуемся достаточным условием полной управляемости (теоремой 2.1):

$$S_0(t)=\begin{pmatrix}t&0\\0&1\end{pmatrix},\quad S_1(t)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Получаем

$$S(t) = [S_0(t), S_1(t)] = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rang} S(t) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{для всех } t \in [0, 5].$$

Следовательно, данная система скорее всего полностью управляема.

2. Найдем фундаментальную матрицу $Y(t)$:

$$Y(t) = e^{Pt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Строим матрицу $B(t)$:

$$B(t) = Y^{-1}(t)Q = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу A (см. (2.9)):

$$A = \int_0^5 \begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^5 \begin{pmatrix} 2t^2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt = \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 100 & -15 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислим вектор η (см. (2.5)):

$$\eta = Y^{-1}(5)x_1 - x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $AC = \eta$:

$$C = A^{-1}\eta = -\frac{36}{625} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7. Выберем произвольное $v(t)$ из условия ортогональности (2.7):

$$\int_0^T B(t)v(t)\,dt = \int_0^5 \begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v(t)\,dt = \mathbf{0}.$$

Отметим, что функция $v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ удовлетворяет этому условию.

8. Итак, искомое программное управление $u(t)$:

$$u(t) = B^*(t)C + v(t) = -\frac{36}{625} \begin{pmatrix} t & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + v(t) =$$

$$= -\frac{36}{625} \begin{pmatrix} 2t \\ -2t+5 \end{pmatrix} + v(t).$$

Подставим в (2.3) найденное программное управление $u(t)$ и получим искомое программное движение $x(t)$.

Пример 2.3. Рассмотрим нестационарную систему (2.1) второго порядка ($n = 2$), где

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t}\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$T = 2\pi, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется исследовать систему на полную управляемость и построить программное управление для заданной пары точек x_0, x_1.

Р е ш е н и е.

1. Проверим на полную управляемость. Поскольку система нестационарная, то воспользуемся достаточным условием полной управляемости (теоремой 2.1):

$$S_0(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$S(t) = [S_0(t), S_1(t)] = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rang} S(t) = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix} = 2 \quad \text{для всех } t \in [0, 2\pi].$$

Значит система возможно полностью управляема.

2. Найдем фундаментальную матрицу $Y(t)$. Заметим, что матрица P имеет каноническую форму Жордана, поэтому получаем
$$Y(t) = e^{Pt} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}.$$

3. Строим матрицу $B(t)$:
$$B(t) = Y^{-1}(t)Q = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t)\end{pmatrix}.$$

4. Из (2.9) получаем матрицу A:
$$A = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t)\end{pmatrix} dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \cos^2(t) & \sin(t)\cos(t) \\ \sin(t)\cos(t) & \sin^2(t)\end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi\end{pmatrix}.$$

5. Используя (2.5), вычисляем вектор η:
$$\eta = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix} - \int_0^{2\pi} e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t}\sin(t)\end{pmatrix} dt =$$
$$= -\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix} - \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} -\sin^2(t) \\ \sin(t)\cos(t)\end{pmatrix} dt = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - 1 \\ -1\end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $AC = \eta$:
$$C = A^{-1}\eta = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \pi - 1 \\ -1\end{pmatrix}.$$

7. Выберем произвольное $v(t)$ из условия ортогональности (2.7):
$$\int_0^T B(t)v(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t)\end{pmatrix} v(t)\,dt = \mathbf{0}.$$

Отметим, что функция $v(t) \equiv 0$ всегда удовлетворяет условию ортогональности.

8. Итак, искомое программное управление $u(t)$ имеет вид:

$$u(t) = B^*(t)C + v(t) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi - 1\\ -1\end{pmatrix} + v(t) =$$

$$= \frac{\pi - 1}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\sin(t) + v(t).$$

Подставим в (2.3) найденное программное управление $u(t)$ и получим искомое программное движение $x(t)$.

Пример 2.4. Рассмотрим систему (2.10) третьего порядка ($n = 3$):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}u, \quad x_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Требуется исследовать систему на полную управляемость и построить программное управление для заданной пары точек $\{x_0, x_1\}$ на отрезке $[0, 1]$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T = 1, \quad x_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

1. Проверим полную управляемость системы. Поскольку система стационарная и $\operatorname{rang} Q = 2$, то воспользуемся теоремой 2.2:

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = 2 \neq n = 3.$$

Получаем, что система не полностью управляема. Отметим, что этот факт не исключает управляемости пары точек $\{x_0, x_1\}$ на отрезке $[0, 1]$.

2. Найдем фундаментальную матрицу $Y(t)$:

$$Y(t) = e^{Pt} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & 0 & \operatorname{sh}(t) \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ \operatorname{sh}(t) & 0 & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

3. Построим матрицу $B(t)$:

$$B(t) = Y^{-1}(t)Q = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t) & -\operatorname{sh}(t) \\ 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу A из (2.9):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2) & 0 & \frac{1}{2} - \operatorname{ch}(2) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \operatorname{ch}(2) & 0 & \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2) \end{pmatrix}.$$

5. Вектор η находим по формуле (2.5):

$$\eta = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(1) \\ 0 \\ -\operatorname{sh}(1) \end{pmatrix}.$$

6. Применяя теорему 2.1, проверим управляемость пары точек:

$$\operatorname{rang} A = 2, \quad \operatorname{rang}(A, \eta) = 2.$$

Значит пара точек $\{x_0, x_1\}$ управляема.

