

Лабораторная работа №6. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Предположим, что цена игры положительна ($v > 0$). Если это не так, то согласно свойству 6 всегда можно подобрать такое число c , прибавление которого ко всем элементам матрицы выигрышей даёт матрицу с положительными элементами, и следовательно, с положительным значением цены игры. При этом оптимальные смешанные стратегии обоих игроков не изменяются.

Итак, пусть дана матричная игра с матрицей A порядка $m \times n$. Согласно свойству 7, оптимальные смешанные стратегии $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ соответственно игроков 1 и 2 и цена игры v должны удовлетворять соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v \quad (j = \overline{1, n}); \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1; \\ x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}); \end{array} \right. \quad (5.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v \quad (i = \overline{1, m}); \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1; \\ y_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}). \end{array} \right. \quad (5.26)$$

Разделим все уравнения и неравенства в (5.25) и (5.26) на v (это можно сделать, т.к. по предположению $v > 0$) и введём обозначения:

$$\frac{x_i}{v} = p_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad \frac{y_j}{v} = q_j \quad (j = \overline{1, n}).$$

Тогда (5.25) и (5.26) переписутся в виде:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1, \quad \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{v}, \quad p_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1, \quad \square, \quad \square, \quad \square.$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения x_i и, следовательно, p_i , чтобы цена игры v была максимальной, то решение

первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений p_i ($i = \overline{1, m}$), при которых

$$\sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1. \quad (5.27)$$

Поскольку второй игрок стремится найти такие значения y_j и, следовательно, q_j , чтобы цена игры ν была наименьшей, то решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений q_j , ($j = \overline{1, n}$), при которых

$$\sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1. \quad (5.28)$$

Формулы (5.27) и (5.28) выражают двойственные друг другу задачи линейного программирования (ЛП). Решив эти задачи, получим значения p_i ($i = \overline{1, m}$), q_j ($j = \overline{1, n}$) и ν . Тогда смешанные стратегии, т.е. x_i и y_j получаются по формулам:

$$\begin{aligned} x_i &= \nu p_i & (i = \overline{1, m}), \\ y_j &= \nu q_j & (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Пример 8

Найти решение игры, определяемой матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение

При решении этой игры к каждому элементу матрицы A прибавим 1 и получим следующую матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь пару взаимно-двойственных задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 \rightarrow \min; \\ p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 1, \\ 2p_1 + p_3 \geq 1, \\ p_2 \geq 1, \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \max; \\ q_1 + 2q_2 \leq 1, \\ q_1 + q_3 \leq 1, \\ 2q_1 + q_2 \leq 1, \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Решим вторую из них.

Б.п	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	Реше- ние	Σ	Отноше- ние
.	-1	-1	-1	0	0	0	0	-3	
q ₄	1	2	0	1	0	0	1	5	—
q ₅	1	0	1	0	1	0	1	4	1/1
q ₆	2	1	0	0	0	1	1	5	—

Б.п	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	Реше- ние	Σ	Отноше- ние
.	0	-1	0	0	1	0	1	1	
q ₄	1	2	0	1	0	0	1	5	1/2
q ₃	1	0	1	0	1	0	1	4	—
q ₆	2	1	0	0	0	1	1	5	1/1 = 1

Б.п	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	Реше- ние	Σ	Отноше- ние
.	1/2	0	0	1/2	1	0	3/2	7/2	
q ₂		1	0	1/2	0	0	1/2	5/2	
q ₃	1	0	1	0	1	0	1	4	
q ₆		0	0	-1/2	0	1	1/2	5/2	

Из оптимальной симплекс-таблицы следует, что

$$(q_1, q_2, q_3) = (0; \frac{1}{2}; 1),$$

а из соотношений двойственности следует, что

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$

Следовательно, цена игры с платёжной матрицей A_I равна

$$v_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}. \quad \left(= \frac{1}{q_1 + q_2 + q_3} \right),$$

а игры с платёжной матрицей A :

$$v = v_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

При этом оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (vp_1; vp_2; vp_3) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \cdot 1; \frac{2}{3} \cdot 0\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right),$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (vq_1; vq_2; vq_3) = \left(\frac{2}{3} \cdot 0; \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \cdot 1\right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Практикум по теории игр

(Варианты 1 – 30)

ЗАДАНИЕ 1

Игрок A записывает одно из трех чисел: a, b или c , игрок B – одно из трех чисел: m, n или p . Если числа одинаковой четности, то A выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если четности выбранных игроками чисел не совпадают, то B выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платежную матрицу игры, определить нижнюю и верхнюю цены игры и проверить наличие седловой точки.

