Н. В. СМИРНОВ,
Т. Е. СМИРНОВА,
Г. Ш. ТАМАСЯН

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Издание третье, стереотипное

*РЕКОМЕНДОВАНО
УМО вузов РФ по образованию в области прикладных математики
и физики в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по направлению «Прикладные математика и физика»,
а также по другим математическим и естественнонаучным
направлениям и специальностям и смежным направлениям
и специальностям в области техники и технологий*

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2017

ББК 22.16я73
С 50

Смирнов Н. В., Смирнова Т. Е., Тамасян Г. Ш.

С 50 Стабилизация программных движений при полной и неполной обратной связи: Учебное пособие. — 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2017. — 128 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-2023-0

В данном учебном пособии приводятся основные понятия и определения теории устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также рассмотрены вопросы стабилизации линейных стационарных систем в пространстве состояний в случае полной и неполной обратной связи. Предложен общий алгоритм решения задачи стабилизации. Рассмотрены методы построения асимптотических идентификаторов разных типов, применяемых для оценки фазового состояния управляемой системы в режиме стабилизации в случае неполной обратной связи. Конкретные реализации алгоритмов построения стабилизирующих управлений для различных частных случаев проиллюстрированы большим количеством примеров.

Книга разработана в рамках курсов «Теория управления», «Устойчивость движения» факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ и предназначена для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Прикладные математика и физика», «Прикладная математика и информатика», а также другим математическим и естественнонаучным направлениям и специальностям в области техники и технологий. Она также может быть полезна научным работникам, специализирующимся в области математического моделирования, теории управления и теории устойчивости.

ББК 22.16я73

Рецензенты:

Е. И. ВЕРЕМЕЙ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой компьютерных технологий и систем Санкт-Петербургского государственного университета;

В. В. КУЛАГИН — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория устойчивости представляет собой классический раздел анализа, имеющий целью описание определенных свойств решений систем дифференциальных уравнений. Соответствующий ему раздел математической теории управления – стабилизация программных движений – это раздел синтеза. Если в первом формулируются понятия и определения устойчивости, даются критерии, при выполнении которых устойчивость имеет место, то во втором речь идет о построении управляющих воздействий на объект управления таким образом, чтобы выполнялись известные критерии устойчивости. Можно утверждать, что каждое продвижение в анализе устойчивости решений систем дифференциальных уравнений открывает перспективы развития теории стабилизации.

В данном учебном пособии приводятся основные понятия, определения и теоремы теории устойчивости линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также рассмотрены вопросы стабилизации линейных стационарных систем в случае полной и неполной обратной связи. Предложен общий алгоритм решения задачи стабилизации. Рассмотрены методы построения асимптотических идентификаторов разных типов, применяемых для оценки фазового состояния управляемой системы в режиме стабилизации в случае неполной обратной связи. Конкретные реализации алгоритмов построения стабилизирующих управлений для различных частных случаев проиллюстрированы большим количеством примеров.

ГЛАВА 1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

§1. Сведения из теории устойчивости. Основные понятия. Постановка задачи стабилизации

1.1. Основные понятия теории устойчивости. Принимая во внимание соображения, изложенные во введении, перед тем как сформулировать общую постановку задачи стабилизации приведем краткую справку основных понятий и определений из теории устойчивости [1, 5, 9].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}). \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{y}$ — n-мерный вектор неизвестных функций, вектор-функция $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ задана и непрерывна в области $D = J \times G$, где $J = \{t : 0 \leqslant t < +\infty\}$, G — некоторая область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Считаем, что область D является областью существования и единственности решения задачи Коши. Независимую переменную t обычно называют временем, а решения $\mathbf{y}(t)$ уравнений (1.1) — движениями системы.

Пусть $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0)$ — решение системы (1.1), проходящее при $t = t_0 \geqslant 0$ через точку $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_0 \in G$.

Рассмотрим некоторое частное решение $\varphi(t)$ системы (1.1), определенное при всех $t \in [0, +\infty)$. Будем называть его *программным* или *невозмущенным*.

Определение 1.1. Решение $\varphi(t)$ *обладает свойством интегральной непрерывности*, если для любых $t_0 \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $\mathbf{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{y}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$, на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ выполняется неравенство $\|\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$.

В настоящем пособии под нормой будем понимать евклидову норму вектора, т.е. если $\mathbf{y}$ — n-мерный вектор с компонентами $y_1, \ldots, y_n$, то $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$.

Теорема 1.1. (Об интегральной непрерывности). *Пусть вектор-функция* $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ *в любой ограниченной части области* D

удовлетворяет условию Липшица по переменной $\mathbf{y}$. *Тогда решения системы* (1.1), *содержащиеся при всех* $t \geqslant 0$ *в области* G, *обладают свойством интегральной непрерывности.*

Задача об устойчивости (устойчивости по Ляпунову) невозмущенного (программного) решения $\varphi(t)$ формулируется следующим образом. Рассматриваются решения системы (1.1), начинающиеся в некоторой окрестности программного движения. Эти решения называются *возмущенными*. Требуется исследовать поведение отклонений возмущенных решений от программного при возрастании аргумента t.

Приведем строгое определение устойчивости.

Определение 1.2. Решение $\varphi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если для любых $t_0 \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что при всех $\mathbf{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{y}_0 - \varphi(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, и любых $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$.

Определение 1.3. Решение $\varphi(t)$ называется *равномерно устойчивым по Ляпунову*, если в определении 1.2 число $\delta(t_0, \varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от t_0.

Геометрически свойство устойчивости решения $\varphi(t)$ означает, что достаточно близкие к нему в любой начальный момент времени t_0 решения $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0)$ при всех $t \geqslant t_0$ целиком содержатся в «ε-трубке» решения $\varphi(t)$.

Замечание 1.1. Устойчивость решений системы (1.1) эквивалентна их интегральной непрерывности на бесконечном промежутке времени ($T = +\infty$).

Определение 1.4. Решение $\varphi(t)$ называется *неустойчивым по Ляпунову*, если существуют числа $\bar{t}_0 \geqslant 0$ и $\bar{\varepsilon} > 0$ такие, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $\bar{\mathbf{y}}_0$, удовлетворяющая условию $\|\bar{\mathbf{y}}_0 - \varphi(\bar{t}_0)\| < \delta$, и момент времени $\bar{t} \geqslant \bar{t}_0$, для которых выполняется неравенство $\|\mathbf{y}(\bar{t}, \bar{\mathbf{y}}_0, \bar{t}_0) - \varphi(\bar{t})\| \geqslant \bar{\varepsilon}$.

Определение 1.5. Решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову* (или просто *асимптотически устойчивым*), если оно обладает следующими свойствами:

а) $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову;

б) для любого $t_0 \geqslant 0$ существует число $\Delta(t_0) > 0$ такое, что при всех $\mathbf{y}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{y}_0 - \varphi(t_0)\| < \Delta(t_0)$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \|\mathbf{y}(t, \mathbf{x}_0, t_0) - \varphi(t)\| = 0. \tag{1.2}$$

Определение 1.6. Решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым равномерно по* t_0 *и* $\mathbf{y}_0$, если оно равномерно устойчиво и существует не зависящее от t_0 число $\Delta > 0$ такое, что $\|\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0) - \varphi(t)\| \to 0$ при $t - t_0 \to +\infty$ равномерно относительно t_0 и $\mathbf{y}_0$ на множестве $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathbf{y}_0 - \varphi(t_0)\| < \Delta$.

Определение 1.7. Для заданного начального момента времени t_0 *областью притяжения* решения $\varphi(t)$ называется множество точек $\mathbf{y}_0$, для которых выполняется предельное соотношение (1.2).

Область притяжения будем обозначать через $A(t_0)$.

Определение 1.8. Пусть решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво. Тогда множество $A = \{(t_0, \mathbf{y}_0) : t_0 \geqslant 0, \mathbf{y}_0 \in A(t_0)\}$ называется *областью асимптотической устойчивости* этого решения.

Определение 1.9. Если правые части системы (1.1) заданы при всех $t \geqslant 0$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво и для любого $t_0 \geqslant 0$ имеем $A(t_0) = \mathbb{R}^n$, то решение $\varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым в целом.*

Непосредственное исследование устойчивости невозмущенного решения $\varphi(t)$ системы (1.1) обычно сводят к исследованию устойчивости нулевого решения некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений.

Сделаем в (1.1) замену переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \varphi(t). \tag{1.3}$$

Получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x} + \varphi(t)) - \mathbf{g}(t, \varphi(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \tag{1.4}$$

При этом $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ для всех $t \geqslant 0$, т.е. система (1.4) имеет нулевое решение $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Определение 1.10. Система (1.4) называется *системой в отклонениях.*

Решение $\varphi(t)$ системы (1.1) при преобразовании (1.3) переходит в нулевое решение системы в отклонениях. Очевидно, что решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда тем же самым свойством обладает нулевое решение системы (1.4).

Если в качестве невозмущенного рассматривается нулевое решение, то определение устойчивости 1.2 принимает следующий вид.

Определение 1.11. Нулевое решение системы (1.4) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любых $t_0 \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, что при всех $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(t_0, \varepsilon)$, и любых $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\| < \varepsilon$.

Аналогичным образом для нулевого решения системы (1.4) можно записать определения 1.3 – 1.9.

Для удобства восприятия критерии асимптотической устойчивости будут приведены в последующих параграфах, там, где это потребуется в процессе изложения основного материала.

1.2. Общая постановка задачи стабилизации. Покажем, что она непосредственно вытекает из проблемы устойчивости программных движений управляемых систем. Проиллюстрируем этот факт, следуя известной монографии [7].

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}), \tag{1.5}$$

описывающая движение некоторого управляемого объекта. Здесь $\mathbf{y}$ — n-мерный вектор фазового состояния системы, $\mathbf{v}$ — r-мерный вектор управлений, $\mathbf{g}$ — n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши.

Предположим, что для системы (1.5) решена задача построения программного управления. Это означает, что для заданных начальных данных $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ найдено управление $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p(t)$, называемое *программным*, такое, что *замкнутая* система

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v}_p(t))$$

имеет *программное движение* $\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0, t_0, \mathbf{v}_p(t))$. Это движение может быть построено из различных соображений. В частности, программное управление $\mathbf{v}_p(t)$ и соответствующее ему программное движение $\mathbf{y}_p(t)$ могут быть оптимальными в том или ином смысле. В качестве частного примера, имеющего большое прикладное значение, можно привести задачу о программном переводе системы (1.5) из одного заданного состояния $\mathbf{y}_0$ в другое $\mathbf{y}_1$ за время T.

Далее возникает вопрос об асимптотической устойчивости по Ляпунову программного движения $\mathbf{y}_p(t)$. Для исследования этого вопроса используется упомянутый выше подход теории устойчивости. А именно, для невозмущенного движения, которым в нашем случае является программное движение $\mathbf{y}_p(t)$, и для программного управления $\mathbf{v}_p(t)$ строится система в отклонениях.

В системе (1.5) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_p(t), \\ \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t), \end{cases} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный *вектор отклонений от программного движения*, а $\mathbf{u}$ — r-мерный *вектор отклонений от программного управления*. В результате (1.5) примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1.7}$$

где

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{x}, \mathbf{v}_p(t) + \mathbf{u}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y}_p(t), \mathbf{v}_p(t)).$$

Система (1.7), как и (1.4), называется *системой в отклонениях*.

Замечание 1.2. По построению $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, т.е. система (1.7) всегда имеет нулевое решение при нулевом управлении $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, соответствующее программному движению $\mathbf{y}_p(t)$ и программному управлению $\mathbf{v}_p(t)$ исходной системы (1.5).

Теперь следует отметить существенное отличие от подходов теории устойчивости, основной вопрос которой является вопросом анализа: при каких условиях на правые части системы в отклонениях нулевое решение устойчиво или асимптотически устойчиво. Нас же в дальнейшем будут интересовать следующие вопросы, являющиеся вопросами и анализа, и синтеза:

1. Существуют ли управления $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^T$, при которых нулевое решение системы (1.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову?

2. Если такие управления существуют, то как их построить?

3. Пусть такие управления можно построить не единственным образом. Как из их множества выбрать оптимальное в том или ином смысле?

Все эти вопросы представляют собой *общую постановку задачи стабилизации программных движений*, причем последний является самостоятельным разделом теории управления, так называемой задачей *оптимальной стабилизации.*

В заключении этого параграфа отметим, что управление $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^T$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.7) (или программного движения $\mathbf{y}_p(t)$ системы (1.5)), принято называть *стабилизирующим управлением.* Оно представляет собой некоторую добавку к программному управлению $\mathbf{v}_p(t)$, суть которой определяет следующее важное

Замечание 1.3. Предположим, что найдены условия существования и построено стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$. В этом случае из (1.6) получим управление $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p(t) + \mathbf{u}_s$, обладающее следующим свойством. Если его подставить в систему (1.5), то она будет иметь программное движение $\mathbf{y}_p(t)$, асимптотически устойчивое по Ляпунову.

Упражнение 1.1. Показать, что для любого программного управления $\mathbf{v}_p(t)$ и соответствующего программного движения $\mathbf{y}_p(t)$ линейной управляемой системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v} + \mathbf{f}(t), \tag{1.8}$$

системой в отклонениях является одна и та же линейная однородная система вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}. \tag{1.9}$$

В результате можно сделать вывод о том, что алгоритм построения стабилизирующего управления универсален для любого программного движения линейной системы (1.8). Обсуждению таких алгоритмов для линейных стационарных систем посвящены последующие параграфы настоящей главы.

§2. Декомпозиция системы на управляемую и неуправляемую подсистемы

2.1. Предварительные рассуждения. Начиная с этого параграфа (если это не будет оговорено отдельно), будем рассматривать только системы в отклонениях. В общем случае эта система имеет вид (1.7), а для линейных систем — (1.9).

Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно.

Определение 2.1. Управление вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная $(r \times n)$-матрица, будем называть *допустимым управлением вида линейной обратной связи.*

Задача стабилизации системы (2.1) состоит в том, чтобы построить допустимое управление (2.2), при котором *замкнутая система*

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x} \tag{2.3}$$

асимптотически устойчива.

Словосочетание *«управление вида линейной обратной связи»* требует пояснений. По сути, вопрос в том, почему стабилизирующее управление предполагается строить именно в виде (2.2)? При ответе на него заметим, что для вычисления значений вектора $\mathbf{u}$ по формуле (2.2) и его последующей технической реализации нужно знать величины $\mathbf{C}$, $\mathbf{x}$. Значение вектора отклонения от программного движения $\mathbf{x}$ предполагается измерять специальными датчиками или приборами в процессе функционирования объекта управления. Следовательно, можно считать его известной величиной. При этом в так называемом *случае полной обратной связи* предполагается, что все элементы вектора $\mathbf{x}$ доступны для измерения.

Матрица $\mathbf{C}$ называется *матрицей коэффициентов усиления* сигналов измерительных приборов. Для ее построения необходимо разработать алгоритмы, которые и составляют математическую суть задачи стабилизации. Таким образом, выбор формы представления допустимого управления не случаен, а продиктован здравым смыслом и практикой построения реальных систем стабилизации.

Сказанное позволяет конкретизировать исходную постановку задачи: требуется построить матрицу $\mathbf{C}$ так, чтобы замкнутая система (2.3) была асимптотически устойчива.

Сформулируем известный критерий асимптотической устойчивости линейных стационарных систем [5]:

Теорема 2.1. *Линейная однородная система с постоянными коэффициентами* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Здесь* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные числа матрицы* $\mathbf{A}$.

Основная идея при решении задачи стабилизации состоит в том, чтобы обеспечить выполнение критерия асимптотической устойчивости (теоремы 2.1) для системы (2.3) за счет выбора матрицы $\mathbf{C}$: собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ должны иметь отрицательные вещественные части.

Метод неопределенных коэффициентов. Первый способ, который лежит на поверхности и может быть понятен даже школьнику (если ему предварительно объяснить, что собственные числа матрицы — это корни характеристического полинома), сводится к методу неопределенных коэффициентов. Действительно, собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ будут функциями элементов матрицы $\mathbf{C}$. Значит, можно попытаться выписать явную зависимость $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{C})$, $i = 1, \ldots, n$, и обеспечить выполнение неравенств $\operatorname{Re}\lambda_i(\mathbf{C}) < 0$ за счет выбора элементов матрицы $\mathbf{C}$.

Проиллюстрируем все нюансы такого подхода для системы второго порядка на простейших примерах.

Пример 2.1. Требуется построить стабилизирующее управление для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_2. \end{cases}$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Стабилизирующее управление будем искать в виде

$$u = \mathbf{Cx} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица замкнутой системы имеет вид

$$\mathbf{P} + \mathbf{QC} = \begin{pmatrix} 1 + c_1 & 1 + c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она имеет собственные числа $\lambda_1 = 1 + c_1$, $\lambda_2 = 1$. Очевидно, что первое из них может принимать произвольное значение за счет выбора параметра c_1, а второе остается неизменным при любом выборе строки $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$.

Собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$, независящие от выбора $\mathbf{C}$, назовем *неуправляемыми*, а те, что зависят от $\mathbf{C}$, — *управляемыми* собственными числами системы. Позже мы дадим строгое определение этим понятиям.

Поскольку при любом выборе строки $\mathbf{C}$ матрица замкнутой системы имеет неуправляемое собственное число $\lambda_2 = 1$, то задача стабилизации не имеет решения для исходной системы. Действительно, критерий асимптотической устойчивости (теорема 2.1) не выполняется ни при одной строке $\mathbf{C}$.

Пример 2.2. Внесем небольшое изменение в коэффициенты системы из примера 12.1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица замкнутой системы

$$\mathbf{P} + \mathbf{QC} = \begin{pmatrix} 1 + c_1 & 1 + c_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 1 + c_1$, $\lambda_2 = -1$.

Собственное число $\lambda_2 = -1$ осталось неуправляемым, как и в предыдущем примере, однако оно лежит в левой полуплоскости комплексного переменного λ (является вещественным и отрицательным). При этом за счет выбора параметра c_1 можно обеспечить любое значение управляемому собственному числу λ_1.

Действительно, зафиксируем так называемое *эталонное* значение $\lambda_1 = -1$, тогда при $c_1 = -2$ фактическое значение λ_1 совпадет с эталонным. Таким образом для исходной системы построено стабилизирующее управление вида

$$u = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2x_1,$$

которое обеспечивает матрице замкнутой системы собственные числа $\lambda_{1,2} = -1$.

Следует обратить внимание, что в случае, когда стабилизирующее управление существует (как в данном примере), то оно строится неоднозначно. Все множество стабилизирующих управлений можно описать следующим образом: $u = c_1x_1 + c_2x_2$, где $c_1 < -1$, c_2 — любое.

Время переходного процесса. Прежде чем приступить к решению задачи стабилизации в общем виде, проиллюстрируем на простых примерах еще одно важное понятие — *время переходного процесса* и его связь с эталонными собственными числами и коэффициентами усиления.

Пример 2.3. Рассмотрим простейшую систему в отклонениях в виде одного скалярного уравнения

$$\dot{x} = 2x + 3u.$$

Требуется построить стабилизирующее управление вида линейной обратной связи $u = cx$ для нескольких вариантов эталонных собственных чисел: 1) $\lambda_1 = -0,1$; 2) $\lambda_2 = -1$; 3) $\lambda_3 = -10$; 4) $\lambda_4 = -100$.

Замкнутая система (2.3) в данном случае имеет вид

$$\dot{x} = (2 + 3c)x.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, выпишем уравнения для определения коэффициента усиления c в каждом из четырех случаев. Получим

$$\begin{array}{lcl} 2+3c_1=-0,1 & \Rightarrow & c_1=-0,7, \\ 2+3c_2=-1 & \Rightarrow & c_2=-1, \\ 2+3c_3=-10 & \Rightarrow & c_3=-4, \\ 2+3c_4=-100 & \Rightarrow & c_4=-34. \end{array}$$

Поскольку стабилизирующее управление, если оно существует, может быть построено неоднозначно, а с точностью до выбранного эталонного собственного числа, то возникает естественный вопрос: каков критерий выбора эталонного собственного числа? Для ответа на него необходимо понять, какое влияние оказывают эталонные собственные числа на поведение замкнутой системы.

Проинтегрируем замкнутую систему в каждом из четырех случаев с одними и теми же начальными условиями $x(0)=x_0$. Найдем

$$x(t)=x_0e^{-0,1t}, \quad x(t)=x_0e^{-t}, \quad x(t)=x_0e^{-10t}, \quad x(t)=x_0e^{-100t}.$$

Заметим, что величина x_0 определяет начальное отклонение, а показатель экспоненты — скорость его убывания.

Зафиксируем так называемую *величину безразличия* ε, которая в конкретной прикладной задаче характеризует абсолютное значение отклонения $x(t)$, которым можно пренебречь, т.е. считать равным нулю. Величина ε очень важна для работы системы стабилизации. Она показывает значение отклонения, при достижении которого работа стабилизирующего управления может быть прекращена.

