

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

Методы определения аппроксимирующего спектра сигнала(2 ч)

Цель и содержание: изучить методику определения аппроксимирующего спектра сигнала, приобрести навыки построения таких моделей в системе компьютерной математики MATLAB.

Организационная форма занятий: решение проблемных задач, разбор конкретных ситуаций

Вопросы для обсуждения на лабораторном занятии: задача определения аппроксимирующего спектра методом наименьших квадратов; построение структурной схемы виртуального генератора системы базисных функций; метод равных площадей; блочно-импульсная аппроксимация.

Теоретическое обоснование

Пусть непрерывный сигнал $x(t)$ задан на некотором интервале изменения аргумента $[0, T]$. Выбирается некоторая система функций $\bar{\mathbf{S}} = \{s_k(t)\}_{k=0}^n$, заданных на том же интервале изменения аргумента. Из теории аппроксимации известно, что сигнал может быть представлен на определенном интервале изменения аргумента обобщенным полиномом

$$x_a = \sum_{k=0}^n X(k)s_k(t). \quad (3.1)$$

Систему коэффициентов $X(k)$ обычно называют аппроксимирующим полиномиальным спектром (АПС) сигнала $x(t)$.

Метод наименьших квадратов

Задача определения аппроксимирующего спектра методом наименьших квадратов формулируется следующим образом: определить систему величин $X(k)$, минимизирующую норму $\|\beta(t)\|$ функции ошибки $\beta(t) = x_a(t) - x(t)$.

В качестве нормы ошибки будем использовать условие

$$\frac{1}{T} \int_0^T r(t) \beta^2(t) dt = \min, \quad (3.2)$$

где $r(t)$ – весовая функция.

Вектор АПС $\bar{X} = \{X(k)\}_{k=0}^n$ сигнала находится по формуле:

$$\bar{X} = W^{-1} \cdot \bar{Q}, \quad (3.3)$$

где элементы операционных матриц W и вектора \bar{Q} вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \int_0^T r(t) S_{i-1}(t) S_{j-1}(t) dt, \\ q_i &= \int_0^T r(t) S_{i-1}(t) x(t) dt, \\ i, j &= 1, \dots, n+1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аппаратура и материалы. Для выполнения лабораторной работы необходимо использовать следующее: аппаратное обеспечение: персональный компьютер MDT750/ i75930K/ 4 D8192D42133; мультимедиа-проектор Epson; магнитно-маркерная доска и программное обеспечение: операционную систему Windows 7 и выше; Microsoft Office, систему компьютерной математики MATLAB R2011b и выше.

Указания по технике безопасности. Студенты должны следовать общепринятой технике безопасности для пользователей персональных компьютеров. Не следует самостоятельно производить ремонт технических средств, установку и удаление программного обеспечения. В случае обнаружения неисправностей необходимо сообщить об этом администратору компьютерного класса (обслуживающему персоналу лаборатории).

Методика и порядок выполнения работы

Научиться использовать метод наименьших квадратов, выполнив приведенные примеры.

Пример 3.1. Необходимо аппроксимировать методом наименьших квадратов сигнал $x(t) = \cos \pi t^2$ на интервале $[0, 1]$. В качестве базисных функций взять степенные функции 5-го порядка.

Структурные схемы определения коэффициентов по формулам 3.3–3.4 представлены на рисунках 3.1 и 3.2.

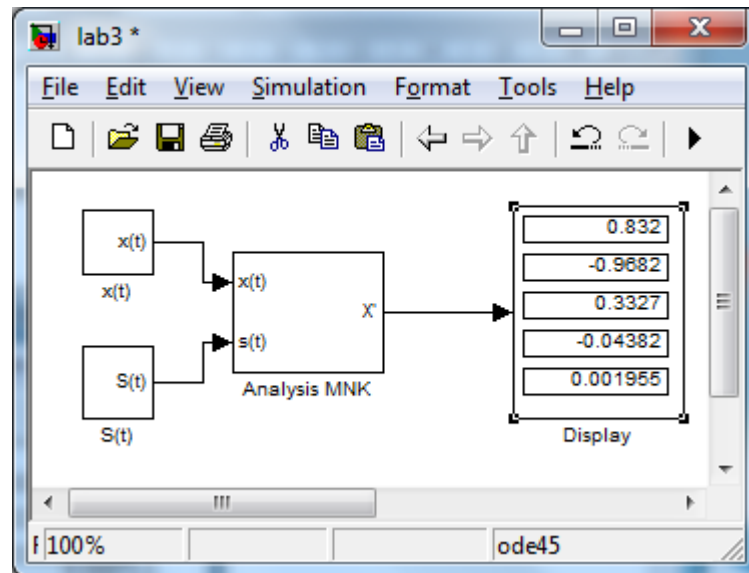


Рисунок 3.1. Структурная схема определения коэффициентов аппроксимирующего полинома

Рассмотрим подробнее блоки, задающие сигнал и базисные функции. На рисунке 3.2 показан блок $X(t)$.

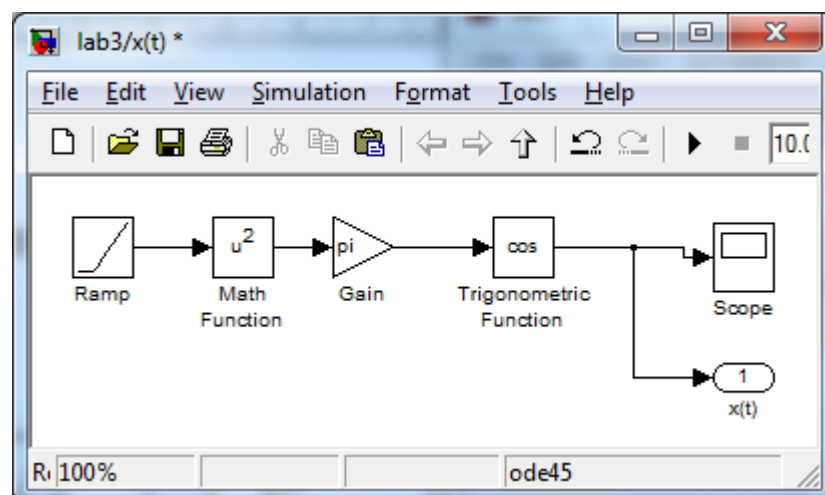


Рисунок 3.2. Блок, генерирующий аппроксимируемый сигнал

Источником является генератор линейно возрастающего сигнала Ramp, который в данном случае ассоциируется со временем t .

Далее, на рисунке 3.2 видно, как с помощью блоков математических операций (возведение в степень, умножение на константу, преобразование входного сигнала с помощью тригонометричной функции), на выходе получаем заданный сигнал $x(t)$. Для наглядности перед выходом подключен «виртуальный осциллограф» (Scope), на котором в процессе моделирования отображается сигнал $x(t) = \cos \pi t^2$. Общий вид окна блока Scope с его панелью инструментов изображен на рисунке 3.3

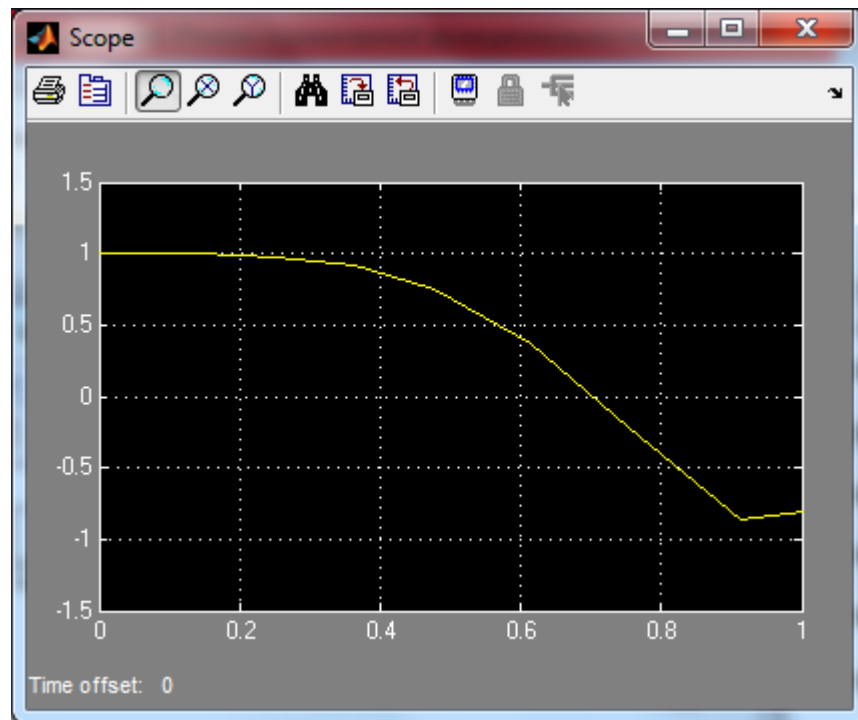


Рисунок 3.3. Панель инструментов виртуального осциллографа и график сигнала, выведенный на осциллограф

Блок $S(t)$, представленный на рисунке 3.1, генерирует систему базисных функций $s_k(t) = \{t^k\}_{k=0}^4$, его структурная схема показана на рисунке 3.4.