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1.1. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ | 1.2. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$ |
| 1.3. $a=2; b=3; c=5; m=2; n=4; p=3;$ | 1.4. $a=1; b=2; c=5; m=1; n=7; p=4;$ |
| 1.5. $a=3; b=1; c=6; m=3; n=4; p=7;$ | 1.6. $a=3; b=4; c=7; m=7; n=3; p=4;$ |
| 1.7. $a=5; b=2; c=6; m=1; n=2; p=3;$ | 1.8. $a=4; b=2; c=5; m=6; n=5; p=2;$ |
| 1.9. $a=5; b=7; c=8; m=2; n=7; p=3;$ | 1.10. $a=1; b=2; c=3; m=9; n=5; p=4;$ |
| 1.11. $a=6; b=2; c=5; m=1; n=4; p=5$ | 1.12. $a=3; b=8; c=7; m=2; n=5; p=4;$ |

- 1.13. $a=1; b=8; c=5; m=3; n=4; p=6;$ 1.14. $a=3; b=2; c=1; m=2; n=5; p=4;$
 1.15. $a=3; b=2; c=5; m=7; n=4; p=3;$ 1.16. $a=2; b=5; c=7; m=3; n=5; p=1;$
 1.17. $a=1; b=9; c=2; m=3; n=4; p=5;$ 1.18. $a=3; b=4; c=7; m=3; n=5; p=4;$
 1.19. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ 1.20. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$
 1.21. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ 1.22. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$
 1.23. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ 1.24. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$
 1.25. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ 1.26. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$
 1.27. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ 1.28. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$
 1.29. $a=1; b=2; c=5; m=2; n=4; p=3;$ 1.30. $a=3; b=2; c=7; m=1; n=5; p=4;$

ЗАДАНИЕ 2

Пусть $G=(X,Y,A)$, где $X=\{1,2,3,4\}$; $Y=\{1,2,3,4\}$. Найти оптимальные стратегии X,Y для игроков 1 и 2, найти решение игры G матричным способом. Функция выигрыша A задана следующим образом ($c>0$):

$$2.1. \begin{pmatrix} 300 & 200 & 200 & 200 \\ 200 & 100 & 300 & 400 \\ 400 & 300 & 100 & 150 \\ 300 & 200 & 50 & 100 \end{pmatrix}; \quad 2.2. \begin{pmatrix} 100 & 50 & 200 & 150 \\ 100 & 150 & 200 & 250 \\ 100 & 200 & 150 & 150 \\ 150 & 200 & 250 & 200 \end{pmatrix}; \quad 2.3. \begin{pmatrix} 75 & 100 & 175 & 125 \\ 100 & 175 & 150 & 125 \\ 125 & 150 & 100 & 75 \\ 50 & 75 & 125 & 75 \end{pmatrix};$$

$$2.4. \begin{pmatrix} 2c & 2c & 3c & 2c \\ 4c & 3c & 2c & c \\ \frac{3c}{2} & c & 4c & 3c \\ c & \frac{c}{2} & 3c & 2c \end{pmatrix}; \quad 2.5. \begin{pmatrix} c & \frac{c}{2} & 2c & \frac{3c}{2} \\ c & \frac{3c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} \\ \frac{c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} & 2c \\ c & 2c & \frac{3c}{2} & \frac{3c}{2} \end{pmatrix}; \quad 2.6. \begin{pmatrix} \frac{3c}{2} & 2c & \frac{7c}{2} & \frac{5c}{2} \\ c & \frac{3c}{2} & \frac{5c}{2} & \frac{3c}{2} \\ 2c & \frac{7c}{2} & 3c & \frac{5c}{2} \\ \frac{5c}{2} & 3c & 2c & \frac{3c}{2} \end{pmatrix};$$

$$2.7. \begin{pmatrix} 300 & 400 & 600 & 500 \\ 500 & 600 & 700 & 400 \\ 500 & 700 & 400 & 300 \\ 300 & 500 & 300 & 200 \end{pmatrix}; \quad 2.8. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2.9. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2.10. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$2.11. \begin{pmatrix} 300 & 400 & 200 & 800 \\ 400 & 600 & 300 & 1200 \\ 600 & 300 & 800 & 600 \\ 800 & 400 & 600 & 1200 \end{pmatrix};$$

