

Лабораторная работа №5. Матричные игры. Графический метод решения игр 2 x n

Поясним метод на примере.

Пример 7

Рассмотрим игру, заданную платёжной матрицей.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ A_1 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} . \quad (4.23)$$

Решение

На плоскости xOy введём систему координат и на оси Ox отложим отрезок единичной длины A_1A_2 , каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию игрока 1 $(x, 1 - x)$. В частности, точке $A_1 (0;0)$ отвечает стратегия A_1 , точке $A_2 (1;0)$ – стратегия A_2 и т. д. (рис. 5.1).

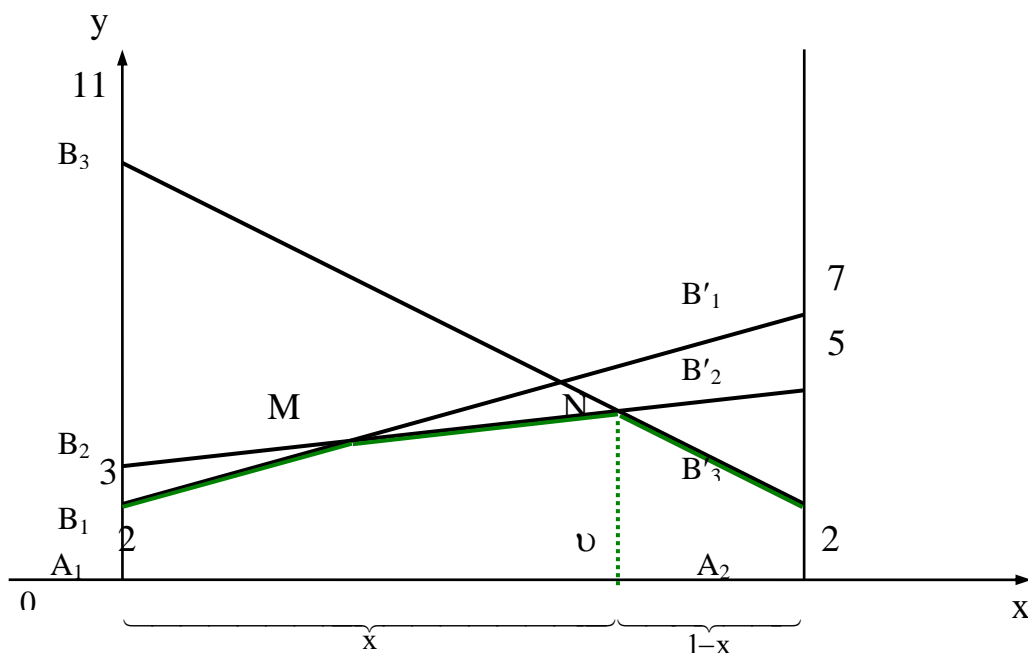


Рисунок 4.1

В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляр и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном

случае он совпадает с осью Oy) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии A_1 , а на втором – при стратегии A_2 . Если игрок 1 применит стратегию A_1 , то выиграет при стратегии B_1 игрока 2 – 2, при стратегии B_2 – 3, а при стратегии B_3 – 11. Числам 2, 3, 11 на оси Ox соответствуют точки B_1, B_2 и B_3 .

Если же игрок 1 применит стратегию A_2 , то его выигрыш при стратегии B_1 равен 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Эти числа определяют точки B'_1, B'_2, B'_3 на перпендикуляре, восстановленном в точке A_2 . Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B'_2, B_3 и B'_3 получим три прямые, расстояние до которых от оси Ox определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка $B_1B'_1$ до оси Ox определяет средний выигрыш v_1 при любом сочетании стратегий $A_1 A_2$ (с частотами x и $1-x$) и стратегией B_1 игрока 2. Это расстояние равно

$$2x_1 + 6(1 - x_2) = v_1. \quad ($$

(Вспомните планиметрию и рассмотрите трапецию $A_1 B_1 B'_1 A_2$). Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной $B_1 M N B'_3$ определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N ; следовательно этой точке соответствует оптимальная стратегия $X^* = (x, 1-x)$, а её ордината равна цене игры v . Координаты точки N находим как точку пересечения прямых $B_2 B'_2$ и $B_3 B'_3$.

Соответствующие два уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 3x + 5(1 - x) = v \\ 11x + 2(1 - x) = v \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{11}, v = \frac{49}{11}. \quad (4.24)$$

Следовательно $x = (\frac{3}{11}; \frac{9}{11})$, при цене игры $v = \frac{49}{11}$. Таким образом мы

можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Оптимальные стратегии для игрока 2 можно найти из системы

$$\begin{cases} 3y + 11(1 - y) = v \\ 5y + 2(1 - y) = v \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{11}$$

и, следовательно, $Y = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (Из рисунка видно, что стратегия B_1 не войдёт в оптимальную стратегию).

