

## Лабораторная работа №2.

### Методы принятия решений в условиях определенности Постановка и графическое решение задачи линейного программирования.

#### Пример простейшей модели планирования производства

Предприятие производит два вида продукции  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (например, туфли и ботинки) и использует два вида сырья (кожу и резину) ежедневные запасы которых соответственно  $b_1$  и  $b_2$  условных единиц. Согласно технологии производства,  $a_{ij}$  количество  $i$  – го вида сырья идущего на изготовление единицы  $j$  – ой продукции (например,  $a_{12}$  - количество кожи, идущей на один ботинок). Требуется спланировать работу так, чтобы ежедневно использовать полностью запасы сырья.

Для ответа на поставленный вопрос необходимо проблему из словесной формы перевести на язык математики, а именно - построить математическую модель ожидаемого процесса. Математическая постановка задачи предполагает ответы на три вопроса:

1. Каковы *переменные* этой задачи, то есть что требуется в ней найти? Переменные мы вводим и обозначаем сами.
2. Какие *ограничения* должны быть наложены на переменные, согласно условиям задачи?
3. Какова *цель* задачи?

В нашей задаче нужно определить количество  $x_1$  и  $x_2$  - продукции видов  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно. Можно сказать, что нужно найти *вектор*-план  $X = (x_1, x_2)$  с координатами  $x_1, x_2$ . Для постановки задач часто удобно использовать балансовую таблицу (здесь - таблица 1), в которую можно вписать все данные и используемые переменные, причем информацию о технологии производства впишем в уголки ячеек.

Таблица 1

<div>Продукт</div> <div>Сырье</div>	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	Запасы сырья
А	$a_{11}$  $x_1$	$a_{12}$  $x_2$	$b_1$
Б	$a_{21}$  $x_1$	$a_{22}$  $x_2$	$b_2$

Из таблицы легко вытекают балансовые соотношения по расходу сырья (ограничения):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Получилась *система* двух уравнений с двумя неизвестными  $x_1$  и  $x_2$ . В данной задаче целью является полное использование сырья, поэтому строгие равенства в балансовых соотношениях служат как ограничениями, так и целевой характеристикой задачи.

Решая систему школьным методом алгебраического сложения, получим:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \end{cases} \cdot a_{21} \\ &\quad + \\ &\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \cdot (-a_{12}) \\ &\hline &x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ &\text{или } x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \text{ аналогично } x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Очевидно, что эти формулы легче запомнить если ввести в рассмотрение *матрицу коэффициентов*, т.е. таблицу чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

(в данной задаче она является *технологической матрицей*), где первый индекс показывает номер строки, второй – номер столбца, на которых находится элемент. В числителе и знаменателе формул (1.2) стоят числа, обозначим их буквами  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$ , так что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad (1.4)$$

$$\text{где } \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

- число, которое находится как разность произведений чисел, лежащих на главной и побочной диагоналях *определителя* (1.5), полученного из матрицы (1.3). Аналогично вычисляются определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (1.6)$$

Забегая немного вперед, заметим, что формулы (1.4) представляют собой *правило Крамера* для решения системы двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

Таким образом, при описании поставленной проблемы средствами математики мы использовали даже в этой простейшей задаче разные математические формы обработки одной и той же информации: систему уравнений, матрицу, определители, вектор. Это родственные математические понятия, но каждое имеет свои особенности и правила преобразований, используя которые, можно найти наиболее простой путь решения задачи.

## ЗАДАНИЕ 1

Построить математическую модель задачи линейного программирования.