Особый интерес представляет *время переходного процесса* T, необходимое системе стабилизации для подавления начального отклонения x_0 до величины безразличия ε. Его можно вычислить, решая уравнение $x(T)=\varepsilon$. В рамках нашего примера найдем

$$\begin{array}{lcl} x_0e^{-0,1T_1}=\varepsilon & \Rightarrow & T_1=\ln(x_0/\varepsilon)^{10}, \\ x_0e^{-T_2}=\varepsilon & \Rightarrow & T_2=\ln(x_0/\varepsilon), \\ x_0e^{-10T_3}=\varepsilon & \Rightarrow & T_3=\ln\sqrt[10]{x_0/\varepsilon}, \\ x_0e^{-100T_4}=\varepsilon & \Rightarrow & T_4=\ln\sqrt[100]{x_0/\varepsilon}. \end{array}$$

Очевидно, выполняются неравенства $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$. При этом следует особо подчеркнуть, что соотношение между абсолютными значениями коэффициентов усиления противоположно: $|c_1| < |c_2| < |c_3| < |c_4|$.

Упражнение 2.1. Изобразите схематически в одних и тех же осях графики функций $x(t) = x_0 e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \ldots, 4$, определяющие переходный процесс в каждом случае, изобразите прямую $x(t) = \varepsilon$ и отметьте на оси времени величины T_i.

Анализ, проведенный в рамках данного примера, позволяет сделать следующий общий вывод. Чем меньше эталонное собственное число, тем меньше время переходного процесса. При этом с уменьшением времени переходного процесса растет абсолютное значение коэффициента усиления. Поскольку коэффициенты усиления определяют меру затрат на реализацию стабилизирующего управления, то особый интерес в каждом конкретном приложении представляет задача поиска разумного компромисса между временем переходного процесса и затратами на реализацию стабилизирующего управления. В этом состоит один из наиболее важных вопросов задачи оптимальной стабилизации.

2.2. Лемма о количестве неуправляемых собственных чисел. Итак, первый способ решения задачи стабилизации основан на общей идее метода неопределенных коэффициентов. Далее мы увидим слабость этого метода (см. §7). Примеры показывают неэффективность метода неопределенных коэффициентов для систем большой размерности. Поэтому нужно обратиться к алгебре с ее возможностями замен переменных и перехода к удобным системам координат.

Прежде всего дадим строгое определение управляемых и неуправляемых собственных чисел системы.

Определение 2.2. Собственное число матрицы системы (2.3) называется *неуправляемым*, если при любом выборе матрицы $\mathbf{C}$ оно принадлежит спектру матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$. В противном случае оно называется *управляемым*.

Под спектром понимается полный набор собственных чисел матрицы с учетом их кратностей.

Рассмотрим вспомогательную блочную $(n \times nr)$-матрицу [8] $\mathbf{S} = \bigl(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\bigr)$.

Лемма 2.1. *Система* (2.3) *имеет* $n-m$ *неуправляемых собственных чисел, где* n *— размерность системы, а* $m = \operatorname{rang}\mathbf{S}$.

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку столбцов матрицы $\mathbf{S}$

$$\operatorname{Lin}\mathbf{S} = \operatorname{Lin} < \mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q} > .$$

Линейная оболочка $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$ — это подпространство размерности m пространства $\mathbb{R}^n$. В этом подпространстве существует базис из m векторов $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m$.

Покажем, что $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$ инвариантна относительно умножения на матрицу $\mathbf{P}$ слева, т.е. для любого вектора $\mathbf{s} \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$ имеет место $\mathbf{Ps} \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$. Для этого достаточно показать, что для любого столбца матрицы $\mathbf{S}$ выполнено это свойство. Проверим это.

Обозначим через $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r$ столбцы матрицы $\mathbf{Q}$. Рассмотрим столбец $\mathbf{q}_1$. Очевидно, $\mathbf{Pq}_1$ — это $(r+1)$-й столбец матрицы $\mathbf{S}$. Следовательно, $\mathbf{Pq}_1 \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$. Далее аналогично вплоть до столбца $\mathbf{q}_r$. Поскольку $\mathbf{Pq}_r$ — это $2r$-й столбец матрицы $\mathbf{S}$, то $\mathbf{Pq}_r \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$. Такие же рассуждения можно провести для всех столбцов последующих блоков $\mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-2}\mathbf{Q}$ матрицы $\mathbf{S}$.

Остались столбцы последнего блока $\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}$ матрицы $\mathbf{S}$. Рассмотрим первый из них $\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{q}_1$. Умножим его слева на матрицу $\mathbf{P}$, получим $\mathbf{P}^n\mathbf{q}_1$. Покажем, что $\mathbf{P}^n\mathbf{q}_1 \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$.

Будем использовать теорему Гамильтона — Кэли [4, с. 87], в соответствие с которой матрица $\mathbf{P}$ является корнем своего характеристического полинома

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{P}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Имеем

$$\mathbf{P}^n + a_1\mathbf{P}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathbf{P} + a_n\mathbf{E} = \mathbf{O}.$$

Домножая последнее равенство на вектор $\mathbf{q}_1$, найдем

$$\mathbf{P}^n\mathbf{q}_1 = -a_1\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{q}_1 - \ldots - a_{n-1}\mathbf{Pq}_1 - a_n\mathbf{q}_1.$$

Здесь в правой части стоит линейная комбинация столбцов матрицы $\mathbf{S}$, следовательно, вектор $\mathbf{P}^n\mathbf{q}_1$ принадлежит линейной оболочке $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$. Аналогичные рассуждения можно провести относительно остальных столбцов блока $\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}$. Таким образом, инвариантность $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$ относительно умножения на матрицу $\mathbf{P}$ доказана.

Дополним базис линейной оболочки $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$ до базиса линейного пространства $\mathbb{R}^n$ и составим из этих векторов неособую матрицу

$$\mathbf{T} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m, \widetilde{\mathbf{s}}_{m+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{s}}_n)\,.$$

В системе (2.1) сделаем замену переменных

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}. \tag{2.4}$$

Получим

$$\dot{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{y} + \widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{u}, \tag{2.5}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}.$$

Выясним структуру матриц $\widetilde{\mathbf{P}}$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}$. В первом случае используем равенство $\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{T}$. Рассмотрим его по столбцам. Для первых столбцов имеем

$$\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{P}\mathbf{s}_1.$$

По сути это система относительно неизвестного вектора $\widetilde{\mathbf{p}}_1$, которая имеет единственное решение в силу неособости матрицы $\mathbf{T}$. Геометрическая трактовка этого равенства такова: необходимо найти координаты разложения вектора $\mathbf{P}\mathbf{s}_1$ по столбцам матрицы $\mathbf{T}$, при этом $\widetilde{\mathbf{p}}_1$ — вектор искомых координат. Заметим, что с одной стороны, $\mathbf{P}\mathbf{s}_1 \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$ в силу доказанного выше свойства инвариантности линейной оболочки $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$, а с другой стороны, в матрице $\mathbf{T}$ на первых m местах стоят базисные векторы $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$. Следовательно, первый столбец матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}$ допускает представление

$$\widetilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} \\ \vdots \\ \widetilde{p}_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести вплоть до столбца с номером m. Имеем

$$\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{p}}_m = \mathbf{P}\mathbf{s}_m.$$

Поскольку $\mathbf{P}\mathbf{s}_m \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$, то вектор координат $\widetilde{\mathbf{p}}_m$ допускает представление

$$\widetilde{\mathbf{p}}_m = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{1m} \\ \vdots \\ \widetilde{p}_{mm} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом он определяется однозначно.

Далее приравняем столбцы с номерами $k = \overline{m+1, n}$. Получим набор систем

$$\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{p}}_k = \mathbf{P}\widetilde{\mathbf{s}}_k.$$

Векторы координат $\widetilde{\mathbf{p}}_k$, $k = \overline{m+1, n}$, всегда находятся единственным образом в силу единственности разложения вектора по базису. Однако теперь $\mathbf{P}\widetilde{\mathbf{s}}_k \notin \operatorname{Lin}\mathbf{S}$, поэтому векторы $\widetilde{\mathbf{p}}_k$, $k = \overline{m+1, n}$, не имеют в своей структуре блока нулевых координат, который был обнаружен ранее у векторов $\widetilde{\mathbf{p}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{p}}_m$.

Все сказанное выше означает, что матрицу $\widetilde{\mathbf{P}}$ можно записать в виде

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}.$$

Размеры блоков определяются размерностью линейной оболочки $\operatorname{Lin}\mathbf{S}$: $\mathbf{P}_{11}$ — $(m \times m)$, $\mathbf{P}_{12}$ — $(m \times (n-m))$, $\mathbf{P}_{22}$ — $((n-m) \times (n-m))$, $\mathbf{O}$ — $((n-m) \times m)$. При этом блок $\mathbf{P}_{11}$ имеет вид

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{11} & \cdots & \widetilde{p}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{p}_{m1} & \cdots & \widetilde{p}_{mm} \end{pmatrix}.$$

Проанализируем структуру матрицы $\widetilde{\mathbf{Q}}$. Для этого рассмотрим второе соотношение в обозначениях коэффициентов системы (2.5)

$$\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}.$$

Запишем его по столбцам

$$\mathbf{T}\widetilde{\mathbf{q}}_k = \mathbf{q}_k.$$

Как и прежде, $\widetilde{\mathbf{q}}_k$ — вектор координат при разложении $\mathbf{q}_k$ по базису, состоящему из столбцов матрицы $\mathbf{T}$. Поскольку $\mathbf{q}_k \in \operatorname{Lin}\mathbf{S}$ при $k = \overline{1, r}$, то имеет место представление

$$\widetilde{\mathbf{q}}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_{11} \\ \vdots \\ \widetilde{q}_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \widetilde{\mathbf{q}}_r = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_{1r} \\ \vdots \\ \widetilde{q}_{mr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеет следующую структуру

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_{11} & \cdots & \widetilde{q}_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{q}_{m1} & \cdots & \widetilde{q}_{mr} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где размеры блоков: $\mathbf{Q}_1$ — $(m \times r)$, $\mathbf{O}$ — $((n-m) \times r)$.

Разобьем вектор $\mathbf{y}$ на части $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ размерности m и $n-m$ соответственно: $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^T$. Тогда, с учетом проведенного анализа структуры матриц коэффициентов, систему (2.5) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что вторая подсистема в (2.6), записанная относительно вектора $\mathbf{y}_2$, не зависит от выбора управления. Поэтому её называют *неуправляемой подсистемой*, а первую, записанную относительно вектора $\mathbf{y}_1$, — *управляемой подсистемой*. Можно сказать, что после замены переменных (2.4) проведена *декомпозиция* исходной системы (2.1) на управляемую и неуправляемую части.

Рассмотрим допустимое управление (2.2) с учетом замены переменных (2.4)

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{y}_2, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ — обозначение блоков матрицы $\mathbf{CT}$ размеров $(r \times m)$ и $(r \times (n-m))$ соответственно.

Замкнем систему (2.6) управлением (2.7). Она примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} + \mathbf{Q}_1\mathbf{C}_1 & \mathbf{P}_{12} + \mathbf{Q}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Очевидно, что спектр матрицы системы (2.8) представляет собой объединение спектров диагональных блоков $\mathbf{P}_{11} + \mathbf{Q}_1\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{P}_{22}$. Следовательно, собственные числа блока $\mathbf{P}_{22}$ принадлежат спектру замкнутой системы (2.8) при любом допустимом управлении (2.7). Тогда по определению 2.2 они являются неуправляемыми. Их количество совпадает с порядком матрицы $\mathbf{P}_{22}$ и равно $n-m$. ■

Следствие 2.1. *Для существования стабилизирующего управления необходимо, чтобы все собственные числа матрицы* $\mathbf{P}_{22}$ *имели отрицательные вещественные части.*

Доказательство. Утверждение следствия очевидно, так как все собственные числа матрицы $\mathbf{P}_{22}$ неуправляемые, а для выполнения критерия асимптотической устойчивости (теорема 2.1) необходимо расположение всех собственных чисел в левой полуплоскости. ■

Вопрос о достаточных условиях существования стабилизирующего управления будет рассмотрен позже.

Следствие 2.2. *Для матриц* $\mathbf{P}_{11}$ *и* $\mathbf{Q}_1$ *управляемой подсистемы в* (2.8) *выполнено равенство*

$$\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{m-1}\mathbf{Q}_1\big) = m.$$

Доказательство. Преобразуем матрицу $\mathbf{S}$, домножив её слева на $\mathbf{T}^{-1}$. При этом $\operatorname{rang}\big(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}\big) = \operatorname{rang}\mathbf{S} = m$, так как $\mathbf{T}^{-1}$ — неособая матрица. Имеем

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S} = \big(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\big).$$

Ранее было показано, что

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим второй блок матрицы $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}$:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{Q}} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Аналогичные преобразования можно провести и для остальных блоков, включая последний:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q} = \widetilde{\mathbf{P}}^{n-1}\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{P}}^{n-2}\widetilde{\mathbf{Q}} =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}^{n-2}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}^{n-1}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1 & \ldots & \mathbf{P}_{11}^{n-1}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет $n-m$ нулевых строк, следовательно, $\operatorname{rang}\big(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}\big) = \operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{n-1}\mathbf{Q}_1\big) = m$. Отметим, что для $(m \times m)$-матрицы $\mathbf{P}_{11}$ справедлива теорема Гамильтона — Кэли [4, с. 87]. Таким образом, все степени этой матрицы, начиная с m-ой, можно выразить через степени от нулевой до $(m-1)$-ой включительно. Поэтому столбцы матриц $\mathbf{P}_{11}^k\mathbf{Q}_1$, $k > m$, являются линейными комбинациями столбцов $\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{m-1}\mathbf{Q}_1$ (см. доказательство леммы 2.1) и, следовательно, не влияют на ранг матрицы. Тогда $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{m-1}\mathbf{Q}_1\big) = m$. ■

Замечание 2.1. Из следствия 2.2 вытекает, что управляемая подсистема в (2.8) всегда является полностью управляемой, так как для нее выполняется критерий Калмана.

Замечание 2.2. Из доказательства леммы 2.1 следует, что матрица $\mathbf{C}_2$ не влияет на спектр замкнутой системы (2.8). С одной стороны, это означает, что ее можно положить равной нулевой матрице и строить стабилизирующее управление (см. (2.7)) в виде

$$\mathbf{u} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{O})\mathbf{y} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{O})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}. \tag{2.9}$$

С другой стороны, это позволяет рассматривать задачу стабилизации только для управляемой подсистемы, т.е. искать для нее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1$, а найденную матрицу $\mathbf{C}_1$ использовать затем в (2.9) для построения стабилизирующего управления исходной системы (2.1).

Замечание 2.3. Лемма 2.1 и следствия из нее позволяют сделать вывод о возможности декомпозиции исходной системы (2.1) на управляемую и неуправляемую части, а также дают способ определения размерностей этих подсистем и алгоритм построения соответствующих матриц.

Далее займемся непосредственным построением стабилизирующего управления для управляемой подсистемы.

§3. Стабилизация полностью управляемых систем

3.1. Стабилизация системы с матрицей Фробениуса. Рассмотрим вспомогательную систему (частный случай управляемой подсистемы):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_0\mathbf{y} + \mathbf{q}_0 u, \tag{3.1}$$

где u — скалярное управление, а матрицы коэффициентов имеют вид

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{P}_0$ называется матрицей Фробениуса или сопровождающей матрицей [4, с. 141] для полинома

$$f_0(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{P}_0) = \lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k.$$

Лемма 3.1. *Для любого набора комплексных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ найдется строка $\mathbf{c}_0$ такая, что собственные числа матрицы замкнутой системы $\mathbf{P}_0 + \mathbf{q}_0\mathbf{c}_0$ будут совпадать с $\mu_1, \ldots, \mu_k$.*

Доказательство. Для системы (3.1) построим замену переменных

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}_0\mathbf{z}, \tag{3.2}$$

в результате которой матрица новой системы будет совпадать с $\mathbf{P}_0^T$. Это возможно при

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{K}_0$ найдена как решение линейного матричного уравнения $\mathbf{K}_0\mathbf{P}_0^T = \mathbf{P}_0\mathbf{K}_0$.

Упражнение 3.1. Проверить, что

$$\mathbf{P}_0^T = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{P}_0\mathbf{K}_0, \quad \overline{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После замены (3.2) система (3.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}_0^T\mathbf{z} + \overline{\mathbf{q}}_0 u. \tag{3.3}$$

Для системы (3.3) построим управление вида $u = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{z}$, обеспечивающее ей собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Матрица замкнутой системы

$$\mathbf{P}_0^T + \overline{\mathbf{q}}_0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -(\alpha_k - \gamma_1) & -(\alpha_{k-1} - \gamma_2) & \cdots & -(\alpha_1 - \gamma_k) \end{pmatrix}$$

будет сопровождающей матрицей (матрицей Фробениуса) для полинома

$$f(\lambda) = \lambda^k + (\alpha_1 - \gamma_k)\lambda^{k-1} + \ldots + (\alpha_k - \gamma_1) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{P}_0^T - \overline{\mathbf{q}}_0\boldsymbol{\gamma}),$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — элементы строки $\boldsymbol{\gamma}$.

Построим *эталонный многочлен* $f_э(\lambda)$, корнями которого являются заданные (*эталонные*) комплексные числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$:

$$f_э(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \times \ldots \times (\lambda - \mu_k) = \lambda^k + \beta_1\lambda^{k-1} + \ldots + \beta_k.$$

Для вычисления элементов строки $\boldsymbol{\gamma}$ осталось приравнять коэффициенты полиномов $f(\lambda)$ и $f_э(\lambda)$:

$$\gamma_1 = \alpha_k - \beta_k, \ldots, \gamma_k = \alpha_1 - \beta_1.$$

Учитывая замену переменных (3.2), получаем искомое управление

$$u = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{z} = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{y}.$$

Откуда $\mathbf{c}_0 = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{K}_0^{-1}$. ■

Упражнение 3.2. В системе (3.1) сделайте замену переменных (3.2), где вместо матрицы $\mathbf{K}_0$ используется матрица

$$\widetilde{\mathbf{K}}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-2} & \alpha_{k-1} \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что после этой замены матрица $\widetilde{\mathbf{P}}_0 = \widetilde{\mathbf{K}}_0^{-1}\mathbf{P}_0\widetilde{\mathbf{K}}_0$ преобразованной системы примет вид

$$\widetilde{\mathbf{P}}_0 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{k-1} & -\alpha_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а вектор $\mathbf{q}_0$ останется без изменения: $\widetilde{\mathbf{K}}_0^{-1}\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0$.

Для полученной системы

$$\dot{\mathbf{z}} = \widetilde{\mathbf{P}}_0\mathbf{z} + \mathbf{q}_0 u \tag{3.4}$$

постройте управление $u = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{z}$, обеспечивающее ей эталонные собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Убедитесь, что элементы строки $\widetilde{\gamma}$ вычисляются по формулам

$$\widetilde{\gamma}_1 = \alpha_1 - \beta_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_k = \alpha_k - \beta_k.$$

Искомое управление для системы (3.1) в этом случае имеет вид

$$u = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{z} = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\widetilde{\mathbf{K}}_0^{-1}\mathbf{y}.$$

Откуда $\mathbf{c}_0 = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\widetilde{\mathbf{K}}_0^{-1}$.

Докажите, что для одного и того же набора эталонных собственных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_k$ строка $\mathbf{c}_0$ не зависит от способа ее вычисления, т.е. $\mathbf{c}_0 = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{K}_0^{-1} = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\widetilde{\mathbf{K}}_0^{-1}$.

Замечание 3.1. Общая формулировка леммы 3.1 позволяет решать частную задачу стабилизации. Для этого достаточно зафиксировать эталонные собственные числа с отрицательными вещественными частями в соответствии с критерием асимптотической устойчивости (см. теорему 2.1). Кроме того, поскольку это можно сделать бесконечным числом способов, то стабилизирующее управление строится неоднозначно, с точностью до набора эталонных собственных чисел.

Замечание 3.2. Если вспомнить структуру фундаментальной матрицы, то станет ясно, какую роль играют эталонные собственные числа. Величины их вещественных частей — это коэффициенты показателей экспонент, определяющих скорость убывания решений в асимптотически устойчивой системе. Другими словами, они определяют скорость убывания начального отклонения или скорость переходного процесса в системе стабилизации.

3.2. Стабилизация управляемой подсистемы общего вида. В этом пункте рассмотрим управляемую подсистему общего вида, сохраняя обозначения, принятые в (2.8), чтобы подчеркнуть преемственность решаемых задач:

$$\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{P}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{u}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{P}_{11}$ и $\mathbf{Q}_1$ — $(m \times m)$- и $(m \times r)$-матрицы соответственно.

Лемма 3.2. *В управляемой подсистеме* (3.5) *выбором управления вида* $\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1$ *можно обеспечить любой наперед заданный набор собственных чисел* $\mu_1, \ldots, \mu_m$.

Доказательство. Поскольку (3.5) — управляемая подсистема, то по критерию Калмана $\operatorname{rang}\big(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{m-1}\mathbf{Q}_1\big) = m$.

