Задача Штурма-Лиувилля

Разложить функцию $ln(x)$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right)+\frac{\lambda}{x}y(x)=0. \tag{1}$$

$$y(a)=0, y'(b)=0, \ \ x\in(a,b), \ \ b>a>0. \tag{2}$$

Раскроем скобки в (1)

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{dy(x)}{dx}+\frac{\lambda}{x}y(x)=0 \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения (3) в виде степенной функции

$$y(x)=x^n. \tag{4}$$

Подставим(4) в (3), получим
$x^{n-1}\left(n(n-1)+n+\lambda\right)=0$ или $n^2+\lambda=0, \ \ n=\pm\sqrt{-\lambda}=\pm i\sqrt{\lambda}$
Как и в предыдущих случаях рассмотриваем 3 варианта:

1) $\lambda<0, \ \ y(x)=C_1x^{-\sqrt{-\lambda}}+C_2x^{\sqrt{-\lambda}},$ подставляя в кравые условия(2), получим $C_1=C_2=0$

2) $\lambda=0, \ \ y(x)=C_1\ln x+C_2,$ подставляя в кравые условия(2), получим $C_1=C_2=0$

3) $\lambda>0, \ \ y(x)=Ax^{-i\sqrt{\lambda}}+Bx^{i\sqrt{\lambda}}=C_1\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)+C_2\cos(\sqrt{\lambda}\ln x)$

Подставим полученное в 3 варианте решение в краевые условия(2), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1, C_2

$$\begin{aligned} &y(a)=C_1\sin(\sqrt{\lambda}\ln a)+C_2\cos(\sqrt{\lambda}\ln a)=0,\\ &y'(b)=\tfrac{\sqrt{\lambda}}{b}(C_1\cos(\sqrt{\lambda}\ln b)-C_2\sin(\sqrt{\lambda}\ln b))=0\end{aligned} \tag{5}$$

Для существования ненулевого решения системы (5) необходимо и достаточно, чтобы определитель ее равнялся НУЛЮ. Приравняем его нулю и найдем значения λ, которые обеспечивают существование ненулевого решения.

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{b}\left(\sin(\sqrt{\lambda}\ln a)\sin(\sqrt{\lambda}\ln b)+\cos(\sqrt{\lambda}\ln a)\cos(\sqrt{\lambda}\ln b)\right)=\frac{\sqrt{\lambda}}{b}\cos((\sqrt{\lambda}\ln\frac{b}{a}))=0$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\sqrt{\lambda_k}\ln\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \ \ k=0,1,2,... \tag{6}$$

Найдем собственные функции. Для этого воспользуемся соотношениями(5). Подставим в них найденные значения собственных чисел и выберем значения коэффициентов C_1, C_2 так, чтобы одно из уравнений (5) обращалось в тождество, например, второе уравнение, т.е. положим

$$C_1 = \sin\sqrt{\lambda_k}\ln b, \quad C_2 = \cos\sqrt{\lambda_k}\ln b$$

Тогда собственная функция будет иметь вид

$$y_k(x) = \cos(\sqrt{\lambda_k}\ln(x/b)) \tag{7}$$

Таким образом, разложение функции $\ln(x)$ представляется в виде

$$ln(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\ln(x/b)) \tag{8}$$

Где

$$A_k = \frac{\int\limits_a^b \ln(x) y_k(x) \frac{1}{x} dx}{\int\limits_a^b y_k^2(x) \frac{1}{x} dx} \tag{9}$$

Don't remember - the weight is $\frac{1}{x}$!!

Самостоятельная работа

Разложить функцию $ln(x)$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y(x) = 0$$
$$y'(a) - hy(a) = 0, y(b) = 0, \quad x \in (a,b), \quad b > a > 0, h > 0$$

Домашнее задание

Разложить функцию $ln(x/b)$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy(x)}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y(x) = 0$$

No. 1. $y(a) = 0, y(b) = 0, \quad x \in (a,b), \quad b > a > 0$

No. 2. $y'(a) = 0, y'(b) = 0, \quad x \in (a,b), \quad b > a > 0$

No. 3. $y'(a) - hy(a) = 0, y(b) = 0, \quad x \in (a,b), \quad b > a > 0, h > 0$

No. 4. $y'(a) - h_1 y(a) = 0, y'(b) + h_2 y(b) = 0, \quad x \in (a,b), \quad b > a > 0, h_1 > 0, \ h_2 > 0$