- 1.1. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий В надо выпустить не менее, чем изделий А. Запасы сырья 1,2,3 видов, прибыль от реализации 1 изделия в условных денежных единицах, а также нормы расхода сырья на 1 кг. изделия заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 кг изд.		Запасы сырья, кг
	А	В	
<i>I</i>	12	4	300
<i>II</i>	4	4	120
<i>III</i>	3	12	252
<i>Прибыль от реализации 1 изд., усл. ед.</i>	30	40	—

- 1.2. Озеро можно заселить двумя видами рыб: А и В. Средняя масса рыбы равна 2 кг для вида А и 1 кг для вида В. В озере имеется два вида пищи:  $P_1$  и  $P_2$ , средние потребности одной рыбы вида А составляет одна единица корма  $P_1$  и 3 ед. корма  $P_2$  в день. Аналогично для рыб вида В – 2 ед. и 3 ед. Ежедневный запас пищи поддерживается на уровне 500 ед. вида  $P_1$  и 900 ед. вида  $P_2$ . Как следует заселить озеро рыбами, чтобы максимизировать общую массу рыб?
- 1.3. Завод может изготовить два типа изделий. Изделия проходят обработку в трех цехах. В планируемом периоде требуется изготовить хотя бы по одному изделию каждого типа. Определить

производственную программу завода для получения максимальной прибыли

№ цеха	Трудоемкость изготовления одного изделия в тыс. нормо-часов		Полезный фонд времени работы в тыс. нормо-часов
	I	II	
<i>I</i>	2	4	20
<i>II</i>	1	1	6
<i>III</i>	2	1	10
<i>Прибыль в млн. р.</i>	8	6	---

1.4. Для изготовления шкафов и сервантов дерево отделочный завод применяет древесины 4-х видов. Запасы древесины, кол-во единиц древесины каждого вида, необходимых для изготовления одного шкафа и одного серванта, а также прибыль от реализации ед. продукции даны в таблице. Составить такой план выпуска продукции, который обеспечил бы наибольшую прибыль от реализации продукции.

Изделие	Древесина				Прибыль
	1	2	3	4	
<i>Шкаф</i>	0	4	2	1	2
<i>Сервант</i>	4	0	2	2	3
<i>Запасы древесины</i>	120	160	120	80	

1.5. Для изготовления шкафов и столов употребляется два вида древесины. Расход каждого вида древесины на каждое изделие задано таблицей (в куб. м.). Доход мастерской от реализации одного стола – 12 усл. ед., а шкафа – 15 усл. ед. Определить, сколько столов и шкафов должна произвести мастерская, чтобы обеспечить максимальный доход.

Изделие	Древесина
---------	-----------

	<b>I</b>	<b>II</b>
<i>Стол</i>	0,15	0,2
<i>Шкаф</i>	0,2	0,1
<i>Запасы древесины</i>	60	40

- 1.6. Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок. Для их изготовления применяется глина трех видов А, В и С, по месячному плану завод должен выпускать 10 усл. ед. кирпича марки I и 15 усл. ед. кирпича марки II. В таблице указаны расходы глины разных видов для производства 1 усл. ед. кирпича каждой марки и месячный запас глины. Какова наибольшая прибыль, если известно, что от реализации 1 усл. ед. кирпича марки I завод получает прибыль 4 ден. ед., а марки II – 7 ден. ед. Сравнить с плановой прибылью.

<b>Марка кирпича</b>	<b>Кол-во глины на 1 усл. ед. кирпича</b>		
	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>С</b>
<b>1(I)</b>	1	0	1
<b>2(II)</b>	0	2	2
<b>Запасы глины</b>	15	36	47

- 1.7. Имеются два склада готовой продукции  $A_1$  и  $A_2$  с запасами однородного груза 300 и 200 т. Груз необходимо доставить трем потребителям  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  в количестве 100, 150, 250 т. соответственно. Стоимость перевозки 1 т. груза из склада  $A_1$  потребителям  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  равна 5,3,6 денежных единиц, а из склада  $A_2$  тем же потребителям – 3, 4,2 д.е. соответственно. Составить план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.
- 1.8. Завод располагает 36 тоннами стали. Из этой стали можно изготовить либо комбайны, либо тракторы. На каждый комбайн уходит 4 т стали, а на трактор – 800 кг. Доход от продажи одного комбайна 2 тыс. рублей, а от одного трактора – 300 руб. Какой должна быть производственная программа завода, чтобы доход от продажи был

наибольшим? На какой доход может располагать завод, если он должен в планируемом периоде выпустить не менее пяти тракторов? На сколько % максимальный доход предприятия больше этого дохода?