Как и в доказательстве леммы 2.1, рассмотрим замену переменных

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{z}_1, \tag{3.6}$$

но матрицу $\mathbf{T}_1$ сформируем иначе:

$$\mathbf{T}_1 = \big(\mathbf{q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\ell, \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_\ell, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{k_\ell-1}\mathbf{q}_\ell\big).$$

Здесь $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant r$ — столбцы матрицы $\mathbf{Q}_1$.

Первая цепочка из k_1 векторов

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1, \, \ldots, \, \mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1$$

формируется до тех пор, пока остается линейно независимой. Как только добавление очередного вектора вида $\mathbf{P}_{11}^{k_1}\mathbf{q}_1$ приводит всю совокупность векторов к линейной зависимости, то процесс останавливается и фиксируется значение параметра k_1. При этом возможно разложение

$$\mathbf{P}_{11}^{k_1}\mathbf{q}_1 = -\alpha_{k_1}^{(1)}\mathbf{q}_1 - \alpha_{k_1-1}^{(1)}\mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1 - \ldots - \alpha_1^{(1)}\mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1. \tag{3.7}$$

Если $k_1 < m$, то к первой добавляется вторая цепочка из k_2 векторов по тому же принципу общей линейной независимости:

$$\mathbf{q}_2, \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_2, \, \ldots, \, \mathbf{P}_{11}^{k_2-1}\mathbf{q}_2.$$

Как только добавление очередного вектора вида $\mathbf{P}_{11}^{k_2}\mathbf{q}_2$ приводит всю совокупность уже из двух цепочек векторов к линейной зависимости, то процесс останавливается и фиксируется значение параметра k_2. При этом возможно разложение

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{11}^{k_2}\mathbf{q}_2 = -\alpha_{k_1}^{(12)}\mathbf{q}_1 - \alpha_{k_1-1}^{(12)}\mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1 - \ldots - \alpha_1^{(12)}\mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1 - \\ - \alpha_{k_2}^{(2)}\mathbf{q}_2 - \alpha_{k_2-1}^{(2)}\mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_2 - \ldots - \alpha_1^{(2)}\mathbf{P}_{11}^{k_2-1}\mathbf{q}_2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Формирование $(m \times m)$-матрицы $\mathbf{T}_1$ заканчивается, когда при некотором ℓ выполнится условие $k_1 + \ldots + k_\ell = m$. Таким образом, процесс формирования матрицы замены переменных отличается от прежнего (в доказательстве леммы 2.1) специальной упорядоченностью выбираемых базисных векторов из линейной оболочки векторов матрицы Калмана. Кроме того, в данном случае, в силу полной управляемости системы (3.5), матрица $\mathbf{T}_1$ состоит только из базисных векторов линейной оболочки $\mathrm{Lin} < \mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_{11}\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{P}_{11}^{m-1}\mathbf{Q}_1 >$.

После замены переменных (3.6) в системе (3.5) получим

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \widetilde{\mathbf{P}}_{11}\mathbf{z}_1 + \widetilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{u}, \tag{3.9}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{P}_{11}\mathbf{T}_1, \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{Q}_1.$$

Выясним структуру матриц $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$. Как и в доказательстве леммы 2.1, сначала используем равенство $\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{T}_1$. Рассмотрим его по столбцам. Для первых столбцов имеем

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{p}}_1$ — вектор искомых координат при разложении вектора $\mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1$ по столбцам матрицы $\mathbf{T}_1$. Осталось заметить, что $\mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_1$ — это второй столбец в матрице $\mathbf{T}_1$. Следовательно,

$$\widetilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести, последовательно приравнивая столбцы с номерами $2, \ldots, k_1 - 1$. Так, на $(k_1 - 1)$-м шаге получим

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1-1} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{11}^{k_1-2}\mathbf{q}_1 = \mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1.$$

Откуда

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь единица стоит на k_1-ом месте, так как вектор $\mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1$ совпадает с k_1-м столбцом матрицы $\mathbf{T}_1$.

Рассмотрим равенство столбцов с номерами k_1:

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{P}_{11}^{k_1-1}\mathbf{q}_1 = \mathbf{P}_{11}^{k_1}\mathbf{q}_1.$$

Разложение вектора $\mathbf{P}_{11}^{k_1}\mathbf{q}_1$ по столбцам матрицы $\mathbf{T}_1$ уже известно, оно задано формулой (3.7). Следовательно, имеет место представление

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1} = \begin{pmatrix} -\alpha_{k_1}^{(1)} \\ -\alpha_{k_1-1}^{(1)} \\ \vdots \\ -\alpha_1^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая столбцы с номерами $k_1+1, \ldots, k_1+k_2$, что соответствует второй цепочке столбцов в структуре матрицы $\mathbf{T}_1$, последовательно найдем

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \widetilde{\mathbf{p}}_{k_1+k_2-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \widetilde{\mathbf{p}}_{k_1+k_2} = \begin{pmatrix} -\alpha_{k_1}^{(12)} \\ \vdots \\ -\alpha_1^{(12)} \\ -\alpha_{k_2}^{(2)} \\ \vdots \\ -\alpha_1^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом вектор $\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1+1}$ содержит единицу на (k_1+2)-ом месте, а вектор $\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1+k_2-1}$ — на месте с номером k_1+k_2, так как именно эти места занимают в матрице $\mathbf{T}_1$ столбцы $\mathbf{P}_{11}\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{P}_{11}^{k_2-1}\mathbf{q}_2$ соответственно. Компоненты вектора $\widetilde{\mathbf{p}}_{k_1+k_2}$ представляют собой координаты вектора $\mathbf{P}_{11}^{k_2}\mathbf{q}_2$ при его разложении (3.8) по столбцам матрицы $\mathbf{T}_1$.

Аналогичные рассуждения можно продолжать, приравнивая все последующие столбцы в матричном равенстве $\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \mathbf{P}_{11}\mathbf{T}_1$.

Сказанное выше позволяет сделать следующий вывод. После замены переменных (3.6) матрица $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ новой системы (3.9) будет блочно-треугольной, а по диагонали будут стоять матрицы Фробениуса вида

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k_1}^{(1)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k_1-1}^{(1)} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k_2}^{(2)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k_2-1}^{(2)} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2^{(2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(\ell)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k_\ell}^{(\ell)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{k_\ell-1}^{(\ell)} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_2^{(\ell)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1^{(\ell)} \end{pmatrix}.$$

Размеры этих блоков $(k_1 \times k_1), \ldots, (k_\ell \times k_\ell)$ соответственно.

С учетом введенных обозначений матрицу системы (3.9) можно записать следующим образом

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(1)} & * & \cdots & * \\ \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(\ell)} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где звездочками обозначены ненулевые блоки соответствующих размеров. Представление (3.10) можно назвать *обобщенной формой Фробениуса*.

Далее проанализируем структуру матрицы $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$. Для этого рассмотрим второе соотношение в обозначениях коэффициентов системы (3.9)

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{Q}_1.$$

Обозначим через $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r$ и $\widetilde{\mathbf{q}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{q}}_r$ столбцы матриц $\mathbf{Q}_1$ и $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ соответственно и запишем равенство первых столбцов

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_1.$$

Как и прежде, $\widetilde{\mathbf{q}}_1$ — вектор искомых координат при разложении $\mathbf{q}_1$ по столбцам матрицы $\mathbf{T}_1$. Так как $\mathbf{q}_1$ — первый столбец $\mathbf{T}_1$, то

$$\widetilde{\mathbf{q}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По аналогии, из равенств столбцов с номерами $2, \ldots, \ell$

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{q}}_\ell = \mathbf{q}_\ell$$

соответственно найдем

$$\widetilde{\mathbf{q}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \widetilde{\mathbf{q}}_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Единица в этих векторах последовательно занимает места с номерами $k_1+1,\ \ldots,\ k_1+k_2+\ldots+k_{\ell-1}+1$, так как именно на этих местах стоят столбцы $\mathbf{q}_2,\ldots,\mathbf{q}_\ell$ в матрице $\mathbf{T}_1$.

Заметим, что при формировании матрицы $\mathbf{T}_1$ возможны два варианта: 1) $\ell=r$ и 2) $\ell<r$.

В первом случае матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ будет иметь вид

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 0\\ 0 & 1 & & 0\\ 0 & 0 & & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 0\\ 0 & 0 & & 1\\ 0 & 0 & & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_\ell \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_\ell$ — векторы размерностей $k_1,\ldots,k_\ell$ соответственно, являющиеся первыми столбцами единичных матриц размеров $(k_1\times k_1),\ldots,(k_\ell\times k_\ell)$.

Во втором случае необходимо продолжить изучение свойств матрицы $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$. Для этого запишем равенства столбцов

$$\mathbf{T}_1\widetilde{\mathbf{q}}_k=\mathbf{q}_k,$$

где $k=\ell+1,\ldots,r$. Векторы $\mathbf{q}_k$ с этими номерами не входят в состав матрицы $\mathbf{T}_1$. Поэтому при разложении их по столбцам $\mathbf{T}_1$ будут найдены некоторые произвольные векторы координат $\widetilde{\mathbf{q}}_k$. Однозначность их определения гарантируется единственностью разложения вектора по базису $(\det\mathbf{T}_1\neq 0)$.

Окончательно матрицу $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ в этом случае можно записать следующим образом

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_1 = (\widetilde{\mathbf{q}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{q}}_\ell, \widetilde{\mathbf{q}}_{\ell+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{q}}_r) =$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_\ell & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Здесь звездочки символизируют произвольные компоненты векторов $\widetilde{\mathbf{q}}_{\ell+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{q}}_r$.

Как и в доказательстве леммы 2.1, рассмотрим допустимое управление с учетом замены переменных (3.6)

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{T}_1\mathbf{z}_1 = \widetilde{\mathbf{C}}_1\mathbf{z}_1, \quad (3.13)$$

где $\widetilde{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{T}_1$. Далее запишем систему (3.9), замкнутую управлением (3.13):

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = (\widetilde{\mathbf{P}}_{11} + \widetilde{\mathbf{Q}}_1\widetilde{\mathbf{C}}_1)\mathbf{z}_1. \quad (3.14)$$

Теперь задача сводится к поиску такой матрицы $\widetilde{\mathbf{C}}_1$, чтобы матрица системы (3.14) имела наперед заданные собственные числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$.

Если в конкретной прикладной задаче при формировании матрицы $\mathbf{T}_1$ возникает ситуация $\ell = r$, т.е. $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ имеет представление (3.11), то матрицу $\widetilde{\mathbf{C}}_1$ следует искать в виде

$$\widetilde{\mathbf{C}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{c}_\ell \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_\ell$ — строки длины $k_1, \ldots, k_\ell$ соответственно, остальные блоки заполнены нулевыми элементами.

Во втором случае, когда $\ell < r$, а $\widetilde{\mathbf{Q}}_1$ имеет представление (3.12), матрицу $\widetilde{\mathbf{C}}_1$ нужно искать в виде

$$\widetilde{\mathbf{C}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{c}_\ell \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Здесь нижний нулевой блок имеет размеры $((r-\ell)\times m)$.

С учетом проведенного анализа структуры матриц коэффициентов системы (3.9) и введенных обозначений, замкнутую систему (3.14) можно записать следующим образом

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(1)} + \mathbf{e}_1\mathbf{c}_1 & * & \cdots & * \\ \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(2)} + \mathbf{e}_2\mathbf{c}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(\ell)} + \mathbf{e}_\ell\mathbf{c}_\ell \end{pmatrix} \mathbf{z}_1. \qquad (3.15)$$

Это представление имеет место как в случае $\ell = r$, так и при $\ell < r$.

Осталось заметить, что спектр матрицы системы (3.15) есть объединение спектров диагональных блоков $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}^{(k)} + \mathbf{e}_k\mathbf{c}_k$, $k = \overline{1,\ell}$. При этом задача управления спектром каждого из них конструктивно решена при доказательстве леммы 3.1. Следовательно, строки $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_\ell$ можно построить как и строку $\mathbf{c}_0$ из леммы 3.1, затем из них сформировать матрицу $\widetilde{\mathbf{C}}_1$. Далее найти $\mathbf{C}_1 = \widetilde{\mathbf{C}}_1\mathbf{T}_1^{-1}$ и окончательно построить управление (3.13)

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{C}}_1\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{y}_1.$$

Эта формула завершает доказательство леммы. ■

§4. Теорема о стабилизации линейной системы. Общий алгоритм решения задачи стабилизации

В данном параграфе будут обобщены все предыдущие результаты, связанные с построением стабилизирующих управлений в линейных стационарных системах.

4.1. Необходимые и достаточные условия стабилизируемости линейной системы. Объединить леммы 2.1, 3.1, 3.2 можно в виде следующей общей теоремы.

Теорема 4.1. *Для того чтобы существовало стабилизирующее управление* (2.2) *для системы* (2.1), *необходимо и достаточно, чтобы вещественные части неуправляемых собственных чисел были отрицательны. Или, что то же самое, неуправляемая подсистема системы* (2.1) *была асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Необходимость. Если существует хотя бы одно неуправляемое собственное число с неотрицательной вещественной частью, то какое бы управление вида (2.2) ни выбрать, система будет иметь это собственное число в составе своего спектра. Следовательно, она не будет асимптотически устойчивой по Ляпунову при любом управлении.

Достаточность вытекает из конструктивных доказательств лемм 2.1, 3.1, 3.2. ■

Следствие. Если система (2.1) полностью управляема, то она стабилизируема управлением вида (2.2).

4.2. Общий алгоритм построения стабилизирующего управления. Основу алгоритма составляют два этапа построения матриц двух замен переменных.

1. Для системы (2.1) построим матрицу $\mathbf{T}$ как в доказательстве леммы 2.1, но при этом базис линейной оболочки столбцов матрицы Калмана сформируем как в доказательстве леммы 3.2. Эта процедура одновременно позволит ответить на вопрос о полной управляемости системы (2.1). Возможны два случая.

1.1. В случае полной управляемости

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{q}_1, \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}^{k_1-1}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\ell, \mathbf{P}\mathbf{q}_\ell, \ldots, \mathbf{P}^{k_\ell-1}\mathbf{q}_\ell\right),$$

где $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\ell$, $1 \leqslant \ell \leqslant r$, — столбцы матрицы $\mathbf{Q}$, $k_1 + \ldots + k_\ell = n$.

1.2. В случае неполной управляемости

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{q}_1, \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}^{k_1-1}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_\ell, \mathbf{P}\mathbf{q}_\ell, \ldots, \mathbf{P}^{k_\ell-1}\mathbf{q}_\ell, \widetilde{\mathbf{s}}_{m+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{s}}_n\right),$$

где $k_1 + \ldots + k_\ell = m = \operatorname{rang}\left(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\right)$, $\widetilde{\mathbf{s}}_{m+1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{s}}_n$ — дополнение базиса линейной оболочки столбцов матрицы Калмана до базиса линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

2. В обоих случаях построим матрицу системы после первой замены переменных (2.4): $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{PT}$. Это можно сделать через непосредственное вычисление $\mathbf{T}^{-1}$ или решая n алгебраических систем $\mathbf{T}\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{PT}$ относительно столбцов матрицы $\overline{\mathbf{P}}$ методом Гаусса.

2.1. В случае полной управляемости матрица $\overline{\mathbf{P}}$ будет блочно-треугольной, а по диагонали будут стоять матрицы Фробениуса $\mathbf{P}_{01}, \ldots, \mathbf{P}_{0\ell}$ вида, аналогичного $\mathbf{P}_0$ (см. (3.1)). Их размеры $(k_1 \times k_1), \ldots, (k_\ell \times k_\ell)$ соответственно.

2.2. В случае неполной управляемости матрица $\overline{\mathbf{P}}$ также блочно-треугольная, но последний диагональный блок будет соответствовать неуправляемой подсистеме: $\mathbf{P}_{01}, \ldots, \mathbf{P}_{0\ell}, \mathbf{P}_{22}$. При этом $\mathbf{P}_{22}$ — $((n-m) \times (n-m))$-матрица, как и в доказательстве леммы 2.1.

3. Если реализовался случай 2.1, то по следствию к теореме 4.1 стабилизирующее управление существует, решение задачи продолжается.

Если реализовался случай 2.2, то по теореме 4.1 необходимо проверить неуправляемую подсистему с матрицей $\mathbf{P}_{22}$ на асимптотическую устойчивость. Это можно сделать, например, по критерию Рауса — Гурвица [5]. Если все ее собственные числа будут иметь отрицательные вещественные части, то стабилизирующее управление существует. В противном случае, решение задачи прекращается, построить стабилизирующее управление невозможно.

4. Построим аналог матрицы $\mathbf{K}_0$ или $\widetilde{\mathbf{K}}_0$ второй замены переменных (см. лемму 3.1 и упражнение 3.2).

4.1. В случае полной управляемости она будет диагональной

$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}(\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_\ell).$$

При этом каждый блок $\mathbf{K}_s$ строится по $\mathbf{P}_{0s}$, $s=\overline{1,\ell}$, точно так же, как матрицы $\mathbf{K}_0$ и $\widetilde{\mathbf{K}}_0$ были построены по $\mathbf{P}_0$ в доказательстве леммы 3.1 и упражнении 3.2.

4.2. В случае неполной управляемости

$$\mathbf{K}=\operatorname{diag}(\mathbf{K}_1,\ldots,\mathbf{K}_\ell,\mathbf{E}_{n-m}).$$

Здесь $\mathbf{E}_{n-m}$ — единичная $((n-m)\times(n-m))$-матрица, соответствующая неуправляемой подсистеме. Этот выбор объясняется тем, что преобразование неуправляемого блока смысла не имеет.

5. Каждому диагональному блоку $\mathbf{P}_{0s}$ поставим в соответствие эталонный многочлен $f_э^{(s)}(\lambda)$ степени k_s, предварительно зафиксировав эталонные собственные числа. По его коэффициентам $\beta_1^{(s)},\ldots,\beta_{k_s}^{(s)}$ и коэффициентам $\alpha_1^{(s)},\ldots,\alpha_{k_s}^{(s)}$ характеристического полинома матрицы $\mathbf{P}_{0s}$ построим строку $\boldsymbol{\gamma}_s$ с элементами

$$\gamma_1^{(s)}=\alpha_{k_s}^{(s)}-\beta_{k_s}^{(s)},\ldots,\gamma_{k_s}^{(s)}=\alpha_1^{(s)}-\beta_1^{(s)}$$

(см. доказательство леммы 3.1). Если в пункте 4 настоящего алгоритма матрица $\mathbf{K}$ строилась по аналогии с матрицей $\widetilde{\mathbf{K}}_0$, то необходимо взять строку $\boldsymbol{\gamma}_s$ с элементами

$$\gamma_1^{(s)}=\alpha_1^{(s)}-\beta_1^{(s)},\ldots,\gamma_{k_s}^{(s)}=\alpha_{k_s}^{(s)}-\beta_{k_s}^{(s)}.$$

Далее из строчек $\boldsymbol{\gamma}_s$, $s=\overline{1,\ell}$, сформируем $(r\times n)$-матрицу

5.1. $$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_\ell\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

5.2. $$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \gamma_\ell & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Здесь 5.1 — случай полной управляемости, 5.2 — случай неполной управляемости.

6. Искомое стабилизирующее управление имеет вид

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{z} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{y} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x},$$

или окончательно $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, где $\mathbf{C} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{T}^{-1}$. При этом матрицу $\mathbf{C}$ можно вычислять непосредственно по указанной формуле, либо решая r линейных алгебраических систем относительно ее строк:

$$\mathbf{CTK} = \boldsymbol{\Gamma} \Longleftrightarrow (\mathbf{TK})^T\mathbf{C}^T = \boldsymbol{\Gamma}^T.$$

Упражнение 4.1. Определите длины нулевых строк, обозначенных в матрице $\boldsymbol{\Gamma}$ символами $\mathbf{0}$.

Упражнение 4.2. Постройте алгоритм вычисления (оценки) времени переходного процесса в общем случае, включая случай неполной управляемости системы.

4.3. Стабилизация разностных систем. Прежде чем сформулировать задачу стабилизации, необходимо изложить элементы теории устойчивости разностных систем. Приведем краткие сведения из монографии [2], в которой заинтересованный читатель сможет найти достаточно полную и систематизированную информацию по данному вопросу.

Линейная стационарная разностная система в отклонениях имеет вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n-мерный вектор фазового состояния; $\mathbf{P}$ — постоянная, вещественная $(n \times n)$-матрица; целочисленный аргумент k принимает значения $k = 0, 1, \ldots$

Определение 4.1. Нулевое решение системы (4.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $k_0 \geqslant 0$ и любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(k_0, \varepsilon) > 0$, что при всех $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(k_0, \varepsilon)$, и любых $k \geqslant k_0$ для решения $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0, k_0)$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0, k_0)\| < \varepsilon$.

Определение 4.2. Если в определении устойчивости число $\delta(k_0, \varepsilon)$ можно выбрать не зависящим от k_0, то говорят, что нулевое решение *устойчиво равномерно относительно* $k_0 \geqslant 0$.