7. Решаем систему $AC = \eta$:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh}(2)\operatorname{ch}(1)}{2} + \operatorname{sh}(1)\operatorname{ch}(2) - \frac{\operatorname{sh}(1)}{2} \\ \gamma \\ \frac{\operatorname{sh}(2)\operatorname{sh}(1)}{2} + \operatorname{ch}(2)\operatorname{ch}(1) - \frac{\operatorname{ch}(1)}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{ch}(2) - \frac{3}{4}\operatorname{ch}^2(2) - \frac{1}{2}},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — произвольная константа.

8. Из условия ортогональности (2.7) находим $v(t)$:

$$\int_0^T B(t)v(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & -\mathrm{sh}(t) \\ 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix} v(t)\,dt = \mathbf{0}.$$

   Заметим, что для данной системы существует единственная функция $v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющая условию ортогональности.

9. Искомое программное управление $u(t)$:

$$u(t) = B^*(t)C.$$

   Подставим в (2.3) найденное программное управление $u(t)$ и получим искомое программное движение $x(t)$.

ГЛАВА 3. ПРОГРАММНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМАХ

§ 3.1. Нестационарные разностные системы

Рассмотрим разностную управляемую систему

$$x(k+1) = P(k)x(k) + Q(k)u(k) + f(k), \quad k = 0, 1, \dots m-1, \quad (3.1)$$

где k — независимая переменная, $P(k)$ — $(n \times n)$-матрица, $Q(k)$ — $(n \times r)$-матрица, $x(k)$ — фазовый n-мерный вектор в момент времени k, $f(k)$ — вектор неоднородности, $u(k)$ — r-мерный вектор управления в момент времени k.

Определение 3.1. Последовательность r-мерных векторов

$$u(0), u(1), \dots, u(m-1) \quad (3.2)$$

будем называть *допустимым управлением.*

Заметим, что система (3.1) рассматривается на конечном множестве значений $k = \overline{0, m}$, где $m \geqslant 1$ — фиксированное целое число, определяющее отрезок, на котором ведется управление.

Постановка задачи. Пусть заданы два постоянных вектора x_0 и x_1 — начальное и конечное положение системы (3.1). Требуется найти допустимое управление (3.2) такое, чтобы решение системы (3.1), начинающееся при $k = 0$ в точке $x = x_0$, попадало при $k = m$ в точку $x = x_1$ Если такое допустимое управление существует, то оно называется *программным.*

Определение 3.2. Пара точек $\{x_0, x_1\}$ называется *управляемой* на отрезке $[0, m]$, если для этой пары существует допустимое управление, при котором система (3.1) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$x(0) = x_0, \quad x(m) = x_1.$$

Определение 3.3. Система (3.1) называется *полностью управляемой* на $[0, m]$, если для любых x_0 и x_1 найдется программное управление (3.2).

Решение задачи. Пусть $u(0)$, $u(1), \ldots, u(m-1)$ — программное управление для пары точек $\{x_0, x_1\}$. Построим систему уравнений, которой должна удовлетворять эта последовательность векторов. Рассмотрим систему (3.1) при $k = \overline{0, m-1}$.

При $k = 0$, имеем

$$x(1) = P(0)x(0) + Q(0)u(0) + f(0) = P(0)x_0 + Q(0)u(0) + f(0),$$

при $k = 1$, используя предыдущее представление $x(1)$, получим

$$\begin{aligned} x(2) &= P(1)x(1) + Q(1)u(1) + f(1) = \\ &= P(1)\left[P(0)x_0 + Q(0)u(0) + f(0)\right] + Q(1)u(1) + f(1) = \\ &= P(1)Q(0)u(0) + Q(1)u(1) + P(1)P(0)x_0 + P(1)f(0) + f(1), \end{aligned}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

аналогично и при $k = m-1$

$$x(m) = P(m-1)x(m-1) + Q(m-1)u(m-1) + f(m-1)$$

дает

$$\begin{aligned} x_1 = {} & P(m-1)\cdots P(1)Q(0)u(0) + \cdots \\ & + P(m-1)Q(m-2)u(m-2) + Q(m-1)u(m-1) + \\ & + P(m-1)\cdots P(0)x_0 + P(m-1)\cdots P(1)f(0) + \cdots \\ & + P(m-1)P(m-2)f(m-3) + \\ & + P(m-1)f(m-2) + f(m-1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

В (3.3) слагаемые, содержащие управление, соберем в одной части равенства, а не содержащие — в другой. Таким образом, получим линейную неоднородную систему

$$AU = \eta, \tag{3.4}$$

где A — $(n \times mr)$-матрица и n-мерный вектор неоднородности η имеют вид

$$\begin{aligned} A = \Big[& P(m-1)\cdots P(1)Q(0), P(m-1)\cdots P(2)Q(1), \\ & P(m-1)\cdots P(3)Q(2), \ldots \\ & P(m-1)\cdots P(k-2)Q(k-1), \ldots \\ & P(m-1)P(m-2)Q(m-3), P(m-1)Q(m-2), Q(m-1) \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta = x_1 &- P(m-1)\cdots P(0)x(0) - P(m-1)\cdots P(1)f(0) - \\ &- P(m-1)\cdots P(2)f(1) - \cdots \\ &- P(m-1)\cdots P(k)f(k-1) - \cdots \\ &- P(m-1)P(m-2)f(m-3) - \\ &- P(m-1)f(m-2) - f(m-1),\end{aligned}$$

$$U = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(m-1) \end{pmatrix} \text{ — вектор управления.}$$

Теорема 3.1. (Критерий управляемости пары точек). *Для того чтобы пара точек* $\{x_0, x_1\}$ *системы (3.1) была управляема на* $[0, m]$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, \eta).$$

Теорема 3.2. (Критерий полной управляемости). *Система (3.1) полностью управляема на* $[0, m]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} A = n.$$

Замечание 3.1. В разностных системах (3.1), в отличие от непрерывных (2.1) и (2.6), программное управление определяется однозначно, если, конечно, система (3.4) имеет единственное решение. Отметим также, что семейство программных управлений может и не существовать.

