Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

**Кафедра компьютерных систем в управлении и проектировании (КСУП)**

**Г. Н. Решетникова**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**Методические указания
по выполнению лабораторных работ для студентов ФДО
направления подготовки 27.03.04
«Управление в технических системах»**

**Томск 2017**

Корректор: А. Н. Миронова

**Решетникова Г. Н.**

Моделирование систем управления : методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов ФДО направления подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах» / Г. Н. Решетникова. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2017. – 33 с.

Методические указания содержат краткое описание теории для лабораторных работ и рекомендации по их выполнению.

# СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение ........................................................................................... 4
2 Лабораторная работа № 1 «Изучение некоторых возможностей работы в системе MathCAD» ........................................................................ 7
3 Лабораторная работа № 2 «Моделирование систем управления с использованием локального квадратичного критерия» .......................... 19
Литература ........................................................................................ 31
Приложение А Варианты исходных данных к лабораторной работе № 1 ..... 32
Приложение Б Варианты исходных данных к лабораторной работе № 2 ...... 33

# 1 ВВЕДЕНИЕ

В рамках дисциплины «Моделирование систем управления» осуществляется знакомство студентов:

– с основными понятиями моделирования систем,

– с численными методами моделирования,

– с описанием математических моделей управления в пространстве состояний,

– с концепцией совмещенного синтеза при формировании управляющих воздействий,

– с методами аналитического конструирования оптимальных регуляторов,

– с методами формирования следящих систем адаптивного управления при неполной информации об объекте с ошибками.

Основные задачи дисциплины заключаются в следующем:

– понимание того, что математическое моделирование с помощью современных компьютеров является мощным, а иногда и единственным средством проектирования сложных систем;

– изучение принципов, методов моделирования, численных методов моделирования и интерпретации полученных результатов;

– изучение методов проектирования систем управления для объектов или процессов, математические модели которых заданы в пространстве состояний системой обыкновенных дифференциальных уравнений;

– получение навыков решения задач моделирования с помощью современных математических пакетов.

Предшествующие дисциплины, формирующие начальные знания: математика, дискретная математика, теория автоматического управления, математическая статистика и случайные процессы, информатика. Последующими дисциплинами являются научно-исследовательская работа студентов, преддипломная практика, подготовка и защита выпускной квалификационной работы.

Целью проведения лабораторных работ по дисциплине является закрепление теоретических знаний и получение практических навыков моделирования систем управления с использованием современных математических пакетов.

Методические указания включают описание двух лабораторных работ, в первой из которых изучаются некоторые возможности пакета MathCAD (скачать бесплатную демоверсию можно на официальном сайте [3]; MathCAD 13 – на сайте [4]), а во второй – проектируется система управления в пространстве состояний и осуществляется моделирование динамики детерминированного и стохастического объекта под управлением, которое получено при минимизации локального квадратичного критерия.

В результате выполнения лабораторных работ обучающийся должен получить практические навыки работы в пакете MathCAD, спроектировать систему управления в пространстве состояний и представить ее дискретный аналог, а также осуществить моделирование при управлении, которое получено при минимизации локального квадратичного критерия [2. С. 111–127].

Выполнение лабораторных работ направлено на формирование компетенций:

ОПК-2 – способность выявлять естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат;

ПК-2 – способность проводить вычислительные эксперименты с использованием стандартных программных средств с целью получения математических моделей, процессов и объектов автоматизации и управления.

Для успешного выполнения лабораторной работы необходимо предварительно изучить основные теоретические сведения в рамках темы работы.

## Выбор варианта для выполнения лабораторных работ

Выбор варианта осуществляется с использованием формулы:

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{K})\ \mathbf{div}\ \mathbf{100},$$

где **V** – искомый номер варианта,

**N** – общее количество вариантов,

**div** – целочисленное деление,

**K** – код варианта.

При $V = 0$ выбирается максимальный вариант.

## Основные требования к оформлению отчета

Результатом выполнения лабораторной работы является отчет. Структура отчета должна быть следующей:

1. Номер и тема лабораторной работы, ФИО студента, номер группы и направление подготовки, цель работы.
2. Основные теоретические сведения о решаемой задаче.
3. Практическая реализация.
4. Заключение, содержащее выводы о полученных результатах.

Отчет о выполнении лабораторной работы должен содержать наименование темы контрольной работы, цель и задачу исследования, а также детальное описание результатов выполнения каждого этапа работы.

При оформлении отчетов по текстовым работам (контрольным и лабораторным) следует руководствоваться требованиями образовательного стандарта вуза: ОС ТУСУР 01–2013. Работы студенческие по направлениям подготовки и специальностям технического профиля. Общие требования и правила оформления. – Режим доступа: https://regulations.tusur.ru/documents/70

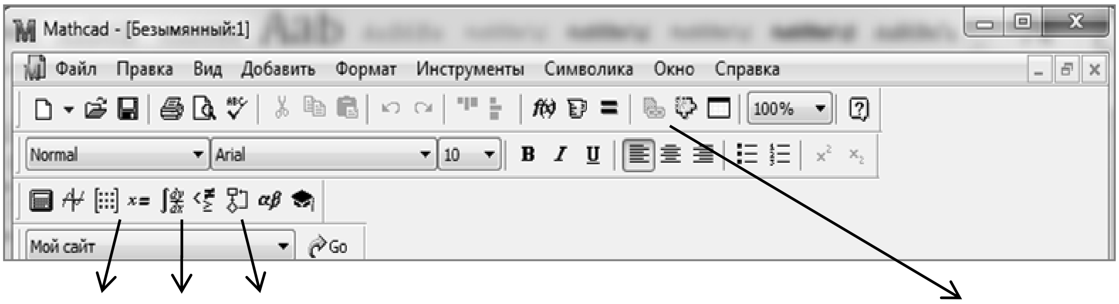
# 2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 «ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ РАБОТЫ В СИСТЕМЕ MATHCAD»

Математический пакет MathCAD был задуман и первоначально написан Алленом Раздовом из Массачусетского технологического института (MIT), соучредителем компании Mathsoft, которая с 2006 г. является частью корпорации PTC (Parametric Technology Corporation). Он имеет интуитивный и простой для использования интерфейс пользователя. Для ввода формул и данных можно использовать как клавиатуру, так и специальные панели инструментов. Работа осуществляется в пределах рабочего листа, на котором уравнения и выражения отображаются графически, в противовес текстовой записи в языках программирования.

