

Лабораторная работа №3.

Методы принятия решений в условиях определенности

Решение задач линейного программирования с использованием табличного процессора Excel

1.1. Общая постановка задачи линейного программирования

В общем виде оптимизационная задача записывается следующим образом:

$$Z = F(x) \rightarrow \max(\min), X \in U, \quad (1.1.1)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; U – область допустимых значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n ; $F(X)$ – целевая функция.

Для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение X^* , т.е. указать $X^* \in U$ такое, что $F(X^*) = F(X) (F(X^*) \leq F(X))$ при любом $X \in U$.

Оптимизационная задача является неразрешимой, если она не имеет оптимального решения. В частности, задача максимизации будет неразрешима, если целевая функция $F(X)$ не ограничена сверху на допустимом множестве U .

Методы решения оптимизационных задач зависят как от вида целевой функции $F(X)$, так и от строения допустимого множества U . Целевая функция в задаче, как правило, является функцией n переменных. Методы решения таких задач называют **методами математического программирования**.

В математическом программировании выделяют следующие основные задачи в зависимости от вида целевой функции $F(X)$ и от области U :

- задачи линейного программирования (ЗЛП), если $F(X)$ и ограничения линейны;
- задачи целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП), если ставится условие целочисленности переменных x_1, x_2, \dots, x_n ;
- задачи нелинейного программирования, если форма $F(X)$ носит нелинейный характер.

Задача линейного программирования имеет вид

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad (1.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, k+2, \dots, m, k \leq m, \quad (1.1.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.1.4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.1.5)$$

где a, b, c – коэффициенты задачи линейного программирования. При этом система линейных уравнений (1.1.3) и неравенств (1.1.4), (1.1.5), определяющая допустимое множество решений задачи U , называется

системой ограничений задачи линейного программирования, а линейная функция $F(X)$ называется целевой функцией, или критерием оптимальности.

1.2. Примеры задач на построение математических моделей ЗЛП

Построение экономико-математических моделей задач линейного программирования рассмотрим на конкретных примерах.

1.2.1. Задача на определение оптимального ассортимента продукции

Пример 1. Предприятие изготавливает два вида продукции – Π_1 и Π_2 , которая поступает в продажу. Для производства продукции используется два вида ресурсов (сырья) – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 10 и 15 единиц соответственно. Расход сырья на единицу каждой продукции приведен в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ресурсы	Расходы сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	Π_1	Π_2	
А	1	2	10
В	3	2	15

Известно также, что суточный спрос на продукцию Π_1 никогда не превышает спроса на продукцию Π_2 более чем на 2 ед., а спрос на продукцию Π_2 никогда не превышает 3 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 4 денежные единицы (ден. ед.) для Π_1 и 5 ден. ед. для Π_2 .

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответов на следующие вопросы.

1. Для определения каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать *эндогенные переменные* данной задачи?

2. Какие *ограничения* должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3. Какова *цель* задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению?

Ответы на вышеперечисленные вопросы могут быть сформулированы для данной задачи так: фирме требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в ден. ед. от реализации продукции с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели необходимо идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции Π_1 а через x_2 – соответственно количество единиц продукции Π_2 , которые производит предприятие. Так как производство продукции Π_1 и Π_2 ограничено

имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию и количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 15,$$

$$x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции P_1 и x_2 единиц продукции P_2 составит $F=4x_1+5x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Рассмотренная задача относится к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы: прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты станочного времени.

Пример 2. Для выпуска трех видов продукции требуются затраты сырья, электроэнергии и оборудования. Исходные данные приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Тип ресурсов	Расход ресурсов на 1 ед. продукции			Наличие ресурсов
	1-й вид	2-й вид	3-й вид	
Сырье	3	2	2	60
Электроэнергия	10	15	20	80
Оборудование	5	3	4	50
Доход от реализации единицы продукции	15	12	10	

Необходимо определить, сколько каждого вида продукции следует выпустить, чтобы общий доход от реализации выпускаемой продукции был бы максимальным.

Для построения модели введем обозначения: x_1 – количество изделий продукции 1, x_2 – количество изделий продукции 2, x_3 – количество изделий продукции 3.

Зная количество каждого из ресурсов, необходимое для изготовления одной единицы продукции, и запасы этих ресурсов, можем составить систему ограничений, определяющую область возможных значений x_1 , x_2 и x_3 :

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 60,$$

$$10x_1 + 15x_2 + 20x_3 \leq 80,$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 50.$$

Также на переменные налагаются дополнительные ограничения, требующие неотрицательности их значений ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, если соответствующая продукция не выпускается):

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Доход, получаемый предприятием от реализации x_1 единиц продукции 1, x_2 единиц продукции 2 и x_3 единиц продукции 3, составит

$$F = 15x_1 + 12x_2 + 10x_3.$$

В общем случае математическая модель такой задачи имеет следующий вид.

Найти вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий функцию

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.2.1)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

...

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

1.2.2. Задача на использование мощностей оборудования

Предприятие имеет m моделей машин различных мощностей. Задан план по времени и номенклатуре: T_i – время работы каждой машины; продукции j -го вида должно быть выпущено не менее N_j единиц.

Необходимо составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство, если известны производительность b_i каждой i -й машины по выпуску j -го вида продукции и стоимость c_{ij} единицы времени, затрачиваемого i -й машиной на выпуск j -го вида продукции. Тем самым требуется определить время x_i работы i -й машины по выпуску j -го вида продукции, обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений на общее время работы машин T и заданное количество продукции K .