§ 3.2. Стационарные разностные системы

Пусть матрицы P и Q — постоянны. Рассмотрим систему

$$x(k+1) = Px(k) + Qu(k) + f(k), \quad k = \overline{0, m-1}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. ([10]). *Система (3.5) полностью управляемая на* $[0, m]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang}\left[Q, PQ, \ldots, P^{\overline{m}-1}Q\right] = n,$$

где $\overline{m} = \min\{m, n\}$.

Пусть все собственные числа λ_j, $j = \overline{1,n}$ матрицы P лежат в единичном круге, то есть $|\lambda_j| < 1$, $j = \overline{1,n}$. Тогда можно построить матрицу

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} P^k QQ^* P^{*k}.$$

Эта матрица называется *грамианом управляемости* системы (3.5).

Теорема 3.2. ([10]). *Пусть в системе (3.5) $m \geqslant n$ и $|\lambda_j| < 1$, $j = \overline{1,n}$. Тогда для полной управляемости системы (3.5) на $[0,m]$, необходимо и достаточно, чтобы матрица V была положительно определенной.*

Замечание 3.1. Если у матрицы P есть хотя бы одно собственное число по модулю большее или равное 1, то грамиан не существует.

Теорема 3.3. ([10]). *Грамиан V является решением матричного уравнения Ляпунова*

$$PVP^* - V + QQ^* = \mathbb{O},$$

где $\mathbb{O}$ — нулевая $(n \times n)$-матрица.

§ 3.3. Примеры

Пример 3.1. Дана разностная система

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_4(k), \\ x_3(k+1) = x_1(k), \\ x_4(k+1) = x_3(k) + u(k), \end{cases} \qquad m = 2.$$

Требуется построить последовательность управлений $u(0)$, $u(1)$, переводящую систему из начального состояния $x_0 = x(0) = \mathbf{0}$ в конечное $x_1 = x(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^*$.

Р е ш е н и е.

1. Имеем

$$P = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим систему на полную управляемость, воспользовавшись теоремой 3.1:

$$S = [Q, PQ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{rang} S = 2 \neq n = 4.$$

Следовательно, система не полностью управляема.

2. Построим матрицу A:

$$A = [PQ, Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. По формуле (3.4) находим вектор η:

$$\eta = x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решаем систему $AU = \eta$:

$$U = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили единственную последовательность управлений, позволяющих переводить нашу систему из состояния x_0 в x_1.

Пример 3.2. Рассмотрим стационарную систему (3.5), в которой

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; f(k) = \mathbf{0},$$

$$n = 4, \;\; m = 2, \;\; x_0 = x(0) = \mathbf{0}, \;\; x_1 = x(2) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Требуется исследовать систему на управляемость и построить программное управление для заданной пары точек $\{x_0, x_1\}$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим систему на полную управляемость, воспользовавшись теоремой 3.1:

$$S = [Q, PQ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq n = 4.$$

Критерий полной управляемости не выполнен, но это не значит, что данная пара точек $\{x_0, x_1\}$ не управляема.

2. Построим матрицу A:

$$A = [PQ, Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вектор η вычисляем по формуле (3.4):

$$\eta = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решаем систему $AU = \eta$:

$$U = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

5. Итак, получили семейство управлений, позволяющих переводить исходную систему из состояния x_0 в x_1. Выбрав конкретные c_1 и c_2, получим соответствующее управления. Например, положим $c_1 = c_2 = 2$:

$$U = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{то есть} \qquad u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.3. Рассмотрим стационарную систему (3.5), в которой

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ f(k) = \mathbf{0},$$

$$n = 4, \ \ m = 2, \ \ x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ x_1 = x(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется исследовать систему на управляемость и построить программное управление для заданной пары точек $\{x_0, x_1\}$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим систему на полную управляемость, воспользовавшись теоремой 3.1:

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang}\,[Q, PQ] = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n = 4.$$

   Система полностью управляема. Это значит, что и данная пара точек $\{x_0, x_1\}$ также управляема.

2. Построим матрицу A:

$$A = [PQ, Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вектор η вычисляем по формуле (3.4):

$$\eta = x_1 - P^2 x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решаем систему $AU = \eta$:

$$U = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Итак, мы получили “единственное” управление

$$u(0) = u(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря система не требует управления.

Замечание 3.1. Если программное управление строится неоднозначно, то к выбору управления привлекаются дополнительные критерии “качества управления”. Например, из множества программных управлений необходимо выбрать управление, минимизирующая функционал

$$J(u) = (U, U).$$

ГЛАВА 4. ЗАДАЧА НАБЛЮДЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

§ 4.1. Наблюдаемость. Необходимые и достаточные условия наблюдаемости

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(t)x + f(t), \tag{4.1}$$

где $P(t)$ — $(n \times n)$-матрица. Элементы матрицы $P(t)$ и вектор функции $f(t)$ — непрерывны.