MathCAD содержит сотни операторов и встроенных функций для решения различных задач. Он позволяет выполнять численные и символьные вычисления, производить операции со скалярными величинами, векторами и матрицами, осуществлять графическое представление результатов. Это система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентирования на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

MathCAD – единственная прикладная система, в которой описания математических задач и их решений задаются с помощью обычных в математике символов и формул. И, кроме того, объединение текстового, формульного и графического редакторов делает эту систему универсальной.

Интерфейс системы создан таким образом, что пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Windows-приложениями, может сразу начать работу с MathCAD (рис. 2.1). Изучаются, в основном, те возможности MathCAD, которые потребуются для выполнения лабораторных работ и курсового проекта.




*1* – пиктограммы наборных панелей (панели калькулятора, графиков, векторов и матриц, вычисления, исчисления, логики, программирования, греческих символов, символьных ключевых слов)

*2* – вставка функции из списка

Рис. 2.1 – Окно системы MathCAD

1. Пиктограммы содержат основные необходимые операции при работе с символами, матрицами, графиками, составлением программ. Строки с пиктограммами можно свернуть мышью в наборную панель и поместить в любое место экрана.

2. Система MathCAD содержит расширенный набор встроенных функций (в том числе элементарных функций, таких как sin(x), cos(x), ln(x) и т. д.). Кроме того, содержатся такие функции, как norme(M) (вычисляет евклидову норму матрицы M), eigenvals(M) (выдаёт вектор собственных значений для квадратной матрицы M), root (определяет решение нелинейного уравнения), polyroots (считает корни полинома), и др.

Можно задавать собственные функции. *Функции пользователя* вводятся с помощью следующего выражения:

Имя_функции (Список_параметров) := Выражение

Имя функции – любой идентификатор, список параметров – перечень используемых в выражении переменных, разделенных запятыми. Эти переменные являются локальными, поэтому они могут не определяться до задания функций.

***Дискретный аргумент*** – это переменная, которая принимает ряд значений при каждом ее использовании. Чтобы определить дискретный аргумент, необходимо напечатать имя переменной, сопровождаемое двумя точками (эта операция есть на матричной панели) и диапазоном значений.

Например, k := 1,1.1..2 указывает, что k принимает значения 1,1.1,1.2,…,2, где шаг равен 0,1. Если k :=1..10, то k принимает целочисленные значения от 1 до 10. Если дискретный аргумент используется в выражении, MathCAD вычисляет выражение для каждого значения дискретного аргумента.

***Редактирование выражений***

Курсор в виде вертикальной черты (маркер ввода) служит для указания на отдельные элементы *блоков* и обычно используется для ввода данных и заполнения шаблонов;

Курсор в виде синей рамки предназначен для выделения отдельных частей выражения или выражения целиком. Рамка имеет срезанный верхний уголок, указывающий на направление последующего ввода (слева направо).

В системе MathCAD используются *числовые константы*, значения которых представляют собой числа определенного типа: десятичные $(123;\ -12,3;\ 12,3\cdot10^{-5})$, диапазон их изменения от $10^{-307}$ до $10^{307}$, а также комплексные, восьмеричные и шестнадцатеричные.

В MathCAD есть переменные, значения которых определены сразу после запуска программы. Эти переменные называются *предопределенными или встроенными переменными*:

$\pi = 3{,}141592653589793$ – число $\pi$ (15 значащих цифр);

$e = 2{,}718281828459045$ – основание натуральных логарифмов (15 значащих цифр);

$\infty = 10^{307}$ – бесконечность. В численных расчетах это конечное число;

$TOL = 0{,}001$ – погрешность численных расчетов;

$ORIGIN = 0$ – индекс первого элемента массива.

***Переменные и массивы***

Столбец (или строка) чисел называется вектором, а таблица чисел – матрицей. Заметим, что если аргументом является вектор, то это обязательно вектор-столбец. Общий термин для вектора или матрицы – массив. Массив задается с помощью матричной панели, где задаются размерности массива. Можно обращаться к отдельному элементу массива, используя нижние индексы ($x_i$, $a_{i,j}$), которые задаются с помощью наборной панели матричных операторов. Кроме того, используя верхний индекс ($B^{\langle 1\rangle}$), можно обращаться к отдельному столбцу массива. Существуют различные матричные и векторные функции, возвращающие специальные характеристики матриц (см. Вставка функции).

Примеры задания векторов и матриц и некоторых операций с ними.

$$i := 0..3$$

$$y_i := i^2 + \cos(i) \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.54 \\ 3.584 \\ 8.01 \end{pmatrix} \qquad z := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad r := z^T = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$$

$$Z := y + z \cdot z^T \cdot y = \begin{pmatrix} 47.872 \\ 95.285 \\ 144.2 \\ 195.499 \end{pmatrix}$$

$$j := 0..3$$

$$A_{i,j} := y_i + z_j \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2.54 & 3.54 & 4.54 & 5.54 \\ 4.584 & 5.584 & 6.584 & 7.584 \\ 9.01 & 10.01 & 11.01 & 12.01 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C := B^T \qquad E := |B| = 74 \qquad D := B^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W := B \cdot B^{-1} + A^T - D \cdot z = \begin{pmatrix} -1 & -1.46 & 0.584 & 5.01 \\ -1 & 0.54 & 1.584 & 6.01 \\ 0 & 0.54 & 3.584 & 7.01 \\ 1 & 1.54 & 3.584 & 9.01 \end{pmatrix}$$

*Замечание.*

Операция транспонирования задается только с помощью матричной панели.

***Построение графиков в декартовых координатах***

Чтобы создать график (рис. 2.2), необходимо:

- установить курсор в том месте, где нужно создать график;
- ввести шаблон графика (нажать соответствующую кнопку на наборной панели графиков или воспользоваться командой главного меню).

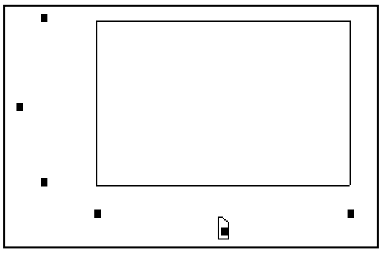


Рис. 2.2 – Шаблон графика

Поле в середине оси абсцисс предназначено для имени аргумента. В данное поле записывается дискретная переменная, переменная с индексом или любое выражение, содержащее дискретную переменную. Поле в середине оси ординат содержит выражение, график которого нужно построить. В это поле вводится дискретная переменная, переменная с индексом или выражение, содержащее дискретную переменную (например, имя функции с параметрами), находящуюся на оси абсцисс. Другие четыре пустых поля могут использоваться для непосредственной установки граничных значений на осях координат. Они могут установиться и автоматически.