Так как требуется определить минимальные затраты на производство, то целевая функция выражается следующим образом:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (1.2.4)$$

Так как по условию задачи машины работают заданное время T , то данное ограничение можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = T_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.2.5)$$

Ограничение на заданное количество продукции будет выглядеть таким образом:

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_{ij} \geq N_j, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.6)$$

Пример. Предприятие должно за время T выполнить план производства двух видов изделий P_1 и P_2 . При этом для производства каждого вида может быть использовано оборудование двух групп A_1 и A_2 ($m = 2$). Производительность каждой группы оборудования различна и задается величиной a_{ij} , стоимость единицы времени работы оборудования при изготовлении одной единицы продукции выражается величиной b_{ij} , $i, j = 1, 2$.

Требуется составить оптимальный план работы групп оборудования, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью и в заданный срок. Плановое количество изделий вида P_1 составляет не менее N_1 штук ($N_1 = 8000$), а изделий вида P_2 – не менее N_2 штук ($N_2 = 4000$). Характеристики процесса производства изделий с помощью оборудования различных групп представлены в табл. 1.3. Ресурсы времени 1-й и 2-й группы оборудования равны 400 и 300 часов соответственно.

Таблица 1.3

Группа оборудования	Производительность оборудования, шт./час		Удельная стоимость, руб./час	
	P_1	P_2	P_1	P_2
A_1	30 (a_{11})	20 (a_{12})	2 (b_{11})	4 (b_{12})
A_2	40 (a_{21})	35 (a_{22})	3 (b_{21})	2 (b_{22})

Введем обозначения: x_{11} – время, в течение которого первая группа оборудования будет производить первый вид изделий; x_{12} – время, в течение которого первая группа оборудования, будет производить второй вид изделия; x_{21} – время, в течение которого вторая группа оборудования будет производить первый вид изделий; x_{22} – время, в течение которого вторая группа оборудования будет производить второй вид изделий.

Составим систему ограничений, учитывающих плановые периоды T_1 , T_2 и плановые задания количества каждого вида изделий N_1 , N_2 :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= T_1, \\ x_{21} + x_{22} &= T_2, \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} &\geq N_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} &\geq N_2. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

На переменные x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22} налагаются дополнительные ограничения, требующие неотрицательности их значений:

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0. \quad (1.2.8)$$

Решается задача на минимум затрат на производство. Тогда стоимость изготовления продукции можно записать в виде следующей целевой функции:

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22} \rightarrow \min.$$

Окончательно задача формулируется следующим образом. Требуется найти такой план $X = \|x_{ij}\|, i, j = 1, 2$, при котором достигается минимум значения целевой функции

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22} \quad (1.2.9)$$

при ограничениях (1.2.7), (1.2.8).

В числовых значениях задача будет записана в следующем виде:

$$F = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{21} + 2x_{22} \rightarrow \min,$$

$$x_{11} + x_{12} = 400,$$

$$x_{21} + x_{22} = 300,$$

$$30x_{11} + 40x_{21} \geq 8000,$$

$$20x_{12} + 35x_{22} \geq 4000,$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0.$$

1.2.3. Задача на составление рациональных смесей

Пусть фирма имеет возможность готовить различные виды смесей (продуктов) из закупаемых различных видов сырья. Каждый вид сырья содержит разное количество питательных компонентов (ингредиентов).

Установлено, что продукция должна удовлетворять по крайней мере некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности (полезности). Перед руководством фирмы стоит задача определить количество каждого i -го сырья, образующего смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу смеси и ее питательности.

Введем условные обозначения: x_i – количество i -го сырья в смеси; m – количество видов сырья; n – количество ингредиентов в сырье; a_{ij} – количество i -го ингредиента, содержащегося в единице j -го вида сырья; b_j – минимальное количество i -го ингредиента, содержащегося в единице смеси; c_i – стоимость единицы i -го сырья; q – минимальный вес смеси.

В общем виде задача может быть записана

$$Z = \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \min \quad (1.2.10)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq q \quad (1.2.11)$$

– на общий расход смеси;

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq b_j, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.2.12)$$

– на питательность смеси;

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2.13)$$

– на неотрицательность переменных.

Пример 1. Для жизнедеятельности человека среднего возраста ежедневно необходимо потреблять 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг продуктов питания, а также стоимость этих продуктов в магазине приведены в табл. 1.4. Требуется составить суточный рацион, содержащий не менее указанных выше необходимых питательных веществ и обеспечивающий минимальную общую стоимость закупаемых продуктов.

Таблица 1.4

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг продуктов, г					
	Мясо	Рыба	Масло	Картофель	Сыр	Крупа
Белки	180	190	70	21	260	130
Жиры	20	3	865	2	310	30
Углеводы	0	0	6	200	20	650
Минеральные соли	9	10	12	70	60	20
Стоимость 1 кг продукта, руб.	70	100	60	15	150	20

Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_6 количество покупаемого каждого вида продукта. Тогда целевая функция данной задачи – обеспечение минимальных затрат на покупку продуктов питания – будет записана в виде

$$F = 70x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 15x_4 + 150x_5 + 20x_6 \rightarrow \min$$

при следующих ограничениях:

$$180x_1 + 190x_2 + 70x_3 + 21x_4 + 260x_5 + 130x_6 \geq 118,$$

$$20x_1 + 3x_2 + 865x_3 + 2x_4 + 310x_5 + 30x_6 \geq 56,$$

$$6x_3 + 200x_4 + 20x_5 + 650x_6 \geq 500,$$

$$9x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 20x_6 \geq 8,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Еще один класс моделей, аналогичных рассмотренным выше, возникает при решении экономической проблемы, связанной с изготовлением смесей различных жидкостей с целью получения пользующихся спросом готовых продуктов.