Пусть наряду с системой (4.1) задана и система наблюдений

$$y(t) = R(t)x + \varphi(t), \tag{4.2}$$

где $y(t)$ — известная m-мерная вектор-функция при $t \in [0, T]$ (это измерения или показания приборов), $R(t)$ — $(m \times n)$-матрица, $\varphi(t)$ — заданная m-мерная вектор-функция.

Постановка задачи. По значениям вектора-функции наблюдения $y(t)$ на отрезке $[0, T]$ определить начальное состояние системы x_0, а это, в свою очередь, позволит восстановить вектор фазовых переменных $x(t)$ на всем интервале $[0, T]$.

Определение 4.1. Система (4.1), (4.2) *полностью наблюдаема* на отрезке $[0, T]$, если по значениям вектора наблюдения $y(t)$ на $[0, T]$ можно однозначно восстановить вектор $x(t)$.

Решение задачи. Запишем общее решение системы (4.1) в форме Коши

$$x(t) = Y(t)\left[x_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right], \tag{4.3}$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (4.1), $Y(0) = E_n$.

Итак, если мы знаем x_0, то для любого $t \geqslant t_0 = 0$ вектор фазовых переменных $x(t)$ определится по формуле (4.3). Для однозначного определения движения объекта надо найти x_0.

Подставим (4.3) в (4.2)

$$y(t) = R(t)Y(t)\left[x_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right] + \varphi(t). \tag{4.4}$$

Обозначим через

$$H(t) = R(t)Y(t),$$
$$g(t) = y(t) - \varphi(t) - H(t)\int_0^t Y^{-1}(\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

тогда (4.4) примет следующий вид

$$H(t)x_0 = g(t). \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. ([9], [10]). *Для того чтобы система (4.1), (4.2) была полностью наблюдаема на отрезке* $[0,T]$*, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы* $H(t)$ *были линейно независимы на* $[0,T]$*.*

Далее, умножим обе части системы (4.5) слева на $H^*(t)$, а затем проинтегрируем по t от 0 до T. Получаем

$$\int_0^T H^*(t)H(t)\,dt\,x_0 = \int_0^T H^*(t)g(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Введем следующие обозначения

$$D = \int_0^T H^*(t)H(t)\,dt, \qquad \eta = \int_0^T H^*(t)g(t)\,dt,$$

тогда (4.6) можно представить в виде линейной неоднородной системы

$$Dx_0 = \eta. \tag{4.7}$$

Теорема 4.2. (Критерий полной наблюдаемости). *Для того чтобы система (4.1), (4.2) была полностью наблюдаема, необходимо и достаточно, чтобы* $\det D \neq 0$*.*

Итак, если система (4.7) имеет единственное решение

$$x_0 = D^{-1}\eta,$$

то подставив его в (4.3), построим искомое $x(t)$.

§ 4.2. Принцип двойственности

Вновь рассмотрим систему наблюдения

$$\dot{x} = P(t)x + f(t), \tag{4.8}$$

$$y(t) = R(t)x + \varphi(t). \tag{4.9}$$

Здесь также $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = P(t)x$, $Y(0) = E_n$.

Введем вспомогательную систему управления

$$\dot{z} = -P^*(t)z + R^*(t)u(t) + f(t), \tag{4.10}$$

где $P(t)$ — матрица из системы (4.8), $R(t)$ — матрица из системы (4.9).

Пусть $Z(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{z} = -P^*(t)z,$$

которая нормированная в точке $t = 0$, то есть $Z(0) = E_n$. Заметим, что $Z^*(t) = Y^{-1}(t)$ [11], [1].

Теорема 4.1. (Принцип двойственности). *Система (4.8), (4.9) полностью наблюдаема на отрезке* $[0, T]$ *тогда и только тогда, когда система (4.10) полностью управляема на* $[0, T]$.

Определение 4.1. Будем говорить, что система (4.8), (4.9) z*-наблюдаема* на отрезке $[0, T]$, если величина

$$z = \psi(x_0),$$

где ψ — m-мерная вектор-функция, определяется однозначно по известной вектор-функции $y(t)$ при $t \in [0, T]$.

Замечание 4.1. Если система полностью наблюдаема на промежутке $[0, T]$, тогда она и z-наблюдаема. Система может быть z-наблюдаема и в случае с не полностью наблюдаемой системой.

Замечание 4.2. Из теоремы 4.1 следует, что все утверждения, рассмотренные для систем управления в разделе 2, также справедливы и для двойственных им задач наблюдения.

Далее приведены некоторые из них [10], [9], [7], [8].

Теорема 4.2. *Пусть* $P(t) \in C^{n-2}[0,T]$, $R(t) \in C^{n-1}[0,T]$. *Система (4.8), (4.9) полностью наблюдаема на отрезке* $[0,T]$, *если существует момент* $\tau \in [0,T]$, *для которого*

$$\operatorname{rang} S(\tau) = n,$$

где

$$S(t) = [S_0(t), S_1(t), \dots S_{n-1}(t)],$$
$$S_0(t) = R^*(t), \quad S_k(t) = \dot{S}_{k-1}(t) + P^*(t)S_{k-1}(t) \quad \text{для } k = \overline{1, n-1}.$$

Следствие 4.1. *В стационарном случае, когда* P *и* R — *постоянные матрицы, получаем*

$$S = \left[R^*, P^*R^*, \dots, (P^*)^{n-1}R^*\right].$$

Система (4.8), (4.9) полностью наблюдаема на отрезке $[0,T]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} S = n.$$

§ 4.3. Примеры

Ниже рассмотрены примеры восстановления начального состояния по наблюдению.