Можно начертить несколько кривых на одном чертеже. Для этого нужно ввести два или более выражений, отделяемых запятыми, на оси ординат и то же самое количество выражений на оси абсцисс. MathCAD согласует выражения попарно. Каждая согласованная пара должна использовать одну дискретную переменную. Примеры изображения графиков показаны на рисунке 2.3.

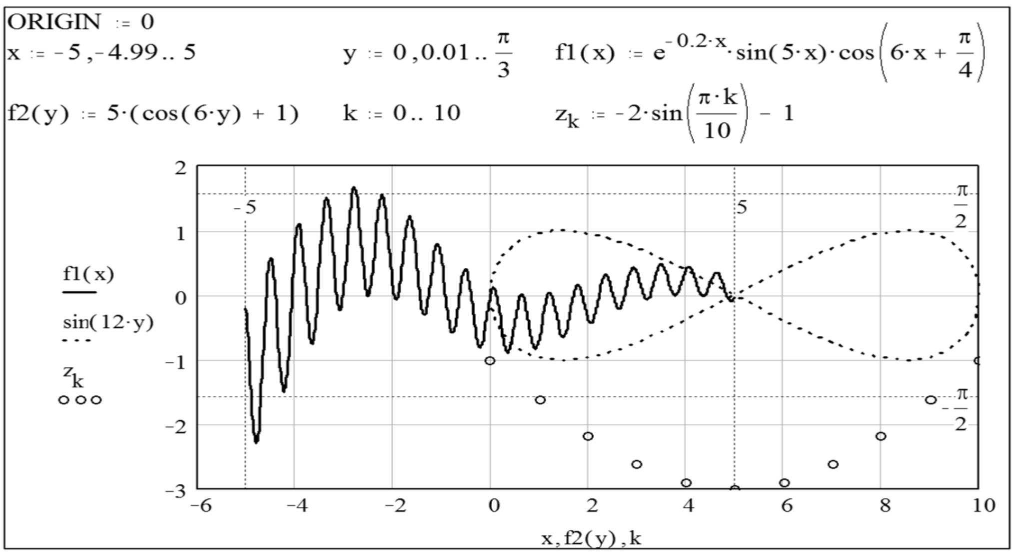


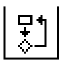

Рис. 2.3 – Примеры графиков в MathCAD

Форматирование графиков осуществляется путем двойного нажатия левой кнопки мыши.

***Элементы программирования***

Программы MathCAD содержат конструкции, во многом подобные конструкциям других языков: условные операторы, циклы, подпрограммы, рекурсии и т. д.

Для написания простейшей программы (рис. 2.4), например вычисления функции $f(x,w) = \log(x+w)$, необходимо:

- щелкнуть по пиктограмме  для появления наборной панели программных структур;
- ввести левую часть определения функции и знак $:=$;

- на панели программных структур нажать кнопку **`Add Line`**, после чего появится вертикальная линия с двумя полями ввода;
- в верхнем поле ввода напечатать z;
- нажать кнопку $\leftarrow$;
- справа от кнопки $\leftarrow$ ввести $x + w$;
- нижнее поле ввода предназначено для возвращаемого значения $\log(z)$.

Для вывода из программы вычисленного значения переменной, вектора или матрицы используется знак $=$, причем возвращается *значение последней строки программы*.

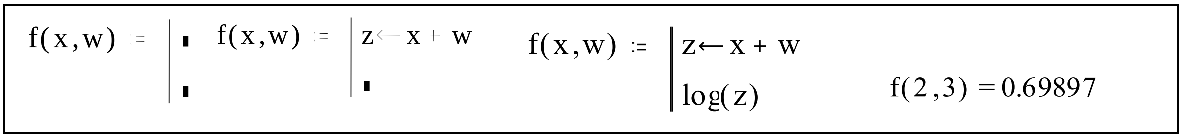



Рис. 2.4 – Этапы написания программы

Заметим, что переменная z не определена вне программы, ее определение является локальным и действует только внутри программы.

Программа может состоять из любого числа операторов. Чтобы расширить тело программы, нужно щелкнуть по кнопке **`Add Line`**. Чтобы удалить позицию ввода, ее нужно выделить, заключив в синюю рамку, и нажать клавишу Del.

При необходимости создания разветвления в программе применяется составной оператор …**`if`**… …**`otherwise`**. Чтобы ввести оператор **`if`**, необходимо нажать соответствующую кнопку наборной панели программирования. Слева и справа от **`if`** появятся поля ввода. Правое поле предназначено для условного выражения, а левое – для значения, которое будет иметь выражение, если условие в правом поле истинно. При необходимости в нижнее поле ввода щелчком мыши по соответствующей кнопке вводится **otherwise**. В поле слева от **otherwise** записывается значение, которое программа должна возвратить, если логическое выражение справа от оператора **if** ложно (рис. 2.5).

$$x := -10, -9.99 .. 10$$

$$F1(x) := \left| \begin{array}{l} -2 \ \text{ if } -10 \le x < -7 \\ 2 \ \text{ if } -7 \le x < -3 \\ 5 \ \text{ if } -3 \le x < 3 \\ 1 \ \text{ if } 3 \le x < 8 \\ 3 \ \text{ if } 8 \le x \le 10 \end{array} \right.$$

$$F2(x) := \left| \begin{array}{l} \text{if } x > 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} tmp \leftarrow \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \\ ret \leftarrow tmp \cdot \sin(20 \cdot tmp) \end{array} \right. \\ ret \leftarrow 0 \ \text{ if } -1 < x < 1 \\ ret \leftarrow 1 - \dfrac{1}{-x} \ \text{ otherwise} \\ ret \end{array} \right.$$

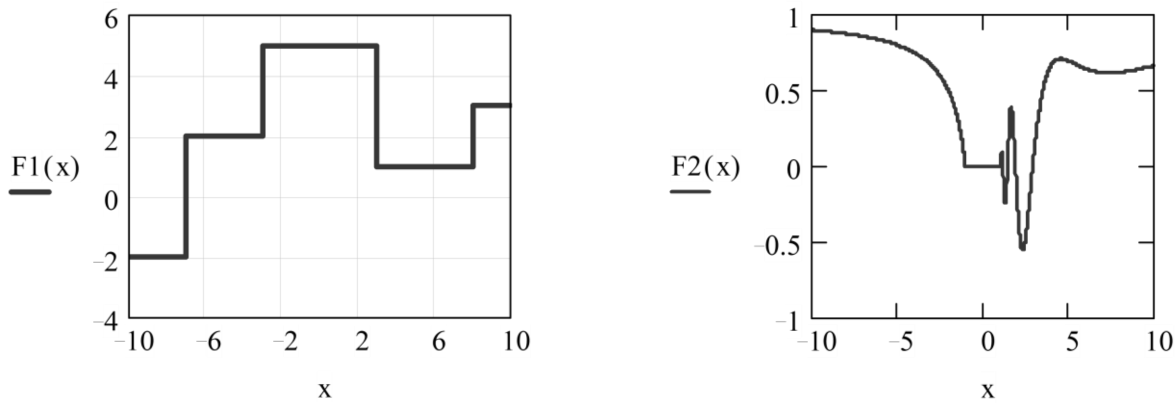



Рис. 2.5 – Примеры использования операторов ...**if**...
и **if** ...**otherwise**