Представим себе фирму, торгующую различного рода продуктами, каждый из которых является смесью нескольких компонентов. Предположим, что эта фирма планирует изготовление смесей m видов. Обозначим через x_{ij} количество литров i -го компонента, используемого для получения j -го продукта. Тогда первая группа ограничений относится к объемам потребляемых компонентов:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq S_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где S_i – объем i -го компонента, которым располагает фирма в начале планируемого периода.

Вторая группа ограничений отражает требование, заключающееся в том, чтобы запланированный выпуск продукции хотя бы в минимальной степени удовлетворял имеющийся спрос на каждый из производимых продуктов, т.е.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq D_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где D_j – минимальный спрос на продукцию j в течение планируемого периода.

Третья группа ограничений связана с технологическими особенностями, которые необходимо принимать во внимание при приготовлении смеси. Например, отношение между объемами двух компонентов в процессе получения j -го продукта выглядит так:

$$\frac{x_{ij}}{x_{i+1j}} \geq r, \quad \text{или} \quad x_{ij} - r \cdot x_{i+1j} \geq 0.$$

где r – некоторая заданная константа.

Обозначив через p_{ij} доход с единицы продукции x_{ij} , запишем целевую функцию:

Пример 2. Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,3%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Характеристика	Компонент автомобильного бензина			
	№1	№2	№ 3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость, ден. ед. за т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Целевая функция данной задачи записывается в виде

$$Z = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 \rightarrow \min.$$

Первое ограничение по октановому числу:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000.$$

Второе ограничение по содержанию серы:

$$0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 0,3 \cdot 1000.$$

Приведем ограничения по используемым ресурсам:

$$x_1 \leq 700.$$

$$x_2 \leq 650,$$

$$x_3 \leq 500,$$

$$x_4 \leq 300,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

Последнее ограничение должно быть на неотрицательность введенных переменных, т.е.

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

1.2.4. Задача о раскрое (о минимизации обрезков)

Данная задача состоит в разработке таких технологических планов раскроя, при которых получается необходимый комплекс заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

Например, на пилораме имеется большое количество досок длиной 3 м. Их следует распилить на заготовки двух видов: длиной 1,2 м и 0,9 м. Причем заготовок каждого вида должно быть получено не менее 50 и 81 шт. соответственно.

Каждая доска может быть распилена несколькими способами:

а) на 2 заготовки по 1,2 м;

б) на 1 заготовку по 1,2 м и 2 заготовки по 0,9 м;

в) на 3 заготовки по 0,9 м.

Найти число досок, распиливаемых каждым способом так, чтобы на заготовки любого вида пошло наименьшее число досок.

Обозначим через x_1 , x_2 , x_3 количество досок, распиливаемых 1-м, 2-м и 3-м способом соответственно. Тогда целевая функция будет записана в виде

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

при соответствующих ограничениях по количеству заготовок длиной 1,2 м и 0,9 м:

$$2x_1 + x_2 \geq 50,$$

$$2x_2 + 3x_3 \geq 81,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

1.2.5. Задача на выбор портфеля ценных бумаг

В финансовой сфере, когда речь идет об инвестировании денежных средств в ценные бумаги (акции, векселя, облигации), возникают также задачи оптимизации, если денежные средства

вкладываются в несколько видов ценных бумаг и формируется портфель активов.

Доходность портфеля (D), состоящего из n активов, должна быть максимальной. Так как стоимость ценных бумаг в будущем не определена и зависит от множества факторов, то будем в качестве количественной меры

использовать понятие риска, и риск портфеля не должен превышать допустимого ($R_{дон}$).

Обозначив через v_i , удельный вес i -го актива, d_i – доходность r_i -го актива, r_i – средневзвешенную рисковую составляющую i -го актива, можно записать целевую функцию данной задачи в виде

$$D = \sum_{i=1}^n v_i d_i \rightarrow \max .$$

Ограничения данной задачи связаны с тем, чтобы:

1) общий риск портфеля не превосходил заданного риска, т.е.

$$\sum_{i=1}^n v_i r_i \leq R_{дон} ;$$

2) в каждый актив должны быть включены положительные инвестиции и все средства должны быть полностью инвестированы:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1,$$

$$\underline{0 \leq v_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, m.}$$

1.4. Аналитические методы решения задач линейного программирования

1.4.1. Решение задач линейного программирования с использованием табличного процессора Excel

Для решения задач линейного программирования в Excel имеется надстройка *Поиск решения*. Эта надстройка вызывается из меню *Сервис*. Если ее там нет, то необходимо в окне *Надстройки*, появляющемся после выполнения команд *Сервис* → *Надстройки* установить флажок *Поиск решения*. В том случае, когда данный флажок отсутствует, нужно переустановить Excel заново в режиме выборочной установки с указанием включения данной функции.

Рассмотрим использование данной надстройки для решения задач линейного программирования на примере решения задачи из раздела 1.3.1.

Постановка задачи

Предприятие изготавливает и реализует два вида продукции – P_1 и P_2 . Для производства продукции используются два вида ресурсов – сырье и труд. Максимальные запасы этих ресурсов в сутки составляют 10 и 15 единиц соответственно. Расход ресурсов на изготовление каждого вида продукции, запасы и оптовые цены продукции приведены в таблице.

Ресурсы	Расходы сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	P_1	P_2	
Сырье	1	3	14

Труд	4	2	26
Оптовая цена	3	3	

Известно, что суточный спрос на продукцию P_1 никогда не превышает спроса на продукцию P_2 более чем на 5 ед., а спрос на продукцию P_2 никогда не превышает 4 ед. в сутки.

Как спланировать выпуск продукции предприятия, чтобы доход от ее реализации был максимальным?