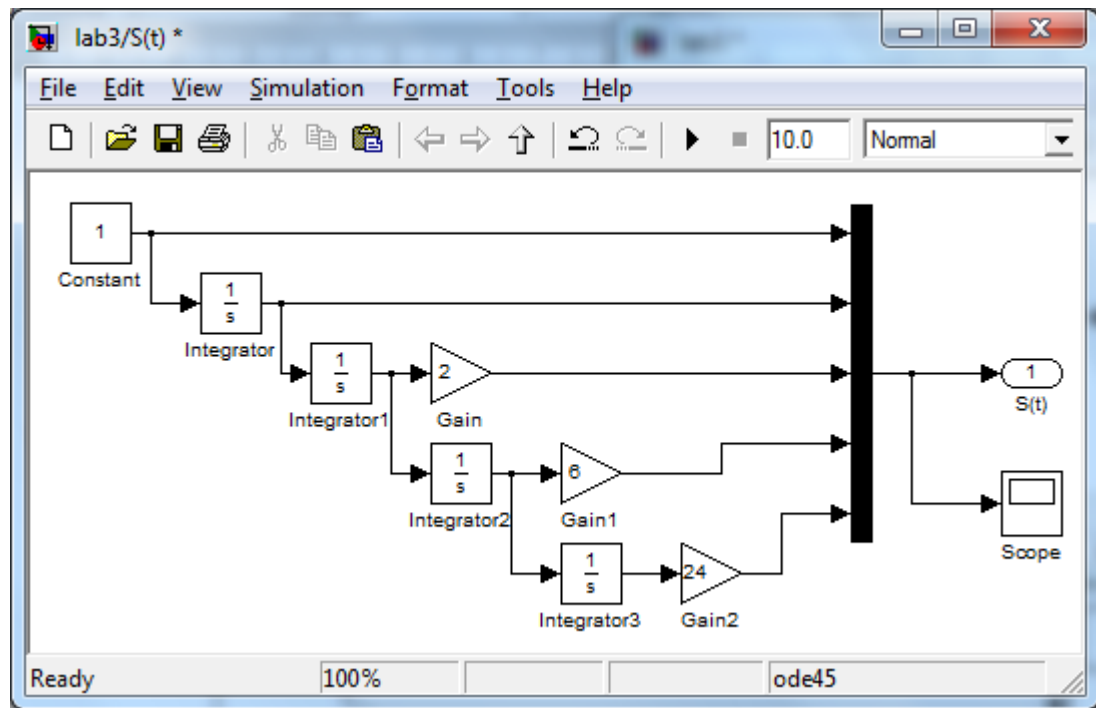


Рисунок 3.4. Структурная схема виртуального генератора системы базисных функций

Поскольку система базисных функций имеет удобный для моделирования вид, можно из первой функции $s(t) = 1$ с помощью интегрирования (блок Integrator) получить следующие. Блоки умножения на константу Gain, Gain1, Gain2 необходимы для нормирования степенных функций.

Полученные функции выводятся на выход этой подсистемы и на виртуальный осциллограф. Изображения базисных функций показаны на рисунке 3.5.

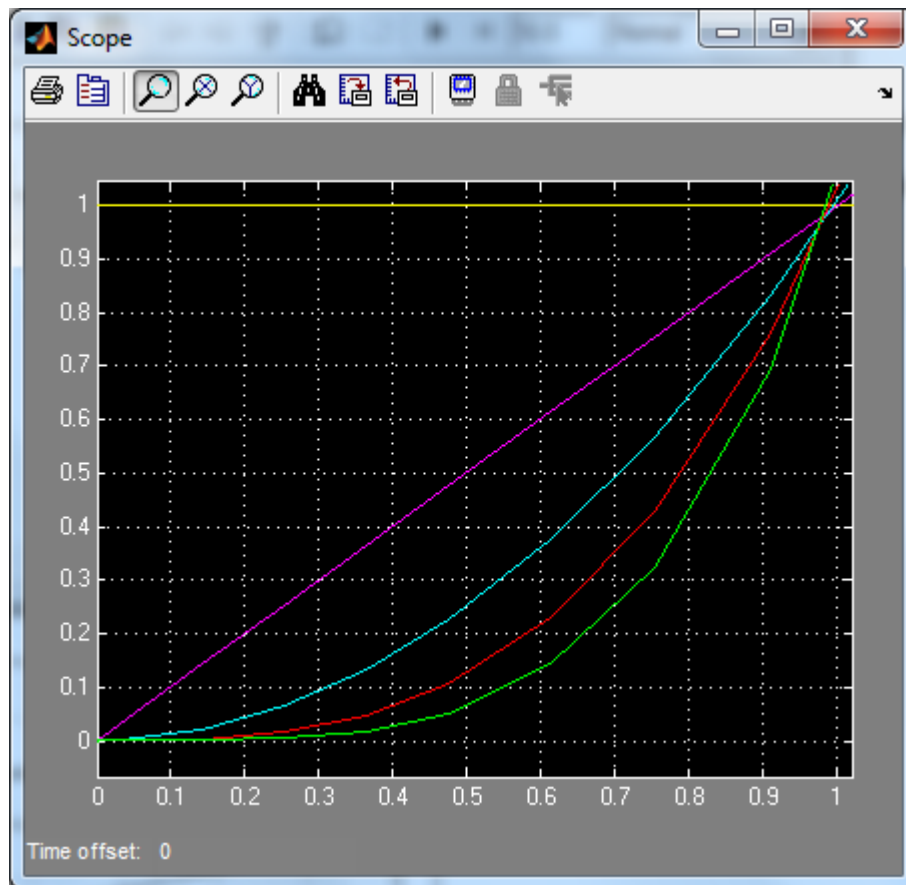


Рисунок 3.5. Система базисных функций

Основу схемы составляет подсхема Analysis MNK, которая в развернутом виде приведена на рисунке 3.6.

Виртуальные индикаторы Score и Display, показанные на этой подсхеме, не являются обязательными для определения коэффициентов аппроксимирующего полинома, а предназначены для контроля правильности построения структурной схемы в процессе отладки виртуальной модели.

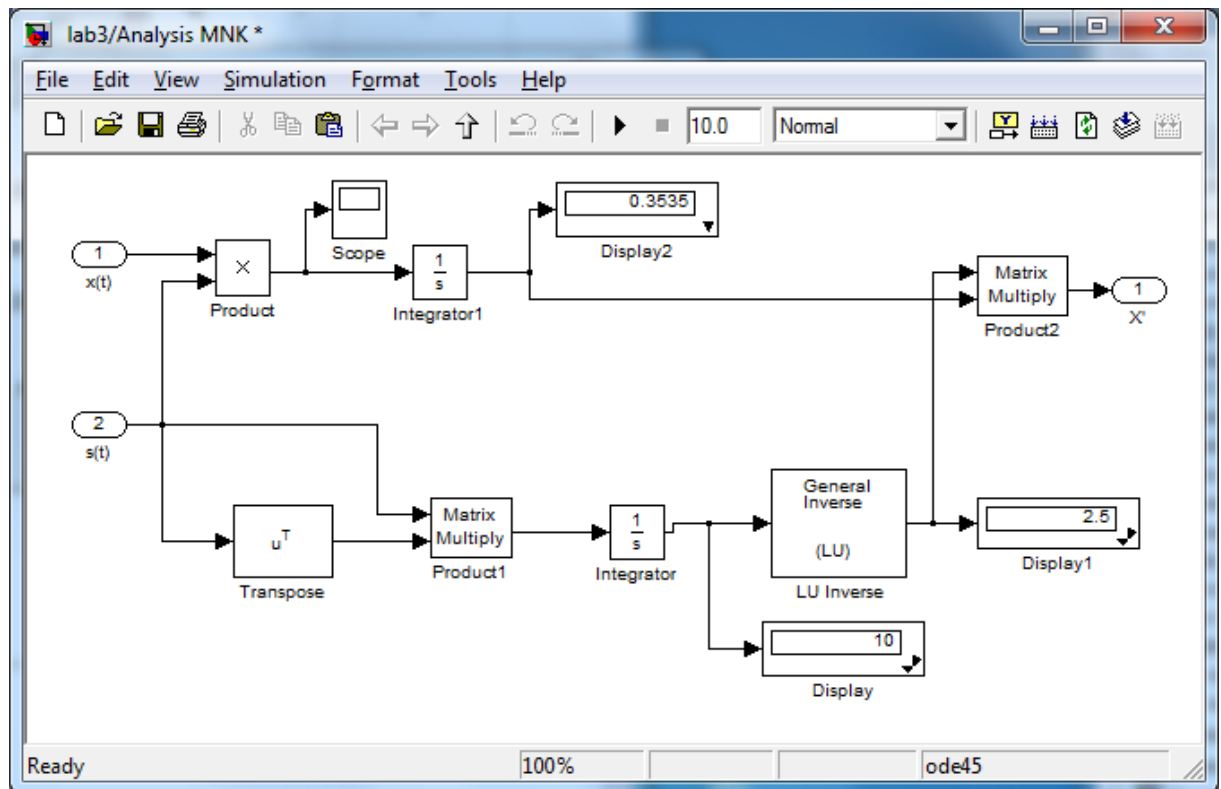


Рисунок 3.6. Расчет коэффициентов по методу наименьших квадратов

Дополним схему расчета коэффициентов блоками для восстановления сигнала. Схема примет следующий вид:

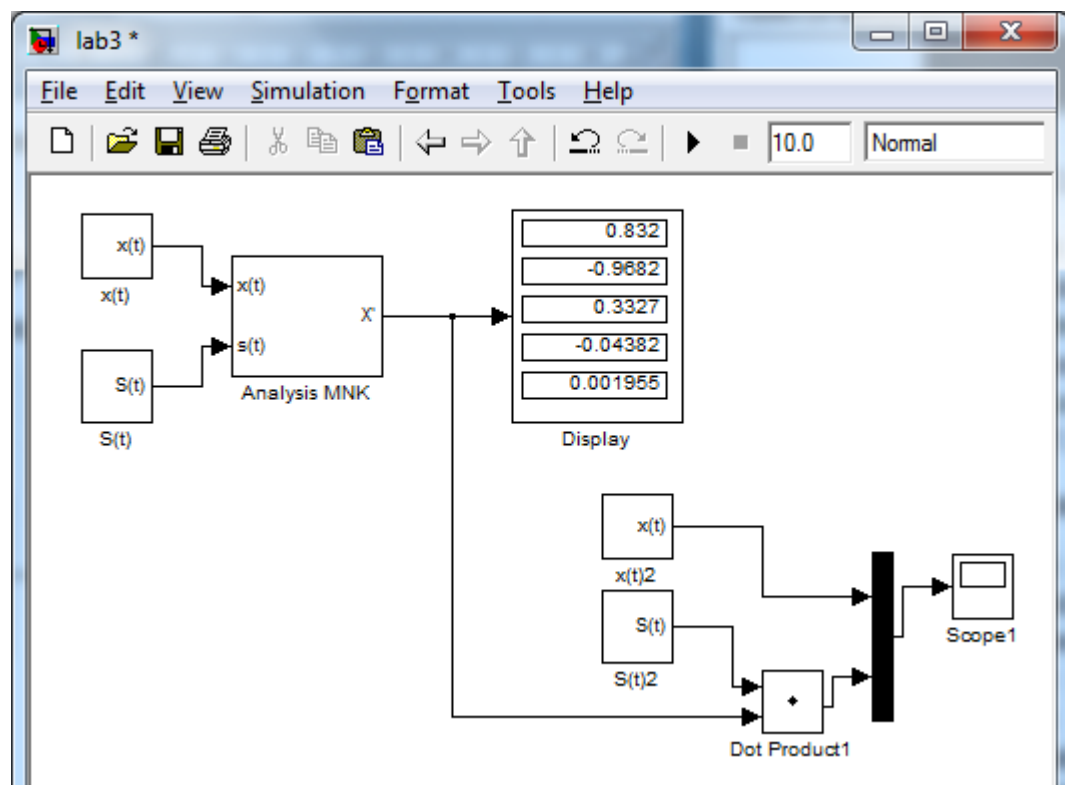


Рисунок 3.7 – Восстановление сигнала по найденному спектру

Результаты работы модели выводятся на экран виртуального осциллографа, и изображены на рисунке 3.8.

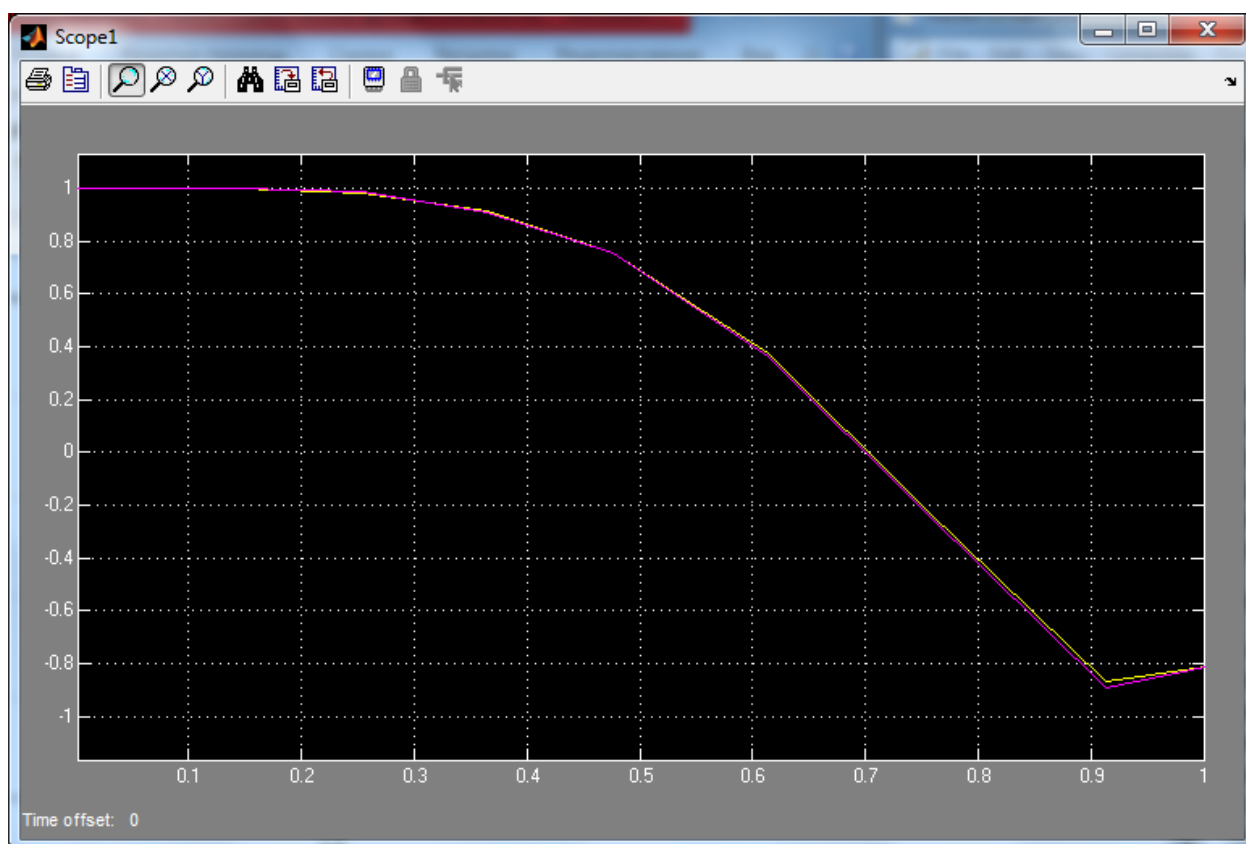


Рисунок 3.8. Исходный сигнал $x(t) = \cos \pi t^2$ и его аппроксимация по методу наименьших квадратов

Модифицированный метод равных площадей

Метод равных площадей является более простым методом аппроксимации, основанный на определении коэффициентов аппроксимирующего полинома, исходя из условия равенства нулю интегралов функций ошибки аппроксимации на некоторой системе интервалов изменения аргумента.

Суть модифицированного метода равных площадей заключается в следующем. Интервал изменения аргумента t разбивается на $(n+1)$ не обязательно равных частей (подинтервалов). На рисунке 3.9 представлены возможные типы систем подинтервалов. Уравнение аппроксимирующей кривой подбирается так, чтобы площади, ограничиваемые аппроксимируемой

и аппроксимирующей функциями, были равны между собой для каждого участка в отдельности. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой определяет аппроксимирующий спектр.

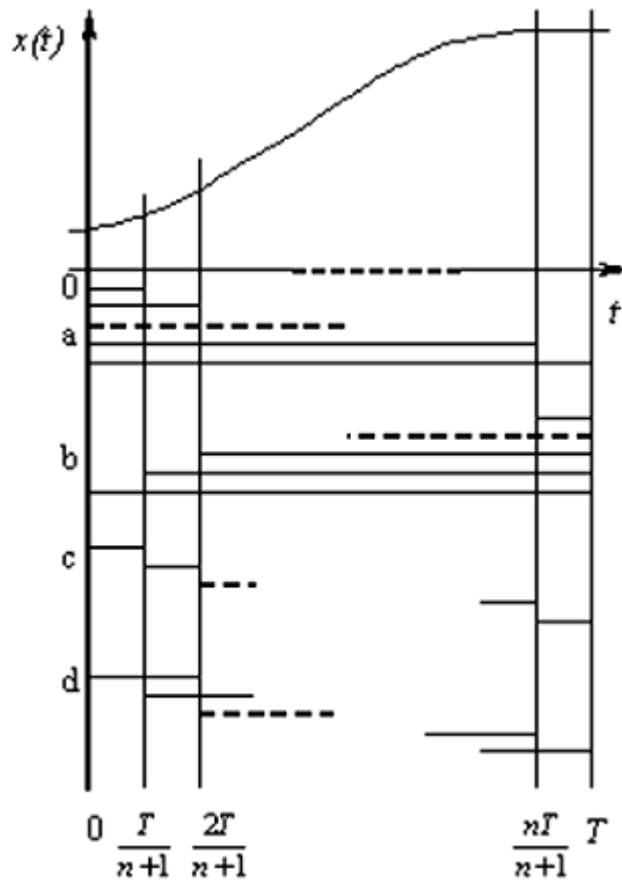


Рисунок 3.9. Системы подинтервалов для метода равных площадей

Условия равенства указанных площадей (интегралов) для некоторой системы линейно-независимых подинтервалов имеет вид:

$$\int_{t_m}^{t_l} r(t) \left[\sum_{k=0}^n X(k) s_k(t) - x(t) \right] dt = 0. \quad (3.5)$$

Например, при выборе системы подинтервалов вида $\left[0, \frac{i\Gamma}{n+1}\right], i = 1, \dots, n + 1$, матрица **W** и вектор $\bar{\mathbf{Q}}$ вычисляются по формулам:

$$W_{ij} = \int_0^{\frac{iT}{n+1}} r(t) s_{j-1}(t) dt,$$

$$q_i = \int_0^{\frac{iT}{n+1}} r(t) x(t) dt,$$

$$i, j = 1, \dots, n + 1.$$
(3.6)

Пример 3.2. Рассмотрим реализацию модифицированного метода равных площадей в среде MATLAB/Simulink. Модель, описывающая модифицированный метод равных площадей, представлена на рисунке 3.10.