- 1.9. Для производства двух видов изделий А и В. используются три типа технологического оборудования. На производство ед. изделия А оборудования I типа используется 3 часа, II типа – 4 часа, оборудование III типа – 5 ч. На производство единицы продукции В соответственно 6 ч., 3ч и 2ч. На производство всех изделий предприятие может представить оборудование I типа не более чем на 102 часа, II типа – не более чем на 91 час, III типа – не более чем на 105 часов. Прибыль от реализации ед. изделия А составляет 7 руб., а от изделия В – 9 руб. Составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.
- 1.10. На промышленном предприятии изготавливается 2 вида продукта 1 и 2. Эта продукция производится с помощью оборудования  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , которое в течение дня может работать соответственно 24000, 27000 и 40000 сек. Нормы времени необходимы для производства единицы продукции с помощью соотв. оборудования приводятся в таблице. Прибыль от производства изделия 1 составляет 9 ед., а изделия 2 – 6 ед. Найти такой объем производства, чтобы прибыль была максимальной (24000 сек = 24тыс. сек ).

Изделия	Оборудование		
	$U_1$	$U_2$	$U_3$
1	3	8	9
2	6	4	3
Время работы в течение дня	24000	40000	27000

- 1.11. Завод изготавливает 2 вида изделий на экспорт с помощью машин  $U_1$  и  $U_2$ . Максимальное время работы машин  $U_1$  – 8 часов, а машин  $U_2$  – 12 часов в сутки. Расход времени машин в сутки представлен в таблице (в

час). Валютная прибыль 1 сост. 3 долл., а 2 – 4 долл. Рассчитать производственный план на сутки при max валютной прибыли.

Изделие	Машины	
	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>
1	1	2,5
2	4	2
	8	12

1.12. Предприятие выпускает два вида изделий. Эта продукция производится с помощью оборудования U<sub>1</sub>, U<sub>2</sub> и U<sub>3</sub>, максимальный ходовой фонд времени каждого составляет соответственно 24000, 50000 и 42000 часов. Данные о затрате времени работы оборудования на производство ед. изделия приведены в таблице. Прибыль от производства изделия 1-го вида составляет 10 ед., а второго – 5 ед. Найти такой производственный план, чтобы прибыль была максимальной.

Изделие	Затраты времени оборудования		
	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>
1	3	8	10
2	6	5	8

1.13. Предприятие имеет три типа металлообрабатывающих станков А, В и С, на которых изготавливаются изделия вида 1 и 2. Изделия 1-го вида вырабатываются на станках А и С, а 2-го вида на станках всех трех видов, т.е. А, В и С. Производственная мощность станков отдельных типов представленная в таблице. Прибыль на ед. изделия составляет 2 усл. ед., на изделие 2- 4 усл. ед. Определить такие объемы производства изделий 1 и 2, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.



Тип станка	Производственная мощность (тыс. штук в год)
<i>A</i>	6 изделий 1 или 6 изделий 2
<i>B</i>	4 изделия 2
<i>C</i>	5 изделий 1 или 10 изделий 2

1.14. Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа А и 360 изделий типа В. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или иного типа. Изделие типа А вчетверо дороже изделий типа В. Требуется спланировать выпуск отвой продукции та, чтобы предприятие получило наибольшую прибыль.

1.15. Колхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана с таблице. За 1 ц. Ржи колхоз получает 2 ден.ед., за 1 ц., пшеницы – 2,8 д.е., за 1 ц., кукурузы – 1,4 д.е. Сколько гектаров и на каких массивах колхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если он планирует сдать не менее 1900 т. ржи, 158000 т. пшеницы т 30000 т. кукурузы?

Посевы	Массивы		
	1	2	3
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

1.16. Для изготовления изделий двух видов склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на изделие I вида 2 кг, а на изделие II вида – 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы обеспечить наибольшую прибыль, если известно, что изделий I вида требуется не более 30 шт., а второго – не более 40 шт., причем одно изделие I вида стоит 5 руб., а II вида – 3 руб.