Математическая модель задачи

Математическая модель этой задачи имеет следующий вид. Максимизировать целевую функцию

$$F = 3x_1 + 3x_2$$

при следующих ограничениях:

$$1x_1 + 3x_2 \leq 14 \text{ — 1-е ограничение (на сырье),}$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 26 \text{ — 2-е ограничение (на труд),}$$

$$1x_1 - 1x_2 \leq 5 \text{ — 3-е ограничение (спроса 1),}$$

$$0x_1 + 1x_2 \leq 4 \text{ — 4-е ограничение (спроса 2),}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Нулевые и единичные коэффициенты явно указаны в формулах ограничений для удобства ввода формул в Excel.

Решение задачи. Для решения этой задачи с помощью табличного процессора необходимы следующие действия.

1. Создать в Excel таблицу вида:

	А	В	С	Д	Е	Ф
1	Ресурсы и	Параметры				
2	спрос	P1	P2	ограничения	Отношения	Запасы
3	Сырье	1	3		<=	14
4	Труд	4	2		<=	26
5	Спрос 1	1	-1		<=	5
6	Спрос 2	0	1		<=	4
7	Количество	0	0			
8	Цена	3	3			
9	F(X)					

В затененных областях необходимо будет ввести формулы для целевой функции и линейных ограничений.

Значения переменных опорного плана (*Количество*) для P_1 и P_2 могут быть заданы вручную, что позволит ускорить процесс поиска решения. Если значения опорного плана не заданы, то программа определяет их автоматически.

2. В ячейке B9 для вычисления значения целевой функции ввести формулу =СУММПРОИЗВ(B8:C8;\$B\$7:\$C\$7), которая находит сумму попарных произведений ячеек с ценами (B8:C8) на ячейки со значениями параметров (\$B\$7:\$C\$7).

Координаты ячеек с количественными значениями параметров P_1 и P_2 преобразуются к абсолютному виду для удобства дальнейшего копирования формулы в ячейки с ограничениями. Для такого преобразования необходимо при наборе формулы после выделения нужного диапазона ячеек в таблице (B7:C7) нажать клавишу F4.

3. Для задания ограничений по ресурсу *Сырье* в ячейку D3 скопировать формулу из ячейки B9, заменив диапазон цен (B8:C8) на диапазон параметров расхода сырья (B3:C3). В результате в ячейке E3 получится формула =СУММПРОИЗВ(B3:C3;\$B\$7:\$C\$7). Для задания остальных ограничений скопировать вновь введенную формулу в ячейки D4, D5 и D6.

4. После создания таблицы с исходными данными установить курсор в ячейку с формулой целевой функции (B9) и выбрать в меню *Сервис* функцию *Поиск решения*. Затем заполнить поля в появившемся окне (см. рис. 1.4.1):

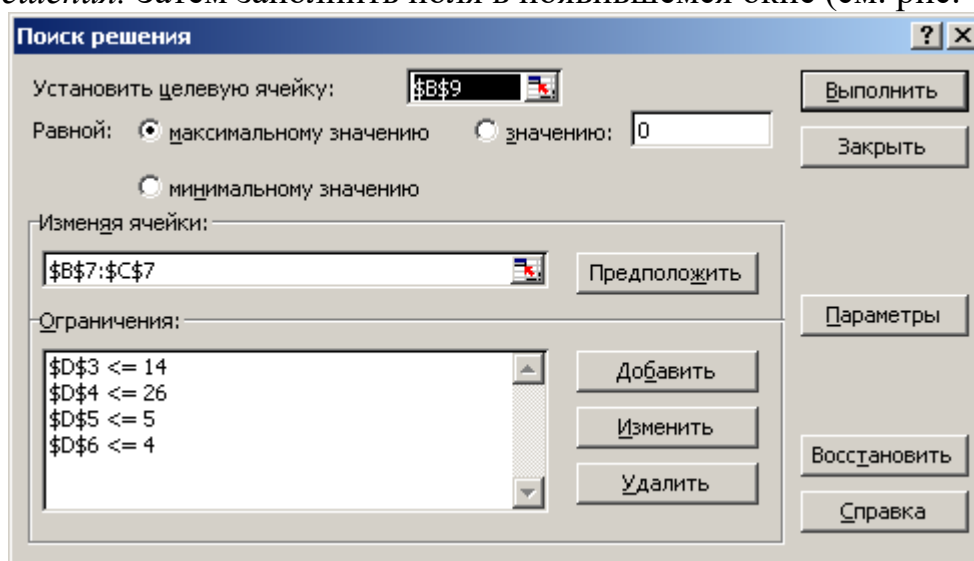


Рис. 1.4.1

- в поле *Установить целевую ячейку* должен появиться адрес ячейки с формулой целевой функции (в данном случае \$B\$9);
- установить переключатель вида оптимизации в поле *Равной*: в положение *максимальное (минимальное) значение*; при необходимости найти максимум или минимум целевой функции;
- в поле *Изменяя ячейки* указать диапазон ячеек со значениями параметров задачи, выделив его в таблице. В данном примере это ячейки \$B\$7:\$C\$7;
- в поле *Ограничения* задать вид и значения ограничений. Для этого установить курсор в поле ввода ограничений и нажать кнопку *Добавить*. После чего в появившемся окне *Добавление ограничения* (см. рис. 1.4.2) ввести в поле *Ссылка на ячейку* адрес ячейки с формулой соответствующего ограничения (например, D3 для ресурса *сырье*). Затем ввести в поле *Ограничение* предельное значение соответствующего запаса (для ресурса *сырье* оно находится в ячейке F3) и выбрать вид отношения (<, >, = и т.п.).

После нажатия кнопки *Добавить* (или *ОК* для ввода последнего ограничения) данное ограничение попадает в список ограничений задачи.

С помощью кнопок *Удалить* и *Изменить* можно удалять выделенные в списке ограничения или вносить в них исправления.