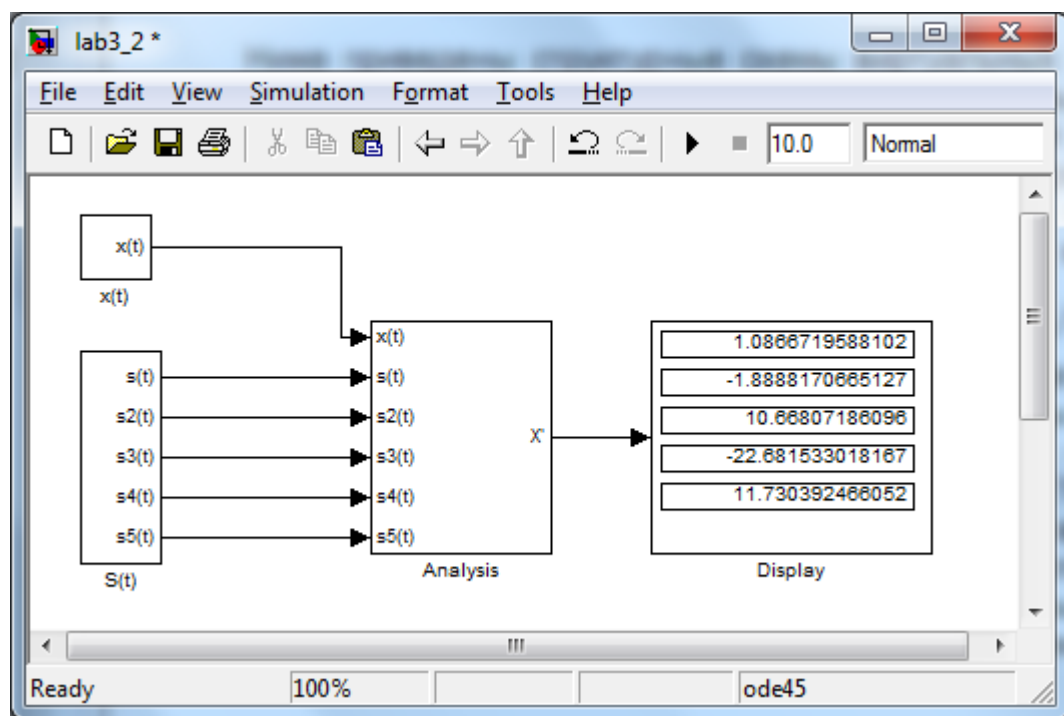


Рисунок 3.10. Структурная схема реализации модифицированного метода равных площадей

Основной частью схемы является блок анализа (Analysis). Его входные параметры – непрерывный сигнал $x(t)$ и система базисных $\bar{S}(t)$. На выходе находится дисплей, на котором отображается полученный спектр. Рассмотрим пример из предыдущего подраздела. Необходимо определить аппроксимирующий спектр функции на интервале $[0, 1]$. Интервал разбивается

на пять подинтервалов $[0; 0,2]$, $[0,2; 0,4]$, $[0,4; 0,6]$, $[0,6; 0,8]$, $[0,8; 1]$. Базисные функции имеют вид $s_k(t) = t^k, k = \overline{0, n}$.

Рассмотрим подробнее блок, задающий базисные функции. Блок S(t) генерирует систему базисных функций $s_k(t) = t^k, k = \overline{0, n}$, его структурная схема показана на рисунке 3.11.

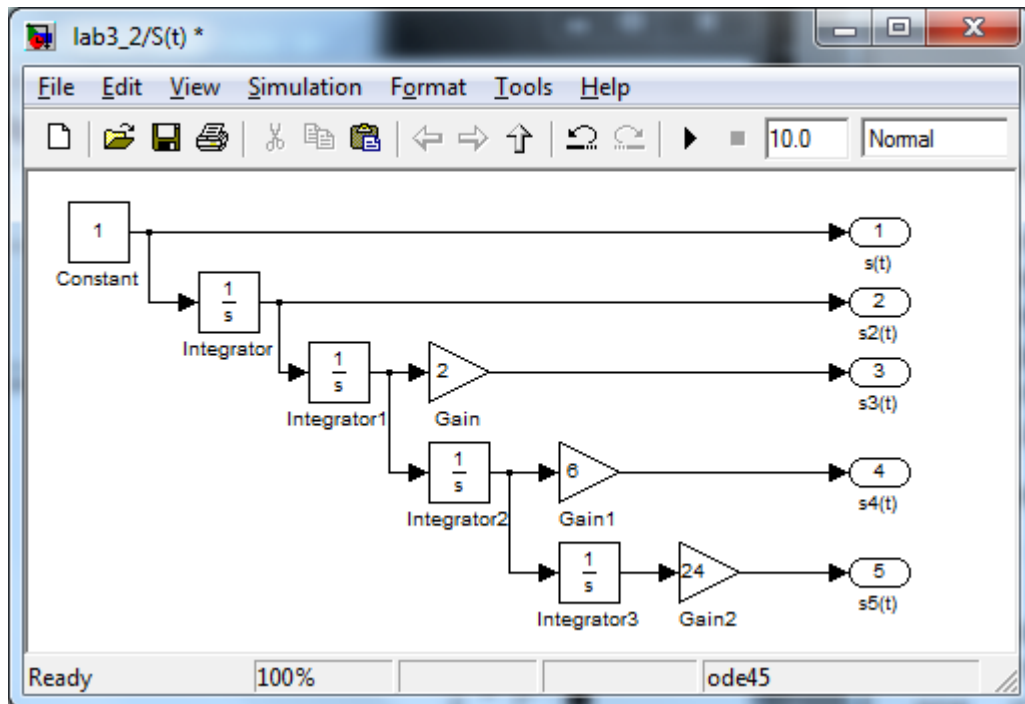


Рисунок 3.11. Структурная схема виртуального генератора системы базисных функций

Поскольку система базисных функций имеет удобный для моделирования вид, можно из первой функции $s(t) = 1$ с помощью интегрирования (блок Integrator) получить следующие. Блоки умножения на константу Gain, Gain1, Gain2 необходимы для нормирования степенных функций.

Перед тем, как перейти к описанию центрального блока модели Analysis, необходимо отметить, что в подсистемах этого блока используется конструкция, которую можно использовать как при расчете вектора \bar{Q} , так и при расчете векторов-столбцов матрицы W . Общим является интегрирование функции на одних и тех же интервалах. Таким образом, для получения вектора \bar{Q} необходимо проинтегрировать на заданной системе подинтервалов сигнал $x(t)$, а для получения столбцов матрицы W – базисные функции, на той же

системе подинтервалов. Это позволяет для выполнения указанных операций использовать одну и ту же подсистему, структурная схема которой представлена на рисунке 3.12.

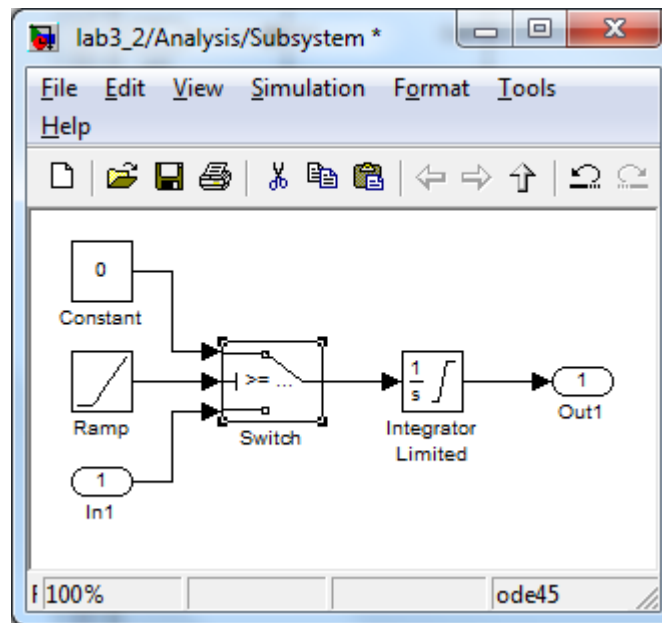


Рисунок 3.12. Блок интегрирования функции на системе подинтервалов

На вход этого блока поступает сигнал – интегрируемая функция. Два других – сигнал, нулевой сигнал и генератор линейно возрастающей функции (в данном случае он описывает время t) являются вспомогательными. Пока аргумент t находится в пределах заданного подинтервала, переключатель Switch подает на интегратор сигнал $x(t)$. Но как только время выходит за пределы подинтервала, сигнал переключается на нулевой и, таким образом, больше не влияет на значение интеграла. Так как MATLAB ориентирован в первую очередь на обработку массивов данных, то имеет смысл задавать в параметрах блоку Switch не один подинтервал, а вектор, состоящий из всех пяти подинтервалов, тогда на выходе также получим вектор значений интеграла. Определение системы подинтервалов с помощью параметров блока Switch показано на рисунке 3.13.