Пример 4.1. Восстановить по наблюдениям начальные данные в системе:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = 2$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим систему на полную наблюдаемость. Система стационарная, поэтому воспользуемся следствием 4.1:

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

   Значит система полностью наблюдаема.

2. Далее найдем фундаментальную матрицу $Y(t)$:

$$Y(t) = e^{Pt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Построим матрицу $H(t)$:

$$H(t) = RY(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу D (см. (4.7)):

$$D = \int_0^T H^*(t)H(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4/4 & t^3/2 & t^2/2 \\ t^3/2 & t^2 & t \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1/20 & 1/8 & 1/6 \\ 1/8 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Находим вектор η (см. (4.7)), так как $\varphi(t) = 0$ и $f(t) = \mathbf{0}$, имеем $g(t) = y(t) = 2$ и

$$\eta = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} 2\,dt = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $Dx_0 = \eta$:

$$x_0 = D^{-1}\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Итак, искомое движение $x(t)$:

$$x(t) = Y(t)x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.2. Восстановить по наблюдениям начальные данные в системе:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \quad T = 2.$$

Наблюдение на интервале $[0, 2]$ имеет вид $y(t) = 4$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим полную наблюдаемость. Система стационарная, поэтому воспользуемся следствием 4.1:

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

   Значит система не полностью наблюдаема, то есть ее начальное состояние определяется неоднозначно или вовсе не существует.

2. Ищем фундаментальную матрицу $Y(t)$:

$$Y(t) = e^{Pt} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Построим матрицу $H(t)$:

$$H(t) = RY(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу D (см. (4.7)):

$$D = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Находим вектор η (см. (4.7)). Поскольку $\varphi(t) = 0$ и $f(t) = \mathbf{0}$, то $g(t) = y(t) = 4$ и

$$\eta = \int_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} 4\, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $Dx_0 = \eta$. Так как $\operatorname{rang} D = \operatorname{rang}[D, \eta] = 1$, то система совместна. Общее решение имеет вид

$$x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

7. Проверим нашу систему на z-наблюдаемость. Пусть $\psi(x_0) = Nx_0$ (см. определение 4.1), где $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Итак, величина

$$z = Nx_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 4 \end{pmatrix} = 12$$

определилась однозначно, то есть система z-наблюдаема при данном выборе функции $\psi(x_0)$.

Заметим, что если принять вектор $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, то исходная система не будет являться z-наблюдаемой.

Пример 4.3. Восстановить по наблюдениям начальные данные в системе:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad T = 2\pi.$$

Наблюдение на интервале $[0, 2\pi]$ имеет вид $y(t) = 2\cos(t)$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим систему на полную наблюдаемость. Так как система стационарная, то воспользуемся следствием 4.1:

$$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Значит система полностью наблюдаема.

2. Построим фундаментальную матрицу $Y(t)$:

$$Y(t) = e^{Pt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

3. Получаем матрицу $H(t)$:

$$H(t) = RY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу D (см. (4.7)):

$$D = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

5. Находим вектор η (см. (4.7)). Поскольку

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{и} \quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то имеем

$$g(t) = y(t) - H(t) \int_0^t Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\cos(t) - \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) \\ \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= 2\cos(t) - \sin(t)$$

и тогда

$$\eta = \int_0^T H^*(t) g(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \left[2\cos(t) - \sin(t)\right] dt = \begin{pmatrix} 2\pi \\ -\pi \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $Dx_0 = \eta$:

$$x_0 = D^{-1}\eta = \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\pi \\ -\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7. Итак, искомое движение $x(t)$:

$$x(t) = Y(t) \left[x_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau \right] = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -2\sin(t) - 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.4. Воспользовавшись принципом двойственности к системе управления

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad T = 1,$$

решить задачу наблюдения.

Наблюдение на отрезке $[0, 1]$ имеет вид $y(t) = t$.

Р е ш е н и е.

1. Проверим систему на полную управляемость. Так как система стационарная, то воспользуемся теоремой 2.1:

   $$\operatorname{rang} S = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

   Значит система полностью управляема.

   Построим задачу наблюдения, двойственную к данной задаче управления:

   $$\begin{cases} \dot{x} = -P^* x, \\ y = Q^* x, \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x, \\ \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x. \end{cases}$$

   Система полностью наблюдаема, так как двойственная ей задача полностью управляема.

2. Ищем фундаментальную матрицу $Y(t)$:

   $$Y(t) = e^{-P^* t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Построим матрицу $H(t)$:

   $$H(t) = RY(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу D (см. (4.7)):

$$D = \int_0^1 \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Находим вектор η (см. (4.7)). Так как $\varphi(t) = 0$ и $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то получаем

$$g(t) = y(t) = t,$$

$$\eta = \int_0^T H^*(t) g(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} t\, dt = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему $Dx_0 = \eta$:

$$x_0 = D^{-1}\eta = 12 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Итак, искомое движение $x(t)$:

$$x(t) = Y(t) x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 5. ЗАДАЧА НАБЛЮДЕНИЯ В РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМАХ

§ 5.1. Постановка задачи. Основные результаты

Рассмотрим разностную систему

$$x(k+1) = P(k)x(k) + f(k), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{5.1}$$

и систему наблюдения

$$y(k) = R(k)x(k) + \varphi(k), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{5.2}$$

где $P(k)$ — $(n \times n)$-матрица, $f(k)$ — n-мерная вектор-функция, $x(k)$ — n-мерный вектор, $R(k)$ — $(r \times n)$-матрица, $\varphi(k)$ — r-мерная вектор-функция.