Для создания цикла типа **for** (рис. 2.6) необходимо:

- щелкнуть по кнопке **for** на панели программных структур;
- напечатать в поле ввода слева от знака $\in$ имя переменной цикла;
- ввести в поле справа от знака $\in$ диапазон значений, в котором должна изменяться переменная цикла. Форма задания диапазона значений аналогична форме задания дискретного аргумента, т. е. первым указывается начальное значение переменной, затем, после запятой, второе значение

и последним, после многоточия, конечное значение. *Шаг цикла равен разности между вторым и первым значениями переменной цикла.* По умолчанию шаг считается равным 1. Выражение справа от знака $\in$ может быть также списком скаляров, векторов и диапазонов, разделенных запятыми. При этом диапазоны необходимо заключать в скобки;

- в нижнее поле ввода записать тело цикла.

Вложенные циклы

```
Ident(n) := | for i ∈ 0..n − 1
            |    for j ∈ 0..n − 1
            |       | M[i,j] ← 1  if i = j
            |       | M[i,j] ← 0  otherwise
            | M
```

$$\mathrm{Ident}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Цикл **for** со сложным списком параметров

$$\gamma := (8 \;\; 7 \;\; 6)^T$$

```
f(v) := | m ← 0
        | for x ∈ (3..1),(4..5),v,9
        |    | V[m] ← x
        |    | m ← m + 1
        | V
```

$$f(\gamma)^T = (3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 6 \;\; 9)$$

Рис. 2.6 – Примеры использования циклов типа **for**

Для создания цикла типа **while** (рис. 2.7) необходимо:

- щелкнуть по кнопке **while** на панели программных структур;
- напечатать условие выполнения цикла в верхнем поле ввода;
- в нижнем поле ввода записать тело цикла.

Иногда возникает необходимость прерывания работы цикла до его завершения. Сделать это позволяет оператор **break**, прерывающий выполнение того цикла, в теле которого он находится. Если оператор **break** находится вне тела цикла, то он прерывает выполнение самой программы.

Часто оператор **break** применяется в комбинации с оператором ...**if**... ...**otherwise**. В этом случае чаще всего применяются следующие формы записи операторов (рис. 2.7):

- **break if** ...;
- ... **if** ...
  **break otherwise**.

$$J(h) := \begin{array}{|l} i \leftarrow 0 \\ \text{while } i \le 10 \\ \quad \begin{array}{|l} x_i \leftarrow 2 + i \cdot h \\ S_i \leftarrow \displaystyle\int_0^{x_i} t^2\,dt \\ \text{break if } S_i \ge 20 \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \\ S \end{array} \qquad J(0.5) = \begin{bmatrix} 2.66667 \\ 5.20833 \\ 9 \\ 14.29167 \\ 21.33333 \end{bmatrix}$$

Рис. 2.7 – Цикл типа **while** и оператор **break**

Из программы может быть выдано *только одно выражение*. Выходным выражением может быть либо матрица, либо вектор, либо скаляр. Это весьма неудобно, если результатом работы являются значения нескольких выражений (рис. 2.8). В этом случае необходимо организовать вектор, элементами которого могут быть переменные, матрицы и векторы одновременно, но при этом нужно запомнить позиции этих элементов.

| | |
|---|---|
| $F(M) := \left\| \begin{array}{l} ret_0 \leftarrow M^{-1} \\ ret_1 \leftarrow \|M\| \\ ret_2 \leftarrow eigenvals(M) \\ ret \end{array} \right.$ | Программа, вычисляющая обратную матрицу, определитель и вектор собственных значений исходной матрицы |
| $A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Result := F(A)$ | Исходная матрица и вызов программы |
| $Result = \begin{pmatrix} \{3,3\} \\ -40 \\ \{3,1\} \end{pmatrix}$ | Значение переменной Result |
| $Result_0 = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.5 & -0.85 \\ 0.2 & 0 & -0.1 \\ 0.15 & -0.25 & 0.675 \end{pmatrix}$ | Обратная матрица размерности 3×3 |
| $Result_1 = -40$ | Значение определителя (скаляр) |
| $Result_2 = \begin{pmatrix} -2.74909 \\ 9.16077 \\ 1.58832 \end{pmatrix}$ | Вектор из собственных значений |

Рис. 2.8 – Возврат из программы нескольких значений

*Замечание.*

Для овладения практикой работы в системе MathCAD рекомендуется выполнить все приведенные примеры.

## Задания к лабораторной работе № 1

1. Задание переменных, массивов, выражений.

1.1. Ввести значения для переменных $a, b$; ввести вектор $z = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, используя шаблон массива, и вектор-столбец $y$ размерности

3 с помощью дискретного аргумента $i := 0..2$, компоненты которого равны $\cos(i \cdot b)$.

1.2. Задать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & ab & ab^2 \\ \frac{a}{b} & a^2 & \frac{1}{b} \\ -a & -b & -a^2 \cdot b^2 \end{pmatrix}$$

и матрицу $B$ с элементами, равными $i \cdot a + j \cdot b,\ i, j = \overline{0,2}$.

1.3. Вычислить выражение

$$C = A + B^T - (A \cdot B)^{-1} + \det(A) \cdot A + \det(B) \cdot B + y \cdot z$$

и вывести его значение.

2. Задать функции $f(t),\ \varphi(t)$ и привести графики этих функций на интервале $[a,b]$ с шагом 0,1. На этом же графике в точках $a,\ \frac{a+b}{3},\ 2\frac{a+b}{3},\ b$ вывести случайные значения, равномерно распределенные на интервале [0,1], генерируемые с помощью функции **`rnd(1)`**.

3. Написать следующие программы.

3.1. Используя оператор **`if`** … **`otherwise`** вычислить значение $c$:

$$c = \begin{cases} 1, & a \cdot d \ge b \cdot d^2; \\ 0, & a \cdot d < b \cdot d^2, \end{cases}$$

где $d$ – случайное число, заданное на интервале [0,1] с помощью функции **`rnd(1)`**.