- 1.17. Информации о производстве двух видов продукции дана в таблице. Решить задачу оптимального использования ресурсов на максимум общей стоимости.

Ресурсы	Нормы затрат на ед. продукции		Запасы
	I	II	
Труд	1	3	200
Сырье	1	2	80
Оборудование	1	4	140

- 1.18. На двух станках №1 и №2 производится два вида продукции  $A_1$  и  $A_2$ . Для изготовления ед. продукции  $A_1$  станок №1 использует 2 часа, а станок №2 – один час; для  $A_2$  соответственно 1 час и 2 часа. В течение суток станок №1 может работать не более 10 часов, а №2 – не более 8 часов. Составить план, обеспечивающий производству наибольшую прибыль, если прибыль от реализации ед. продукции  $A_1$  составляет 5 руб., а ед. продукции  $A_2$  – 2 руб.

- 1.19. Имеются два изделия, которые должны в процессе производства пройти обработку на четырех станках: 1,2,3,4. Время обработки каждого изделия на каждом из этих станков задано таблицей. Станки 1,2,3 и 4 вида можно использовать соответственно в течение 45,100,300 и 50 часов. Продажная цена изделия А-6 руб., В- 4 руб. В каком отношении следует производить изделия А и В, чтобы получить максимальную прибыль?

Станки/ Изделия	1	2	3	4
<i>A</i>	2	4	3	1
<i>B</i>	$\frac{1}{4}$	2	1	4

1.20. Фермер имеет 10 га пашни и 460 человек трудовых ресурсов планирует использовать на производство картофеля и лука с целью получения максимальной прибыли. Сбыт по видам не ограничен.

Покупатели	Картофель	Лук
Затраты труда на 1 га, чел-дней	40	50
Урожайность, ц/га	200	110
Себестоимость 1ц. в тыс. руб.	100	200
Цена реализации 1ц, тыс. руб.	150	300

1.21. Для изготовления продукции 2-х видов А и В требуется использовать сырье четырех видов  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ . Запасы сырья ограничены и выражены в условных единицах. Кол-во ед. сырья, необходимое для изготовления ед. каждого из видов продукции, и от реализации ед. продукции даны в таблице. Составить план выпуска продукции, чтобы доход был максимальный.

Группы оборудования	Виды продукции		Кол-во оборудования в группе
	1	2	
<i>A</i>	2	1	12
<i>B</i>	1	1	8
<i>C</i>	4	0	16
<i>D</i>	0	4	12
<i>Доход</i>	12	30	

1.22. На производство товарного картофеля и лука выдан участок пашни 200 га и 8500 чел.-дней трудовых ресурсов. Найти оптимальное сочетание площадей их размещения с целью получения максимальной прибыли. Сбыт продукции по видам не ограничен.

Покупатели	Картофель	Лук
------------	-----------	-----

Затраты труда на 1 га чел./дней	40	50
Урожайность, ц/га	230	110
Себестоимость, 1ц в руб.	8	25
Цена реализации 1ц е.руб.	12	35

1.23. Для изготовления продукции 2-х видов А и В требуется использовать сырье четырех видов  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ . Запасы сырья ограничены и выражены в условных единицах. Кол-во ед. сырья, необходимое для изготовления ед. каждого из видов продукции, и от реализации ед. продукции даны в таблице. Составить план выпуска продукции, чтобы доход был максимальный.

Виды сырья	Виды продукции		Запасы
	А	В	
$S_1$	2	3	19
$S_2$	2	1	13
$S_3$	0	3	15
$S_4$	3	0	18
Доход	7	5	---

1.24. На предприятии, в составе которого 4 производственных цеха, изготавливают изделия двух видов. Производственные мощности цехов (в часах) в расчете на сутки соответственно составляют  $m_1 = 12$ ,  $m_2 = 8$ ,  $m_3 = 16$ ,  $m_4 = 12$ . Нормы времени, необходимого для изготовления ед. изделия в соот. цехах, даны в таблице. Прибыль от продажи ед. изделия 1 составляет 2 тыс. усл. ед., а изделия 2 – 3 тыс. усл. ед. Составить такой производственный план, при котором обеспечивается максимальная прибыль.