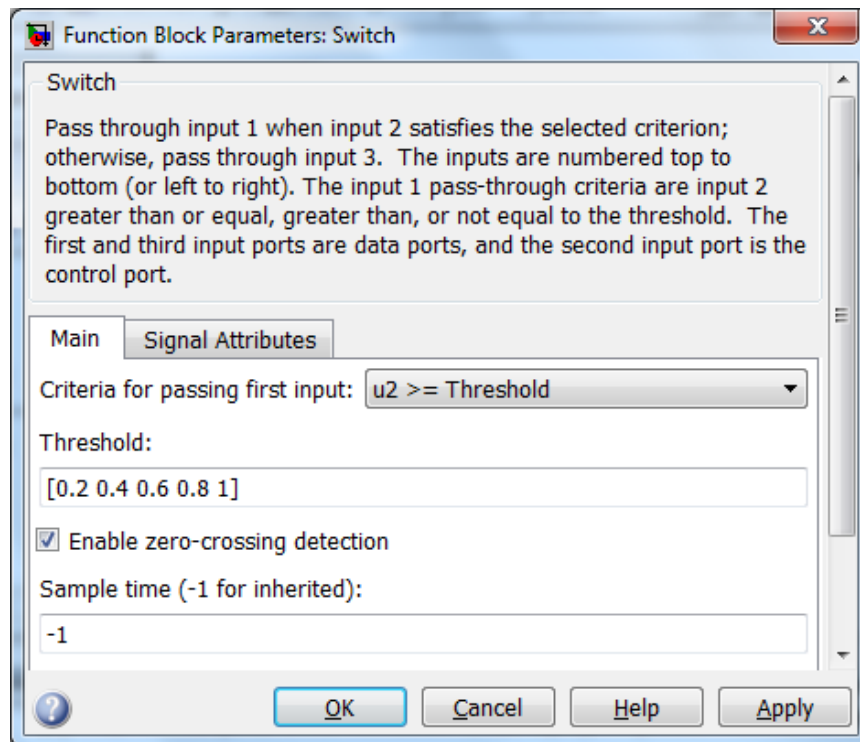


Рисунок 3.13. Окно настройки параметров блока Switch

Теперь рассмотрим структурную схему блока Analysis.

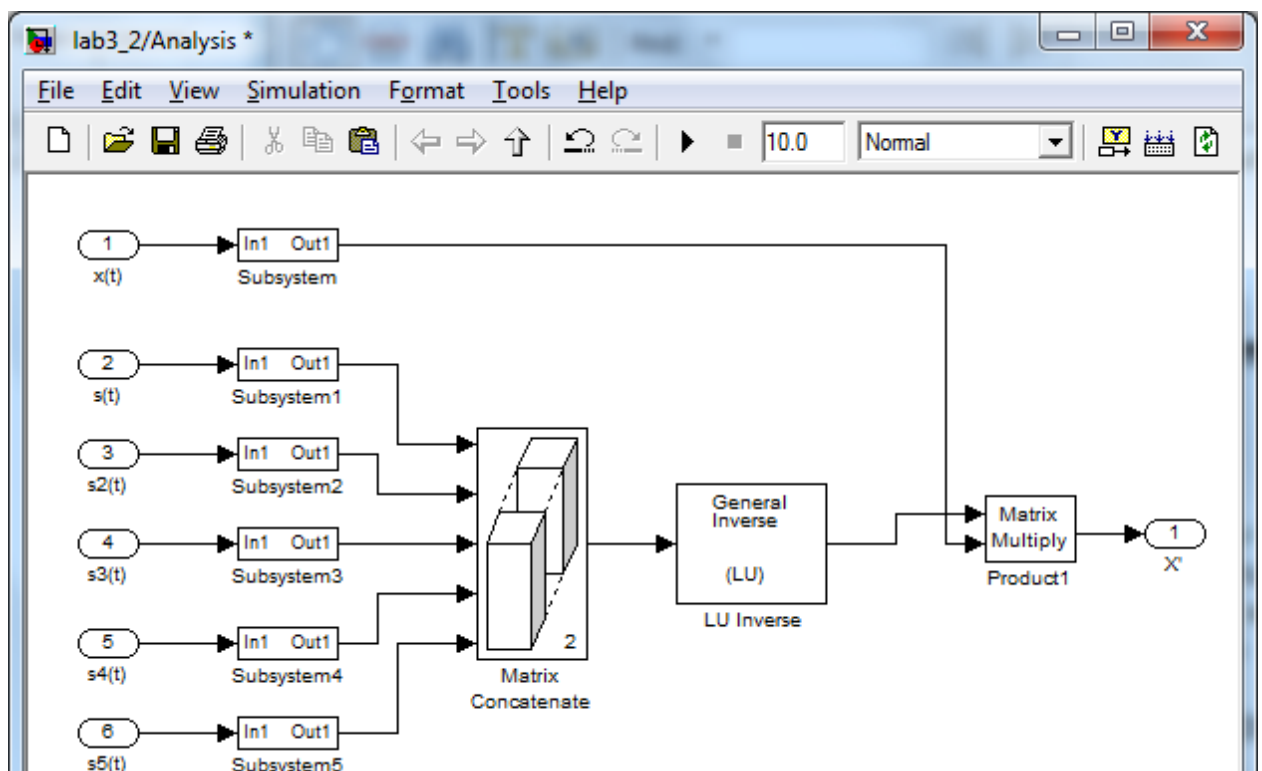


Рисунок 3.14. Структурная схема блока Analysis

На вход блока подается сигнал $x(t)$ и система базисных функций $s(t)$. Подсистема Subsystem интегрирует сигнал и подает на выход вектор \bar{Q} , а подсистемы Subsystem 1 – 5 – векторы-столбцы матрицы W . Блок MatrixConcatenate объединяет столбцы в матрицу. Далее размещены блоки расчета обратной матрицы и умножения матриц. В итоге на выходе получаем сигнал аппроксимирующего спектра, который появляется на экране дисплея модели самого высокого уровня (рисунок 3.10). На рисунке 3.15 приведено значение спектра функции, рассматриваемого в качестве примера.

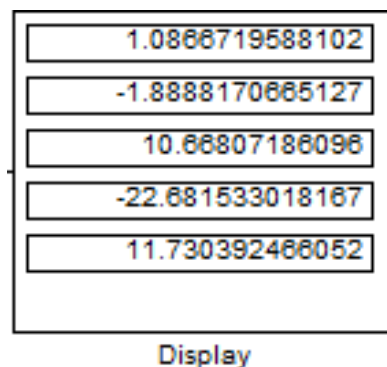


Рисунок 3.15. Значение аппроксимирующего спектра

Можно рассмотреть обратную задачу – построение сигнала по заданному спектру в системе базисных функций. Для наглядности используем спектр, полученный выше, на основе его построим аппроксимацию и сравним ее с реальным сигналом.

Базисные функции умножаются на соответствующие коэффициенты спектра, суммируются и выводятся на виртуальный осциллограф. На этот же осциллограф подается заданный сигнал. Дополненная схема расчета коэффициентов блоками для восстановления сигнала представлена на рисунке 3.16. Графики сигнала и его аппроксимации представлены на рисунке 3.17.

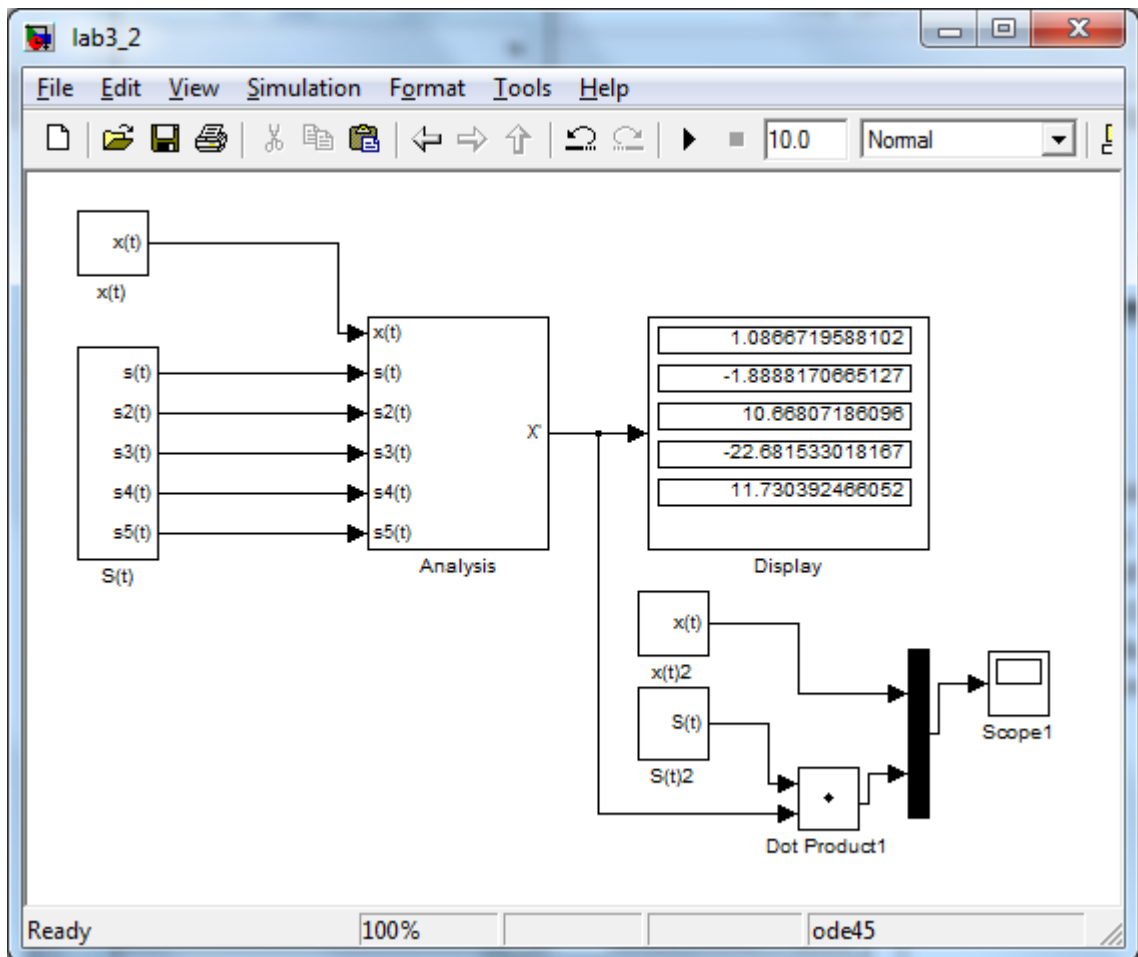


Рисунок 3.16. Структурная схема синтеза сигнала

В модели был рассмотрен случай, когда количество базисных функций равнялось количеству подинтервалов. Но это необязательно. Можно увеличить точность вычислений за счет большего числа подинтервалов. Однако, в этой модели необходимо блок расчета обратной матрицы заменить на блок вычисления псевдо обратной матрицы. Этот блок можно найти в дополнительной библиотеке Simulink – DSP (DigitalSignalProcessing) Blockset.