Постановка задачи. По данным наблюдениям $y(0)$, $y(1)$, $\ldots$, $y(m-1)$ требуется однозначно определить начальное значение вектора состояния $x(k)$, то есть $x_0 = x(0)$. Заметим, что зная начальное состояние x_0, мы однозначно восстановим значения $x(k)$ в любой момент $k = 0, 1, \ldots, m$.

Определение 5.1. Если вектор x_0 определяется единственным образом по векторам $y(0)$, $y(1), \ldots,$ $y(m-1)$, то система (5.1), (5.2) называется *полностью наблюдаемой* на $[0, m]$.

Решение задачи. Пусть $y(0)$, $y(1), \ldots,$ $y(m-1)$ — известные наблюдения. Рассмотрим, систему (5.1) при $k = \overline{0, m-1}$:

при $k = 0$, имеем

$$x(1) = P(0)x(0) + f(0) = P(0)x_0 + f(0),$$

при $k = 1$, используя предыдущие выражение для $x(1)$, получим

$$\begin{aligned} x(2) &= P(1)x(1) + f(1) = \\ &= P(1)\left[P(0)x_0 + f(0)\right] + f(1) = \\ &= P(1)P(0)x_0 + P(1)f(0) + f(1), \end{aligned}$$

$\vdots$

при $k = m-2$

$$
\begin{aligned}
x(m-1) = P(m-2)x(m-2) + f(m-2) = \\
= P(m-2)\cdots P(0)x_0 + \\
+ P(m-2)\cdots P(1)f(0) + \\
+ P(m-2)\cdots P(2)f(1) + \cdots \\
+ P(m-2)P(m-3)f(m-4) + \\
+ P(m-2)f(m-3) + f(m-2).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Полученные представления для $x(k)$ при $k = \overline{0, m-1}$ подставим в (5.2). Имеем

при $k = 0$

$$y(0) = R(0)x(0) + \varphi(0) = R(0)x_0 + \varphi(0),$$

при $k = 1$, используем предыдущее представление $y(1)$, получаем

$$
\begin{aligned}
y(1) &= R(1)x(1) + \varphi(1) = \\
&= R(1)\left[P(0)x_0 + f(0)\right] + \varphi(1) = \\
&= R(1)P(0)x_0 + R(1)f(0) + \varphi(1),
\end{aligned}
$$

$\vdots$

при $k = m-1$

$$
\begin{aligned}
y(m-1) &= R(m-1)x(m-1) + \varphi(m-1) = \\
&= R(m-1)P(m-2)\cdots P(0)x_0 + \\
&+ R(m-1)P(m-2)\cdots P(1)f(0) + \cdots \\
&+ R(m-1)P(m-2)f(m-3) + \\
&+ R(m-1)f(m-2) + \varphi(m-1).
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

В (5.4) слагаемые, содержащие x_0, соберем в одной части равенства, а не содержащие — в другой. Получаем линейную неоднородную систему

$$Ax_0 = \eta, \tag{5.5}$$

где матрица A размерности $(mr \times n)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} R(0) \\ R(1)P(0) \\ R(2)P(1)P(0) \\ \vdots \\ R(k)P(k-1)\cdots P(0) \\ \vdots \\ R(m-3)P(m-4)\cdots P(0) \\ R(m-2)P(m-3)\cdots P(0) \\ R(m-1)P(m-2)\cdots P(0) \end{pmatrix},$$

а вектор η размерности $(mr \times 1)$ принимает вид

$$\eta = \begin{pmatrix} y(0) - \varphi(0) \\ y(1) - \varphi(1) - R(1)f(0) \\ y(2) - \varphi(2) - R(2)P(1)f(0) - R(2)f(1) \\ \vdots \\ y(k) - \varphi(k) - R(k)P(k-1)\cdots P(1)f(0) - \\ - R(k)P(k-1)\cdots P(2)f(1) - \cdots \\ - R(k)P(k-1)f(k-2) - R(k)f(k-1) \\ \vdots \\ y(m-1) - \varphi(m-1) - R(m-1)P(m-2)\cdots P(1)f(0) - \\ - R(m-1)P(m-2)\cdots P(2)f(1) - \cdots \\ - R(m-1)P(m-2)f(m-3) - R(m-1)f(m-2) \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.1. *Для того чтобы система (5.1), (5.2) была полностью наблюдаема на* $[0, m]$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} A = n.$$

Теорема 5.2. (Случай стационарных систем). *Если в системе (5.1), (5.2) матрицы* P *и* R *постоянные, то для полной наблюдаемости, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} R \\ RP \\ \vdots \\ RP^{m-1} \end{pmatrix} = n.$$

§ 5.2. Примеры

Пример 5.1. Рассмотрим разностную систему

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(k),$$

и систему наблюдения

$$\begin{cases} y_1(k) = x_1(k) + x_4(k), \\ y_2(k) = 2x_1(k) - x_3(k) + 2x_4(k). \end{cases}$$

Определить какое минимальное число наблюдений необходимо сделать, чтобы однозначно определить решение.