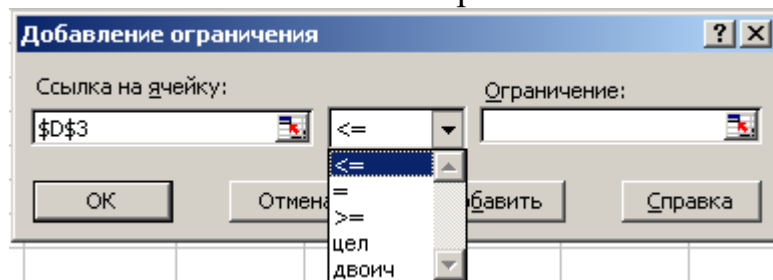


Рис. 1.4.2

5. После заполнения всех полей окна нажать кнопку *Параметры* и в открывшемся окне *Параметры поиска решения* (см. рис. 1.4.3) установить флажки *Линейная модель* для решения задачи линейного программирования и *Неотрицательные значения*, если такие ограничения накладываются на все переменные задачи.

В этом окне можно так же определить параметры процесса решения: предельное время поиска решения, максимальное количество итераций, точность и т.п. Флажок *Показывать результаты итераций* позволяет по шагам следить за поиском решения. Флажок *Автоматическое масштабирование* включается в том случае, когда разброс значений параметров очень велик.

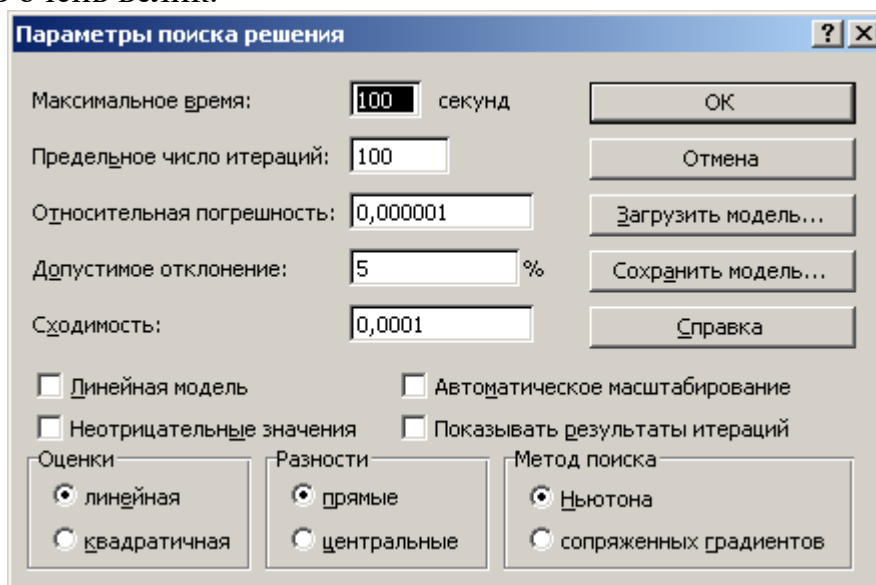


Рис. 1.4.3

6. Задав все параметры, нажать кнопку *Выполнить* для поиска решения задачи. Если решение найдено, то появляется окно с соответствующим сообщением (См. рис. 1.4.4). Результаты решения могут быть сохранены в файле задачи в виде сценария или добавлены в виде отдельных листов *Отчет по результатам*, *Отчет по устойчивости* и *Отчет по пределам*. Для сохранения результатов в виде листов необходимо предварительно в поле *Тип отчета* выделить требуемые типы отчетов. В этом же окне можно

отказаться от полученных решений и восстановить исходные значения переменных.

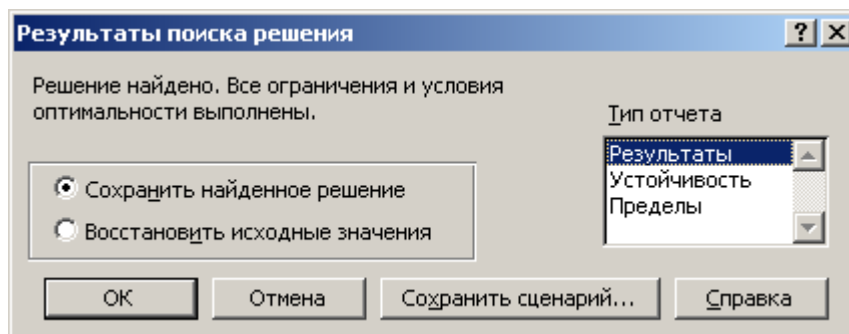


Рис. 1.3.4

Отчет по результатам приведен в табл. 1.3.1. В данном отчете в графах *Результат* выводятся значения целевой функции и оптимального плана, а также значения исходного опорного плана (графа *Исходное значение*). Кроме того, указывается, какие ограничения являются связанными, т.е. ограничения с дефицитным ресурсом, а какие – нет (графа *Статус*), и приведены значения соответствующих дефицитов по всем ограничениям (графа *Разница*).

Таблица 1.4.1

Целевая ячейка (максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$9	$F(X)$	0	24

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$7	Количество P_1	0	5
\$C\$7	Количество P_2	0	3

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$D\$3	Сырье	14	$SD\$3 \leq 14$	связанное	0
Ограничения					
\$D\$4	Труд	26	$SD\$4 \leq 26$	связанное	0
Ограничения					
\$D\$5	Спрос	1 2	$SD\$5 \leq 5$	не связан.	3
Ограничения					
\$D\$6	Спрос	2 3	$SD\$6 \leq 4$	не связан.	1
Ограничения					

Отчет по устойчивости выводится в следующей форме.