Определение 4.3. Нулевое решение системы (4.1) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно является устойчивым и для любого $k_0 \geqslant 0$ существует число $\delta'(k_0) > 0$ такое, что при всех $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}_0\| < \delta'(k_0)$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0, k_0)\| = 0.$$

Определение 4.4. Нулевое решение системы (4.1) называется *асимптотически устойчивым равномерно по* k_0 *и* $\mathbf{x}_0$, если оно равномерно устойчиво по Ляпунову и существует не зависящее от k_0 число $\delta' > 0$ такое, что $\|\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0, k_0)\| \to 0$ при $k - k_0 \to \infty$ равномерно относительно k_0 и $\mathbf{x}_0$ на множестве $k_0 \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}_0\| < \delta'$.

Известно, что система в отклонениях (4.1) не зависит от выбора некоторого частного решения исходной линейной системы. Поэтому все решения любой линейной системы одновременно или устойчивы, или асимптотически устойчивы, или неустойчивы. Следовательно, можно говорить об устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) линейной системы. Кроме того, данный вопрос очевидно эквивалентен вопросу об устойчивости нулевого решения системы (4.1). Изложенные факты позволяют формулировать критерии устойчивости только для однородной системы (4.1).

Теорема 4.2. *Система* (4.1) *является равномерно асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы* $\mathbf{P}$ *по модулю меньше единицы.*

Рассмотрим управляемую систему линейных разностных уравнений

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{Q}\mathbf{u}(k), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n-мерный вектор фазового состояния; $\mathbf{u}(k)$ — r-мерный вектор управлений; $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ — постоянные, вещественные матрицы соответствующих размеров; целочисленный аргумент k принимает значения $k = 0, 1, \ldots$

Допустимое управление вида линейной обратной связи будем искать в форме

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k). \tag{4.3}$$

Задача стабилизации системы (4.2) состоит в том, чтобы построить допустимое управление (4.3), при котором замкнутая система

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x}(k) \tag{4.4}$$

асимптотически устойчива.

Учитывая теоремы 4.1, 4.2, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 4.3. *Для того чтобы существовало стабилизирующее управление* (4.3) *для системы* (4.2), *необходимо и достаточно, чтобы неуправляемые собственные числа были по модулю меньше единицы. Или, что то же самое, неуправляемая подсистема системы* (4.2) *была асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Замечание 4.1. Теорема 4.3 позволяет использовать общий алгоритм построения стабилизирующего управления, изложенный в пункте 4.2, для решения задачи стабилизации линейной разностной системы (4.2). При этом, учитывая теорему 4.2, необходимо выбирать эталонные собственные числа по модулю меньшими единицы.

§5. Стабилизация нелинейных систем по линейному приближению

Рассмотрим нелинейную систему в отклонениях, у которой выделено линейное приближение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{5.1}$$

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно. При этом нелинейная вектор-функция $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ удовлетворяет условиям: 1) $\mathbf{h}(t,\mathbf{0},\mathbf{0})\equiv\mathbf{0}$; 2) она определена и непрерывна в области

$$t\geqslant 0,\quad \|\mathbf{x}\|\leqslant H_1,\quad \|\mathbf{u}\|\leqslant H_2$$

и в ней выполнено неравенство

$$\|\mathbf{h}(t,\mathbf{x},\mathbf{u})\|\leqslant\alpha(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{u}\|)^{1+\beta}, \tag{5.2}$$

где α,β — положительные постоянные.

Задача стабилизации системы (5.1) состоит в том, чтобы построить допустимое управление (2.2)

$$\mathbf{u}=\mathbf{C}\mathbf{x},$$

при котором нулевое решение замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}}=(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x}+\mathbf{h}(t,\mathbf{x},\mathbf{C}\mathbf{x}) \tag{5.3}$$

асимптотически устойчиво.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{\mathbf{x}}_1=\mathbf{P}\mathbf{x}_1+\mathbf{Q}\mathbf{u}_1, \tag{5.4}$$

где матрицы $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ те же, что и в (5.1). Система (5.4) называется *системой линейного приближения* для (5.1).

Теорема 5.1. *Если при управлении* $\mathbf{u}_1=\mathbf{C}\mathbf{x}_1$ *система линейного приближения* (5.4) *асимптотически устойчива, то нулевое решение системы* (5.1) *асимптотически устойчиво при управлении* $\mathbf{u}=\mathbf{C}\mathbf{x}$.

Доказательство. По условию теоремы для системы линейного приближения (5.4) существует стабилизирующее управление $\mathbf{u}_1=\mathbf{C}\mathbf{x}_1$. Будем считать, что матрица $\mathbf{C}$ построена по алгоритму §4. Тогда замкнутая система

$$\dot{\mathbf{x}}_1=(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x}_1 \tag{5.5}$$

асимптотически устойчива. Отметим, что система (5.5) — линейная с постоянными коэффициентами. Для нее асимптотическая устойчивость эквивалентна экспоненциальной. По критерию Ляпунова

[5, 9] найдутся две положительно определенные квадратичные формы с постоянными матрицами $\mathbf{V}, \mathbf{W}$:

$$v(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1^T \mathbf{V} \mathbf{x}_1, \quad w(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1^T \mathbf{W} \mathbf{x}_1,$$

удовлетворяющие условию

$$\frac{dv(\mathbf{x}_1)}{dt}\bigg|_{(5.5)} = -w(\mathbf{x}_1).$$

На практике, при построении этих квадратичных форм, в качестве $w(\mathbf{x}_1)$ обычно выбирают $w(\mathbf{x}_1) = \|\mathbf{x}_1\|^2$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, т.е. полагают $\mathbf{W} = \mathbf{E}$. Тогда матрица $\mathbf{V}$ находится из матричного уравнения Ляпунова

$$(\mathbf{P} + \mathbf{QC})^T \mathbf{V} + \mathbf{V}(\mathbf{P} + \mathbf{QC}) = -\mathbf{E}.$$

Будем считать, что матрица $\mathbf{V}$ найдена.

Рассмотрим теперь управление $\mathbf{u} = \mathbf{Cx}$, где матрица $\mathbf{C}$ — та самая, которая была построена для стабилизации системы линейного приближения, и покажем, что оно является стабилизирующим для исходной нелинейной системы (5.1). Замкнутая система имеет вид (5.3), поэтому необходимо показать асимптотическую устойчивость ее нулевого решения.

Введем вспомогательную квадратичную форму $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$ с найденной матрицей $\mathbf{V}$ и вычислим ее полную производную в силу системы (5.3). Имеем

$$\frac{dv(\mathbf{x})}{dt}\bigg|_{(5.3)} = \big(\operatorname{grad} v(\mathbf{x}), (\mathbf{P} + \mathbf{QC})\mathbf{x} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Cx})\big).$$

По построению $v(\mathbf{x})$

$$\big(\operatorname{grad} v(\mathbf{x}), (\mathbf{P} + \mathbf{QC})\mathbf{x}\big) = -\|\mathbf{x}\|^2.$$

Тогда

$$\frac{dv(\mathbf{x})}{dt}\bigg|_{(5.3)} = -\|\mathbf{x}\|^2 + \big(\operatorname{grad} v(\mathbf{x}), \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Cx})\big). \tag{5.6}$$

Выпишем следующие очевидные неравенства. Во-первых,

$$\|\operatorname{grad} v(\mathbf{x})\| \leqslant 2\|\mathbf{V}\|\|\mathbf{x}\|.$$

Во-вторых, с учетом (5.2) получим оценку

$$\|\mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Cx})\| \leqslant \alpha(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{C}\|\|\mathbf{x}\|)^{1+\beta} = \alpha(1 + \|\mathbf{C}\|)^{1+\beta}\|\mathbf{x}\|^{1+\beta}.$$

Далее, используя эти факты и неравенство Коши — Буняковского, найдем оценку сверху для модуля второго слагаемого в (5.6):

$$\left|\big(\operatorname{grad} v(\mathbf{x}), \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Cx})\big)\right| \leqslant \|\operatorname{grad} v(\mathbf{x})\|\|\mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{Cx})\| \leqslant \gamma\|\mathbf{x}\|^{2+\beta},$$

где $\gamma = 2\alpha\|\mathbf{V}\|(1+\|\mathbf{C}\|)^{1+\beta}$ — постоянная величина. Таким образом, справедлива двусторонняя оценка для полной производной $v(\mathbf{x})$ в силу системы (5.3):

$$-\|\mathbf{x}\|^2\big(1 + \gamma\|\mathbf{x}\|^\beta\big) \leqslant \left.\frac{dv(\mathbf{x})}{dt}\right|_{(5.3)} \leqslant -\|\mathbf{x}\|^2\big(1 - \gamma\|\mathbf{x}\|^\beta\big). \qquad (5.7)$$

В достаточно малой окрестности нуля, а именно, для тех $\mathbf{x}$, для которых

$$\|\mathbf{x}\|^\beta < \frac{1}{\gamma}$$

функция $-\|\mathbf{x}\|^2\big(1 - \gamma\|\mathbf{x}\|^\beta\big)$ отрицательно определена и, следовательно, в силу (5.7), нулевое решение системы (5.3) не просто асимптотически устойчиво, но и экспоненциально устойчиво [7].

Таким образом, построенное управление $\mathbf{u} = \mathbf{Cx}$ решает задачу стабилизации для системы (5.1). ■

Замечание 5.1. Доказательство теоремы 5.1 конструктивно. Для применения ее на практике необходимо: 1) выделить в исходной нелинейной системе линейное приближение, т.е. записать ее в виде (5.1); 2) проверить выполнение неравенства (5.2); 3) по алгоритму §4 построить стабилизирующее управление для системы линейного приближения.

Замечание 5.2. В заключение первой главы отметим, что теория стабилизации имеет свое развитие на случай линейных нестационарных систем [10]. Аналог теоремы 5.1 для нелинейной системы с нестационарной системой линейного приближения доказан в [7, с. 82, 83].

ГЛАВА 2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В постановке задачи стабилизации (см. §2, главы 1) отмечалось, что при построении стабилизирующего управления вида линейной обратной связи (2.2) значение вектора отклонения от программного движения $\mathbf{x}$ предполагается измерять специальными датчиками или приборами в процессе функционирования объекта управления. Соответственно, при разработке всех алгоритмов стабилизации он считался известной величиной, т.е. все элементы вектора $\mathbf{x}$ были доступны для измерения. В этом состоит специфика так называемого *случая полной обратной связи*. В данной главе рассматривается ситуация, когда указанное предположение не выполняется и для измерения доступны лишь некоторые компоненты вектора отклонения или их линейные комбинации. Решение задач управления при таком предположении принято называть *случаем неполной обратной связи*.

§6. Стабилизация линейной системы с применением идентификатора полного порядка

6.1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор отклонения от программного движения, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор отклонения от программного управления, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно.

В задаче стабилизации для случая полной обратной связи допустимым считалось управление вида линейной обратной связи

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{6.2}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная $(r \times n)$-матрица. Было необходимо построить такую матрицу $\mathbf{C}$, при которой замкнутая система (6.1), (6.2)

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x} \tag{6.3}$$

асимптотически устойчива. Эта задача полностью решена в главе 1. Однако, как уже отмечалось выше, далеко не в каждой прикладной задаче информация о векторе отклонений $\mathbf{x}$ является доступной. Поэтому возникает следующая

Задача стабилизации при неполной обратной связи. Будем считать, что для измерения доступны только отдельные компоненты вектора $\mathbf{x}$ или их линейные комбинации, т.е. вместе с системой (6.1) задано уравнение измерителя (или наблюдателя)

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \tag{6.4}$$

где $\mathbf{y}$ — m-мерный известный вектор измерений, $\mathbf{R}$ — заданная, постоянная $(m \times n)$-матрица. В литературе уравнение (6.4) называют *уравнением выхода*, а вектор $\mathbf{y}$ — выходом системы (6.1) [3].

Требуется построить такую оценку $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, чтобы она обладала свойством

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{6.5}$$

Если это удастся, то стабилизирующее управление для системы (6.1) можно искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{6.6}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная $(r \times n)$-матрица.

Определение 6.1. Динамическую систему, которая формирует на выходе вектор $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ по данным о выходах (элементах векторной функции $\mathbf{y}$) и входах (элементах вектора управления $\mathbf{u}$) системы, будем называть *идентификатором состояния.*

Определение 6.2. Линейная динамическая система, выходом которой является вектор $\widehat{\mathbf{x}}(t)$, называется *асимптотическим идентификатором состояния* линейной системы (6.1), (6.4), если вектор оценки $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ удовлетворяет свойству (6.5).

Определения 6.1, 6.2 взяты из монографии [3]. Там же изложены методы построения асимптотических идентификаторов состояния для линейных стационарных систем. Следуя этой работе, перейдем к решению поставленной задачи, которая сводится к построению асимптотического идентификатора и использованию его выходного сигнала $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ в стабилизирующем управлении (6.6).

6.2. Синтез асимптотического идентификатора полного порядка. Перейдем к решению поставленной задачи. Будем строить идентификатор в виде

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{R}\widehat{\mathbf{x}}), \tag{6.7}$$

где неизвестная $(n{\times}m)$-матрица $\mathbf{L}$ подлежит определению, а слагаемое $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{R}\widehat{\mathbf{x}})$ учитывает качество оценки состояния, поскольку с учетом (6.4) $\mathbf{y} - \mathbf{R}\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})$ и в идеальной ситуации при $\mathbf{x}(t) \equiv \widehat{\mathbf{x}}(t)$ система (6.7) с точностью до обозначений совпадает с системой (6.1).

Таким образом задача сводится к выбору матрицы $\mathbf{L}$ так, чтобы имело место асимптотическое свойство оценки (6.5) и существовало стабилизирующее управление (6.6) для системы (6.1).

Для решения этой задачи запишем совместно системы (6.1), (6.7) с учетом уравнения измерителя (6.4) и допустимого управления (6.6):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}, \\ \dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{R}\widehat{\mathbf{x}}). \end{cases} \tag{6.8}$$

В системе (6.8) сделаем неособую замену переменных

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t), \\ \overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \tag{6.9}$$

Переменная $\overline{\mathbf{x}}(t)$ имеет очевидный смысл: она показывает качество оценки состояния. В новых переменных система (6.8) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C} & -\mathbf{Q}\mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P} - \mathbf{L}\mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{x}} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Система (6.10) состоит из двух подсистем. Первая является исходной системой, замкнутой управлением (6.6), а вторая описывает качество оценки состояния системы по измерениям (6.4). Если нулевое решение системы (6.10) будет асимптотически устойчиво, то это будет означать, что построено стабилизирующее управление (6.6) при помощи оценки $\widehat{\mathbf{x}}(t)$, а сама оценка удовлетворяет требованию (6.5), так как если $\overline{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$, то $\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$.

Поскольку собственные числа матрицы системы (6.10) совпадают с собственными числами матриц $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ и $\mathbf{P}-\mathbf{LR}$, а матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{L}$ мы вправе выбирать, то исходная задача сводится к построению $\mathbf{C}$ и $\mathbf{L}$ так, чтобы собственные числа матриц $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ и $\mathbf{P}-\mathbf{LR}$ лежали в левой полуплоскости.

Рассмотрим две вспомогательные системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{u}_1, \tag{6.11}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{P}^T\mathbf{x}_2 - \mathbf{R}^T\mathbf{u}_2, \tag{6.12}$$

где матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ те же, что и в (6.1), (6.4), а векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}_2$ соответствующих размерностей имеют характер формальных обозначений. Используя системы (6.11), (6.12), можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Для того чтобы задача стабилизации системы* (6.1) *с использованием измерений* (6.4) *имела решение в виде стабилизирующего управления* (6.6)*, необходимо и достаточно, чтобы вещественные части неуправляемых собственных чисел систем* (6.11)*,* (6.12) *были отрицательны.*

Доказательство. Действительно, по известной теореме [7] условия данной теоремы являются необходимыми и достаточными, чтобы в системах (6.11), (6.12) существовали стабилизирующие управления вида $\mathbf{u}_1 = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{u}_2 = \overline{\mathbf{L}}^T\mathbf{x}_2$ такие, что собственные числа матриц $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\overline{\mathbf{C}}$ и $\mathbf{P}^T - \mathbf{R}^T\overline{\mathbf{L}}^T$ лежали в левой полуплоскости. Черта сверху означает конкретное решение задачи стабилизации для конкретной системы. Таким образом, найденные матрицы $\overline{\mathbf{C}}$ и $\overline{\mathbf{L}}$ решают поставленную задачу стабилизации с использованием измерений. При этом очевидно, что собственные числа матриц $\mathbf{P}^T - \mathbf{R}^T\overline{\mathbf{L}}^T$ и $\mathbf{P} - \overline{\mathbf{L}}\mathbf{R}$ совпадают. ■

Замечание 6.1. Когда найдена матрица $\overline{\mathbf{L}}$, то говорят, что построен асимптотический идентификатор состояния (6.7) для системы (6.1), позволяющий построить стабилизирующее управление (6.6) по измерениям (6.4). Он называется *асимптотическим идентификатором полного порядка*, так как размерность вектора оценки $\widehat{\mathbf{x}}$ совпадает с размерностью вектора фазового состояния системы $\mathbf{x}$.

Замечание 6.2. Практическое применение теоремы 6.1 состоит в решении двух стандартных задач стабилизации для вспомогательных систем (6.11), (6.12). Соответственно, для этой цели применимы все результаты главы 1, как качественного характера (возможно или невозможно решение задачи), так и прикладного (обеспечение наперед заданных собственных чисел для замкнутой системы и идентификатора, обеспечение заданного времени переходного процесса и т.д.).

§7. Идея Люенбергера — идентификатор пониженного порядка

Для постановки задачи вновь рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор отклонения от программного движения, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор отклонения от программного управления, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно.

Как и в §6 будем считать, что для измерения доступны только отдельные компоненты вектора $\mathbf{x}$ или их линейные комбинации, т.е. вместе с системой (7.1) задано уравнение измерителя (или наблюдателя)

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \tag{7.2}$$

где $\mathbf{y}$ — m-мерный известный вектор измерений, $\mathbf{R}$ — заданная, постоянная $(m \times n)$-матрица, причем $\operatorname{rang}\mathbf{R} = m$.

При построении оценки состояния исходной системы в §6 информация (7.2) в виде вектора $\mathbf{y}$ использовалась лишь косвенно, т.е. для построения идентификатора полного порядка, а сама оценка $\widehat{\mathbf{x}}$ была n-мерным вектором, соответствующим по размерности вектору $\mathbf{x}$.

Идея Люенбергера состоит в изменении постановки задачи следующим образом [3]. Если в рамках прикладной задачи предполагается, что измерения (7.2) достаточно точны и могут напрямую использоваться для оценки состояния исходной системы (7.1), тогда требуется выбрать лишь недостающие $n-m$ линейные комбинации компонент вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{7.3}$$

где $\mathbf{z}$ — $(n-m)$-мерный вектор, $\mathbf{T}$ — постоянная $((n-m)\times n)$-матрица, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Матрица $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$ должна быть неособой, $\operatorname{rang}\mathbf{S} = n$.

2. Для вектора $\mathbf{z}$ должен существовать асимптотический идентификатор, позволяющий находить оценку $\widehat{\mathbf{z}}$, удовлетворяющую свойству

$$\widehat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{7.4}$$

Если эта задача будет решена, то подход к построению вектора оценки $\widehat{\mathbf{x}}$ из §6 можно модифицировать следующим образом. Запишем совместно соотношения (7.2), (7.3):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{7.5}$$

Из (7.5) получаем

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Это возможно, так как матрица $\mathbf{S}$ считается неособой по построению. Если предположить, что найден вектор $\widehat{\mathbf{z}}$, то для вектора оценки состояния исходной системы получим выражение

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

В результате стабилизирующее управление для системы (7.1) можно будет искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{7.8}$$

где вектор оценки $\widehat{\mathbf{x}}$ определяется по формуле (7.7).

Замечание 7.1. Еще раз отметим, что принципиальное отличие данной задачи от предыдущей состоит в том, что информация (7.2) о векторе $\mathbf{x}$ используется непосредственно в (7.7) для формирования его оценки. При этом слова из постановки задачи «требуется выбрать линейные комбинации компонент вектора $\mathbf{x}$» с алгебраической точки зрения означают, что необходимо указать алгоритм поиска матрицы $\mathbf{T}$, удовлетворяющей условиям **1**, **2** в постановке задачи.

Замечание 7.2. Чтобы формулы (7.8), (7.7) были конструктивны, необходим метод построения идентификатора для вектора $\mathbf{z}$. Его размерность меньше размерности исходной системы. Такие идентификаторы были названы *идентификаторами Люенбергера* по фамилии автора [11, 12], их построению посвящены следующие параграфы настоящей главы.