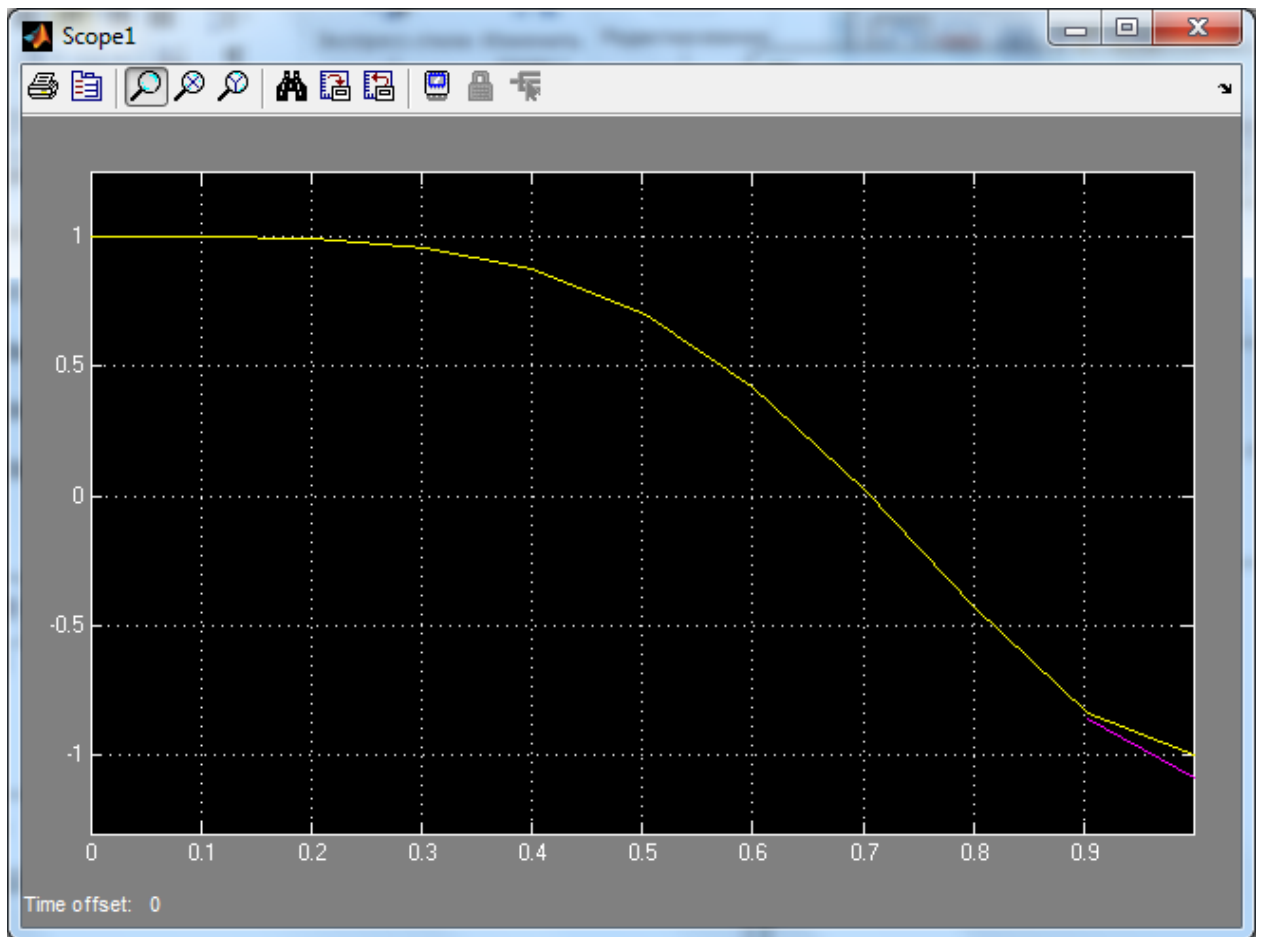


Рисунок 3.17. График сигнала и его аппроксимация

Блочно-импульсная аппроксимация

Одной из наиболее распространенных и удобных для применения в задачах обработки и моделирования сигналов динамических систем оказывается базисная система блочно-импульсных функций. Рассмотрим блочно-импульсную аппроксимацию и некоторые необходимые операции над спектрами.

Пусть отрезок $[0, T]$ разбит на m равных частей, длиной $h = T/m$. На решетке аргумента $\{ih\}_{i=1}^m$ задается система базисных функций

$$v_i(t) = \sigma(t - (i - 1)h) - \sigma(t - ih). \quad (3.7)$$

Здесь $i = 1, \dots, m$; $v_i(t)$ – прямоугольные блочно-импульсные функции; $\sigma(t)$ – функция единичного скачка:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Аппроксимация сигнала по системе блочно-импульсных функций определяется по формулам (3.3)–(3.4) как

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^m X_0(i) v_i(t), \quad (3.9)$$

где

$$X_0(i) = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} x(t) dt. \quad (3.10)$$

Если к блочно-импульсным базисным функциям добавить кусочно-линейные функции:

$$w_i(t) = \left(\frac{2t}{h} + 1 - 2i \right) v_i(t), \quad (3.11)$$

то аппроксимация сигнала по системе локально-импульсных базисных функций первого порядка существенно улучшится и будет определяться по формуле:

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m (X_0(i) v_i(t) + X_1(i) w_i(t)). \quad (3.12)$$

Пример 3.3. Рассмотрим реализацию метода аппроксимации блочно-импульсными функциями нулевого и первого порядков в среде MATLAB/Simulink. В качестве примера используем сигнал $x(t) = \cos \pi t^2$ на интервале $[0, 1]$, $m = 10$. Структурная схема анализа сигнала рассматриваемым методом представлена на рисунке 3.18.

Назначение блоков следующее:

- **BF** генерирует систему базисных функций;
- **X(t)** генерирует анализируемый сигнал;
- **X₀, X₁** рассчитывают элементы спектра.

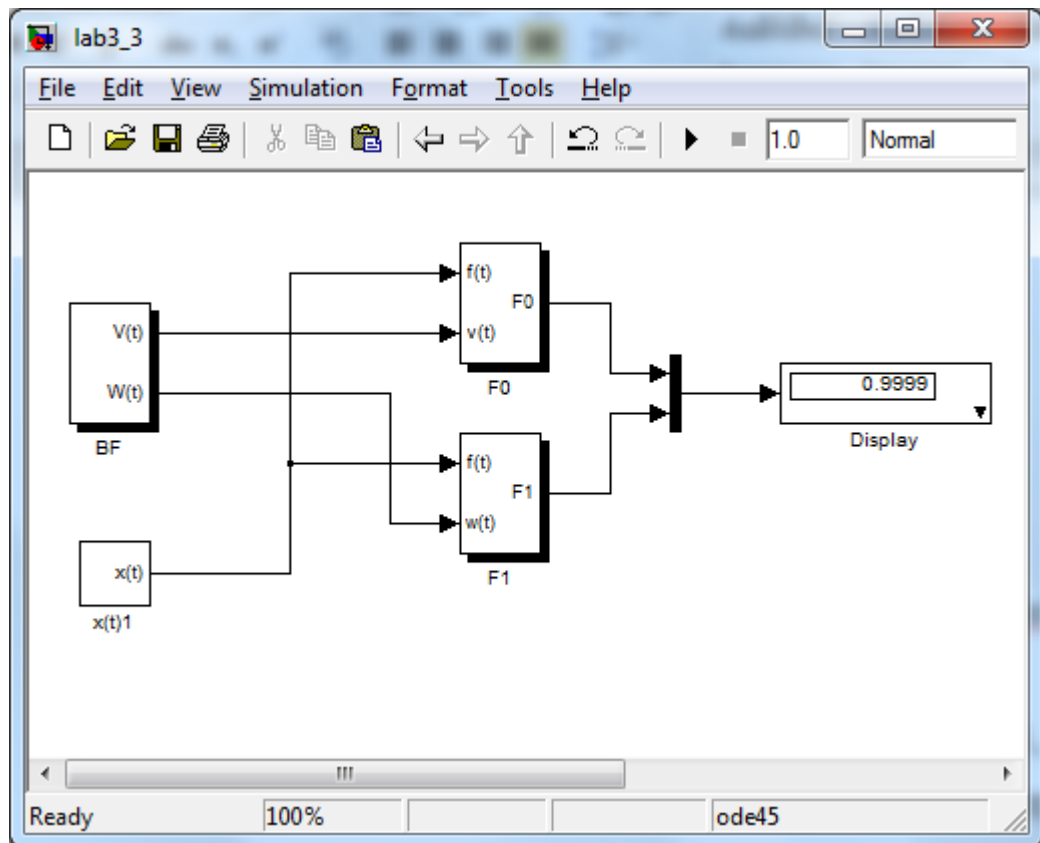


Рисунок 3.18. Структурная схема анализа сигнала блочно-импульсным методом

На рисунках 3.19, 3.20 представлены структурные схемы моделей, генерирующих блочно-импульсные базисные функции нулевого и первого порядков.