3.2. Используя оператор **`for`**, вычислить сумму целых четных чисел от $a$ до $b$.

3.3. Используя оператор **`while`**, вычислить $R$ факториал, где $R$ – наибольшее целое число $\le a \cdot b$.

Варианты исходных данных см. в приложении А.

# 3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 «МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО КРИТЕРИЯ»

Непрерывная стационарная детерминированная модель объекта задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x}(t) = \overline{A} \cdot x(t) + \overline{B} \cdot u(t), \quad x(t_0) = x0, \tag{1}$$

где $x(t) - n$-мерный вектор состояния $(n = 2)$;

$u(t) - m$-мерный вектор управления $(m = 1)$;

$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix}$ – матрица динамических свойств модели объекта размерности $n \times n$ $(2 \times 2)$;

$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ – матрица влияния управляющих воздействий размерности $n \times m$ $(2 \times 1)$, в данном случае вектор-столбец;

$x0 = \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \end{pmatrix}$ – вектор начальных условий (вектор состояния в начальный момент времени $t_0$).

Моделирование поведения объекта осуществляется на интервале $[t_0, T]$, где $t_0$ – начальный момент времени моделирования, $T$ – конечный момент времени моделирования.

Для моделирования поведения объекта, которое описывается системой (1), осуществляется построение дискретной модели. Для этого необходимо задать последовательность моментов времени $t_k = t_0 + k \cdot dt$, где $dt = t_{k+1} - t_k$ называется периодом квантования, а $t_k$ – моментом квантования управляющего воздействия. Ввиду линейности системы (1) соответствующую дискретную модель можно записать в виде:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k), \quad x(0) = x0, \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{2}$$

где $A = I_2 + dt \cdot \overline{A}, \ B = dt \cdot \overline{B}, \ I_2 -$ единичная матрица второго порядка, $k -$ такт моделирования, соответствующий моменту времени $t_k = t_0 + k \cdot dt$, $dt -$ шаг моделирования, $N = \dfrac{T - t_0}{dt}$ число тактов моделирования.

Единичная матрица вводится с помощью матричной функции MathCAD **`identity(n)`**, где **`n`** – порядок матрицы.

Построение для (1) системы (2) совпадает с методом Эйлера решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (нахождение решения дифференциального уравнения в точках при заданном начальном условии).

Моделирование поведения объекта при нулевом управлении $u(k) = 0$ называется моделированием свободного поведения объекта.

Формирование управляющих воздействий по текущей информации об объекте осуществляется на основе минимизации функционала:

$$J(k) = \frac{1}{2}\left[ x^T(k+1) C x(k+1) + u^T(k) D u(k) \right], \tag{3}$$

где $C$ – неотрицательно определенная, а $D$ – положительно определенная весовые матрицы, $k$ – соответствует дискретному моменту времени $t_k$, $T -$ символ транспонирования.

Управление $u(k)$ определяется из условия минимума функционала (3), т. е.

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)} = 0.$$

Запишем функционал (3) для модели (2) и, воспользовавшись правилами дифференцирования билинейной формы, получим

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)} = x^T(k)A^TCB + u^T(k)B^TCB + u^T(k)D = 0.$$

Тогда управление, полученное на основе минимума функционала (3), будет иметь вид:

$$u(k) = -(B^TCB + D)^{-1}B^TCAx(k). \qquad (4)$$

Качество функционирования системы уравнения зависит от весовых матриц критерия, определение которых осуществляется на этапе предварительного проектирования путем коррекции элементов начальных значений весовых матриц и анализа получаемых при этом переходных процессов и управлений.

Для выбора весовых матриц $C$ и $D$ локального критерия (3) можно воспользоваться методом случайного поиска или назначить их исходя из каких-либо конструктивных соображений с учетом свойств управляемого объекта. Достаточно хорошо работает следующая методика.

Задаются матрицы $C_1$, $D_1$. Весовые матрицы $C$ и $D$ локального критерия полагаются равными решению алгебраического уравнения Риккати:

$$C = A^TCA - A^TCB(B^TCB + D_1)^{-1}B^TCA + C_1,$$
$$D = D_1,$$

которое решается по итерационной схеме:

$$C(i+1) = [A^TC(i)A - A^TC(i)B(B^TC(i)B + D_1)^{-1}B^TC(i)A + C_1 - C(i)]dt + C(i),$$
$$C(0) = C_1.$$

При выполнении условия

$$\frac{\left\| C(i+1) - C(i) \right\|}{\left\| C(i+1) \right\|} \le \varepsilon \qquad (5)$$

матрица $C$ полагается равной $C(i+1)$, $D = D_1$. В (5) $\|\cdot\|$ – норма матрицы, $\varepsilon$ – точность решения уравнения Риккати.

Для вычисления нормы матрицы в (5) можно использовать матричную функцию MathCAD **`norme(M)`**, определяющую евклидову норму матрицы **`M`**.

Так как в реальной ситуации на объект действуют случайные внешние возмущения, то непрерывно-вероятностную (непрерывно-стохастическую) модель объекта зададим в виде:

$$\dot{x}(t) = \overline{A} \cdot x(t) + \overline{B} \cdot u(t) + Fn \cdot q(t), \quad x(t_0) = x0, \tag{6}$$

где $q(t) - n$-мерный вектор ($n = 2$) гауссовских случайных величин с характеристиками:

$$M\{q(t)\} = 0, \quad M\{q(t) \cdot q^T(\tau)\} = I_n \cdot \delta(t - \tau), \tag{7}$$

где $I_n$ – единичная матрица порядка $n$, $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака, $Fn$ – матрица влияния внешних возмущений в модели объекта.

Чтобы вероятностные характеристики внешних возмущений при моделировании не изменились, матрица влияния внешних возмущений в дискретной модели задается в виде:

$$F = \sqrt{dt} \cdot Fn.$$

Тогда дискретная стохастическая модель объекта будет иметь вид:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + F \cdot q(k), \quad x(0) = x0, \tag{8}$$

где $q(k) -$ вектор последовательностей гауссовских шумов с характеристиками:

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{q(k) \cdot q^T(j)\} = I_n \cdot \delta_{k,j}.$$

В (8) $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера.

Для формирования вектора $q(k)$, содержащего последовательности гауссовских случайных величин, используется функция MathCAD **rnorm(n,m,σ)**, где **n** – размерность вектора, **m** – значение математического ожидания, σ – значение среднеквадратического отклонения.