Таблица 1.4.2 Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэфф.	Допуст. увелич.	Допуст. уменьш.
\$B\$7	Количес во P_1	5	0	3	3	2

\$C\$7	Количество в P_2	3	0	3	6	1,5
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Огранич. прав, часть	Допуст. увелич.	Допуст. уменьш.
\$D\$3	Сырье огранич.	14	0,6	14	2,5	5
\$D\$4	Труд огранич.	26	0,6	26	7,5	10
\$D\$5	Спрос 1 огранич.	2	0	5	1E+30	3
\$D\$6	Спрос 2 огранич.	3	0	4	1E+30	1

В этом отчете выводятся допустимые отклонения (графы *Допустимое увеличение* и *Допустимое уменьшение*) от заданных значений ресурсов (графа *Ограничения Правая часть*) и целевых коэффициентов (графа *Целевой коэффициент*). В этих пределах изменения ресурсов можно производить оценку изменения целевой функции с помощью двойственных оценок (см. [7]). Сами значения двойственных оценок ресурсов приведены в графе *Теневая цена*. Пределы изменения целевых коэффициентов задают области неизменности оптимального значения целевой функции.

Большие значения пределов изменения значений, например 1E+30 (т.е. 10^{30}) для верхней границы на спрос, означают фактическое отсутствие верхней границы. Это характерно для недефицитных ресурсов, значение которых можно увеличивать до бесконечности.

Отчет по пределам имеет вид таблицы (см. табл. 1.4.3).

Таблица 1.4.3

Ячейка	Целевое имя	Значение				
\$B\$9	R(X) P_1	24				

Ячейка	Изменяемое имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
\$B\$7	Количество P_1	5	#Н/Д	#Н/Д	5	24
\$C\$7	Количество P_2	3	1,894E-12	15	3	24

В этом отчете приведены значения нижних и верхних пределов изменения переменных оптимального плана (графы *Нижний предел* и *Верхний предел*) и для них даны соответствующие оптимальные значения целевой функции (графы *Целевой результат*).

**Варианты заданий для решения задачи принятия решений
методами линейного программирования**

ЗАДАНИЕ 1. Задачу своего варианта из задания №2 лабораторной работы №1 решить средствами Excel.

ЗАДАНИЕ 2.

Запишите экономико-математическую модель для задачи своего варианта и решите ее средствами **Excel**.

1. Известно, что содержание трех питательных веществ А, В и С в рационе должно быть не менее 80, 60 и 30 единиц соответственно. Указанные питательные вещества содержат три вида продуктов. Содержание единиц питательных веществ в одном килограмме каждого из видов продуктов приведено в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ		
	I	II	III
A	1	4	3
B	2	4	2
C	2	1	3
Цена 1 кг продукта	10	12	8

Определите дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ, при минимальных денежных затратах.

2. Торговое предприятие реализует 4 группы товаров (А, В, С и D). Нормы затрат ресурсов на каждый тип товаров, лимиты ресурсов, а также доход на единицу каждой продукции заданы в таблице. Определить плановый объем продаж и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимален.

Виды ресурсов	Норма затрат ресурсов на 1 ед. товара				Лимит ресурсов
	Группа А	Группа В	Группа С	Группа D	
Рабочее время продавцов, чел.-час.	0,2	1,2	3	0,8	1400
Площадь торговых залов, м ²	0,5	0,2	0,1	0,05	200
Площадь складских помещений, м ²	3	0,5	1	2	1000
Накладные расходы, руб.	5	7	4	8	800
Доход на ед. продукции, руб.	4	5	3	4	

3. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам (Т₁, Т₂, Т₃, Т₄ и Т₅), причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 ед. времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие факторы: сырье, электроэнергия, зарплата и накладные расходы.

Затратить! соответствующих факторов при работе по разным технологическим процессам в течение 1 ед. времени указаны в нижеследующей таблице.

Производственные факторы	Затраты при различных технологиях					Лимит
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	
Сырье	15	18	12	14	20	5000
Электроэнергия	0,2	0,3	0,25	0,15	0,25	400
Оплата труда	60	50	80	60	70	16 000
Накладные расходы	15	18	20	10	19	10 000

Найти программу максимального выпуска продукции.

4. Ресторан "Охотник" обслуживает обедами близлежащие коммерческие предприятия, приготавливая первые и вторые блюда.

Известны затраты на производство, доставку, накладные расходы производства и товарооборот для каждого блюда, см. таблицу. Плановый фонд ресурсов следующий: затраты на производство не должны превышать 850 чел.-час; на доставку потребителям – 1200 чел.-час; накладные расходы должны быть не более 2100 руб. и план товарооборота 5800 руб. Известна также доля дохода от каждого блюда.

Требуется найти, какое количество каждого вида блюд надо выпускать при заданных ограничениях, чтобы обеспечить максимум дохода ресторана.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на 100 блюд				
	1-е блюдо	2-е мясное	2-е рыбное	2-е овощное	прочее
Затраты труда на производство, чел.-час	3,4	5	38	2,6	23
Затраты труда на доставку, чел.-час	2,1	5,2	5,1	2,8	3
Накладные расходы, руб.	6,4	8,5	8,4	10	6,1
Товарооборот, руб.	25	37	23	22	20
Доход, руб.	1,5	3,0	5,4	0,8	1,2

5. Издательский дом "ОНИКС" издает три журнала: "Сделай сам", "Дом в деревне" и "Садовник", которые печатаются в трех типографиях: "Типография № 1", "Полиграф" и "АПН", где общее количество часов, отведенное для печати, и производительность печати одной тысячи экземпляров ограничены и представлены в таблице.

Спрос на журнал "Сделай сам" составляет 15 тыс. экз., на "Дом в деревне" – 8,5 тыс. экз., а на журнал "Садовник" – не более 18 тыс. экз. в месяц.

Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которые обеспечат максимальную выручку от продажи. Типография	Время печати 1000 экз.			Ресурс времени, отведенный типографией, час
	"Сделай сам"	"Дом в деревне"	"Садовник"	
Типография № 1	6	12	8	142
Полиграф	4	6	9	94
АПН	8	4	6	70

<i>Оптовая цена, руб./шт.</i>	20	25	28	
-------------------------------	----	----	----	--

6. Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

<i>Тип ресурсов</i>	<i>Нормы затрат ресурсов на единицу продукции</i>				<i>Наличие ресурсов</i>
	1	2	3	4	
Сырье, кг	6	5	3	2	80
Рабочее время, час	15	12	8	10	100
Оборудование, ед.	5	3	2	4	70
<i>Прибыль на единицу продукции, руб.</i>	30	10	20	15	

Необходимо определить, сколько каждого вида продукции следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

7. Отделение налоговой инспекции хочет обновить компьютеры для своей работы. Для этого выделяются финансовые ресурсы на покупку компьютеров в размере 90 тыс. усл. ед. и увеличиваются площади для их размещения до 210 м². Фирма "Компьютер" предлагает 4 варианта сборки компьютерного оборудования, имеющие разные стоимости, занимаемые площади и производительности (см. таблицу).

Известно, что в штате отделения работает 40 чел. и что компьютеров сборки по варианту 3 надо не более 15.

	<i>Варианты компьютерного оборудования</i>			
	1	2	3	4
Стоимость	12 000	16 000	24 000	18 000
Занимаемая площадь	0,9	1.1	0,95	1,2
Производительность, усл. ед.	5	4	6	7

Составить план закупки оборудования у фирмы "Компьютер" с целью максимизации производительности производственного процесса.

8. Фирма производит три вида красок: только для внутренних (В), только для наружных (Н) работ и стандартную (С) как для внешних, так и для внутренних работ. Для изготовления красок используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы приведены в таблице.

<i>Исходный продукт</i>	<i>Расход исходных продуктов на 1 т краски</i>			<i>Суточный запас, т</i>
	<i>Краска II</i>	<i>Краска В</i>	<i>Краска С</i>	
Пигмент	1	2	2	12
Олифа	2	1	2	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для внутренних работ никогда не превышает 4 ц в сутки. Цена продажи 1 ц краски для наружных работ – 30 ден. ед., для внутренних работ – 40 ден. ед., а стандартной – 35 ден. ед.

Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

9. Животноводческое хозяйство имеет возможность покупать от одного до четырех различных видов зерна и готовить различные виды смесей (комбикормов) для кормления животных. Различные зерновые культуры содержат разное количество питательных компонентов (ингредиентов). Допустим, что принимаются в расчет четыре компонента, данные по которым приведены в таблице. Управляющему хозяйством надо определить, какая из всех возможных смесей является самой дешевой при соблюдении минимальных требований с точки зрения ее питательности, т.е. минимизировать затраты с целью получения оптимального составления комбикормов.

<i>Ингредиенты</i>	<i>Единица веса зерна</i>			<i>Минимальные потребности на тонируемый период</i>
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	
A	2	3	7	1250
B	1	1	0	250
C	5	3.	0	900
D	0,6	0,25	1	300
<i>Стоимость ед. веса, ден. ед.</i>	40	35	80	

10. Хладокомбинат производит три типа мороженого "Эскимо", "Фунтик" и "Пломбир". Для производства 1 т "Эскимо" требуется 0,2 ч работы оборудования, для мороженого "Фунтик" – 0,3 ч, а для мороженого "Пломбир" – 0,25 ч. Расход специального ингредиента на них составляет 0,02 т, 0,03 т и 0,04 т на 1 т соответственно. Ежедневно в распоряжении комбината – 16 т специального ингредиента и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи 1 т мороженого "Эскимо" составляет 2,5 тыс. руб., мороженого "Фунтик" – 3,5 тыс. руб., а мороженого "Пломбир" – 3,1 тыс. руб.

Определите ежедневный план производства мороженого каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

11. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить определенное количество питательных веществ, содержащихся в фруктах (см. таблицу).

<i>Вещества</i>	<i>Содержание питательных веществ</i>			<i>Нормы потребления, г</i>
	<i>Яблоки</i>	<i>Смородина</i>	<i>Клубника</i>	
P₁	3	2	1	30
P₂	1	2	4	40
P₃	0	5	0	60
P₄	0	1	1	70
P₅	2	4	1	50
<i>Цена, руб. за 1 кг</i>	30	40	60	

Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача.

12. Магазин "Стройматериалы" завозит на пилораму доски толщиной 20 мм, шириной 100 мм и длиной 6,5 м – 200 шт. и длиной 4 м – 50 шт. и заказывает изготовить комплекты из трех элементов: две вагонки длиной 2 м и одна вагонка длиной 1,25 м.

Рассчитайте, как распилить доски, чтобы изготовить, а затем продать максимальное количество комплектов.

13. Бумажная фабрика обладает запасами сухого сырья и наполнителя для производства пяти типов бумаги. Размеры запасов каждой группы сырья, нормативы его расхода на каждый тип бумага и прибыль от реализации 1 т каждого типа бумаги заданы в таблице.

Тип сырья	Тип бумаги					Запасы сухого сырья и наполнителя, тыс. т
	Типограф- ская	Газетная	Обойная	Пачечная	Обер- точная	
Целлюлоза	0,33	0,27	0,24	0,17	0,21	23
Древесная масса	0,62	0,79	0,64	0,78	0,70	45
Макулатура	—	—	0,10	0,07	0,09	0,4
Каолин	0,73	—	0,09	0,11	0,08	14
Прибыль за 1 т, руб.	25	218	175	315	255	

Определить размеры годовой выработки каждого типа бумага, обеспечивающие максимальную общую прибыль от ее реализации при условии, что планом предусмотрен обязательный выпуск не менее, чем 8000 т газетной бумаги и 3000 т обойной бумаги.