Практикум по теории игр

(Варианты 1 – 30)

Задание 1.

Задача на составление платежной матрицы по правилам игры на стр.103-104 Практикума «Исследование операций».

Задание 2.

Пусть $G=(X,Y,A)$, где $X=\{1,2,3,4\}$; $Y=\{1,2,3,4\}$. Найти оптимальные стратегии X,Y для игроков 1 и 2, найти решение игры G матричным способом. Функция выигрыша A задана следующим образом ($c>0$):

$$1. \begin{pmatrix} 300 & 200 & 200 & 200 \\ 200 & 100 & 300 & 400 \\ 400 & 300 & 100 & 150 \\ 300 & 200 & 50 & 100 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 100 & 50 & 200 & 150 \\ 100 & 150 & 200 & 250 \\ 100 & 200 & 150 & 150 \\ 150 & 200 & 250 & 200 \end{pmatrix}; \quad 3. \begin{pmatrix} 75 & 100 & 175 & 125 \\ 100 & 175 & 150 & 125 \\ 125 & 150 & 100 & 75 \\ 50 & 75 & 125 & 75 \end{pmatrix};$$

$$4. \begin{pmatrix} 2c & 2c & 3c & 2c \\ 4c & 3c & 2c & c \\ \frac{3c}{2} & c & 4c & 3c \\ c & \frac{c}{2} & 3c & 2c \end{pmatrix}; \quad 5. \begin{pmatrix} c & \frac{c}{2} & 2c & \frac{3c}{2} \\ c & \frac{3c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} \\ \frac{c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} & 2c \\ c & 2c & \frac{3c}{2} & \frac{3c}{2} \end{pmatrix}; \quad 6. \begin{pmatrix} \frac{3c}{2} & 2c & \frac{7c}{2} & \frac{5c}{2} \\ c & \frac{3c}{2} & \frac{5c}{2} & \frac{3c}{2} \\ 2c & \frac{7c}{2} & 3c & \frac{5c}{2} \\ \frac{5c}{2} & 3c & 2c & \frac{3c}{2} \end{pmatrix};$$

$$7. \begin{pmatrix} 300 & 400 & 600 & 500 \\ 500 & 600 & 700 & 400 \\ 500 & 700 & 400 & 300 \\ 300 & 500 & 300 & 200 \end{pmatrix}; \quad 8. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad 9. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad 10. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$11. \begin{pmatrix} 300 & 400 & 200 & 800 \\ 400 & 600 & 300 & 1200 \\ 600 & 300 & 800 & 600 \\ 800 & 400 & 600 & 1200 \end{pmatrix}; \quad 12. \begin{pmatrix} 25 & 50 & 50 & 50 \\ 50 & 50 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 75 & 150 \\ 150 & 100 & 50 & 100 \end{pmatrix}; \quad 13. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$14. \begin{pmatrix} \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & c & \frac{3c}{2} \\ \frac{3c}{2} & c & \frac{3c}{2} & c \\ 2c & \frac{3c}{2} & c & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & c & \frac{c}{2} \end{pmatrix}; \quad 15. \begin{pmatrix} 2500 & 1500 & 500 & 2500 \\ 2000 & 1750 & 2000 & 2500 \\ 500 & 2000 & 2500 & 1000 \\ 1500 & 1000 & 1750 & 2000 \end{pmatrix}; \quad 16. \begin{pmatrix} 110 & 220 & 330 & 110 \\ 220 & 330 & 220 & 330 \\ 330 & 220 & 110 & 440 \\ 110 & 220 & 110 & 110 \end{pmatrix};$$

$$17. \begin{pmatrix} 3000 & 2000 & 1000 & 2000 \\ 1000 & 1000 & 2000 & 2000 \\ 500 & 1000 & 1000 & 1000 \\ 2000 & 2000 & 1500 & 3000 \end{pmatrix}; \quad 18. \begin{pmatrix} 6c & 3c & 2c & 4c \\ 3c & 4c & \frac{3c}{2} & 3c \\ 6c & \frac{3c}{2} & 3c & 2c \\ 4c & c & 2c & \frac{3c}{2} \end{pmatrix}; \quad 19. \begin{pmatrix} 25 & 50 & 25 & 25 \\ 25 & 50 & 75 & 100 \\ 50 & 75 & 50 & 75 \\ 75 & 50 & 25 & 25 \end{pmatrix};$$