Управляющие воздействия для модели (8) формируются на основе минимизации математического ожидания функционала

$$J(k) = \frac{1}{2} M \left\{ x^T(k+1)Cx(k+1) + u^T(k)Du(k) \right\} \tag{9}$$

из условия

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)} = 0.$$

Тогда, учитывая значения статистических характеристик вектора $q(k)$, получим

$$u(k) = -(B^T CB + D)^{-1} B^T C[Ax(k) + F\overline{q}(k)]. \tag{10}$$

Пусть информация о поведении объекта поступает в систему управления на каждом такте $k$ с измерительного комплекса, математическую модель которого зададим в виде:

$$y(k) = x(k) + r(k), \tag{11}$$

где $y(k)$ – $n$-мерный вектор измерений.

Вектор $r(k)$, который характеризует ошибки измерений, будем считать вектором последовательностей гауссовских случайных величин с характеристиками:

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k) \cdot r^T(j)\} = R \cdot \delta_{k,j}, \tag{12}$$

где $R$ – ковариационная матрица ошибок измерений, порядка $n$. Вектор $r(k)$ задается с помощью функции MathCAD **rnorm(n,m,σ).**

*Замечание.*

Функция MathCAD **rnorm(n,m,σ)** генерирует вектор с $n$ элементами, причем каждая компонента этого вектора имеет одинаковые характеристики: математическое ожидание, равное **m**, и среднеквадратическое отклонение $\sigma$. В нашем случае $n = 2$, математическое ожидание равно нулю, а матрица $R$ имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} R_{0,0} & 0 \\ 0 & R_{1,1} \end{pmatrix},$$

т. е. вектор погрешностей шумов задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} rnorm\left(1, 0, \sqrt{R_{0,0}}\right)_0 \\ rnorm\left(1, 0, \sqrt{R_{1,1}}\right)_0 \end{pmatrix}.$$

**Задания к лабораторной работе № 2**

1. Для заданной непрерывной модели построить дискретную модель.

2. Осуществить моделирование свободного движения объекта. Построить графики переходных процессов и управлений. Сделать выводы.

3. Реализовать моделирование оптимального управления объекта на основе минимизации локального квадратичного критерия. Построить графики переходных процессов и управлений. Сделать выводы.

4. Построить дискретную стохастическую модель.

5. Осуществить моделирование системы управления стохастическим объектом на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного критерия. Построить графики переходных процессов и управлений. Сделать выводы.

6. Осуществить моделирование системы управления стохастическим объектом на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного критерия по вектору измерений.

*Замечание.*

Исходные данные заданы в виде:

$$\overline{A} = An = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix},\ \ \overline{B} = Bn = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix},\ \ x0 = \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \end{pmatrix},\ \ C = C_1 = \begin{pmatrix} c_{0,0} & 0 \\ 0 & c_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Варианты исходных данных см. в приложении Б.

Следующие исходные данные являются одинаковыми для всех вариантов:

$$D = D_1 = 1,\ \ \varepsilon = 0,001,\ \ dt = 0,1,\ \ F = Fn = \begin{pmatrix} 0,52 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix},\ \ R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

# Образец выполнения лабораторной работы № 2

## Вариант №

### Исходные данные

$a_{1,0} := 1.7$ $\quad a_{1,1} := -1.5$ $\quad b_1 := -1.2$ $\quad x0_0 := 25$ $\quad x0_1 := -16.1$

$c_{0,0} := 12.5$ $\quad c_{1,1} := 2.5$ $\quad D := 1$ $\quad dt := 0.1$

### Построение матриц непрерывной детерминированной модели

$$An := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix} \qquad Bn := \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} \qquad x0 := \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \end{pmatrix}$$

$$An = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1.7 & -1.5 \end{pmatrix} \qquad Bn = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.2 \end{pmatrix} \qquad x0 = \begin{pmatrix} 25 \\ -16.1 \end{pmatrix}$$

### 1. Построение матриц дискретной детерминированной модели

$A := \mathrm{identity}(2) + dt \cdot An \qquad B := dt \cdot Bn$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.17 & 0.85 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.12 \end{pmatrix}$$

### 2. Моделирование свободного движения объекта

$N := 100 \qquad u := 0 \qquad \varepsilon := 0.001 \qquad i := 0..N$

$$C := \begin{pmatrix} c_{0,0} & 0 \\ 0 & c_{1,1} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 12.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

#### Решение уравнения Риккати

```
Glk := | g0 ← (0 0; 0 0)
       | g ← C
       | while norme(g0 − g) / norme(g) > ε
       |     | g0 ← g
       |     | g ← [A^T·g0·A − A^T·g·B·(B^T·g0·B + D)^(−1)·E
       | g
```

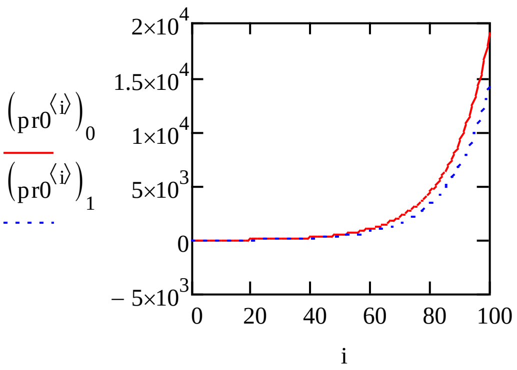
$$Glk = \begin{pmatrix} 161.801 & 46.257 \\ 46.257 & 21.562 \end{pmatrix}$$

**Программа моделирования свободного движения объекта**

$$pr0 := \left| \begin{array}{l} x^{\langle 0 \rangle} \leftarrow \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \end{pmatrix} \\ u \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0..N \\ \quad x^{\langle k+1 \rangle} \leftarrow A \cdot x^{\langle k \rangle} + B \cdot u \\ x \end{array} \right.$$

pr0 =

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 23.39 | 22.447 | 22.042 | 22.08 | 22.487 |
| 1 | -16.1 | -9.435 | -4.043 | 0.379 | 4.069 | ... |




