

## Лекция 5

### ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

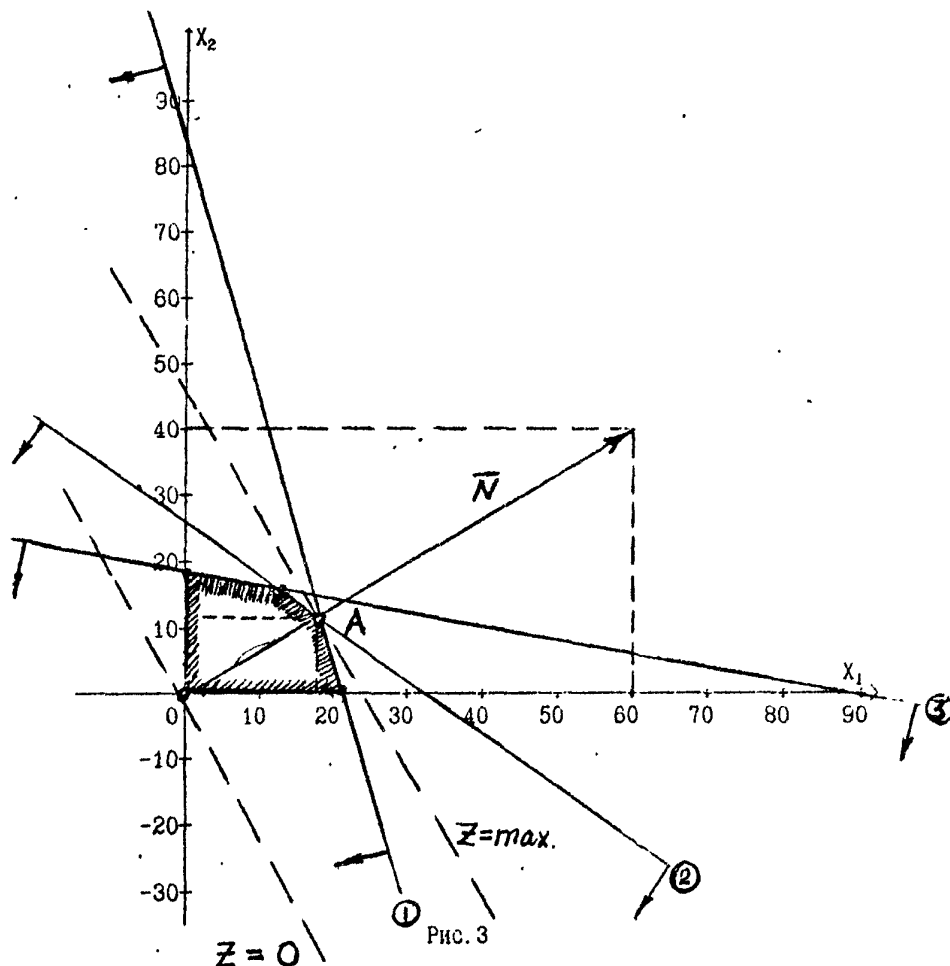
#### 3.2. Графическое решение задачи линейного программирования

Проиллюстрируем решение задачи графически. Для этого вернемся к исходной математической модели (3.1) в стандартном виде:

$$\begin{aligned} 12x_1 + 3x_2 &\leq 264; \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 136; \\ 3x_1 + 14x_2 &\leq 266; \\ x_1 &\geq 0; \quad x_2 &\geq 0. \\ Z = 6x_1 + 4x_2 &\rightarrow \text{MAX}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Графическим методом решаются ЗЛП, где все ограничения записаны в виде неравенств и математическая модель при этом содержит лишь две переменные  $x_1$  и  $x_2$ .

Каждому неравенству модели соответствует полуплоскость. Для графического изображения полуплоскостей строим их граничные прямые по двум произвольно выбранным точкам. Для этого задаем одну из



переменных произвольно, а другую вычисляем из соответствующего уравнения.

Рисунок 3.1.

*Уравнения граничных прямых:*

$$1) 12x_1 + 3x_2 = 264; (\ell_1)$$

$$2) 4x_1 + 5x_2 = 136; (\ell_2)$$

$$\text{если } x_1 = 0, \text{ то } x_2 = 88;$$

$$\text{если } x_1 = 0, \text{ то } x_2 = 27,2;$$

$$\text{если } x_2 = 0, \text{ то } x_1 = 22;$$

$$\text{если } x_2 = 0, \text{ то } x_1 = 34;$$

(3.9)

$$3) 3x_1 + 14x_2 = 266; (\ell_3),$$

$$\text{если } x_1 = 0, \text{ то } x_2 = 19;$$

$$\text{если } x_2 = 0, \text{ то } x_1 = 88,7.$$

Строим прямые по найденным точкам в выбранной системе координат (рис.3.1). Масштабы на осях выбираем, исходя из удобств построения. (Чертеж должен быть достаточно крупным, рекомендуем выполнять его на отдельной странице.)