§8. Стабилизация линейной системы с применением идентификатора Люенбергера

Приступим к решению задачи, поставленной в §7. В системе (7.1) сделаем замену переменных (7.6)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \mathbf{SPS}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \mathbf{SQu}, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$. Введем обозначения для блоков матриц

$$\mathbf{SPS}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{zz} & \mathbf{P}_{zy} \\ \mathbf{P}_{yz} & \mathbf{P}_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{SQ} = \begin{pmatrix} \mathbf{TQ} \\ \mathbf{RQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_z \\ \mathbf{Q}_y \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Тогда систему (8.1) можно переписать в следующей форме

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}_{zz}\mathbf{z} + \mathbf{P}_{zy}\mathbf{y} + \mathbf{Q}_z\mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}_{yz}\mathbf{z} + \mathbf{P}_{yy}\mathbf{y} + \mathbf{Q}_y\mathbf{u}. \end{cases} \tag{8.3}$$

Первое уравнение в (8.3) описывает изменение вектора $\mathbf{z}(t)$, поэтому идентификатор для его оценки будем искать в виде

$$\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = \mathbf{P}_{zz}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{P}_{zy}\mathbf{y} + \mathbf{Q}_z\mathbf{u}. \tag{8.4}$$

При этом проблема выбора матрицы $\mathbf{T}$ в (7.3), (7.5) с учетом обозначений (8.2) трансформируется в проблему выбора матриц $\mathbf{P}_{zz}$, $\mathbf{P}_{zy}$, $\mathbf{Q}_z$.

Найдем условия, при выполнении которых имеет место асимптотическое свойство оценки (7.4). Для этого введем новую переменную

$$\overline{\mathbf{z}}(t) = \widehat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t),$$

которая описывает качество оценки, и построим уравнение, описывающее ее динамику. С учетом (8.3), (8.4) получим

$$\dot{\overline{\mathbf{z}}} = \mathbf{P}_{zz}\overline{\mathbf{z}}. \tag{8.5}$$

Таким образом, для выполнения свойства (7.4) необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{P}_{zz}$ имели отрицательные вещественные части.

Перейдем к построению стабилизирующего управления (7.8), (7.7). Для этого системы (7.1), (8.4) запишем совместно с учетом измерителя (7.2). В матричной форме получим

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\widehat{\mathbf{z}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{P}_{zy}\mathbf{R} & \mathbf{P}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \widehat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_z \end{pmatrix} \mathbf{u}. \tag{8.6}$$

В (8.6) сделаем неособую замену переменных с учетом (7.3)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t), \\ \overline{\mathbf{z}}(t) = \widehat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{T}\mathbf{x}(t). \end{cases} \tag{8.7}$$

В результате имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\overline{\mathbf{z}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{P}_{zy}\mathbf{R} + \mathbf{P}_{zz}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{P} & \mathbf{P}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}. \tag{8.8}$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{T}\mathbf{P} = \mathbf{P}_{zy}\mathbf{R} + \mathbf{P}_{zz}\mathbf{T}. \tag{8.9}$$

С одной стороны, если бы матрица $\mathbf{T}$ была задана, то с учетом введенных обозначений (8.2) уравнение (8.9) было бы истинным равенством, а соответствующий блок матрицы системы (8.8) стал бы нулевым. С другой стороны, матрица $\mathbf{T}$ пока неопределена. Поэтому, принимая во внимание (8.2), (8.5), она должна удовлетворять уравнению (8.9). В результате возникает следующая алгебраическая задача. Найти матрицу $\mathbf{T}$, удовлетворяющую матричному уравнению (8.9), и при этом чтобы $\operatorname{rang}\mathbf{S} = n$, а собственные числа матрицы $\mathbf{P}_{zz}$ имели бы отрицательные вещественные части.

Если предположить, что такая матрица $\mathbf{T}$ найдена, то асимптотический идентификатор (8.4) для вектора $\mathbf{z}(t)$ можно считать построенным, а вектор оценки $\widehat{\mathbf{z}}(t)$ — определенным. Следовательно, можно приступить к построению стабилизирующего управления в виде (7.8), (7.7).

С учетом сказанного выше система (8.8) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\overline{\mathbf{z}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{u}. \tag{8.10}$$

Прежде чем замкнуть (8.10) управлением (7.8), необходимо выразить вектор $\widehat{\mathbf{x}}$ через новые фазовые переменные $\mathbf{x}$, $\overline{\mathbf{z}}$. Для этого рассмотрим вектор, описывающий качество итоговой оценки состояния системы (7.1): $\overline{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$. Используя (7.6), (7.7), получим

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} - \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Тогда для $\widehat{\mathbf{x}}$ имеем выражение

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

которое позволяет записать допустимое управление (7.8) в новых переменных

$$\mathbf{u} = \mathbf{C} \left(\mathbf{x} + \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{C} \left(\mathbf{x} + \mathbf{S}_z^{-1} \overline{\mathbf{z}} \right), \tag{8.11}$$

где $\mathbf{S}_z^{-1}$ — блок матрицы $\mathbf{S}^{-1}$, состоящий из ее первых $n-m$ столбцов. Замкнем систему (8.10) управлением (8.11):

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\overline{\mathbf{z}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{QC} & \mathbf{QCS}_z^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{P}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \overline{\mathbf{z}} \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

В результате проведенных рассуждений можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Для того чтобы имела решение задача стабилизации линейной стационарной системы* (7.1) *в виде управления* (7.8)*, построенного с использованием измерений* (7.2) *и при помощи асимптотического идентификатора Люенбергера* (8.4)*, необходимо и достаточно, чтобы 1) вещественные части неуправляемых собственных чисел матрицы* $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ *были отрицательны;*

2) матричное уравнение (8.9) *имело решение относительно матрицы* $\mathbf{T}$ *такое, что* $\operatorname{rang}\mathbf{S} = n$, *а собственные числа матрицы* $\mathbf{P}_{zz}$ *лежали в левой полуплоскости.*

Доказательство. Фактически оно проведено выше. Отметим лишь некоторые нюансы. Первое условие теоремы необходимо и достаточно (см. теорему 4.1), чтобы существовала матрица $\mathbf{C}$, при которой все собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ лежат в левой полуплоскости.

Достаточность второго условия очевидна, а необходимость следует из того, что в случае его нарушения не существует асимптотический идентификатор Люенбергера (8.4) и поэтому невозможно построение стабилизирующего управления в виде (7.8). ■

Замечание 8.1. Укажем схематично способ построения матрицы $\mathbf{T}$, удовлетворяющей матричному уравнению (8.9) и заданным условиям. Сначала необходимо построить базис ортогонального дополнения к линейному подпространству строк матрицы $\mathbf{R}$ и искать строки матрицы $\mathbf{T}$ как элементы этого ортогонального дополнения. Неопределенные коэффициенты можно заранее выбрать так, чтобы искомые строки матрицы $\mathbf{T}$ были линейно независимы между собой. В результате будет гарантировано первое условие: $\operatorname{rang}\mathbf{S} = n$. Затем, используя формулы (8.2), можно найти блоки $\mathbf{P}_{zz}$, $\mathbf{P}_{zy}$, $\mathbf{Q}_z$. Их элементы будут зависеть от элементов матрицы $\mathbf{T}$. Далее необходимо выбрать (зафиксировать) матрицу $\mathbf{P}_{zz}$ так, чтобы ее собственные числа имели отрицательные вещественные части, что приведет к окончательной конкретизации матрицы $\mathbf{T}$. Это можно сделать неоднозначно. После фиксации матриц $\mathbf{P}_{zz}$, $\mathbf{T}$, элементы блоков $\mathbf{P}_{zy}$, $\mathbf{Q}_z$ найдутся однозначно.

В монографии [3] (см. стр. 291) доказана следующая

Теорема 8.2. *Если* n*-мерная линейная стационарная система* (7.1), (7.2) *полностью идентифицируема, т.е.* $\operatorname{rang}(\mathbf{R}^T, \mathbf{P}^T\mathbf{R}^T, \ldots, \mathbf{P}^{T(n-m)}\mathbf{R}^T) = n$, *где* $m = \operatorname{rang}\mathbf{R}$, *то можно построить* $(n-m)$*-мерный асимптотический идентификатор состояния Люенбергера, характеристический многочлен которого совпадает с любым желаемым устойчивым многочленом с действительными коэффициентами.*

Пример 8.1. Рассмотрим систему (7.1), (7.2) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \end{cases} \qquad y = x_1.$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\mathrm{rang}(\mathbf{R}^T, \mathbf{P}^T\mathbf{R}^T) = 2$. Следовательно, по теореме 8.2 система идентифицируема. Построим для этой системы идентификатор Люенбергера (8.4) и стабилизирующее управление (7.8), (7.7).

Будем искать матрицу $\mathbf{T}$ в виде $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}$, где $T_2 \neq 0$, что гарантирует невырожденность матриц

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение матриц (8.2), найдем соответствующие блоки: $\mathbf{P}_{zz} = \frac{T_1}{T_2}$, $\mathbf{P}_{zy} = T_2 - \frac{T_1^2}{T_2}$, $\mathbf{Q}_z = T_2$. Для обеспечения асимптотического свойства оценки (7.4) положим, например, $\mathbf{P}_{zz} = -3$. Тогда допустимые значения параметров T_1, T_2 связаны соотношением $T_1 = -3T_2$. Положим $T_1 = 1$, тогда $T_2 = -\frac{1}{3}$, $\mathbf{P}_{zy} = \frac{8}{3}$, $\mathbf{Q}_z = -\frac{1}{3}$. Данный пример иллюстрирует неоднозначность построения матрицы $\mathbf{T}$ в случае ее существования. Итак, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Несложно проверить, что матрица $\mathbf{T}$ удовлетворяет уравнению (8.9).

Получаем идентификатор Люенбергера (8.4):

$$\dot{\widehat{z}} = -3\widehat{z} + \frac{8}{3}y - \frac{1}{3}u. \tag{8.13}$$

Для построения стабилизирующего управления (7.8), (7.7) найдем матрицу $\mathbf{C}$, при которой собственные числа матрицы замкнутой системы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны, например, -1. Это возможно, так как $\mathrm{rang}(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}) = 2$ и исходная система полностью управляема по критерию Калмана. Элементы матрицы $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$ найдем методом неопределенных коэффициентов (см. §2). Для этого приравняем коэффициенты фактического и эталонного многочленов

$$f(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{P} - \mathbf{QC}) = \lambda^2 - C_2\lambda - 1 - C_1,$$

$$f_э(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

В результате получаем $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$. По формуле (7.7) запишем вектор оценки состояния системы

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{z} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{z} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -3\widehat{z} + 3y \end{pmatrix}.$$

Тогда управление (7.8) принимает вид

$$u = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ -3\widehat{z} + 3y \end{pmatrix} = 6\widehat{z} - 8y. \tag{8.14}$$

Таким образом, управление (8.14), где $\widehat{z}$ — выход идентификатора Люенбергера (8.13), является стабилизирующим для исходной системы. Осталось отметить, что для получения выхода $\widehat{z}(t)$ как функции времени, нужно проинтегрировать замкнутое уравнение (8.13), (8.14) с произвольными начальными условиями.

§9. Оценка состояния линейных систем

В предыдущих параграфах было показано, как оценка фазового состояния системы используется при решении задачи стабилизации. Следует отметить, что задача оценки фазового состояния представляет интерес сама по себе, т.е. помимо задач стабилизации. Она также может быть одним из этапов при решении других прикладных задач математической теории управления. В данном параграфе будет показано как строятся идентификаторы Люенбергера для нескольких классов линейных систем.

9.1. Оценка состояния линейной однородной системы. Пусть динамика некоторого объекта описывается линейной однородной системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \tag{9.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния, $\mathbf{P}$ — постоянная $(n \times n)$-матрица. Как и в §7, будем считать, что для измерения доступны только отдельные компоненты вектора $\mathbf{x}$ или их линейные комбинации, т.е. вместе с системой (9.1) задано уравнение измерителя (или наблюдателя)

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{y}$ — m-мерный известный вектор измерений, $\mathbf{R}$ — заданная, постоянная $(m \times r)$-матрица.

Предположим, что измерения (9.2) достаточно точны и могут напрямую использоваться для оценки состояния исходной системы (9.1). Тогда, с учетом идеи Люенбергера, требуется выбрать лишь недостающие $n - m$ линейные комбинации вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \tag{9.3}$$

где $\mathbf{z}$ — $(n-m)$-мерный вектор, $\mathbf{T}$ — постоянная $((n-m) \times n)$-матрица, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Матрица $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$ должна быть неособой, $\operatorname{rang} \mathbf{S} = n$.

2. Для вектора $\mathbf{z}$ должен существовать асимптотический идентификатор, позволяющий находить оценку $\widehat{\mathbf{z}}$, удовлетворяющую свойству

$$\widehat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{9.4}$$

Если предположить, что такой вектор $\widehat{\mathbf{z}}$ найден, то для оценки состояния исходной системы получим выражение (7.7).

Основной вопрос при решении этой задачи состоит в построении идентификатора для вектора $\mathbf{z}$. Примем гипотезу, согласно которой идентификатор имеет форму линейной системы, на вход которой подаются выходы системы (9.1), (9.2):

$$\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = \mathbf{D}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{M}\mathbf{y}. \tag{9.5}$$

В основе представления (9.5) лежат два естественных соображения. Во-первых, о линейности системы, которая должна имитировать поведение линейного объекта (9.1) по части переменных, а во-вторых, имитирующая система должна использовать информацию (9.2) об исходном объекте. Матрицы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{M}$ в (9.5) имеют размеры $((n-m) \times (n-m))$ и $((n-m) \times m)$ соответственно. Таким образом, задача о построении оценки фазового состояния исходной системы (9.1) сводится к поиску трех матриц $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{M}$, чтобы выполнялись свойства **1, 2**.

Найдем условия, при выполнении которых имеет место асимптотическое свойство оценки (9.4). Для этого введем новую переменную $\overline{\mathbf{z}}(t) = \widehat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$, которая описывает качество оценки, и построим уравнение, описывающее ее динамику.

С учетом (9.1), (9.2), (9.5) получим

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{D}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{MRx} - \mathbf{TPx}. \tag{9.6}$$

Выберем матрицы $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{M}$ так, чтобы система (9.6) приняла вид

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{D}\overline{\mathbf{z}}. \tag{9.7}$$

Дополнительно потребуем, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{D}$ имели отрицательные вещественные части, что обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (9.7). В этом случае будет иметь место асимптотическое свойство оценки (9.4).

Приравняем правые части систем (9.6), (9.7) и учтем взаимосвязь переменных $\overline{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{Tx}$. В результате получим уравнение, связывающее искомые матрицы

$$\mathbf{TP} = \mathbf{MR} + \mathbf{DT}. \tag{9.8}$$

Замечание 9.1. В заключение отметим, что задача построения идентификатора (9.5) и финальной оценки вектора состояния (7.7) сведена к поиску такого решения матричного уравнения (9.8) в виде матрицы $\mathbf{T}$, при котором выполнены требования **1**, **2** в постановке задачи. Матрица $\mathbf{D}$ при этом может быть выбрана сразу с учетом требования асимптотической устойчивости системы (9.7).

Замечание 9.2. Матричное уравнение (9.8) с точностью до обозначений $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{zz}$, $\mathbf{M} = \mathbf{P}_{zy}$ совпадает с уравнением (8.9). Соответственно, при построении идентификатора (9.6) и поиске матрицы $\mathbf{M}$ можно использовать формулы взаимосвязи (8.2), которые в данном случае будут иметь вид

$$\mathbf{SPS}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{P}_{yz} & \mathbf{P}_{yy} \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

Пример 9.1. Рассмотрим систему (9.1), (9.2) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \qquad y = x_2.$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\operatorname{rang}(\mathbf{R}^T, \mathbf{P}^T\mathbf{R}^T) = 2$. Тогда по теореме 8.2 система идентифицируема и, следовательно, для нее возможно построение идентификатора Люенбергера в форме (9.5).

Будем искать матрицу $\mathbf{T}$ в виде $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}$, где $T_1 \neq 0$, что гарантирует невырожденность матриц

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_1} & -\frac{T_2}{T_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполняя умножение матриц (9.9), найдем соответствующие блоки: $\mathbf{D} = \frac{T_2}{T_1}$, $\mathbf{M} = -\frac{T_2^2}{T_1} - T_1$. Для обеспечения асимптотического свойства оценки (9.4) положим, например, $\mathbf{D} = -2$. Тогда допустимые значения параметров T_1, T_2 связаны соотношением $T_2 = -2T_1$. Положим $T_1 = 1$, тогда $T_2 = -2$, $\mathbf{M} = -5$. Данный пример иллюстрирует неоднозначность построения матрицы $\mathbf{T}$ в случае ее существования. Итак, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$. Несложно проверить, что матрица $\mathbf{T}$ удовлетворяет уравнению (9.8).

Получаем идентификатор Люенбергера (9.5):

$$\dot{\widehat{z}} = -2\widehat{z} - 5y. \tag{9.10}$$

По формуле (7.7) запишем вектор оценки состояния системы

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{z} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{z} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{z} + 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{z}$ — выход идентификатора Люенбергера (9.10).

Упражнение 9.1. Написать компьютерную программу интегрирования системы из примера 9.1. Используя ее решение, имитировать функцию $y(t)$. Это можно сделать, добавив к компоненте решения $x_2(t)$ возмущение в виде некоторой ограниченной функции. Проинтегрировать уравнение идентификатора (9.10) с учетом выбранной функции $y(t)$, а затем убедиться, что имеет место асимптотика (9.4) построенной оценки $\widehat{z}(t)$.

9.2. Оценка состояния линейной управляемой системы. Вновь рассмотрим управляемую систему (7.1) с уравнением выхода (7.2). Задача остается прежней. Как в пункте 9.1, требуется найти вектор (9.3) таким образом, чтобы, оценивая только его компоненты и измерения (7.2), получить оценку состояния системы (7.1) в виде (7.7).

Следуя основной идее пункта 9.1, будем строить идентификатор для вектора $\mathbf{z}$ в следующем виде

$$\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = \mathbf{D}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{L}\mathbf{Q}\mathbf{u}. \tag{9.11}$$

Отличие от (9.5) состоит в добавке еще одного слагаемого в правую часть. Это вполне логично, так как идентификатор по своей природе должен имитировать поведение исходного объекта. Именно по этой причине на его вход в данном случае подаются выходной сигнал $\mathbf{y}$ и входной сигнал $\mathbf{u}$ исходной системы (7.1), (7.2). Матрица $\mathbf{L}$ в (9.11) имеет размеры $\left((n-m)\times n\right)$ и является матрицей параметров, подлежащих определению.

Таким образом, задача о построении оценки фазового состояния исходной системы (7.1) сводится к поиску матриц $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$, чтобы выполнялись свойства **1**, **2**.

Найдем условия, при выполнении которых имеет место асимптотическое свойство оценки (9.4). Для этого введем новую переменную $\overline{\mathbf{z}}(t) = \widehat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ и построим уравнение, описывающее ее динамику. С учетом (7.1), (7.2), (9.11) получим

$$\dot{\overline{\mathbf{z}}} = \mathbf{D}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{T}\left(\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}\right). \tag{9.12}$$

Желательно, чтобы качество оценки, т.е. вектор $\overline{\mathbf{z}}$, не зависело от управления $\mathbf{u}$. Как говорят в таких случаях, требуется инвариантность оценки по отношению к входному сигналу. Из этих соображений положим $\mathbf{L} = \mathbf{T}$. Далее выберем матрицы $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{M}$ так, чтобы система (9.12) приняла вид

$$\dot{\overline{\mathbf{z}}} = \mathbf{D}\overline{\mathbf{z}}. \tag{9.13}$$

Дополнительно потребуем, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{D}$ имели отрицательные вещественные части, что обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (9.13). В этом случае будет иметь место асимптотическое свойство оценки (9.4).

Приравняем правые части систем (9.12), (9.13), учтем взаимосвязь переменных $\overline{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{z}} - \mathbf{T}\mathbf{x}$ и коэффициентов $\mathbf{L} = \mathbf{T}$. В результате получим уравнение, связывающее искомые матрицы

$$\mathbf{T}\mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{R} + \mathbf{D}\mathbf{T},$$

которое в точности совпадает с (9.8).

В монографии [3] (см. стр. 293) доказана следующая

Теорема 9.1. *Выходы линейной $(n-m)$-мерной системы (9.11) асимптотически приближаются к линейным комбинациям вектора состояний* $\mathbf{Tx}$ *линейной системы* (7.1) *при любых начальных условиях* $\widehat{\mathbf{z}}(0)$, $\mathbf{x}(0)$ *в том и только в том случае, когда матрица* $\mathbf{T}$ *является решением матричного алгебраического уравнения* (9.8), $\mathbf{L}=\mathbf{T}$, *а матрица* $\mathbf{D}$ *устойчива.*

В заключение осталось отметить, что замечания 9.1, 9.2 остаются в силе и описывают алгоритм решения поставленной задачи.

Пример 9.2. Рассмотрим систему (7.1), (7.2) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \qquad y = x_2.$$

Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим для этой системы идентификатор Люенбергера (9.11). Поскольку матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ те же, что и в примере 9.1, то реализация алгоритма построения матрицы $\mathbf{T}$, а вместе с ней и $\mathbf{L}$ аналогичны. Следовательно, получаем $\mathbf{T}=\mathbf{L}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда идентификатор Люенбергера (9.11) примет вид

$$\dot{\widehat{z}} = -2\widehat{z} - 5y + u. \tag{9.14}$$

По формуле (7.7) запишем вектор оценки состояния системы

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{z} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{z} + 2y \\ y \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{z}$ — выход идентификатора Люенбергера (9.14).