**Вывод**: свободное движение объекта является неустойчивым

### 3. Программа моделирования системы управления

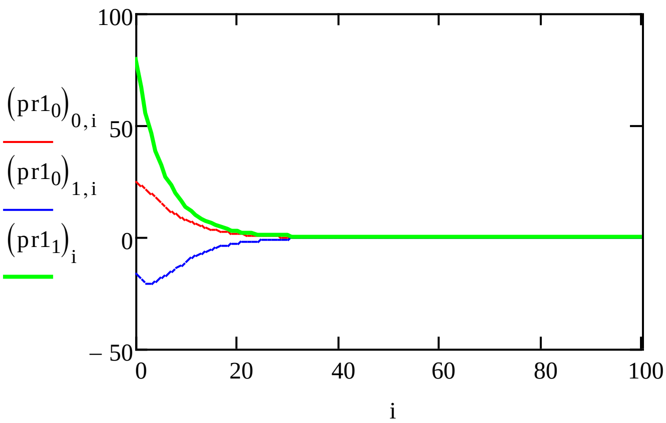
### для детерминированной модели объекта

$$pr1 := \left| \begin{array}{l} x^{\langle 0 \rangle} \leftarrow x0 \\ \text{for } k \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} u_k \leftarrow -\left(B^T Glk \cdot B + D\right)^{-1} B^T \cdot Glk \cdot A \cdot x^{\langle k \rangle} \\ x^{\langle k+1 \rangle} \leftarrow A \cdot x^{\langle k \rangle} + B \cdot u_k \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$pr1 = \begin{pmatrix} \{2,102\} \\ \{101,1\} \end{pmatrix}$$

$pr1_0 =$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 23.39 | 21.481 | 19.455 | 17.43 | 15.483 |
| 1 | -16.1 | -19.088 | -20.265 | -20.246 | -19.468 | ... |




$pr1_1 =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 80.445 |
| 1 | 66.804 |
| 2 | 55.604 |
| 3 | 46.381 |
| 4 | 38.762 |
| 5 | 32.451 |
| 6 | 27.212 |
| 7 | 22.851 |
| 8 | 19.214 |
| 9 | 16.175 |
| 10 | 13.631 |
| 11 | 11.498 |
| 12 | 9.707 |
| 13 | 8.201 |
| 14 | 6.933 |
| 15 | ... |

**Выводы:** (сделать самостоятельно)

### 4. Построение дискретной стохастической модели объекта

$$Fn := \begin{pmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 0.55 \end{pmatrix} \qquad F := \sqrt{dt} \cdot Fn \qquad F = \begin{pmatrix} 0.161 & 0 \\ 0 & 0.174 \end{pmatrix}$$

**x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Fq(k), x(0)=x0**

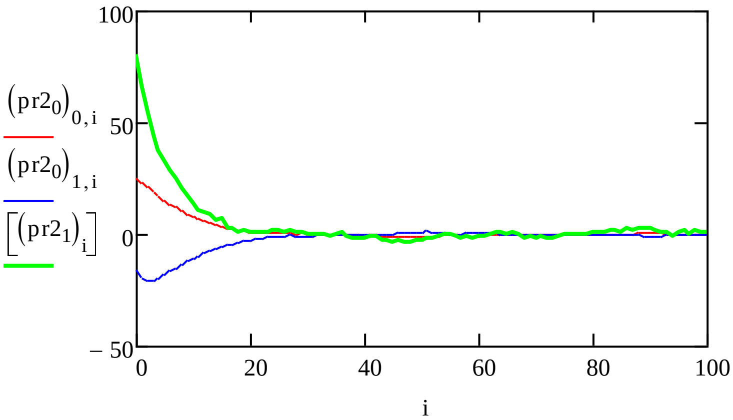
### 5. Программа моделирования системы управления для стохастической модели объекта на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного критерия

$$pr2 := \left| \begin{array}{l} x^{\langle 0 \rangle} \leftarrow \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \end{pmatrix} \\ \text{for } k \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} u_k \leftarrow -\left(B^T Glk \cdot B + D\right)^{-1} B^T \cdot Glk \cdot A \cdot x^{\langle k \rangle} \\ x^{\langle k+1 \rangle} \leftarrow A \cdot x^{\langle k \rangle} + B \cdot u_k + F \cdot rnorm(2, 0, 1) \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$pr2 = \begin{pmatrix} \{2,102\} \\ \{101,1\} \end{pmatrix}$$

$pr2_0 =$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 23.319 | 21.322 | 19.003 | 16.953 |
| 1 | -16.1 | -19.207 | -20.475 | -20.304 | ... |




$pr2_1 =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 80.445 |
| 1 | 66.232 |
| 2 | 54.438 |
| 3 | 44.195 |
| 4 | 37.072 |
| 5 | 32.962 |
| 6 | 28.665 |
| 7 | 24.962 |
| 8 | 20.205 |
| 9 | 16.689 |
| 10 | 13.683 |
| 11 | 10.82 |
| 12 | 9.472 |
| 13 | 8.536 |
| 14 | 6.687 |
| 15 | ... |

**Выводы:** (сделать самостоятельно)

### 6. Программа моделирования системы управления для стохастической модели объекта на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного критерия по вектору измерений

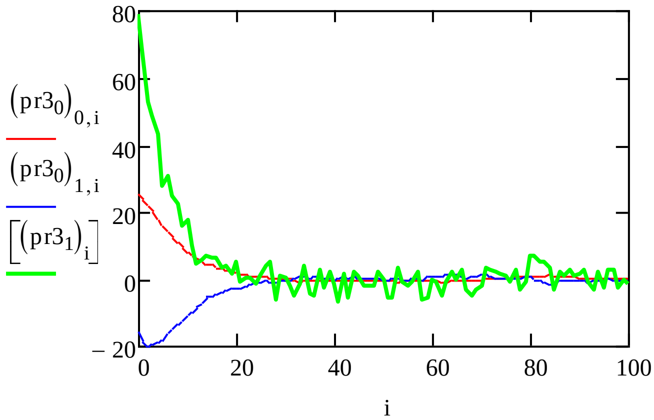
$$R := \begin{pmatrix} 0.32 & 0 \\ 0 & 0.32 \end{pmatrix}$$

$$pr3 := \left| \begin{array}{l} x^{\langle 0 \rangle} \leftarrow \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \end{pmatrix} \\ \text{for } k \in 0..N \\ \quad \left| \begin{array}{l} y \leftarrow x^{\langle k \rangle} + \begin{pmatrix} rnorm\left(1,0,\sqrt{R_{0,0}}\right)_0 \\ rnorm\left(1,0,\sqrt{R_{1,1}}\right)_0 \end{pmatrix} \\ u_k \leftarrow -\left(B^T Glk \cdot B + D\right)^{-1} B^T \cdot Glk \cdot A \cdot y \\ x^{\langle k+1 \rangle} \leftarrow A \cdot x^{\langle k \rangle} + B \cdot u_k + F \cdot rnorm(2,0,1) \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$pr3 = \begin{pmatrix} \{2,102\} \\ \{101,1\} \end{pmatrix}$$

$pr3_0 =$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 23.43 | 21.564 | 19.636 | 17.482 |
| 1 | -16.1 | -18.98 | -19.952 | -19.334 | ... |




$pr3_1 =$

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 78.998 |
| 1 | 68.044 |
| 2 | 52.695 |
| 3 | 48.691 |
| 4 | 42.879 |
| 5 | 27.325 |
| 6 | 30.743 |
| 7 | 24.94 |
| 8 | 22.281 |
| 9 | 15.476 |
| 10 | 17.639 |
| 11 | 9.784 |
| 12 | 4.237 |
| 13 | 5.871 |
| 14 | 6.564 |
| 15 | ... |

**Выводы:** (сделать самостоятельно)

# ЛИТЕРАТУРА

1. Решетникова Г. Н. Моделирование систем : учеб. пособие / Г. Н. Решетникова. – Томск : ТМЦДО, 2004. – Ч. 1. – 99 с.