Цех	Изделие		$m_i$
	1	2	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16

4	0	4	12
---	---	---	----

1.25. Производственный цех деревообрабатывающей промышленности ежемесячно имеет в своем распоряжении  $48 \text{ м}^3$  пиломатериалов и  $45 \text{ м}^3$  стекла. В цехах изготавливают два вида шкафов: конторские и библиотечные. Расход материалов на один шкаф каждого вида приведен в таблице. Сбытовая цена конторского шкафа – 2000 усл. ед., а библиотечного – 4000 усл. ед. Определить такой ассортимент производства, при котором месячный доход будет максимальным.

Вид шкафа	Сырье	
	Пиломат.	Стекло
Конторский	0,3	0
Библиотечный	0,3	1,5
Запасы	48	45

1.26. Для производства продукции 2 видов  $B_1$  и  $B_2$  используются три вида сырья  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором доход от реализации всей продукции максимален.

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		$B_1$	$B_2$
$A_1$	70	10	7
$A_2$	80	8	10
$A_3$	5	1	0
Доход	--	3	1

1.27. Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на 17, 12 и 32 т. Овощехранилища имеют соответственно 20, 20, 15 и 25 т. Составить план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы. Тарифы (в ден. Ед. за 1 т..) указаны в следующей таблице:

Овощехранилища	Магазины		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

1.28. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов используются железо и проволока. Общий запас железа – 3 т., проволоки – 18 т. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуется 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает 3 ден.ед., второго – 4 ден. ед. Составить план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

1.29. Из двух сортов бензина образуются две смеси- А и В. Смесь А содержит бензина 60% 1-го сорта и 40% 2-го сорта; смесь В – 80% 1-го сорта и 20% 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А 10 д.е., а смеси В – 12 д.е. Составить план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина 50 т. 1-го сорта и 30 т. 2-го сорта.

1.30. Имеются два элеватора, в которых сосредоточено соответственно 4200 и 1200 т зерна. Зерно необходимо перевезти трем хлебозаводам в количестве 1000, 2000 и 1600 т. каждому. Расстояние от элеватора до хлебозаводов указано в следующей таблице. Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км составляют 25 д.е. Спланировать перевозки зерна из условия минимизации транспортных расходов.

Элеваторы	Хлебозаводы		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

## ЗАДАНИЕ 2

Предположим, что для производства двух видов продукции А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется  $a_1$  кг материала первого сорта,  $a_2$  кг материала второго сорта,  $a_3$  кг материала третьего сорта. На изготовление единицы изделия вида В расходуется  $b_1$  кг материала первого сорта,  $b_2$  кг материала второго сорта,  $b_3$  кг материала третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта  $c_1$  кг, материала второго сорта  $c_2$  кг, материала третьего сорта  $c_3$  кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль  $\alpha$  тыс. руб., а от продукции В прибыль составляет  $\beta$  тыс. руб.

Определить максимальную прибыль от реализации всей готовой продукции видов А и В. Решить задачу графически и исследовать модель на чувствительность к изменению параметров.

$$\begin{array}{llll} 2.1. & a_1 = 16; & b_1 = 4; & c_1 = 784; \\ & a_2 = 8; & b_2 = 7; & c_2 = 552; \\ & a_3 = 5; & b_3 = 9; & c_3 = 567; \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 4; \\ \beta = 6. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2.2 & a_1 = 12; & b_1 = 3; & c_1 = 684; \\ & a_2 = 10; & b_2 = 5; & c_2 = 552; \\ & a_3 = 3; & b_3 = 6; & c_3 = 558; \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 6; \\ \beta = 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2.3. & a_1 = 8; & b_1 = 3; & c_1 = 864; \\ & a_2 = 7; & b_2 = 6; & c_2 = 864; \\ & a_3 = 4; & b_3 = 9; & c_3 = 945; \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 2; \\ \beta = 3. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2.4. & a_1 = 11; & b_1 = 3; & c_1 = 671; \\ & a_2 = 8; & b_2 = 4; & c_2 = 588; \\ & a_3 = 5; & b_3 = 9; & c_3 = 423; \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha = 5; \\ \beta = 2. \end{array}$$