ГЛАВА 3. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ

§10. Вспомогательные сведения

Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{10.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор отклонения от программного движения, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор отклонения от программного управления, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно.

Допустимым называется управление вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{10.2}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная $(r \times n)$-матрица (коэффициенты усиления).

Постановка задачи стабилизации остается прежней. Для системы (10.1) построить допустимое управление (10.2), при котором замкнутая система $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C})\mathbf{x}$ асимптотически устойчива.

Если такое управление $\mathbf{u}$ существует, то оно называется *стабилизирующим.*

Теорема 10.1. (Критерий Калмана) [8]. *Линейная стационарная система* (10.1) *полностью управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{Q}, \mathbf{P}\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\right) = n.$$

Теорема 10.2. (Уточненный критерий Калмана). *Пусть в системе* (10.1) $\operatorname{rang}\mathbf{Q} = m$. *Тогда для полной управляемости системы* (10.1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{Q}, \mathbf{P}\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{P}^{n-m}\mathbf{Q}\right) = n.$$

Из леммы 2.1 и замечания 2.1 вытекает важное

Следствие 10.1. *Если система* (10.1) *полностью управляема, то она стабилизируема. В этом случае выбором матрицы* $\mathbf{C}$ *можно доставить системе* (10.1) *любые наперед заданные собственные числа.*

В теореме 2.1 сформулирован критерий асимптотической устойчивости линейных стационарных систем. Укажем конструктивный способ проверки асимптотической устойчивости.

Пусть задан полином $\varphi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_j \in \mathbb{R}$, λ_j — его корни, $j = \overline{1,n}$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос: при каких условиях на коэффициенты $a_0, \ldots, a_n$ все корни полинома $\varphi(\lambda)$ лежат в левой комплексной полуплоскости, т.е. удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ для всех $j = \overline{1,n}$.

Теорема 10.3. (Рауса — Гурвица) [4]. *Пусть* $a_0 > 0$. *Для того чтобы все корни полинома* $\varphi(\lambda)$ *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства* $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$. *Здесь*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_k = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & a_{2k-3} & a_{2k-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & a_{2k-4} & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-5} & a_{2k-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-6} & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k-1} & a_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k-2} & a_k \end{pmatrix}, \ a_j = 0 \text{ при } j > n.$$

§11. Построение стабилизирующего управления методом неопределенных коэффициентов

Замкнем систему (10.1) управлением (10.2), имеем

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P} + \mathbf{QC})\mathbf{x}, \tag{11.1}$$

где $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ — искомая постоянная ($r \times n$)-матрица.

Требуется найти такую матрицу $\mathbf{C}$, чтобы система (11.1) была асимптотически устойчива. Рассмотрим два варианта решения данной проблемы:

I. Построить матрицу $\mathbf{C}$ так, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ были равны эталонным наперед заданным числам $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

II. Построить матрицу $\mathbf{C}$ так, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ лежали в левой комплексной полуплоскости.

Замечание 11.1. Согласно лемме 2.1, если система (10.1) не полностью управляема, то в I случае возможно, что не удастся построить управление, доставляющее системе (11.1) наперед заданный спектр. Однако во II варианте всегда существует стабилизирующее управление.

Алгоритм I

1. Проверим систему (10.1) на полную управляемость. Для этого воспользуемся критерием Калмана (теорема 10.1), т.е. вычислим $\operatorname{rang}\mathbf{S}$, где $\mathbf{S}=(\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$. Если $\operatorname{rang}\mathbf{S}=n$, то система полностью управляема.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$:

   $$\varphi(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{E}-(\mathbf{P}+\mathbf{QC}))=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n,$$

   где коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$ в общем случае зависят от неизвестных коэффициентов матрицы $\mathbf{C}=[c_{ij}]$, т.е.

   $$p_1=p_1(c_{11}, \ldots, c_{nn}), \ldots, p_n=p_n(c_{11}, \ldots, c_{nn}).$$

3. Выпишем эталонный полином $\psi(\lambda)$, имеющий наперед заданные корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$:

   $$\psi(\lambda)=(\lambda-\mu_1)\times\ldots\times(\lambda-\mu_n)=\lambda^n+d_1\lambda^{n-1}+\ldots+d_{n-1}\lambda+d_n.$$

4. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ и многочлена $\psi(\lambda)$. Получим систему относительно коэффициентов матрицы $\mathbf{C}$

   $$\begin{cases} p_1(c_{11}, \ldots, c_{nn})=d_1, \\ \qquad\cdots \\ p_n(c_{11}, \ldots, c_{nn})=d_n. \end{cases} \tag{11.2}$$

   Решая систему (11.2), найдем искомое управление $\mathbf{u}=\mathbf{Cx}$.

Замечание 11.2. Данный алгоритм имеет существенный недостаток. Даже в задачах малых размерностей возникает сложность вычисления коэффициентов усиления (элементов матрицы $\mathbf{C}$) при решении системы (11.2), так как в общем случае она нелинейная.

Пример 11.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - x_2 + u. \end{cases}$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее системе (11.1) собственные числа $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -3$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Вычислим

   $$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 = n.$$

   Система полностью управляема. Следовательно, по теореме 4.1 она стабилизируема.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$:

   $$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (c_1 + c_2)\lambda - (2c_1 + 4c_2 + 6).$$

   Отсюда $p_1 = -(c_1 + c_2)$, $p_2 = -(2c_1 + 4c_2 + 6)$.

3. Определим коэффициенты эталонного полинома

   $$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2} (\lambda - \mu_j) = (\lambda - (-2))(\lambda - (-3)) = \lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

   Имеем $d_1 = 5$, $d_2 = 6$.

4. Составим и решим систему (11.2):

$$\begin{cases} -(c_1 + c_2) = 5, \\ -(2c_1 + 4c_2 + 6) = 6, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -4, \\ c_2 = -1. \end{cases}$$

Искомое стабилизирующее управление имеет следующий вид $u = \mathbf{C}\mathbf{x} = -4x_1 - x_2$.

В примере 2.2 рассмотрена система, для которой стабилизирующее управление существует и при этом строится неоднозначно. Используем его для иллюстрации замечания 11.1.

Пример 11.2. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u. \end{cases}$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее системе (11.1) собственные числа $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -3$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Вычислим

$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 < n.$$

Следовательно, система не полностью управляема.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (c_1 + c_2 - 3)\lambda - 2c_1 - 2c_2 + 2.$$

Отсюда $p_1 = -(c_1 + c_2 - 3)$, $p_2 = -2c_1 - 2c_2 + 2$.

3. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2} (\lambda - \mu_j) = (\lambda - (-1))(\lambda - (-3)) = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Имеем $d_1 = 4$, $d_2 = 3$.

4. Составим и решим систему (11.2):

$$\begin{cases} -(c_1 + c_2 - 3) = 4, \\ -2c_1 - 2c_2 + 2 = 3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = -1, \\ c_1 + c_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Система несовместна, а значит, управления, доставляющего наперед заданный спектр, не существует.

Следующий алгоритм построения стабилизирующего управления основан на критерии Рауса — Гурвица (теорема 10.3).

Алгоритм II

1. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$:

   $\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{P} + \mathbf{QC})) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n,$

   где коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$ в общем случае зависят от элементов матрицы $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, т.е.

   $$p_1 = p_1(c_{11}, \ldots, c_{nn}), \ldots, p_n = p_n(c_{11}, \ldots, c_{nn}).$$

2. Решим систему неравенств относительно неизвестных элементов матрицы $\mathbf{C}$

   $$\begin{cases} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ \vdots \\ \Delta_n > 0, \end{cases} \tag{11.3}$$

   где $p_j = 0$ при $j > n$,

   $$\Delta_1 = p_1, \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ 1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_5 \\ 1 & p_2 & p_4 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{pmatrix}, \ldots,$$

   $$\Delta_k = \det\begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & p_7 & \ldots & p_{2k-3} & p_{2k-1} \\ 1 & p_2 & p_4 & p_6 & \ldots & p_{2k-4} & p_{2k-2} \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 & \ldots & p_{2k-5} & p_{2k-3} \\ 0 & 1 & p_2 & p_4 & \ldots & p_{2k-6} & p_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & p_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{k-2} & p_k \end{pmatrix}.$$

Пример 11.3. Рассмотрим систему из примера 11.2. Здесь

$$p_1 = -(c_1 + c_2 - 3), \quad p_2 = -2c_1 - 2c_2 + 2.$$

Система (11.3) примет вид

$$\begin{cases} -(c_1 + c_2 - 3) > 0, \\ -(c_1 + c_2 - 3)(-2c_1 - 2c_2 + 2) > 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 < 3, \\ c_1 + c_2 < 1. \end{cases}$$

Получим $c_1 + c_2 < 1$. Положим $c_2 = \beta$, тогда $c_1 < 1 - \beta$.

Искомое стабилизирующее управление имеет вид

$$u = \mathbf{C}\mathbf{x} = c_1 x_1 + \beta x_2,$$

где $c_1 < 1 - \beta$, β — произвольная константа.

Следующий пример иллюстрирует тот факт, что даже в системе малой размерности проверка критерия Рауса — Гурвица — нетривиальная задача.

Пример 11.4. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 3u_1 - u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

Требуется построить стабилизирующее управление.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

1. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C}$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(-3c_{11} - c_{12} + c_{21} + 2c_{22} - 4) + \\ + 7c_{11}c_{22} - 7c_{12}c_{21} + 7c_{11} + 4c_{12} - 7c_{21} + c_{22} + 5.$$

Отсюда $p_1 = -3c_{11} - c_{12} + c_{21} + 2c_{22} - 4$, $p_2 = 7c_{11}c_{22} - 7c_{12}c_{21} + 7c_{11} + 4c_{12} - 7c_{21} + c_{22} + 5$.

2. Система (11.3) примет вид

$$\begin{cases} -3c_{11} - c_{12} + c_{21} + 2c_{22} - 4 > 0, \\ 7c_{11}c_{22} - 7c_{12}c_{21} + 7c_{11} + 4c_{12} - 7c_{21} + c_{22} + 5 > 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

Упражнение. Решить систему (11.4) и построить стабилизирующее управление.

§12. Стабилизация полностью управляемой системы со скалярным входом

Опишем алгоритм построения стабилизирующего управления (10.2) для полностью управляемой системы (10.1) со скалярным управлением, т.е. при $r = 1$. В этом случае $\mathbf{Q}$ — вектор-столбец. Наперед заданные эталонные числа обозначим $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

А л г о р и т м

1. Проверим систему (10.1) на полную управляемость, т.е. вычислим $\operatorname{rang} \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = (\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$. Если $\operatorname{rang} \mathbf{S} = n$, то система полностью управляема, и тогда переходим к следующему шагу[1].

2. Найдем коэффициенты характеристического полинома матрицы $\mathbf{P}$:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{P}) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

   Заметим, что их можно вычислить путем приведения матрицы $\mathbf{P}$ к канонической форме Фробениуса при помощи преобразования $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{PS}$.

   Используя коэффициенты $p_1, \ldots, p_{n-1}$ характеристического полинома, строим матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} \\ 0 & 1 & p_1 & \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (12.1)$$

[1] Алгоритм построения стабилизирующего управления для не полностью управляемых систем описан в § 14.

3. Выпишем полином $\psi(\lambda)$, имеющий наперед заданные эталонные корни $\mu_1, \ldots, \mu_n$:

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \times \ldots \times (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n.$$

4. Используя коэффициенты $d_1, \ldots, d_n$ полинома $\psi(\lambda)$ и коэффициенты $p_1, \ldots, p_n$ характеристического полинома $\varphi(\lambda)$, вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma} = \big(p_1 - d_1, \ldots, p_n - d_n\big)\,. \qquad (12.2)$$

5. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{SK})^{-1}. \qquad (12.3)$$

Замечание 12.1. Для того чтобы проверить, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны $\mu_1, \ldots, \mu_n$, достаточно проверить справедливость выражения

$$\det(\lambda\mathbf{E} - [\mathbf{P} + \mathbf{QC}]) = \psi(\lambda).$$

Примеры. Ниже рассмотрены примеры построения стабилизирующего управления в случае полностью управляемых систем.

Пример 12.1. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется исследовать ее на полную управляемость и построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе эталонные собственные числа $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = -1$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Поскольку она стационарная, то воспользуемся теоремой 10.1:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = 3 = n.$$

   Следовательно, имеет место полная управляемость.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P}$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 4.$$

   Отсюда $p_1 = -3$, $p_2 = 4$, $p_3 = -4$. По формуле (12.1) построим матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{3}(\lambda - \mu_j) = (\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

   Имеем $d_1 = 3$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$.

4. По формуле (12.2) находим строку

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix}-6 & 1 & -5\end{pmatrix}.$$

5. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{Cx}$. По формуле (12.3) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}-10 & 11 & -6\end{pmatrix}.$$

6. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны μ_j, $j = \overline{1,3}$ (см. замечание 12.1).

Пример 12.2. Рассмотрим линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе собственные числа $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = -3$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Поскольку система стационарная, то воспользуемся теоремой 10.1:

$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = n.$$

Следовательно, имеет место полная управляемость.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P}$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3.$$

Отсюда $p_1 = -3$, $p_2 = -1$, $p_3 = 3$. По формуле (12.1) построим матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6.$$

Имеем $d_1 = 6$, $d_2 = 11$, $d_3 = 6$.

4. По формуле (12.2) вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{Cx}$. По формуле (12.3) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -9 & 21 & -9 \end{pmatrix}.$$

6. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ равны μ_j, $j=\overline{1,3}$ (см. замечание 12.1).

Пример 12.3. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе собственные числа $\mu_1=\mu_2=\mu_3=-2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Вычислим

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = n.$$

Следовательно, имеет место полная управляемость.

2. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P}$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 5.$$

Отсюда $p_1=-2$, $p_2=-3$, $p_3=5$. По формуле (12.1) построим матрицу

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = (\lambda+2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8.$$

Имеем $d_1=6$, $d_2=12$, $d_3=8$.

4. По формуле (12.2) вычислим строку
$$\gamma = \begin{pmatrix} -8 & -15 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (12.3) находим
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & -34 \end{pmatrix}.$$

6. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны μ_j, $j = \overline{1,3}$ (см. замечание 12.1).

§13. Стабилизация полностью управляемой системы в общем случае

Опишем алгоритм построения стабилизирующего управления (10.2) для полностью управляемой системы (10.1), где $\mathbf{Q}$ — $(n \times r)$-матрица, $r > 1$. Обозначим через $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r$ — столбцы матрицы $\mathbf{Q}$, через $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — эталонные собственные числа.

Алгоритм

1. Проверим систему (10.1) на полную управляемость, т.е. вычислим $\operatorname{rang} \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = (\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$. Если $\operatorname{rang} \mathbf{S} = n$, то система полностью управляема. Переходим к следующему шагу[2].

   Заметим, что процесс вычисления $\operatorname{rang} \mathbf{S}$ можно совместить с построением матрицы $\mathbf{T}$ в пункте 2 данного алгоритма.

2. Используя матрицу $\mathbf{P}$ и первый столбец $\mathbf{q}_1$ матрицы $\mathbf{Q}$, построим последовательность векторов:
$$\mathbf{q}_1, \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{q}_1.$$

   Из этой последовательности выберем все линейно независимые векторы, идущие подряд. Допустим, что их оказалось k_1. Введем для них обозначение $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}$.

[2] Алгоритм построения стабилизирующего управления для не полностью управляемых систем описан в § 14.

Если $k_1 = n$, то переходим к следующему шагу.

Если $k_1 < n$, то строим следующую последовательность векторов:

$$\mathbf{q}_2, \mathbf{P}\mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{q}_2.$$

Из этой последовательности опять выберем все векторы, идущие подряд и линейно независимые с векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}$. Обозначим их $\mathbf{e}_{k_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_2}$.

Если $k_2 = n$, то переходим к следующему шагу.

Если $k_2 < n$, то поступаем аналогично предыдущему шагу. И так далее.

Пусть на ℓ-ом шаге $k_\ell = n$, где $1 \leqslant \ell \leqslant r$. Тогда построена последовательность из n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_\ell}$. Существование такой последовательности обеспечено выполнением условия о полной управляемости системы (10.1).

Составим из этих векторов матрицу $\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_\ell})$. Заметим, что матрица $\mathbf{T}$ невырожденная, т.е. $\det \mathbf{T} \neq 0$.

3. В системе (10.1) сделаем замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$. Имеем

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{u}.$$

Обозначим через

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}. \tag{13.1}$$

Тогда для новой вектор-функции $\mathbf{y}$ получаем систему уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{y} + \widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{u}.$$

Заметим, что $\widetilde{\mathbf{P}}$ — верхняя квазитреугольная матрица

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{11} & \cdots & \widetilde{\mathbf{P}}_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \widetilde{\mathbf{P}}_{\ell\ell} \end{pmatrix},$$

на главной диагонали которой стоят матрицы Фробениуса $\widetilde{\mathbf{P}}_{jj}$ размерности $(\widetilde{k}_j \times \widetilde{k}_j)$, $\widetilde{k}_1 = k_1$, $\widetilde{k}_j = k_j - k_{j-1}$, $j = \overline{2, \ell}$.

В лемме 3.2 было доказано, что матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ при $\ell = r$ имеет вид (3.11), а при $\ell < r$ — (3.12).

4. Коэффициенты характеристического полинома $\varphi_j(\lambda)$ матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{jj}$ $(j = \overline{1,\ell})$ стоят в ее последнем столбце с противоположным знаком, так как она имеет форму Фробениуса. Обозначим их $p_{1j}, \ldots, p_{\widetilde{k}_j - 1, j}$ и составим матрицу

$$\mathbf{K}_j = \begin{pmatrix} 1 & p_{1j} & p_{2j} & \cdots & p_{\widetilde{k}_j-2,j} & p_{\widetilde{k}_j-1,j} \\ 0 & 1 & p_{1j} & \cdots & p_{\widetilde{k}_j-3,j} & p_{\widetilde{k}_j-2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{1j} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.2}$$

5. Выпишем полином $\psi_j(\lambda)$, имеющий $\widetilde{k}_j$ наперед заданных эталонных корней из набора $\mu_1, \ldots, \mu_n$:

$$\psi_j(\lambda) = \prod_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} (\lambda - \mu_i) = \lambda^{\widetilde{k}_j} + d_{1j}\lambda^{\widetilde{k}_j - 1} + \ldots + d_{\widetilde{k}_j-1,j}\lambda + d_{\widetilde{k}_j j},$$

где $k_0 = 0$, $j = \overline{1,\ell}$.

6. Используя коэффициенты $d_{1j}, \ldots, d_{\widetilde{k}_j j}$ многочлена $\psi_j(\lambda)$ и коэффициенты $p_{1j}, \ldots, p_{\widetilde{k}_j j}$ характеристического полинома $\varphi_j(\lambda)$, вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma}_j = \Big(p_{1j} - d_{1j}, \ldots, p_{\widetilde{k}_j j} - d_{\widetilde{k}_j j}\Big). \tag{13.3}$$

7. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{TK})^{-1}, \tag{13.4}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{K}_\ell \end{pmatrix},$$

при $\ell = r$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \gamma_\ell \end{pmatrix}, \tag{13.5}$$

при $\ell < r$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \gamma_\ell \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

Замечание 13.1. Для того чтобы проверить, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны μ_j, достаточно проверить равенство двух полиномов

$$\det(\lambda \mathbf{E} - [\widetilde{\mathbf{P}} + \widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C}]) = \prod_{j=1}^{\ell} \psi_j(\lambda).$$

Примеры. Ниже рассмотрены примеры построения стабилизирующего управления в случае полностью управляемых систем при $r > 1$.

Пример 13.1. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется исследовать ее на полную управляемость и построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе эталонные собственные числа $\mu_j = -1$, $j = \overline{1,4}$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Поскольку она стационарная, то воспользуемся теоремой 10.2:

$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 = n.$$

Следовательно, имеет место полная управляемость системы.

2. Используя матрицу $\mathbf{P}$ и первый столбец $\mathbf{q}_1$ матрицы $\mathbf{Q}$, строим последовательность векторов

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^2\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^3\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этой последовательности выбираем все, идущие подряд, линейно независимые векторы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $k_1 = 2 < n$, строим следующую последовательность векторов

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^2\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^3\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из полученной последовательности выбираем все, идущие подряд, линейно независимые векторы с $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $k_2 = 4$. Из найденных векторов составим матрицу

$$\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = 1$, $p_{21} = 1$. По формуле (13.2) построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично для матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ получим коэффициенты $p_{12} = 0$, $p_{22} = -1$ ее характеристического полинома $\varphi_2(\lambda)$. По формуле (13.2) построим матрицу

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Определим коэффициенты эталонного полинома для первого блока

$$\psi_1(\lambda) = \prod_{j=1}^{2}(\lambda - \mu_j) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda^2 + 1.$$

Имеем $d_{11} = 2\,,\ d_{21} = 1\,.$

Аналогично находим коэффициенты эталонного полинома для второго блока

$$\psi_2(\lambda) = \prod_{j=3}^{4}(\lambda - \mu_j) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda^2 + 1.$$

Получим $d_{12} = 2\,,\ d_{22} = 1\,.$

6. По формуле (13.3) вычислим строки

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (13.5) найдем матрицу

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (13.4) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны $\mu_j\,,\ j = \overline{1,4}$ (см. замечание 13.1).