2. Решетникова Г. Н. Моделирование систем : учеб. пособие / Г. Н. Решетникова. – Томск : ТМЦДО, 2004. – Ч. 2. – 169 с.

3. Решетникова Г. Н. MathCAD 6.0 PRO : учеб. пособие / Г. Н. Решетникова. – Томск : ТМЦДО, 2004. – 171 с.

4. Официальный сайт MathCAD [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathcad.cps.ru/ (дата обращения: 22.05.2017).

5. MathCAD 13 // Сайт Mega-soft.ru [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mega-soft.ru/prg1898.html (дата обращения: 22.05.2017).

# ПРИЛОЖЕНИЕ А

## Варианты исходных данных к лабораторной работе № 1

| № | $a$ | $b$ | $f(t)$ | $\varphi(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,2 | 4,5 | $\cos(2t)$ | $2t-1$ |
| 2 | 0,2 | 3,5 | $\cos(t-2)$ | $\sin(2t)-1$ |
| 3 | 0,7 | 5,5 | $\sin(t-2)$ | $\sin(t)-1$ |
| 4 | 1,7 | 5,1 | $\sin(t^2-2)$ | $\sqrt{t}$ |
| 5 | 1,1 | 3,1 | $\cos(t-1)$ | $\sqrt{t+1}$ |
| 6 | 2,3 | 6,2 | $\ln(t-1)$ | $2t^{-1}+1$ |
| 7 | 3,3 | 6,1 | $\ln(t^2-2)$ | $2t^{-2}-1$ |
| 8 | 1,3 | 5,1 | $\ln(2t-1{,}5)$ | $t^{-2}-2{,}5$ |
| 9 | 0,3 | 4,4 | $\sin(2t-5)$ | $t^2-2{,}1$ |
| 10 | 0,9 | 3,7 | $\cos(t^{2,5}-0{,}5)$ | $3t-1{,}1$ |
| 11 | 3,1 | 6,2 | $\sqrt{t^{3,4}-2}$ | $t^{1,3}-7{,}1$ |
| 12 | 1,3 | 4,8 | $t^2-\cos(t)$ | $t^{2,3}-\sqrt{2}t-1$ |
| 13 | 0,8 | 3,5 | $t^{1,5}-\sin(t)$ | $e^{t/5}-2{,}5$ |
| 14 | 2,3 | 7,1 | $2t-\sin(t^2)$ | $-e^{0,5t}+2{,}5$ |
| 15 | 3,3 | 5,4 | $t^2-\sin(t)$ | $-e^{0,1t}+5$ |
| 16 | 2,7 | 5,1 | $t^2-\sqrt{t}$ | $\cos(t)+0{,}5$ |
| 17 | 0,7 | 3,3 | $t^{2,1}-\sqrt{t-1}$ | $\cos(t^2)+4{,}5$ |
| 18 | 3,1 | 6,7 | $\sqrt{\cos(t)+5{,}5}$ | $\sin(t)-1{,}5$ |
| 19 | 0,9 | 5,6 | $\sqrt{\sin(t)+1{,}5}$ | $\sin(t^2)-2{,}5$ |
| 20 | 1,7 | 4,1 | $\sqrt{\sin(t^2)+3{,}5}$ | $\cos(t)$ |

# ПРИЛОЖЕНИЕ Б

## Варианты исходных данных к лабораторной работе № 2

| № | $a_{1,0}$ | $a_{1,1}$ | $b_1$ | $c_{0,0}$ | $c_{1,1}$ | $x0_0$ | $x0_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | –7,1 | –0,8 | 1,5 | 1,3 | 2,3 | –10 | 0,2 |
| 2 | –4,1 | –0,3 | 2,2 | 4,8 | 0,3 | 12,3 | 1,2 |
| 3 | –2,8 | –0,6 | 2,1 | 1,7 | 0,2 | 10,5 | 0,5 |
| 4 | 1,5 | –1,8 | –2,5 | 8,5 | 1,4 | –25,5 | 1 |
| 5 | –3,7 | –0,9 | 1,5 | 15 | 3 | –15 | 4 |
| 6 | –4,1 | –1,1 | –1 | 2,3 | 1 | –11 | 12 |
| 7 | –3,2 | –0,8 | 1,1 | 5 | 2 | 15,3 | 2,1 |
| 8 | 1,2 | –0,7 | 1,1 | 10 | 1 | 10 | –3,1 |
| 9 | 1,1 | –0,6 | 2,1 | 4,5 | 1 | –10,5 | 0,9 |
| 10 | 1,4 | –1,7 | 3,2 | 3,8 | 2 | 12,8 | 3,2 |
| 11 | 0,7 | –0,6 | 1,5 | 4,1 | 1,4 | –10 | 1,1 |
| 12 | –0,8 | –2,2 | –1,4 | 3,5 | 1,2 | 10,7 | 3 |
| 13 | 0,5 | –0,9 | –1,9 | 3,3 | 1,1 | 25 | 4 |
| 14 | 0,9 | –3,2 | 2,1 | 5,6 | 2 | 20 | –2 |
| 15 | 1 | –0,7 | 2,2 | 4,3 | 2,1 | 15,6 | 7 |
| 16 | 1,3 | –1,2 | 1,4 | 4,7 | 0,2 | –13 | 0,8 |
| 17 | 0,85 | –2,7 | 2,1 | 7,6 | 2,6 | –25 | 1,1 |
| 18 | 1,5 | –0,8 | 1,7 | 8,5 | 1,5 | 15,8 | 0,7 |
| 19 | 1,15 | –0,9 | 2,2 | 3,9 | 2,3 | –1 | 10 |
| 20 | –0,7 | –1,3 | –0,6 | 5,3 | 1,4 | 12,7 | –3,4 |