Каждому неравенству соответствует полуплоскость, содержащая точку (0;0). На чертеже эти полуплоскости отмечены стрелками.

Общая часть всех полуплоскостей, с учетом условий неотрицательности  $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ , образует замкнутый выпуклый многоугольник. В данной задаче это пятиугольник, отмеченный на чертеже штриховкой по краям.

Множество внутренних и граничных точек многоугольника соответствует множеству всех допустимых планов. Опорные планы находятся в вершинах многоугольника, среди них содержится оптимальный. Для нахождения оптимального плана обратимся к целевой функции

$$Z = 6x_1 + 4x_2. \quad (3.10)$$

На графике целевая функция изображается с помощью линий уровня:  $Z = C$  (const). Придавая постоянной  $C$  различные значения, получим множество линий уровня:

$$6x_1 + 4x_2 = C. \quad (3.11)$$

Это семейство параллельных прямых, перпендикулярных к вектору  $\bar{N}(6,4)$  – градиенту целевой функции. Он направлен в сторону наискорейшего роста функции  $Z$ . Координаты вектора равны коэффициентам при неизвестных в целевой функции  $Z$ .

Построим вектор  $\bar{N}$ , и перпендикулярно к нему через точку  $(0;0)$  проведем прямую. Уравнение этой прямой – линии минимального уровня прибыли:

$$6x_1 + 4x_2 = 0.$$

Если эту прямую перемещать параллельно самой себе в направлении вектора  $\bar{N}$ , то получим множество линий уровня, на которых значение целевой функции  $Z$  возрастает. Своего максимального значения  $Z$  достигает на прямой, проходящей через точку  $A$ . Значение функции  $Z$ , вычисленное в точке  $A$ , будет наибольшим для данной области, т.к. при дальнейшем перемещении линии уровня не будут иметь общих точек с областью допустимых планов.

*Замечание.* Для построения вектора  $\bar{N}$  описанным выше способом нужно, чтобы по осям координат  $Ox_1$  и  $Ox_2$  был выбран одинаковый масштаб. Если это условие не соблюдено, то нужно взять одну из линий уровня целевой функции  $Z$ , например  $6x_1 + 4x_2 = 0$ , и построить ее по двум выбранным точкам, например  $(0;0)$  и  $(20;-30)$ . Далее следует провести линию уровня через эти точки и перпендикулярно к ней построить вектор  $\bar{N}$ . Линию уровня перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора  $\bar{N}$  до тех пор, пока позволяет область допустимых планов, т. е. до точки  $A$ .

Найдем координаты точки  $A$ , заметив, что она лежит на пересечении прямых (1) и (2). Решим систему уравнений 1 и 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} 12x_1 + 3x_2 = 264 \\ 4x_1 + 5x_2 = 136 \end{array} \right| \cdot (-3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12x_1 + 3x_2 = 264 \\ -12x_1 - 15x_2 = -408 \\ \hline -12x_2 = -144 \Rightarrow x_2 = 12 \end{array} \right.$$

$$4x_1 + 5 \cdot 12 = 136; \quad \Rightarrow \quad 4x_1 = 76; \quad \Rightarrow \quad x_1 = 19.$$

Координаты точки А (19;12) соответствуют оптимальному плану.

Подставляя найденные значения  $x_1$  и  $x_2$  в целевую функцию, получим максимальное значение целевой функции:

$$Z_{\max} = 19 \cdot 6 + 12 \cdot 4 = 162. \quad (3.12)$$

Итак,  $Z_{\max} = 162$  при  $x_1 = 19$ ;  $x_2 = 12$ , что соответствует решению задачи симплекс-методом.

*Замечание.* Многоугольник допустимых планов может быть в частности треугольником, четырехугольником и т. д. Может оказаться, что полуплоскости не имеют общих точек. Это означает, что система ограничений противоречива и ЗЛП решений не имеет, т.к. нет допустимых планов.

### 3.3. Двойственная задача

Составим по модели (3.1) математическую модель двойственной задачи. Для этого выпишем расширенную матрицу задачи (3.1):

$$A = \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & \text{св.ч.} & \\ \hline 12 & 3 & 264 & u_1 \\ 4 & 5 & 136 & u_2 \\ 3 & 14 & 266 & u_3 \\ 6 & 4 & 0 & \text{св.ч.}^* \end{array} \quad (3.13)$$

Математические модели взаимно-двойственных задач связаны между собой по правилам:

1) одна из задач содержит столько неравенств-ограничений (или равенств), сколько неизвестных у другой;

2) расширенные матрицы обеих задач транспонированы по отношению друг к другу;

3) одна задача имеет ограничения  $\leq$  и целевую функцию на максимум, а другая – ограничения  $\geq$  и целевую функцию на минимум;

4) свободные члены системы ограничений и коэффициенты целевой функции меняются местами;

5) каждому ограничению-неравенству соответствует неотрицательная двойственная переменная, а равенству – переменная без ограничения знака (и наоборот).