Пример 13.2. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе собственные числа $\mu_j = -1,\ j = \overline{1,4}$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Поскольку она стационарная, то воспользуемся теоремой 10.2:

   $$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 = n.$$

   Следовательно, имеет место полная управляемость.

2. Используя матрицу $\mathbf{P}$ и первый столбец $\mathbf{q}_1$ матрицы $\mathbf{Q}$, построим последовательность векторов

   $$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^2\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^3\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Из этой последовательности выбираем все, идущие подряд, линейно независимые векторы

   $$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $k_1 = 3 < n$ и $n - 3 = 1$, то недостающий базисный вектор $\mathbf{e}_4$ может быть только первым вектором из второй цепочки $\mathbf{q}_2, \mathbf{P}\mathbf{q}_2, \mathbf{P}^2\mathbf{q}_2, \mathbf{P}^3\mathbf{q}_2$. Поскольку $\mathbf{q}_2$ линейно независим с $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то полагаем

$$\mathbf{e}_4 = \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $k_2 = 4$. Из найденных векторов составим матрицу

$$\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = 1$.

4. Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = p_{21} = p_{31} = 0$. По формуле (13.2) построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda - 1.$$

Отсюда $p_{12} = -1$. По формуле (13.2) построим матрицу

$$\mathbf{K}_2 = 1.$$

В результате

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Определим коэффициенты эталонного полинома первого блока

$$\psi_1(\lambda) = \prod_{j=1}^{3}(\lambda - \mu_j) = (\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda^2 + 1.$$

Имеем $d_{11} = 3$, $d_{21} = 3$, $d_{31} = 1$.

Аналогично находим коэффициенты эталонного полинома второго блока

$$\psi_2(\lambda) = \lambda - \overline{\lambda}_4 = \lambda + 1.$$

Получим $d_{12} = 1$.

6. По формуле (13.3) вычислим строки

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = -2.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (13.4) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ равны μ_j, $j = \overline{1,4}$ (см. замечание 13.1).

Пример 13.3. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе собственные числа $\mu_1 = -3$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = -2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Поскольку она стационарная, то воспользуемся теоремой 10.2:

$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 = n.$$

   Следовательно, система полностью управляема.

2. Используя матрицу $\mathbf{P}$ и первый столбец $\mathbf{q}_1$ матрицы $\mathbf{Q}$, построим последовательность векторов

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^2\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Из этой последовательности выбираем все, идущие подряд, линейно независимые векторы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Так как $k_1 = 3 = n$, составим из найденных векторов матрицу

$$\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Тогда $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \widetilde{\mathbf{P}}$. Заметим, что матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеет вид (3.12), так как $\ell = 1 < r = 2$.

4. Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = -3$, $p_{21} = 4$, $p_{31} = -2$. По формуле (13.2) составим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   В данном случае матрица $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1$.

5. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi_1(\lambda) = \prod_{j=1}^{3}(\lambda - \mu_j) = (\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6.$$

   Имеем $d_{11} = 6$, $d_{21} = 11$, $d_{31} = 6$.

6. По формуле (13.3) вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -9 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

   Тогда по формуле (13.6) находим

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (13.4) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -25 & -24 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ равны μ_j, $j=\overline{1,3}$ (см. замечание 13.1).

§14. Случай неполной управляемости

14.1. Стабилизация систем со скалярным входом в случае неполной управляемости. Опишем алгоритм построения стабилизирующего управления (10.2) для не полностью управляемой системы (10.1) со скалярным управлением, т.е. при $r=1$. В этом случае $\mathbf{Q}$ — вектор-столбец. Наперед заданные эталонные числа обозначим $\mu_1,\ldots,\mu_n$.

Алгоритм

1. Проверим систему (10.1) на полную управляемость. Для этого вычислим $\operatorname{rang}\mathbf{S}$, где $\mathbf{S}=(\mathbf{Q},\mathbf{PQ},\ldots,\mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$.

   Если $\operatorname{rang}\mathbf{S}=n$, то для построения стабилизирующего управления используем алгоритм, описанный в § 12.

   Если $\operatorname{rang}\mathbf{S}=k<n$, то система не полностью управляема и тогда переходим к следующему шагу.

2. Используя максимальное число линейно независимых векторов матрицы $\mathbf{S}$ (их будет ровно k), дополняем эту систему до n линейно независимых векторов (произвольным образом) векторами $e_{k+1},\ldots,e_n$, т.е. строим матрицу

$$\mathbf{T}=(\mathbf{Q},\mathbf{PQ},\ldots,\mathbf{P}^{k-1}\mathbf{Q},\mathbf{e}_{k+1},\ldots,\mathbf{e}_n).$$

3. В системе (10.1) сделаем замену переменных $\mathbf{x}=\mathbf{Ty}$. Получим

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{PTy}+\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Qu}.$$

   Обозначим через

$$\widetilde{\mathbf{P}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{PT} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{Q}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}.$$

   В результате имеем

$$\dot{\mathbf{y}}=\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{y}+\widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{u}.$$

Заметим, что $\widetilde{\mathbf{P}}$ — верхняя квазитреугольная матрица вида

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{11} & \widetilde{\mathbf{P}}_{12} \\ \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ — матрица Фробениуса размерности $(k \times k)$, $\mathbf{O}$ — нулевая матрица размерности $(n-k \times k)$.

Матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеет следующий вид

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{q}}_1,$$

где $\widetilde{\mathbf{q}}_1$ — n-мерный вектор, у которого первый элемент равен 1, а все остальные равны 0.

Далее потребуется выполнение условий следующего утверждения (см. следствие 2.1).

Теорема 14.1. *Если все собственные числа матрицы* $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ *таковы, что* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ *для всех* $j = \overline{1, n-k}$, *то система (10.1) стабилизируема.*

Если условие теоремы не выполнено, то система не стабилизируема.

4. Коэффициенты характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$ матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ стоят в ее последнем столбце с противоположным знаком, так как она имеет форму Фробениуса. Обозначим их $p_{11}, \ldots, p_{k-1,1}$ и запишем матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{k-2,1} & p_{k-1,1} \\ 0 & 1 & p_{11} & \cdots & p_{k-3,1} & p_{k-2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{11} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Составим эталонный полином $\psi(\lambda)$, имеющий наперед заданные корни $\mu_1, \ldots, \mu_k$, а именно

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \mu_1) \times \ldots \times (\lambda - \mu_k) = \lambda^k + d_1\lambda^{k-1} + \ldots + d_{k-1}\lambda + d_k.$$

6. Используя коэффициенты $d_1, \ldots, d_k$ многочлена $\psi(\lambda)$ и коэффициенты $p_{11}, \ldots, p_{k1}$ характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$, найдем строку
$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \left(p_{11} - d_1, \ldots, p_{k1} - d_k\right).$$
7. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, где
$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{T}\mathbf{K})^{-1}, \tag{14.1}$$
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E}_{n-k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 \end{pmatrix},$$
$\boldsymbol{\gamma}_2$ — нулевая строка длины $n-k$, соответствующая неуправляемой подсистеме.
8. Проверка. Если равны многочлены $\det\left(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C})\right)$ и $\psi(\lambda)\varphi_2(\lambda)$, где $\varphi_2(\lambda)$ — характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$, то вычисления проведены верно.

Замечание 14.1. Для проверки условия теоремы 14.1 можно воспользоваться критерием Рауса — Гурвица (см. теорему 10.3).

Пример 14.1. Рассмотрим систему
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$
Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -1$.

Р е ш е н и е. Здесь
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
1. Проверим систему на полную управляемость. Используем теорему 10.1:
$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 < n.$$
Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Для этого из матрицы $\mathbf{S}$ выберем первые два линейно независимых столбца. Дополним их до базиса пространства $\mathbb{R}^3$ любым независимым вектором, например,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = -1$.

4. Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = -3$, $p_{21} = 2$. Построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим неуправляемую подсистему на асимптотическую устойчивость. Вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda + 1.$$

Несложно проверить, что условие теоремы 14.1 выполнено, так как единственный корень полинома $\varphi_2(\lambda)$ равен -1.

Матрица $\mathbf{K}_2$ для неуправляемого блока выбирается единичной соответствующей размерности

$$\mathbf{K}_2 = 1.$$

В результате

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2}(\lambda - \mu_j) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Имеем $d_1 = 2$, $d_2 = 1$.

6. По формуле (12.2) вычислим строку $\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix}-5 & 1\end{pmatrix}$. Для неуправляемой подсистемы $\gamma_2 = 0$. Тогда

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1 & \gamma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

7. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (14.1) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}-5 & 0 & -9\end{pmatrix}.$$

8. Проверим, что собственные числа матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{C}$ равны $\mu_j = -1$, $j = \overline{1,3}$.

Пример 14.2. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Используем теорему 10.1:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} = 1 < n.$$

Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Для этого из матрицы $\mathbf{S}$ выберем первый столбец. Дополним его до базиса пространства $\mathbb{R}^3$ двумя любыми независимыми векторами, например,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = 2$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ неуправляемой подсистемы

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

   Его корни — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Так как не все собственные числа матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ лежат в левой комплексной полуплоскости, то система не стабилизируема (см. теорему 14.1).

Пример 14.3. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Применим теорему 10.1:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < n.$$

   Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Для этого из матрицы $\mathbf{S}$ выберем первые два линейно независимых столбца. Дополним их до базиса пространства $\mathbb{R}^4$ любыми двумя линейно независимыми векторами, например,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Проверим неуправляемую подсистему на асимптотическую устойчивость. Вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$:

$$\varphi_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

   Несложно проверить, что условие теоремы 14.1 выполнено, так как корни полинома $\varphi_2(\lambda)$ имеют вещественные части

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Матрица $\mathbf{K}_2$ для неуправляемого блока выбирается единичной соответствующей размерности

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{11}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = 1$, $p_{21} = -1$. Построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{2} (\lambda - \mu_j) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Имеем $d_1 = 3$, $d_2 = 2$.

6. По формуле (12.2) вычислим строку $\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \end{pmatrix}$. Для неуправляемой подсистемы $\boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (14.1) находим

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Проверим, что характеристический полином матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ равен $\psi(\lambda)\varphi_2(\lambda)$.

14.2. Стабилизация не полностью управляемых систем в общем случае. Опишем алгоритм построения стабилизирующего управления (10.2) для не полностью управляемой системы (10.1), где $\mathbf{Q}$ — $(n \times r)$-матрица, $r > 1$. Обозначим через $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_r$ — столбцы матрицы $\mathbf{Q}$, а через $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — эталонные собственные числа.

Алгоритм

1. Проверим исходную систему (10.1) на полную управляемость. Для этого вычислим $\operatorname{rang} \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = (\mathbf{Q}, \mathbf{PQ}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q})$. Если $\operatorname{rang} \mathbf{S} = k < n$, то система не полностью управляема. Переходим к следующему шагу. Если $\operatorname{rang} \mathbf{S} = n$, то это случай полной управляемости, который описан в § 13.

   Заметим, что процесс вычисления $\operatorname{rang} \mathbf{S}$ можно совместить с построением матрицы $\mathbf{T}$ в пункте 2 данного алгоритма.

2. Используя матрицу $\mathbf{P}$ и первый столбец $\mathbf{q}_1$ матрицы $\mathbf{Q}$, построим последовательность векторов

   $$\mathbf{q}_1, \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{q}_1.$$

   Из этой последовательности выберем все линейно независимые векторы, идущие подряд. Допустим, что их оказалось k_1. Введем для них обозначение $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}$.

   Если $k_1 = k$, то переходим к следующему шагу.

   Если $k_1 < k$, то строим следующую последовательность векторов

   $$\mathbf{q}_2, \mathbf{P}\mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{q}_2.$$

   Из этой последовательности опять выберем все векторы, идущие подряд и линейно независимые с векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}$. Обозначим их $\mathbf{e}_{k_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_2}$.

   Если $k_2 = k$, то переходим к следующему шагу.

   Если $k_2 < k$, то поступаем аналогично предыдущему шагу. И так далее.

   Пусть на ℓ-ом шаге $k_\ell = k$, где $1 \leqslant \ell \leqslant r$. Тогда построена последовательность линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_\ell}$.

Существование этой последовательности из k линейно независимых векторов обеспечено тем, что $\operatorname{rang}\mathbf{S} = k < n$.

Дополним эту систему векторов произвольным образом до базиса $\mathbb{R}^n$ векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$, т.е. построим матрицу

$$\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_\ell}, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Заметим, что по построению матрица $\mathbf{T}$ невырождена.

3. Сделаем в системе (10.1) замену переменных $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$. Имеем

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{u}.$$

Обозначим через

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}.$$

Тогда для новой вектор-функции $\mathbf{y}$ получаем систему уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{y} + \widetilde{\mathbf{Q}}\mathbf{u}.$$

Заметим, что $\widetilde{\mathbf{P}}$ — верхняя квазитреугольная матрица

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{P}}_{01} & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \widetilde{\mathbf{P}}_{0\ell} & * \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \widetilde{\mathbf{P}}_{22} \end{pmatrix},$$

на главной диагонали которой стоят матрицы Фробениуса $\widetilde{\mathbf{P}}_{0j}$ размерности $(\widetilde{k}_j \times \widetilde{k}_j)$, $\widetilde{k}_1 = k_1$, $\widetilde{k}_j = k_j - k_{j-1}$, $j = \overline{2, \ell}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ — матрица размерности $((n-k) \times (n-k))$, $\mathbf{O}$ — нулевая матрица соответствующей размерности, $*$ — некоторые ненулевые блоки.

В лемме 3.2 было доказано, что матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ при $\ell = r$ имеет вид (3.11), а при $\ell < r$ — (3.12).

4. Проверим выполнение условия теоремы 14.1. Если оно не выполнено, то система не стабилизируема.

5. Коэффициенты характеристического полинома $\varphi_j(\lambda)$ матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{0j}$ $(j=\overline{1,\ell})$ стоят в ее последнем столбце с противоположным знаком, так как она имеет форму Фробениуса. Обозначим их $p_{1j},\ldots,p_{\widetilde{k}_j-1,j}$ и составим матрицу

$$\mathbf{K}_j=\begin{pmatrix}1 & p_{1j} & p_{2j} & \cdots & p_{\widetilde{k}_j-2,j} & p_{\widetilde{k}_j-1,j}\\ 0 & 1 & p_{1j} & \cdots & p_{\widetilde{k}_j-3,j} & p_{\widetilde{k}_j-2,j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{1j}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{14.2}$$

6. Выпишем полином $\psi_j(\lambda)$, имеющий $\widetilde{k}_j$ наперед заданных эталонных корней из набора $\mu_1,\ldots,\mu_n$:

$$\psi_j(\lambda)=\prod_{i=k_{j-1}+1}^{k_j}(\lambda-\mu_i)=\lambda^{\widetilde{k}_j}+d_{1j}\lambda^{\widetilde{k}_j-1}+\ldots+d_{\widetilde{k}_j-1,j}\lambda+d_{\widetilde{k}_j j},$$

где $k_0=0$, $j=\overline{1,\ell}$.

7. Используя коэффициенты $d_{1j},\ldots,d_{\widetilde{k}_j j}$ многочлена $\psi_j(\lambda)$ и коэффициенты $p_{1j},\ldots,p_{\widetilde{k}_j j}$ характеристического полинома $\varphi_j(\lambda)$, вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma}_j=\left(p_{1j}-d_{1j},\ldots,p_{\widetilde{k}_j j}-d_{\widetilde{k}_j j}\right). \tag{14.3}$$

8. Строим стабилизирующее управление $\mathbf{u}=\mathbf{C}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{C}=\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{T}\mathbf{K})^{-1}, \tag{14.4}$$

$$\mathbf{K}=\operatorname{diag}\left(\mathbf{K}_1,\ldots,\mathbf{K}_\ell,\mathbf{E}_{n-k}\right),$$

при $\ell=r$:

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-k}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_\ell & \mathbf{0}_{n-k}\end{pmatrix}, \tag{14.5}$$

при $\ell < r$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-k} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\gamma}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_\ell & \mathbf{0}_{n-k} \\ & & \mathbf{O}_{(r-\ell)\times n} & & \end{pmatrix}. \tag{14.6}$$

9. Проверим, равны ли многочлены $\det(\lambda\mathbf{E} - (\mathbf{P} + \mathbf{QC}))$ и $\varphi_{22}(\lambda)\prod\limits_{j=1}^{\ell}\psi_j(\lambda)$. Здесь $\varphi_{22}(\lambda)$ — характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ неуправляемой подсистемы. Если они равны, то вычисления проведены верно.

Пример 14.4. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -1$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Используем теорему 10.2:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 < n.$$

Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Несложно догадаться, что из матрицы $\mathbf{S}$ сначала берутся линейно независимые столбцы с нечетными номерами в количестве $\widetilde{k}_1 = 2$, а затем с четными в количестве $\widetilde{k}_2 = 1$. Далее остается добавить еще один произвольный столбец так, чтобы система из всех четырех векторов образовывала базис пространства $\mathbb{R}^4$. Тогда

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -2,5 \\ 1 & -3 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{02} = -1$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = -1$. Заметим, что матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеет вид (3.11), так как $\ell = r = 2$.

4. Несложно проверить, что условие теоремы 14.1 выполнено, так как единственное собственное число матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ неуправляемой подсистемы равно -1, $\varphi_{22}(\lambda) = \lambda + 1$. Следовательно, исходная система стабилизируема.

5. Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{01}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = 3$, $p_{21} = 2$. Построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{02}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_2(\lambda)$. Имеем $p_{12} = 1$. Построим матрицу $\mathbf{K}_2 = 1$.

Матрица для неуправляемого блока выбирается единичной соответствующей размерности $\mathbf{K}_3 = \mathbf{E}_1 = 1$. В результате

$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Определим коэффициенты эталонных полиномов для первых двух блоков.

$$\psi_1(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Имеем $d_{11} = 2$, $d_{21} = 1$.

Аналогично

$$\psi_2(\lambda) = \lambda + 1.$$

Тогда $d_{12} = 1$.

7. По формуле (14.3) вычислим строки

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_2 = 0.$$

Так как $\ell = r = 2$, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ формируется по формуле (14.5):

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (14.4) находим

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Проверим, что характеристический полином матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{QC}$ равен $\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)\varphi_{22}(\lambda)$.

Пример 14.5. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Применим теорему 10.2:

$$\operatorname{rang} \mathbf{S} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < n.$$

   Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Имеем

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{k}_1 = \widetilde{k}_2 = 1$.

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & -2/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{01} = -1$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{02} = 0$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеет вид (3.11), так как $\ell = r = 2$.

4. Проверим выполнение условия теоремы 14.1. Для этого вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ неуправляемой подсистемы

$$\varphi_{22}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 = \dfrac{1}{2} > 0$, то система не стабилизируема.

Пример 14.6. Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$$

Требуется построить стабилизирующее управление, доставляющее управляемой подсистеме собственные числа $\mu_j = -2$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим систему на полную управляемость. Применим теорему 10.2:

$$\operatorname{rang}\mathbf{S} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -5 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 3 < n.$$

   Следовательно, система не полностью управляема.

2. Строим матрицу $\mathbf{T}$. Имеем

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Здесь $\widetilde{k}_1 = 3$.

3. Вычислим матрицы

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \ \widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{P}}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_{22} = -3$. Заметим, что матрица $\widetilde{\mathbf{Q}}$ имеет вид (3.12), так как $\ell = 1 < r = 2$.

4. Проверим выполнение условия теоремы 14.1. Для этого вычислим характеристический полином матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{22}$ неуправляемой подсистемы

$$\varphi_{22}(\lambda) = \lambda + 3.$$

Единственный корень полинома $\varphi_{22}(\lambda)$ равен -3. Следовательно, система стабилизируема.

5. Из вида матрицы $\widetilde{\mathbf{P}}_{01}$ найдем коэффициенты ее характеристического полинома $\varphi_1(\lambda)$. Имеем $p_{11} = 6$, $p_{21} = 11$, $p_{31} = 6$. Построим матрицу

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате

$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}(\mathbf{K}_1, \mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Определим коэффициенты эталонного полинома

$$\psi_1(\lambda) = (\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8.$$

Имеем $d_{11} = 6$, $d_{21} = 12$, $d_{31} = 8$.

7. По формуле (14.3) вычислим строку

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\ell = 1 < r = 2$, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ формируется по формуле (14.6):

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Строим искомое стабилизирующее управление $\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}$. По формуле (14.4) находим

$$\mathbf{C} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Проверим, что характеристический полином матрицы $\mathbf{P}+\mathbf{Q}\mathbf{C}$ равен $\psi_1(\lambda)\varphi_{22}(\lambda)$.