Р е ш е н и е. В данной задаче матрицы P и R принимают вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как система стационарная, воспользуемся теоремой 5.2. Итак, надо найти минимальное m такое, чтобы

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} R \\ RP \\ \vdots \\ RP^{m-1} \end{pmatrix} = 4.$$

Нетрудно проверить, что $m = 3$ является минимальным количеством наблюдений для данной системы.

Пример 5.2. Определить при каких значениях параметра γ система полностью наблюдаема.

Дана система

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(k), \quad y(k) = x_1(k), \quad m = 4,$$

здесь

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как система стационарная, воспользуемся теоремой 5.2. Получаем

$$S = \begin{pmatrix} R \\ RP \\ RP^2 \\ RP^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \gamma & 0 \\ 4 & 2+\gamma & 2\gamma & \gamma \\ 8 & 4+2\gamma & 5\gamma & \gamma \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rang} S = 4$ тогда и только тогда, когда $\det S \neq 0$. Имеем

$$\det S = \gamma^2(\gamma - 1).$$

Итак, система полностью наблюдаема, если $\gamma \neq 0$ и $\gamma \neq 1$.

Пример 5.3. Рассмотрим разностную систему

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k),$$

и систему наблюдения

$$\begin{cases} y_1(k) = x_3(k), \\ y_2(k) = x_4(k). \end{cases}$$

Наблюдения на интервале $[0, 1]$ имеют вид $y(0) = y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Определить начальное состояние системы.

Р е ш е н и е. В данном примере матрицы P и R принимают вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; n = 4, \;\; m = 2.$$

Проверим систему на полную наблюдаемость. Так как система стационарная, то воспользуемся теоремой 5.2. Построим матрицу S и вычислим ее ранг

$$S = \begin{pmatrix} R \\ RP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $\operatorname{rang} S = 4 = n$. Значит система полностью наблюдаема и начальное состояние системы x_0 определится однозначно.

Составим систему (5.5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением данной системы является $x_0 = A^{-1}\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, начальное состояние системы является точка $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*$.

Автор надеется, что материал пособия был полезен и интересен читателю. Предложения и пожелания направляйте по адресу: grigoriytamasjan@mail.ru.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ВАРИАНТ № I

1. Является ли управляемой пара точек x_0, x_1.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad T = 1, \quad x_0 = \mathbf{0}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. При каких β и γ система полностью управляема

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

3. Составить задачу наблюдения, двойственную задаче управления, и решить ее.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + t \end{pmatrix} u,$$

Наблюдение на интервале $[0, 1]$ имеет вид $y(t) = t$.

ВАРИАНТ № II

1. Является ли система полностью управляемой

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u, \quad T = 2\pi.$$

2. Построить программное управление

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T = \pi,\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1 = \mathbf{0}.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = e^{-t}$. Является ли система полностью наблюдаема, z-наблюдаема.

ВАРИАНТ № III

1. Решить задачу программного управления

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix},$$

$T = 2\pi$, $x_0 = x_1 = \mathbf{0}$.

2. При каких β и γ система полностью наблюдаема

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 \end{pmatrix} x.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = t$.

ВАРИАНТ № IV

1. Решить задачу программного управления

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad T = 1, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} e \\ 4e \end{pmatrix}.$$

2. При каких β и γ система полностью наблюдаема

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \qquad y = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma & 0 \end{pmatrix} x.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = -t + t^2 - \dfrac{1}{2}t^3$.

ВАРИАНТ № V

1. Решить задачу программного управления

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad T = 1, \quad x_0 = \mathbf{0}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. При каких β и γ система полностью наблюдаема

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x, \qquad y = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\gamma & 0 \end{pmatrix} x.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} 2 & t \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = \dfrac{3}{2}t^3 - 3t$.

ВАРИАНТ № VI

1. Является ли система полностью управляемой

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad T = 1, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \mathbf{0}.$$

2. Построить программное управление

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} u, \ T = 4\pi, \ x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ x_1 = \mathbf{0}.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -t \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0, 1]$ имеет вид $y(t) = 1 + \dfrac{1}{2}t^2$.

ВАРИАНТ № VII

1. Является ли управляемой пара точек x_0, x_1.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u, \ T = 2, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_1 = \mathbf{0}.$$

2. Построить программное управление

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} u, \ T = 2\pi, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x_1 = \mathbf{0}.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0, 1]$ имеет вид $y(t) = 1 + 2t + \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3$.

ВАРИАНТ № VIII

1. Является ли система полностью управляемой на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u, \ x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_1 = \mathbf{0}.$$

2. Построить программное управление

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} u,\ T = 2\pi,\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} e^{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$.

ВАРИАНТ № IX

1. Является ли управляемой пара точек x_0, x_1.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u,\ T = 1,\ x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ x_1 = \mathbf{0}.$$

2. Построить программное управление

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T = 2\pi, x_0 = \mathbf{0}, x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0,1]$ имеет вид $y(t) = 6e^{t} - 4e^{-t}$.

ВАРИАНТ № X

1. Является ли управляемой пара точек x_0, x_1 в разностной системе

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} -k-1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix},$$

$$m = 2,\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. При каких β и γ система полностью управляема

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{pmatrix} u.$$

3. Решить задачу наблюдения

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x, \quad y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} x, \quad T = 1.$$

Наблюдение на интервале $[0, 1]$ имеет вид $y(t) = e^{-t}$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

I. 1) $Y(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, пара точек не управляема. 2) $\beta \neq 0$, $\beta \neq 2\gamma$, $\gamma \neq 0$. 3) $Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2+1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1123}{4434} & \dfrac{553}{1478} \end{pmatrix}^*$.