2.5.	$a_1=15;$ $a_2=11;$ $a_3=9;$	$b_1=4;$ $b_2=5;$ $b_3=10;$	$c_1=1095;$ $c_2=865;$ $c_3=1080;$	$\alpha=3;$ $\beta=2.$
2.6.	$a_1=9;$ $a_2=7;$ $a_3=4;$	$b_1=5;$ $b_2=8;$ $b_3=16;$	$c_1=1431;$ $c_2=1224;$ $c_3=1328;$	$\alpha=3;$ $\beta=2.$
2.7.	$a_1=6;$ $a_2=5;$ $a_3=3;$	$b_1=3;$ $b_2=10;$ $b_3=12;$	$c_1=714;$ $c_2=910;$ $c_3=948;$	$\alpha=3;$ $\beta=9.$
2.8.	$a_1=9;$ $a_2=6;$ $a_3=3;$	$b_1=4;$ $b_2=7;$ $b_3=8;$	$c_1=801;$ $c_2=807;$ $c_3=768;$	$\alpha=3;$ $\beta=2.$
2.9.	$a_1=3;$ $a_2=4;$ $a_3=3;$	$b_1=5;$ $b_2=8;$ $b_3=11;$	$c_1=453;$ $c_2=616;$ $c_3=627;$	$\alpha=7;$ $\beta=9.$
2.10.	$a_1=10;$ $a_2=5;$ $a_3=4;$	$b_1=9;$ $b_2=11;$ $b_3=15;$	$c_1=1870;$ $c_2=1455;$ $c_3=1815;$	$\alpha=4;$ $\beta=6.$
2.11.	$a_1=5;$ $a_2=4;$ $a_3=8;$	$b_1=2;$ $b_2=7;$ $b_3=8;$	$c_1=600;$ $c_2=560;$ $c_3=488;$	$\alpha=4;$ $\beta=6.$
2.12.	$a_1=5;$ $a_2=10;$ $a_3=3;$	$b_1=4;$ $b_2=5;$ $b_3=6;$	$c_1=600;$ $c_2=552;$ $c_3=558;$	$\alpha=6;$ $\beta=2.$
2.13.	$a_1=12;$ $a_2=7;$ $a_3=4;$	$b_1=3;$ $b_2=6;$ $b_3=9;$	$c_1=684;$ $c_2=864;$ $c_3=945;$	$\alpha=2;$ $\beta=3.$
2.14.	$a_1=10;$ $a_2=8;$ $a_3=5;$	$b_1=2;$ $b_2=4;$ $b_3=9;$	$c_1=480;$ $c_2=588;$ $c_3=423;$	$\alpha=5;$ $\beta=2.$