На рисунках 3.21, 3.22 представлены схемы для расчета коэффициентов блочно-импульсного и аппроксимирующего импульсного спектров.

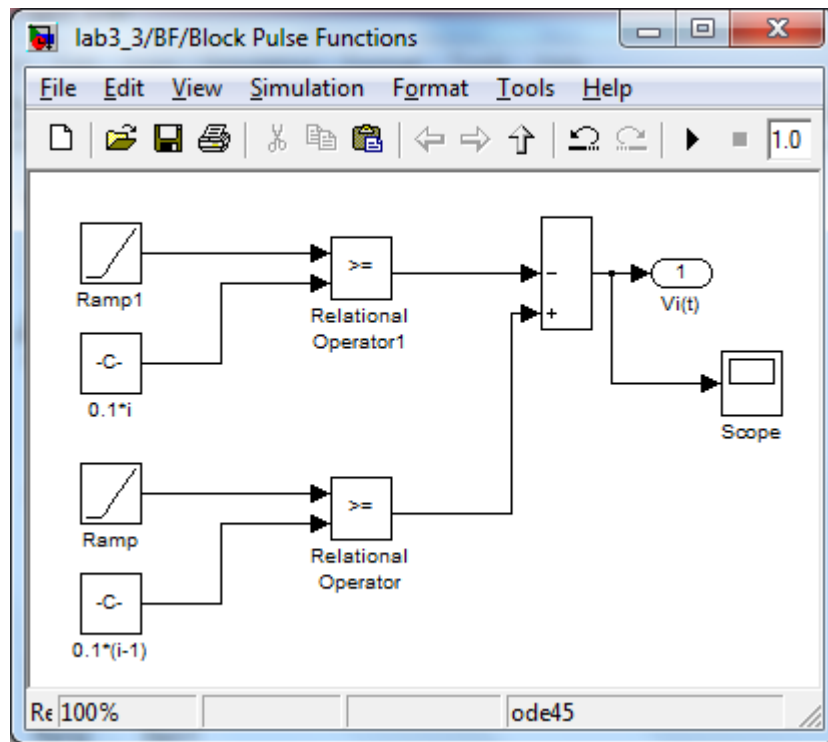


Рисунок 3.19. Структурная схема, генерирующая блочно-импульсные функции нулевого порядка, и график блочно-импульсных функций

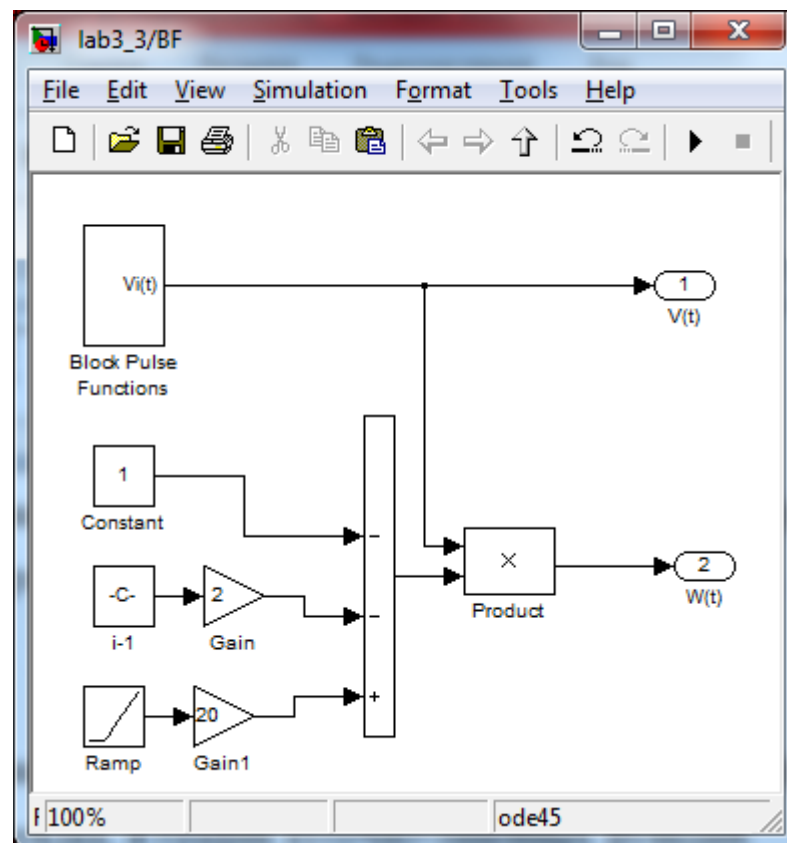


Рисунок 3.20. Структурная схема, генерирующая блочно-импульсные функции первого порядка, и график кусочно-линейных функций

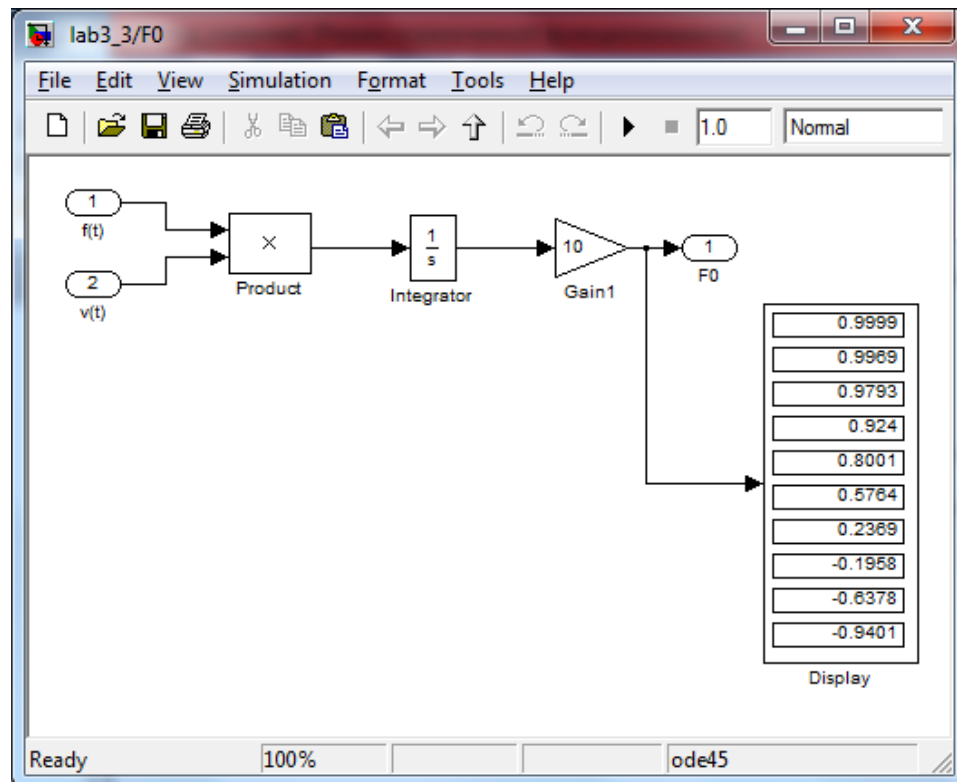


Рисунок 3.21. Расчет коэффициентов блочно-импульсного спектра

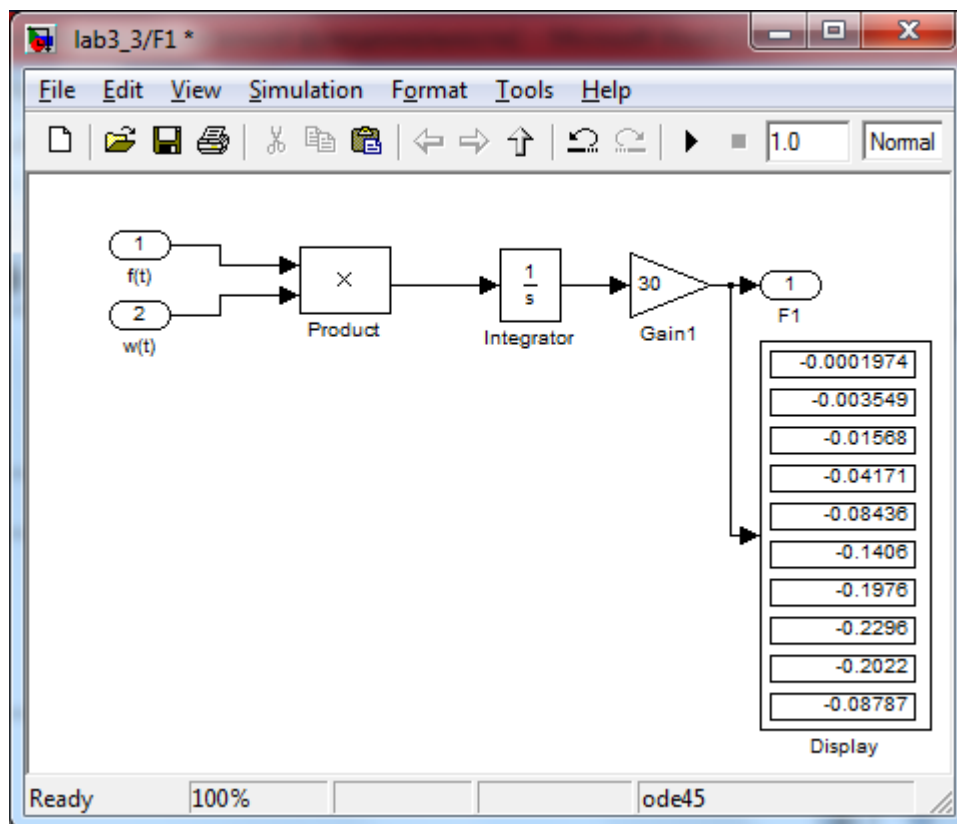


Рисунок 3.22. Расчет коэффициентов аппроксимирующего импульсного спектра

Дополним схему расчета коэффициентов блоками для восстановления сигнала. На вход схемы подаются базисные функции и спектр анализируемого сигнала, на выход – аппроксимация сигнала по соответствующему методу и исходный сигнал. Схема примет следующий вид:

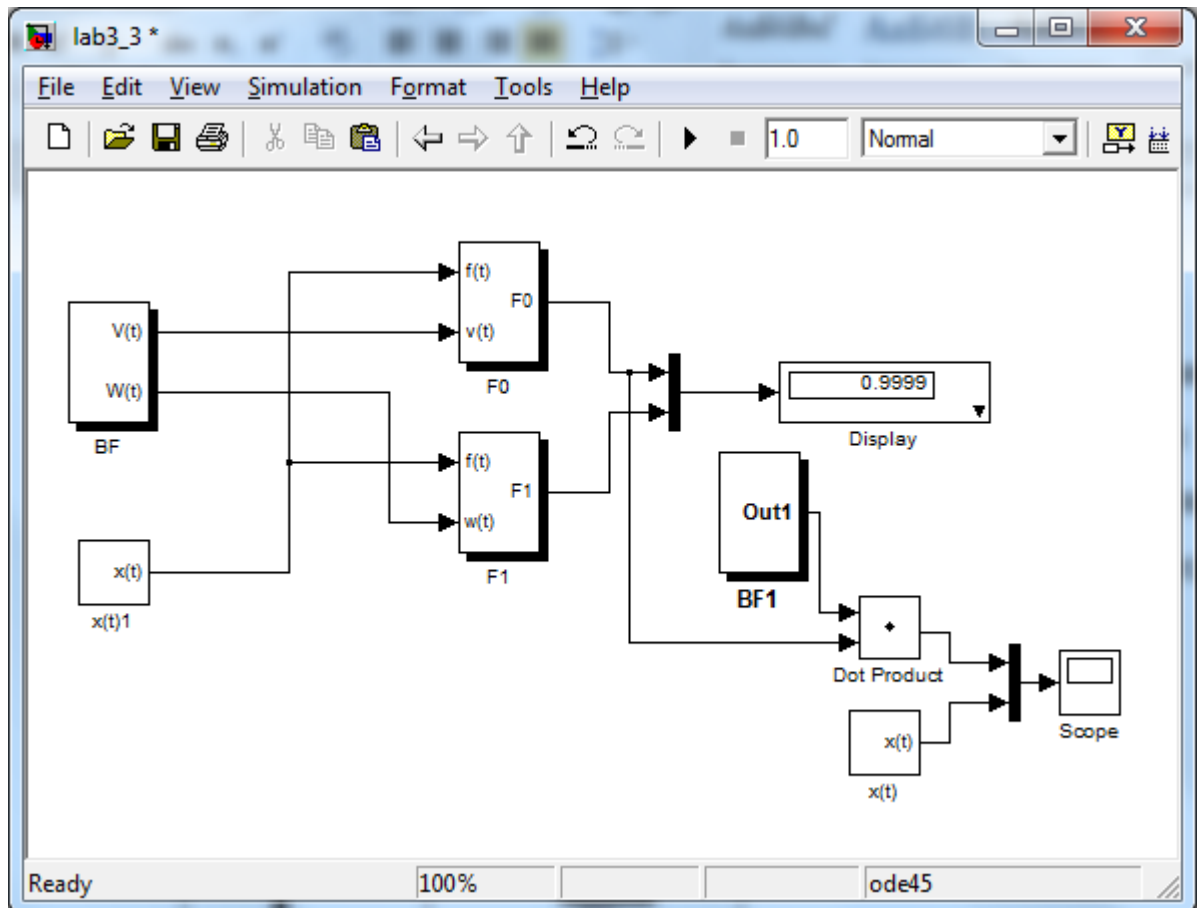


Рисунок 3.23. Структурная схема синтеза сигнала по методу БИФ

На виртуальный осциллограф подаются исходный и восстановленный сигналы. Они представлены на рисунке 3.24 для обоих методов соответственно.

Из графиков видно, что даже при небольшом числе подынтервалов (m) получается довольно точная аппроксимация сигнала.

Точность можно повышать, разбивая интервал определения сигнала на большее количество подынтервалов.

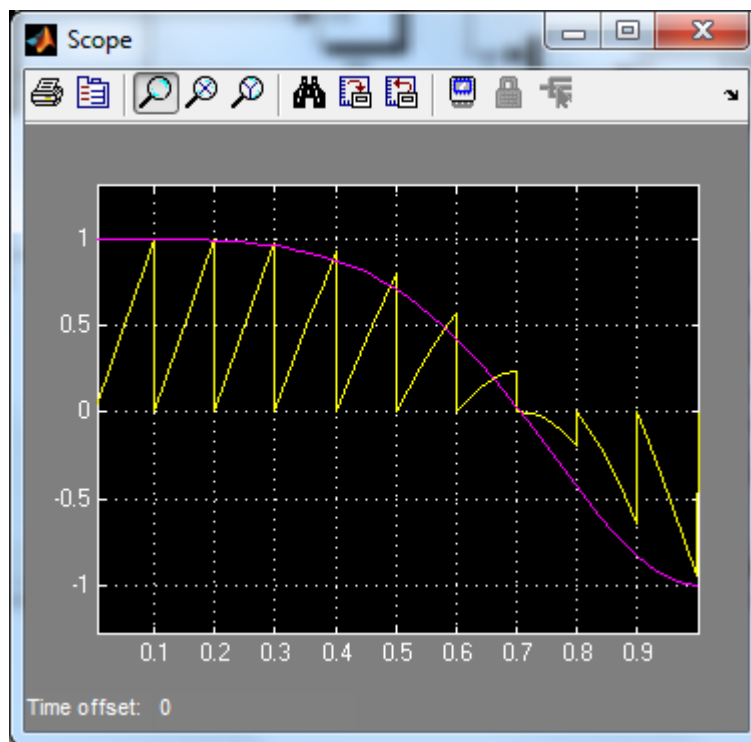


Рисунок 3.24. Результаты аппроксимации сигнала[2]

Аппаратура и материалы. Для выполнения лабораторной работы необходимо использовать следующее: аппаратное обеспечение: персональный компьютер MDT750/ i75930K/ 4 D8192D42133; мультимедиа-проектор Epson; магнитно-маркерная доска и программное обеспечение: операционную систему Windows 7 и выше; Microsoft Office, систему компьютерной математики MATLAB R2011b и выше.

Указания по технике безопасности. Студенты должны следовать общепринятой технике безопасности для пользователей персональных компьютеров. Не следует самостоятельно производить ремонт технических средств, установку и удаление программного обеспечения. В случае обнаружения неисправностей необходимо сообщить об этом администратору компьютерного класса (обслуживающему персоналу лаборатории).

Методика и порядок выполнения работы

Выполните предложенные задания, предварительно ознакомившись с теоретической частью. Параметры сигналов приведены в таблице 3.1. Номер

варианта соответствует номеру, под которым студент записан в списке группы.

Задание 3.1. Необходимо аппроксимировать методом наименьших квадратов сигнал $x(t) = A * func(B) + C$ на интервале $[0,1]$. В качестве базисных функций взять степенные функции 5-го порядка.

Задание 3.2. Необходимо аппроксимировать методом равных площадей сигнал $x(t) = A * func(B) + C$ на интервале $[0,1]$. В качестве базисных функций взять степенные функции 5-го порядка.

Задание 3.3. Необходимо аппроксимировать методом аппроксимации блочно-импульсными функциями нулевого и первого порядков сигнал $x(t) = A * func(B) + C$ на интервале $[0,1]$.

Таблица 3.1. Параметры задачи

№ вар-та	func	A	B	C
1.	<i>cos</i>	1	πt^2	$2t$
2.	<i>sin</i>	0.5	πt	t
3.	<i>tg</i>	0.2	πt^2	0
4.	<i>sin</i>	1	πt^3	t^2
5.	<i>cos</i>	0.1	$\frac{\pi t}{2}$	$2t$
6.	<i>tg</i>	0.6	πt^3	t
7.	<i>sin</i>	1	$2\pi t$	$2t$
8.	<i>cos</i>	0.9	πt^2	t
9.	<i>tg</i>	0.7	$3\pi t$	0
10.	<i>sin</i>	1	3π	t^2

Содержание отчета и его форма

Подготовьте отчет, в котором приведите технологию выполнения заданий.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) название работы;
- 2) цель лабораторной работы;
- 3) формулировку задания и технологию его выполнения;
- 4) ответы на контрольные вопросы;
- 5) приложение – файлы выполненных заданий.

Вопросы для защиты работы

1. Какие основные методы используются для определения аппроксимирующего спектра сигнала?
2. В чем заключается суть метода наименьших квадратов для определения аппроксимирующего спектра?
3. В чем заключается суть метода равных площадей для определения аппроксимирующего спектра?
4. В чем заключается суть метода блочно-импульсной аппроксимации?