§15. Синтез асимптотического идентификатора полного порядка

Рассмотрим линейную стационарную систему в отклонениях

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u}, \tag{15.1}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор отклонения от программного движения, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор отклонения от программного управления, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — постоянные $(n \times n)$- и $(n \times r)$-матрицы соответственно.

Пусть наряду с системой (15.1) задано уравнение измерителя (или наблюдающего устройства)

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \tag{15.2}$$

где $\mathbf{y}$ — известная m-мерная вектор-функция (показания приборов), $\mathbf{R}$ — заданная, постоянная $(m \times n)$-матрица. Далее будем считать, что $\operatorname{rang}\mathbf{R} = m$.

Требуется построить такую оценку $\widehat{\mathbf{x}}(t)$ вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, чтобы она обладала свойством

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{15.3}$$

Тогда, согласно теории (см. §6), стабилизирующее управление для системы (15.1) имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{15.4}$$

а асимптотическим идентификатором состояния линейной системы (15.1), (15.2) является

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{R}\widehat{\mathbf{x}}), \tag{15.5}$$

где неизвестная $(n \times m)$-матрица $\mathbf{L}$ подлежит определению. Здесь слагаемое $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{R}\widehat{\mathbf{x}})$ учитывает качество оценки состояния.

Рассмотрим две вспомогательные системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{u}_1, \tag{15.6}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{P}^T\mathbf{x}_2 - \mathbf{R}^T\mathbf{u}_2, \tag{15.7}$$

где матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ те же, что и в (15.1), (15.2), а векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}_2$ соответствующих размерностей имеют характер формальных обозначений.

Пусть стабилизирующие управления для систем (15.6), (15.7) имеют вид $\mathbf{u}_1 = \overline{\mathbf{C}}\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{u}_2 = \overline{\mathbf{L}}^T\mathbf{x}_2$ соответственно.

Используя критерий Калмана (см. теоремы 10.1, 10.2), проверим системы (15.6), (15.7) на полную управляемость. Имеем

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{Q}, \mathbf{P}\mathbf{Q}, \ldots, \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{Q}\right) = n_1, \tag{15.8}$$

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{R}^T, \mathbf{P}^T\mathbf{R}^T, \ldots, (\mathbf{P}^T)^{n-m}\mathbf{R}^T\right) = n_2, \tag{15.9}$$

где $n_1 \leqslant n$, $m \leqslant n_2 \leqslant n$, $m = \operatorname{rang}\mathbf{R}$.

Заметим, что согласно лемме 2.1, количество неуправляемых собственных чисел в системах (15.6) и (15.7) будет $k_1 = n - n_1$ и $k_2 = n - n_2$ соответственно.

Обозначим через $\mu_1, \ldots, \mu_{n_1}$ наперед заданные эталонные собственные числа системы (15.6), а через $\nu_1, \ldots, \nu_{n_2}$ — эталонные собственные числа (идентификатора) системы (15.7). Опираясь на теорему 6.1 и замечание 6.2, опишем алгоритм решения поставленной задачи.

Алгоритм

1. Проверим системы (15.6), (15.7) на полную управляемость, т.е. вычислим n_1, n_2 (см. (15.8), (15.9)).

2. Если $n_1 = n$ и $n_2 = n$, то системы полностью управляемы, и тогда для поиска матриц $\overline{\mathbf{C}}$, $\overline{\mathbf{L}}$ можно воспользоваться одним из алгоритмов §§11–13.

   В этом случае собственные числа матриц $\mathbf{P} + \mathbf{Q}\overline{\mathbf{C}}$ и $\mathbf{P}^T - \mathbf{R}^T\overline{\mathbf{L}}^T$ будут совпадать с наперед заданными эталонными собственными числами $\mu_1, \dots, \mu_n$ и $\nu_1, \dots, \nu_n$ соответственно.

   Переходим к шагу 4.

3. Если одна из систем (15.6) или (15.7) не является полностью управляемой, то проверяем выполнение условий теоремы 6.1.

   Если условия теоремы 6.1 не выполнены, то построение асимптотического идентификатора состояния системы неосуществимо. В противном случае, для поиска матриц $\overline{\mathbf{C}}$, $\overline{\mathbf{L}}$ можно воспользоваться одним из алгоритмов §14.

   Далее переходим к следующему шагу.

4. Используя известную вектор-функцию $\mathbf{y}$, а также найденные матрицы $\overline{\mathbf{C}}$ и $\overline{\mathbf{L}}$, получим асимптотический идентификатор состояния линейной системы (15.1), (15.2)

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}\overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{L}}\mathbf{R})\widehat{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{L}}\mathbf{y}. \tag{15.10}$$

   Искомое стабилизирующее управление системы (15.1) имеет вид

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{C}}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{15.11}$$

   где $\widehat{\mathbf{x}}$ — решение системы (15.10).

Ниже рассмотрен пример построения асимптотического идентификатора состояния (15.5) для системы (15.1), с помощью которого находится стабилизирующее управление (15.4) по измерениям (15.2). Далее всюду будем считать, что выход системы $\mathbf{y}$ известен, а также заданы эталонные собственные числа μ_j системы (15.1) и идентификатора — ν_ℓ.

Пример 15.1. Рассмотрим систему (15.1), (15.2) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Положим $\mu_j = -1$, $\nu_\ell = -4$.
Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим системы (15.6), (15.7) на полную управляемость. Первая система полностью управляема, см. пример 12.1, стр. 70. Там было показано, что $n_1 = 3$, а искомая матрица $\overline{\mathbf{C}}$ стабилизирующего управления (15.4) имеет вид

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -6 \end{pmatrix}.$$

   Проверим вторую систему (15.7) на полную управляемость:

$$n_2 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

   Так как $n_2 = n = 3$, то имеет место полная управляемость.

2. Для эталонных собственных чисел $\nu_\ell = -4$ так же, как и для системы (15.6), находим матрицу $\overline{\mathbf{L}}$. Получаем

$$\overline{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} -37 & 56 & 22 \end{pmatrix}^T.$$

3. Итак, асимптотический идентификатор состояния линейной системы (15.1), (15.2) принимает вид

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -36 & -1 & -37 \\ 56 & 1 & 55 \\ 14 & 12 & 17 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} -37 \\ 56 \\ 22 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \tag{15.12}$$

   Искомым стабилизирующим управлением системы (15.1) является

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -6 \end{pmatrix} \widehat{\mathbf{x}},$$

   где $\widehat{\mathbf{x}}$ — решение системы (15.12).

§16. Построение стабилизирующего управления с применением идентификатора Люенбергера

Опираясь на материал §7, 8, опишем алгоритм построения стабилизирующего управления вида (7.8) для системы (7.1), (7.2), применяя идентификатор Люенбергера.

Наперед заданные эталонные числа для системы (7.1) обозначим через μ_j, для идентификатора — ν_ℓ.

Алгоритм

1. Проверим систему (7.1), (7.2) на полную управляемость и идентифицируемость (см. теорему 8.2), т.е. вычислим n_1, n_2 (см. (15.8), (15.9)).

2. Если $n_1 = n$, то система полностью управляема, и тогда для поиска матрицы $\mathbf{C}$ можно воспользоваться одним из алгоритмов §11–13.

   В противном случае, необходимо проверить первое условие теоремы 8.1. Если оно выполняется, то для поиска матрицы $\mathbf{C}$ можно воспользоваться одним из алгоритмов §14, иначе стабилизирующего управления не существует.

3. Если $n_2 = n$, то система полностью идентифицируема[3] (см. теорему 8.2). Тогда можно построить $(n-m)$-мерный асимптотический идентификатор состояния Люенбергера, характеристический многочлен которого будет иметь в качестве спектра наперед заданный набор эталонных чисел ν_ℓ, $\ell = \overline{1, n-m}$.

4. Находим квадратную $(n \times n)$-матрицу $\mathbf{S}$, удовлетворяющую второму условию теоремы 8.1. Здесь $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{T}$ — неизвестная $((n-m) \times n)$-матрица.

[3] Алгоритм построения стабилизирующего управления для не полностью идентифицируемых систем описан в [3].

5. Используя известную вектор-функцию $\mathbf{y}$, а также найденные матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{P}_{zz}$, $\mathbf{P}_{zy}$, $\mathbf{Q}_z$ (см. (8.2)), получим асимптотический идентификатор Люенбергера

$$\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = \mathbf{P}_{zz}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{P}_{zy}\mathbf{y} + \mathbf{Q}_z\mathbf{u}. \tag{16.1}$$

Искомое стабилизирующее управление (7.8) для системы (7.1), построенное с использованием измерений (7.2) и при помощи асимптотического идентификатора Люенбергера (16.1), имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\widehat{\mathbf{x}}, \tag{16.2}$$

где $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$, а $\widehat{\mathbf{z}}$ — решение системы (16.1).

Пример 16.1. Рассмотрим систему (7.1), (7.2) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3u, \end{cases} \qquad y = 3x_1.$$

Пусть также заданы выход системы y и эталонные собственные числа $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -3$, $\nu = -5$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Применяя формулы (15.8), (15.9), проверим систему на полную управляемость и идентифицируемость. Имеем

$$n_1 = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad n_2 = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Так как $n_1 = n_2 = n = 2$, то система (7.1), (7.2) полностью управляема и идентифицируема.

2. Найдем коэффициенты матрицы $\mathbf{C}$, применяя, например, метод неопределенных коэффициентов (см. §11). Искомую матрицу $\mathbf{C}$ представим в виде $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$. Вычислим характеристический полином матрицы $\mathbf{P} + \mathbf{QC}$ и эталонный многочлен:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{P} - \mathbf{QC}) = \lambda^2 + \lambda(-3c_2 - 1) + 3c_2 - 3c_1 - 1,$$

$$\varphi_{\text{Э}}(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) = \lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

Приравняем коэффициенты полиномов $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_{Э}(\lambda)$ при соответствующих степенях λ. В результате получаем

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем матрицу $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$, где матрицу $\mathbf{T}$ будем искать в виде $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{3T_2}\begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ 3 & -T_1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, чтобы $\operatorname{rang}\mathbf{S} = n = 2$ (см. теорему 8.1), необходимо и достаточно, чтобы $T_2 \neq 0$.

Из формул (8.2) находим

$$\mathbf{P}_{zz} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \mathbf{P}_{zy} = \frac{1}{3}\left(T_1 + T_2 - \frac{T_1^2}{T_2}\right), \quad \mathbf{Q}_z = 3T_2.$$

Имея характеристическое число идентификатора $\nu = -5$ и общий вид матрицы $\mathbf{P}_{zz}$, определим T_1 и T_2 для обеспечения асимптотики оценки (7.4). Получаем, что $T_1 = -5a, T_2 = a$ для всех $a \neq 0$.

Итак, $\mathbf{P}_{zz} = -5$, $\mathbf{P}_{zy} = -\dfrac{29a}{3}$, $\mathbf{Q}_z = 3a$.

4. Используя известный выход системы y и найденные матрицы $\mathbf{P}_{zz}$, $\mathbf{P}_{zy}$, $\mathbf{Q}_z$, получаем идентификатор Люенбергера (см. (16.1))

$$\dot{\widehat{z}} = -5\widehat{z} - \frac{29a}{3}y + 3au$$

и искомое стабилизирующее управление (см. (16.2))

$$u = -\frac{2}{a}\widehat{z} - \frac{43}{9}y,$$

при условии, что $a \neq 0$.

В заключение отметим, что часть разобранных примеров и задач, включенных в контрольные работы, взяты из хорошо известного задачника [6]. В нем можно найти дополнительный справочный материал и упражнения для самообразования.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Ниже приведены варианты для выполнения контрольной работы по построению стабилизирующего управления в линейной стационарной системе (10.1). В каждой задаче необходимо исследовать систему на полную управляемость и построить стабилизирующее управление, доставляющее замкнутой системе или управляемой подсистеме наперед заданные эталонные собственные числа μ_j.

ВАРИАНТ № I

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{matrix}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{matrix}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -3.$$

ВАРИАНТ № II

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -1, \\ \mu_2 &= -2, \\ \mu_3 &= -3, \\ \mu_4 &= -4. \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -2, \\ \mu_2 &= -3, \\ \mu_3 &= -1. \end{aligned}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -2.$$

ВАРИАНТ № III

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -1, \\ \mu_2 &= -2, \\ \mu_3 &= -3, \\ \mu_4 &= -4. \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -2, \\ \mu_2 &= -3, \\ \mu_3 &= -1. \end{aligned}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -1.$$

ВАРИАНТ № IV

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{array}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{array}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -2.$$

ВАРИАНТ № V

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{array}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{array}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -3.$$

ВАРИАНТ № VI

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{matrix}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{matrix}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -2.$$

ВАРИАНТ № VII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{matrix}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{matrix}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -3.$$

ВАРИАНТ № VIII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{array}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{array}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -1.$$

ВАРИАНТ № IX

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{array}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{array}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -2.$$

ВАРИАНТ № X

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{matrix}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{matrix}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -1.$$

ВАРИАНТ № XI

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{matrix}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{matrix}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -3.$$

ВАРИАНТ № XII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -1, \\ \mu_2 &= -2, \\ \mu_3 &= -3, \\ \mu_4 &= -4. \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -2, \\ \mu_2 &= -3, \\ \mu_3 &= -1. \end{aligned}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -2.$$

ВАРИАНТ № XIII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -1, \\ \mu_2 &= -2, \\ \mu_3 &= -3, \\ \mu_4 &= -4. \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= -2, \\ \mu_2 &= -3, \\ \mu_3 &= -1. \end{aligned}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -1.$$

ВАРИАНТ № XIV

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{array}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{array}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -3.$$

ВАРИАНТ № XV

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \\ \mu_4 = -4. \end{array}$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -1. \end{array}$$

3.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mu_j = -2.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Ниже приведены варианты для выполнения контрольной работы по построению стабилизирующего управления для линейной стационарной системы при неполной обратной связи. Каждый вариант состоит из двух задач:

1. Построить асимптотический идентификатор полного порядка (6.7) и стабилизирующее управление (6.6) для системы (6.1).
2. Построить идентификатор Люенбергера (8.4) и стабилизирующее управление (7.8) для системы (7.1), (7.2).

ВАРИАНТ № I

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -4, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -3,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № II

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -4, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -3,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № III

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \\ \mu_3 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -4,\ \nu_2 = -4,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu = -4.$$

ВАРИАНТ № IV

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \\ \mu_3 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -3,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = -4.$$

ВАРИАНТ № V

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \\ \mu_3 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -3,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № VI

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \\ \mu_3 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -4,\ \nu_2 = -4,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № VII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -3, \\ \mu_3 = -4, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -2,\ \nu_3 = -2.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu = -5.$$

ВАРИАНТ № VIII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \\ \mu_3 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -4,\ \nu_2 = -4,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu = -5.$$

ВАРИАНТ № IX

1.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \end{array}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -1,\ \nu_2 = -2,\ \nu_3 = -3.$$

2.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \end{array}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № X

1.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \end{array}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -1,\ \nu_2 = -2,\ \nu_3 = -3.$$

2.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \end{array}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № XI

1.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \end{array}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -4,\ \nu_2 = -4,\ \nu_3 = -4.$$

2.
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \end{array}$$
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ВАРИАНТ № XII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -1,\ \nu_2 = -2,\ \nu_3 = -3.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -1, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \nu = -4.$$

ВАРИАНТ № XIII

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -3,\ \nu_2 = -3,\ \nu_3 = -3.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -2, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \nu = -4.$$

ВАРИАНТ № XIV

1.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \\ \mu_3 = -3, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 = -4,\ \nu_2 = -4,\ \nu_3 = -4.$$

2.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_1 = -1, \\ \mu_2 = -2, \end{matrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \nu = -3.$$

ОТВЕТЫ

Контрольная работа № 1.

I. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -25 & -30 & -9 & -42 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 & -29 \end{pmatrix}$.

II. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -34 & -30 & -10 & -42 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 30 & -30 & 20 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Не стабилизируема.

III. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 14 & -24 & -10 & 6 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 15 & -15 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

IV. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -38 & -28 & -10 & -42 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

V. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -70 & 60 & 60 & -28 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -8 & 8 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

VI. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -110 & 36 & 90 & -242 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

VII. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 87 & -120 & 280 & -267 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3) Не стабилизируема.

VIII. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -17 & 0 & -28 & 18 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

IX. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 28 & 0 & 39 & -21 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

X. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -50 & -39 & -12 & -93 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

XI. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -26 & -5 & -12 & -18 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

XII. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -17 & -1,5 & -12 & -27 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -8 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

XIII. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 47 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

XIV. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -7 & 47 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1,5 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

XV. 1) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -50 & 30 & -3 & 202 \end{pmatrix}$. 2) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -8/3 & -5/3 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & -0,4 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2.

I. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 30 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{45}{2} \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} + 10a\mathbf{y} + a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\frac{2}{a}\widehat{\mathbf{z}} + 6\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

II. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -15 & -210 & -120 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 60 & 75 & -60 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} + \frac{13a}{2}\mathbf{y} + a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\frac{3}{a}\widehat{\mathbf{z}} + 6\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

III. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 9 & -27 & -8 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 90 & 107 & 199 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -4\widehat{\mathbf{z}} - \frac{17a}{2}\mathbf{y} - 3a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\frac{1}{2a}\widehat{\mathbf{z}} - \frac{11}{4}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

IV. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{19}{2} & 32 & \frac{37}{2} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & \frac{25}{2} & \frac{45}{2} \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -4\widehat{\mathbf{z}} - 7a\mathbf{y} - 2a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \frac{13}{a}\widehat{\mathbf{z}} + 21\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

V. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 23 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} -30 & -17 & 30 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} - 16a\mathbf{y} + 6a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\frac{1}{2a}\widehat{\mathbf{z}} + \mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

VI. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -16 & 8 & 19 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 216 & 199 & -108 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} + \frac{7a}{2}\mathbf{y} - a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\frac{2}{a}\widehat{\mathbf{z}} + \frac{7}{2}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

VII. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -27 & 20 & 40 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{7}{3} & -\frac{55}{3} \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -5\widehat{\mathbf{z}} + \frac{14a}{5}\mathbf{y} + 2a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

VIII. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -64 & -\frac{75}{2} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 235 & -108 & -107 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -5\widehat{\mathbf{z}} - \frac{14a}{9}\mathbf{y} + \frac{19a}{9}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \frac{117}{49a}\widehat{\mathbf{z}} + \frac{69}{49}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

IX. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 48 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 60 & -54 & -120 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} - 2a\mathbf{y} - 9a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \frac{2}{a}\widehat{\mathbf{z}} + 4\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

X. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 47 & 12 & 59 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 55 & \dfrac{67}{3} & -4 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} + 4a\mathbf{y} - 7a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\dfrac{2}{5a}\widehat{\mathbf{z}} + \dfrac{8}{5}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

XI. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -10 & 12 & 48 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} -\dfrac{125}{2} & -109 & \dfrac{307}{2} \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} - \dfrac{17a}{2}\mathbf{y} + 12a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\dfrac{3}{2a}\widehat{\mathbf{z}} - \dfrac{13}{4}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

XII. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} & 4 & -\dfrac{8}{3} \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 15 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -4\widehat{\mathbf{z}} + a\mathbf{y} + \dfrac{3a}{5}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\dfrac{25}{11a}\widehat{\mathbf{z}} + \dfrac{3}{11}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

XIII. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 29 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} -25 & -4 & 25 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -4\widehat{\mathbf{z}} + a\mathbf{y} + \dfrac{10a}{3}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \dfrac{9}{7a}\widehat{\mathbf{z}} - \dfrac{17}{14}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

XIV. 1) $\overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 17 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} -72 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

2) $\dot{\widehat{\mathbf{z}}} = -3\widehat{\mathbf{z}} + \dfrac{a}{8}\mathbf{y} - \dfrac{25a}{8}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = -\dfrac{544}{161a}\widehat{\mathbf{z}} - \dfrac{337}{161}\mathbf{y}$ для всех $a \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Ю., Александрова Е.Б., Екимов А.В., Смирнов Н.В.* Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. Учеб. пособие, 3-е издание. СПб.: Лань, 2015. 160 с.
2. *Александров А.Ю., Жабко А.П.* Устойчивость разностных систем. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003. 112 с.
3. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 552 с.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. СПб.: Лань, 2008. 480 с.
6. *Жабко А.П., Прасолов А.В., Харитонов В.Л.* Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 2003. 286 с.
7. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. СПб.: Лань, 2009. 496 с.
8. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
9. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 386 с.
10. *Смирнов Е.Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. 307 с.
11. *Luenberger D.G.* An introduction to observers // IEEE Trans. on Automatic Control. 1971. AC–16. № 6. P. 596–602.
12. *Luenberger D.G.* Introduction to dynamic systems. NY: Wiley, 1979. 446 p.

Николай Васильевич СМИРНОВ,
Татьяна Евгеньевна СМИРНОВА,
Григорий Шаликович ТАМАСЯН

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Учебное пособие

Издание третье, стереотипное

Зав. редакцией естественнонаучной
литературы *М. В. Рудкевич*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Ю. Гагарина, д. 1, лит. А.
Тел./факс: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 01.11.16.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 6,72. Тираж 100 экз.

Заказ № 335-16.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в ПАО «Т8 Издательские Технологии».
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.