14. Составьте дешевый вариант 1 т кормовой смеси в соответствии с требованиями, представленными в таблице:

Питательные вещества	Содержание вещества, %	Содержание питательных веществ, т			
		Люцерновая мука	Сухая барда	Рыбная мука	Соевый шрот
Белок	Не менее 35	17	25	60	45
Жиры	Не менее 1,5	2	5	7	0,5
Клетчатка	Не более 8	25	3	1	6,5
Вес, т	1	1	1	1	1
Стоимость 1 т, руб.		70	90	150	100

15. Нефтеперерабатывающий завод "НЕФТЬ" получает 4 полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентана. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин А (2 : 3 : 5 : 2), бензин В (3 : 1 : 2 : 1) и бензин С (2 : 2 : 1 : 3). Стоимость 1 тыс. л бензина каждого сорта равна соответственно 12 000 руб., 10 000 руб. и 15 000 руб.

А. Определить соотношение компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

Б. Определить оптимальное соотношение, исходя из условия максимального использования компонентов.

16. Для выпуска четырех видов продукции требуются затраты сырья, рабочего времени и оборудования. Исходные данные приведены в таблице.

<i>Тип ресурсов</i>	<i>Нормы затрат ресурсов на единицу продукции</i>				<i>Наличие ресурсов</i>
	1	2	3	4	
Сырье	3	5	2	4	60
Рабочее время	20	10	20	15	200
Оборудование	5	10	4	5	100
<i>Прибыль на единицу продукции</i>	30	25	10	15	

Необходимо определить, сколько каждого вида продукции следует выпустить, чтобы общая прибыль выпускаемой продукции была максимальной.

17. На предприятие поступили две партии фанеры, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая – 250 листов фанеры.

Из них изготавливаются комплекты, включающие: 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Один лист фанеры каждой партии может раскраиваться тремя способами: R_1 , R_2 и R_3 . Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа по тому или иному способу, представлено в таблице.

<i>Тип детали</i>	<i>Количество деталей, шт.</i>					
	<i>Первая партия</i>			<i>Вторая партия</i>		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
1	0	6	9	6	5	4
2	5	3	4	5	3	0
3	12	14	0	7	4	7

Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального числа комплектов.

18. Для изготовления сплава из свинца, цинка, олова определенного состава используется сырье в виде пяти сплавов из тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью 1 кг (см. таблицу).

<i>Тип сплава</i>	<i>Содержание металла, %</i>			<i>Удельная стоимость, руб./кг</i>
	<i>Свинец</i>	<i>Цинк</i>	<i>Олово</i>	
1	15	40	45	8
2	10	80	10	17
3	30	30	40	10
4	40	25	35	12
5	10	70	20	15

А. Определить, какое количество сплава каждого вида нужно взять, чтобы изготовить при минимальной себестоимости сплав, содержащий 20% свинца, 30% цинка и 50% олова?

Б. Решить ту же задачу при следующих ограничениях на состав сплава: содержание олова – от 40% до 60% и цинка – от 20% до 30 %.

В. Решить ту же задачу при следующих ограничениях на состав сплава: содержание олова – не более 40% и цинка – не менее 20%.

19. Детали А, В и С можно обрабатывать на трех станках (I, II, III). В таблице указаны нормы затрат времени на обработку станком соответствующей детали, стоимость 1 ч работы и предельное время работы станка.

Станки	Норма времени обработки			Стоимость 1 ч, руб.	Время работы станка, час
	А	В	С		
I	0,3	0,1	0,2	30	50
II	0,5	0,2	0,4	20	60
III	0,4	0,5	0,3	15	40

Предполагая, что любая деталь может обрабатываться на любом из станков, определить оптимальную производственную программу по одному из следующих критериев:

- 1) максимум товарной продукции (Т);
- 2) максимум суммарной прибыли (П);
- 3) минимум суммарных затрат на обработку при плане выпуска деталей А – 300 шт., В – 500 шт., С – 100 шт.;
- 4) максимум числа комплектов, включающих 3 детали А, 2 детали В и 1 деталь С;
- 5) максимум прибыли при заданном ассортименте 3:2: 1;
- 6) максимум прибыли при заданном количестве деталей: А- – 200 шт., В – 400 шт., С – 600 шт.;
- 7) максимум загрузки станков при заданном ассортименте 3:2:1;
- 8) максимальное число деталей А, В, С при одинаковом времени работы всех станков;
- 9) максимум прибыли при условии, что каждый станок обрабатывает только одну деталь и по плану предусмотрен выпуск всех трех деталей;
- 10) максимум суммарной производительности при условиях п. 9 и одинаковом времени работы всех станков.

20. Используя данные таблицы и предполагая, что каждая деталь последовательно обрабатывается на каждом станке, составить производственную программу по одному из следующих критериев:

- 1) максимум прибыли;
- 2) максимум товарной продукции;
- 3) максимум прибыли при условии, что деталей А – не менее 300 шт., деталей В – не более 200 шт.;
- 4) максимум товарной продукции при заданном ассортименте 3:2:1;
- 5) минимум суммарных затрат на обработку при заданном ассортименте 1:2:3.

Станки	Норма времени обработки			Стоимость 1 ч, руб.	Время работы станка, час
	А	В	С		

I	0,3	0,3	0,2	40	60
II	0,5	0,2	0,4	25	70
III	0,4	0,4	0,3	20	50

ЗАДАНИЕ 3. Выполните свой вариант тестовой задачи (варианты в приложении).