$$2.12. \begin{pmatrix} 25 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 75 & 150 \\ 150 & 100 & 50 & 100 \end{pmatrix};$$

$$2.13. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$2.14. \begin{pmatrix} \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & c & \frac{3c}{2} \\ \frac{3c}{2} & c & \frac{3c}{2} & c \\ 2c & \frac{3c}{2} & c & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & c & \frac{c}{2} \end{pmatrix},$$

$$2.15. \begin{pmatrix} 2500 & 1500 & 500 & 2500 \\ 2000 & 1750 & 2000 & 2500 \\ 500 & 2000 & 2500 & 1000 \\ 1500 & 1000 & 1750 & 2000 \end{pmatrix};$$

$$2. \ 16. \ \begin{pmatrix} 110 & 220 & 330 & 110 \\ 220 & 330 & 220 & 330 \\ 330 & 220 & 110 & 440 \\ 110 & 220 & 110 & 110 \end{pmatrix};$$

--	--

2.

$$2.19. \begin{pmatrix} 25 & 50 & 25 & 25 \\ 25 & 50 & 75 & 100 \\ 50 & 75 & 50 & 75 \\ 75 & 50 & 25 & 25 \end{pmatrix};$$

$$2.20. \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3.5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3.5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2.2I. \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

2. 22. $\begin{pmatrix} 300 & 400 & 200 & 800 \\ 400 & 600 & 300 & 1200 \\ 600 & 300 & 800 & 600 \\ 800 & 400 & 600 & 1200 \end{pmatrix};$

$$2.23. \begin{pmatrix} 80 & 70 & 40 & 60 \\ 40 & 100 & 80 & 20 \\ 100 & 80 & 70 & 80 \\ 100 & 20 & 60 & 100 \end{pmatrix};$$

$$2.24. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2.25. \begin{pmatrix} \frac{5c}{2} & \frac{3c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{5c}{2} \\ c & \frac{7c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} \\ \frac{c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} & c \\ \frac{3c}{2} & c & \frac{7c}{2} & 2c \end{pmatrix}; \quad 2. \quad \boxed{\times}$$

2.



$$2.28. \begin{pmatrix} 1100 & 1100 & 550 & 2200 \\ 2200 & 275 & 550 & 2200 \\ 3300 & 2200 & 1100 & 275 \\ 1100 & 1650 & 1100 & 2200 \end{pmatrix}; \quad 2.29. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}; \quad 2.30. \begin{pmatrix} \frac{4c}{3} & \frac{c}{6} & \frac{c}{3} & \frac{4c}{3} \\ \frac{2c}{3} & \frac{2c}{3} & \frac{c}{3} & \frac{4c}{3} \\ \frac{2c}{3} & c & \frac{2c}{3} & \frac{4c}{3} \\ 2c & \frac{4c}{3} & \frac{2c}{3} & \frac{c}{6} \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 3

Решить игру при помощи задачи линейного программирования:

$$4.1. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad 4.2. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad 4.3. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4.4. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4.5. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \quad 4.6. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \quad 4.7. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 10 \end{pmatrix}; \quad 4.8. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4.9. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad 4.10. \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4.11. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4.12. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4.13. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -0 \end{pmatrix}; 4.14. \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}; 4.15. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; 4.16. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix};$$

$$4.17. \begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 & 10 \\ 2 & -4 & 14 & 6 \\ 10 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}; 4.18. \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 10 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}; 4.19. \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix};$$

$$4.20. \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & -2 \\ 10 & 14 & 12 \end{pmatrix}; 4. \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} 4. \begin{array}{|c|} \hline \text{ } \\ \hline \end{array} 4.23. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 10 & 4 & -8 \\ 6 & 14 & 10 \end{pmatrix};$$

$$4.24. \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}; 4.25. \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 & 10 \\ 10 & 6 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}; 4.26. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 10 \\ 10 & 14 & -8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4.27. \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 2 \\ 10 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}; 4.28. \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 10 & 4 & -8 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}; 4.29. \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 & 10 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 10 & 4 & -8 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4.30. \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 8 \\ 6 & 4 & 8 & 2 \\ 8 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$