Из (3.13) получаем двойственную задачу в виде:

$$\begin{aligned} 12u_1 + 4u_2 + 3u_3 &\geq 6 \\ 3u_1 + 5u_2 + 14u_3 &\geq 4 \\ L = 264u_1 + 136u_2 + 266u_3 &\rightarrow \min \quad (3.14) \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Двойственная задача линейного программирования имеет простой экономический смысл. В исходной задаче неравенства описывали ограничения по ресурсам и требовалось найти план, обеспечивающий максимум прибыли при заданных нормах расхода каждого ресурса на изделие.

В двойственной задаче переменные  $u_i$  имеют смысл оптимальных цен единицы каждого ресурса. Ограничения означают, что стоимость сырья, израсходованного на единицу изделия  $j$  ( $j=1,2$ ), должна обеспечивать его продавцу прибыль не менее, чем прибыль от продажи единицы этого изделия. Цель заключается в том, чтобы общая стоимость ресурсов была минимальной с точки зрения покупателя.

Таким образом, двойственная задача заключается в определении оптимальных оценок (условных цен) единицы каждого ресурса при условии минимальной суммарной стоимости ресурсов.

Справедливы две *теоремы двойственности*.

Первая (основная) теорема. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая его имеет, причем значения их целевых функций для оптимальных решений совпадают. Если одна из двойственных задач не имеет оптимального решения, то двойственная ей задача противоречива.

Из основной теоремы двойственности вытекает, что существование оптимальных решений двойственных ЗЛП гарантируется наличием хотя бы одного допустимого плана для каждой из двойственных задач, причем оптимальные значения целевых функций совпадут.

Отсюда следует, что решение обеих двойственных задач симплекс-методом можно совместить в одних симплекс-таблицах. Кроме того, зная решение одной из двойственных задач, можно найти решение другой задачи, пользуясь второй теоремой двойственности.

Вторая теорема двойственности. Для оптимальных решений пары симметричных двойственных задач выполняются две группы сопряженных условий:

$$x_i v_i = 0, \quad (3.15)$$

$$u_j y_j = 0, \quad (3.16)$$

где  $x_i$  и  $u_j$  – основные и двойственные переменные, а  $v_i$  и  $y_j$  – дополнительные выравнивающие переменные (искусственный базис двойственной и исходной задач соответственно).

В нашем примере

$$\begin{aligned} v_1 &= 6 - (12u_1 + 4u_2 + 3u_3), \\ v_2 &= 4 - (3u_1 + 5u_2 + 14u_3). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Получаем из (4.15) и (4.16) систему



задачи, которая является двойственной к задаче (3.20) – (3.21).

Пусть  $C_i$  – цена единицы  $i$ -го продукта, тогда двойственная задача имеет вид:

[illegible]

$$b_1U_1+b_2U_2+\dots+b_nU_n\rightarrow\max. \quad (3.23)$$

Экономическая интерпретация двойственной задачи: *стоимость выпуска продукции в каждом технологическом процессе не должна превышать затраты труда* (условия (3.22)). *Общий выпуск продукции максимизируется* (условие (3.23)).

Рассмотрим пример ценообразования по двойственной задаче.

Пусть  $n=2, m=3$  и матрица  $\|\alpha_{ij}\|$  имеет вид:

## Пример ценообразования

*Таблица 3.5*

Технологические процессы	$z_1$	$z_2$	$z_3$	Необходимый выпуск $b_i$
Продукт 1	1	1	2	21
Продукт 2	2	1	1	12
Затраты труда $c_j$	31	11	12	

### Прямая задача: минимизация затрат труда

$$K=31Z_1+11Z_2+12Z_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$z_1+z_2+2z_3\geq 21; \quad 2z_1+z_2+z_3\geq 12.$$

*Решение задачи:*  $z_1=0; z_2=3; z_3=9, K=141$ .

## Двойственная задача: максимизация выпуска

$$W = 2I_1 + 12I_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$U_1+2U_2\leq 31; U_1+U_2\leq 11; 2U_1+U_2\leq 12.$$



*Решение задачи:*  $z_1=0$ ;  $z_2=3$ ;  $z_3=9$ ;  $W=141$ .

Таким образом,  $K=W$ , что соответствует теории двойственности.