II. 1) Система полностью управляема.
2) $Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & \sin(t) - \cos(t) + 1 \\ -sin(t) & \cos(t) & \sin(t) + \cos(t) - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$u(t) = B^*(t)C + v(t)$,
$C = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\pi}{\pi^2 - 8} & \dfrac{2(2-\pi)}{\pi} & \dfrac{-3\pi^3 + 6\pi^2 + 20\pi - 32}{\pi(\pi^2 - 8)} \end{pmatrix}^*$. 3) Не полностью наблюдаема, $Y(t) = \begin{pmatrix} 4sh(t) & 2sh(t) \\ -4sh(t) & ch(t) - 3sh(t) \end{pmatrix}$, z-наблюдаема.

III. 1) Система полностью управляема,
$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 1 - \cos(t) & \sin(t) & 1 \end{pmatrix}$, $u(t) = B^*(t)C + v(t)$,
$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^*$, $u(t) = -2\cos(t) - 1 + v(t)$. 2) $\beta \neq 0$, $\beta \neq -1$, $\gamma \neq 0$. 3) Полностью наблюдаема,
$Y(t) = \dfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 8e^{5t} + e^{-4t} & 2e^{5t} - 2e^{-4t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-4t} & e^{5t} + 8e^{-4t} \end{pmatrix}$, $x_0 \approx \begin{pmatrix} -0.012 & -1.065 \end{pmatrix}^*$.

IV. 1) Система не полностью управляема, $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$,
$u(t) = \dfrac{10}{e^t(e^{-2} - 1)} + v(t)$,
$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 3 - \dfrac{10e^{-2t}}{e^{-2} - 1} + \dfrac{10}{e^{-2} - 1} + 8t & 4 \end{pmatrix}^*$. 2) $\beta \neq 0$, $\gamma \neq -1$, $\gamma \neq 0$. 3) Полностью наблюдаема, $Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}^*$.

V. 1) Система не полностью управляема, $Y(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, пара точек не управляема. 2) $\beta \neq 0$, $\gamma \neq -1$, $\gamma \neq 0$. 3) Полностью наблюдаема, $Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}^*$.

VI. 1) Система полностью управляема. 2) Система полностью управляема, $Y(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$,
$u(t) = \dfrac{\cos(t) - \sin(t)}{2\pi} + v(t)$. 3) Не полностью наблюдаема
$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

VII. 1) Система не полностью управляема,
$Y(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \dfrac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, пара точек не управляема. 2) Система полностью управляема, $Y(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$,
$u(t) = -\dfrac{\cos(t) + 2\sin(t)}{\pi} + v(t)$. 3) Полностью наблюдаема,
$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^*$.

VIII. 1) Система не полностью управляема. 2) Система полностью управляема, $Y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$,
$u(t) = -\dfrac{\cos(t) + \sin(t)}{2\pi} + v(t)$. 3) Полностью наблюдаема,
$Y(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^*$.

IX. 1) Система не полностью управляема,
$Y(t) = \begin{pmatrix} ch(t) & 0 & sh(t) \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ sh(t) & 0 & ch(t) \end{pmatrix}$, пара точек не управляема.

2) Система не полностью управляема,
$$Y(t) = e^{t}\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & \sin(t)-\cos(t)+1 \\ -\sin(t) & \cos(t) & \sin(t)+\cos(t)-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, пара точек не управляема. 3) Полностью наблюдаема,
$$Y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2e^{2t}-1 & e^{2t}-1 \\ 2(1-e^{2t}) & 2-e^{2t} \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

X. 1) Система не полностью управляема, пара точек не управляема. 2) $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$. 3) Полностью наблюдаема,
$$Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}+\frac{4}{7}e^{7t} & -\frac{3}{7}+\frac{3}{7}e^{7t} \\ -\frac{4}{7}+\frac{4}{7}e^{7t} & \frac{4}{7}+\frac{3}{7}e^{7t} \end{pmatrix},\ x_0 \approx \begin{pmatrix} 0.535 & -0.713 \end{pmatrix}^*.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — 4-е изд.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.—552 с.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1998. 480 с.
3. *Екимов А.В., Смирнов Н.В.* Методические указания к курсу “Линейная алгебра”. Часть 1. Операторы в линейных и евклидовых пространствах. СПб., 1994.
4. *Екимов А.В., Смирнов Н.В.* Методические указания к курсу “Линейная алгебра”. Часть 2. Алгебраическая теория нормальных форм матрицы. Функции от матрицы. СПб., 1995.
5. *Екимов А.В., Смирнов Н.В.* Практические занятия по курсу “Линейная алгебра”. Геометрическая теория нормальных форм матрицы линейного оператора. СПб., 1996.
6. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1970.
7. *Жабко. А.П., Прасолов А.В., Харитонов В.Л.* Задачи по теории управления. Учебное пособие. Л., 1990, 108 с.
8. *Жабко. А.П., Прасолов А.В., Харитонов В.Л.* Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2003.—286 с.
9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
10. *Карелин В.В., Харитонов В.Л., Чижова О.Н.* Лекции по теории стабилизации программных движений: Учеб. пособие / Под общ. ред. В.И. Зубова. —СПб., 2003. — 80 с.
11. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 4-е, испр. и доп. Минск, “Вышэйшая школа”, 1974.
12. *Утешев А.Ю., Калинина Е.А.* Курс лекций по высшей алгебре. Часть I, II. Учеб. пособие. — СПб.: “СОЛО”, 2007.
13. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.