2.15.	$a_1 = 10;$ $a_2 = 11;$ $a_3 = 9;$	$b_1 = 5;$ $b_2 = 5;$ $b_3 = 10;$	$c_1 = 1000;$ $c_2 = 865;$ $c_3 = 1080;$	$\alpha = 3;$ $\beta = 2.$
2.16.	$a_1 = 16;$ $a_2 = 7;$ $a_3 = 4;$	$b_1 = 4;$ $b_2 = 8;$ $b_3 = 16;$	$c_1 = 784;$ $c_2 = 1224;$ $c_3 = 1328;$	$\alpha = 3;$ $\beta = 2.$
2.17.	$a_1 = 6;$ $a_2 = 5;$ $a_3 = 3;$	$b_1 = 3;$ $b_2 = 10;$ $b_3 = 12;$	$c_1 = 714;$ $c_2 = 910;$ $c_3 = 948;$	$\alpha = 3;$ $\beta = 9.$
2.18.	$a_1 = 16;$ $a_2 = 6;$ $a_3 = 3;$	$b_1 = 4;$ $b_2 = 7;$ $b_3 = 8;$	$c_1 = 588;$ $c_2 = 807;$ $c_3 = 768;$	$\alpha = 3;$ $\beta = 2.$
2.19.	$a_1 = 6;$ $a_2 = 4;$ $a_3 = 3;$	$b_1 = 3;$ $b_2 = 8;$ $b_3 = 11;$	$c_1 = 714;$ $c_2 = 616;$ $c_3 = 627;$	$\alpha = 7;$ $\beta = 9.$
2.20.	$a_1 = 5;$ $a_2 = 5;$ $a_3 = 4;$	$b_1 = 6;$ $b_2 = 11;$ $b_3 = 15;$	$c_1 = 1200;$ $c_2 = 1455;$ $c_3 = 1815;$	$\alpha = 4;$ $\beta = 6.$
2.21.	$a_1 = 9;$ $a_2 = 8;$ $a_3 = 5;$	$b_1 = 4;$ $b_2 = 7;$ $b_3 = 9;$	$c_1 = 801;$ $c_2 = 552;$ $c_3 = 567;$	$\alpha = 4;$ $\beta = 6.$
2.22.	$a_1 = 6;$ $a_2 = 10;$ $a_3 = 3;$	$b_1 = 7;$ $b_2 = 5;$ $b_3 = 6;$	$c_1 = 420;$ $c_2 = 552;$ $c_3 = 558;$	$\alpha = 6;$ $\beta = 2.$
2.23.	$a_1 = 10;$ $a_2 = 7;$ $a_3 = 4;$	$b_1 = 7;$ $b_2 = 6;$ $b_3 = 9;$	$c_1 = 700;$ $c_2 = 864;$ $c_3 = 945;$	$\alpha = 2;$ $\beta = 3.$
2.24.	$a_1 = 6;$ $a_2 = 8;$ $a_3 = 5;$	$b_1 = 7;$ $b_2 = 4;$ $b_3 = 9;$	$c_1 = 420;$ $c_2 = 588;$ $c_3 = 423;$	$\alpha = 5;$ $\beta = 2.$

$$\begin{array}{llll}
2.25. & a_1 = 9; & b_1 = 5; & c_1 = 1260; \\
& a_2 = 11; & b_2 = 5; & c_2 = 865; \\
& a_3 = 9; & b_3 = 10; & c_3 = 1080; \\
& & & \alpha = 3; \\
& & & \beta = 2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2.26. & a_1 = 6; & b_1 = 5; & c_1 = 1431; \\
& a_2 = 7; & b_2 = 8; & c_2 = 1224; \\
& a_3 = 4; & b_3 = 16; & c_3 = 1328; \\
& & & \alpha = 3; \\
& & & \beta = 2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2.27. & a_1 = 6; & b_1 = 3; & c_1 = 714; \\
& a_2 = 5; & b_2 = 10; & c_2 = 910; \\
& a_3 = 3; & b_3 = 12; & c_3 = 948; \\
& & & \alpha = 3; \\
& & & \beta = 9.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2.28. & a_1 = 12; & b_1 = 3; & c_1 = 684; \\
& a_2 = 6; & b_2 = 7; & c_2 = 807; \\
& a_3 = 3; & b_3 = 8; & c_3 = 768; \\
& & & \alpha = 3; \\
& & & \beta = 2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2.29. & a_1 = 15; & b_1 = 4; & c_1 = 600; \\
& a_2 = 4; & b_2 = 8; & c_2 = 616; \\
& a_3 = 3; & b_3 = 11; & c_3 = 627; \\
& & & \alpha = 7; \\
& & & \beta = 9.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
2.30. & a_1 = 7; & b_1 = 8; & c_1 = 1224; \\
& a_2 = 5; & b_2 = 11; & c_2 = 1455; \\
& a_3 = 4; & b_3 = 15; & c_3 = 1815; \\
& & & \alpha = 4; \\
& & & \beta = 6.
\end{array}$$