$$20. \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3.5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3.5 & 4 \end{pmatrix}; \quad 21. \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad 22. \begin{pmatrix} 300 & 400 & 200 & 800 \\ 400 & 600 & 300 & 1200 \\ 600 & 300 & 800 & 600 \\ 800 & 400 & 600 & 1200 \end{pmatrix};$$

$$23. \begin{pmatrix} 80 & 70 & 40 & 60 \\ 40 & 100 & 80 & 20 \\ 100 & 80 & 70 & 80 \\ 100 & 20 & 60 & 100 \end{pmatrix}; \quad 24. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 25. \begin{pmatrix} \frac{5c}{2} & \frac{3c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{5c}{2} \\ c & \frac{7c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} \\ \frac{c}{2} & 2c & \frac{5c}{2} & c \\ \frac{3c}{2} & c & \frac{7c}{2} & 2c \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
26. & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; & 27. & \begin{pmatrix} c & \frac{c}{2} & c & \frac{3c}{2} \\ \frac{3c}{2} & \frac{3c}{4} & c & c \\ c & c & \frac{c}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & \frac{c}{4} \end{pmatrix}; & 28. & \begin{pmatrix} 1100 & 1100 & 550 & 2200 \\ 2200 & 275 & 550 & 2200 \\ 3300 & 2200 & 1100 & 275 \\ 1100 & 1650 & 1100 & 2200 \end{pmatrix}; \\
29. & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}; & 30. & \begin{pmatrix} \frac{4c}{3} & \frac{c}{6} & \frac{c}{3} & \frac{4c}{3} \\ \frac{2c}{3} & \frac{2c}{3} & \frac{c}{3} & \frac{4c}{3} \\ \frac{2c}{3} & c & \frac{2c}{3} & \frac{4c}{3} \\ 2c & \frac{4c}{3} & \frac{2c}{3} & \frac{c}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Задание 3.

Пусть игра задана платежной матрицей. Найти решение игры графически.

$$\begin{aligned}
1. & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & 2. & \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \\ 4 & 8 \\ 7 & 2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}; & 3. & \begin{pmatrix} 7 & 15 & 4 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & 13 & 2 \end{pmatrix}; & 4. & \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 9 & 13 \\ 3 & 16 \\ 15 & 4 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}; & 5. & \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ 11 & 3 \\ 4 & 7 \\ 7 & 6 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}; \\
6. & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 12 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}; & 7. & \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 13 \\ 3 & 15 \\ 5 & 14 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}; & 8. & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 11 \end{pmatrix}; & 9. & \begin{pmatrix} 30 & 11 & 22 & 9 & 27 \\ 15 & 20 & 4 & 22 & 14 \end{pmatrix}; \\
10. & \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 11 & 5 \\ 4 & 13 \\ 17 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}; & 11. & \begin{pmatrix} 17 & 12 & 15 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 11 & 14 & 19 \end{pmatrix}; & 12. & \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 4 & 30 \\ 14 & 8 \\ 26 & 4 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}; & 13. & \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 10 & 15 \\ 14 & 18 \\ 17 & 12 \\ 22 & 11 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$14. \begin{pmatrix} 10 & 17 & 11 & 15 & 6 \\ 15 & 9 & 18 & 7 & 20 \end{pmatrix}; \quad 15. \begin{pmatrix} 15 & 7.5 \\ 5.5 & 10 \\ 11 & 2 \\ 4.5 & 11 \\ 13.5 & 7 \end{pmatrix}; \quad 16. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 14 & 4 \\ 7 & 15 & 4 & 5 & 13 \end{pmatrix};$$

$$17. \begin{pmatrix} 13 & 11 & 12 & 16 & 14 \\ 15 & 16 & 14 & 12 & 11 \end{pmatrix}; \quad 18. \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 2 & 10 \\ 8 & 16 \\ 14 & 4 \\ 24 & 2 \end{pmatrix}; \quad 19. \begin{pmatrix} 4.5 & 7.5 & 2 & 1 & 5.5 \\ 1.5 & 1 & 3.5 & 6.5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$20. \begin{pmatrix} 22 & 7 \\ 11 & 15 \\ 5 & 18 \\ 17 & 6 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}; \quad 21. \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 12 & 4 \\ 5 & 8 \\ 8 & 7 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}; \quad 22. \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 12 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad 23. \begin{pmatrix} 5 & 1.5 \\ 0.5 & 6 \\ 1.5 & 7.5 \\ 2 & 7 \\ 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$24. \begin{pmatrix} 6 & 10 & 9 & 6 & 10 \\ 10 & 16 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad 25. \begin{pmatrix} 13 & 11 & 22 & 6 & 20 \\ 5 & 2 & 4 & 14 & 12 \end{pmatrix}; \quad 26. \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & 6 \\ 9 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$27. \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad 28. \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 12 \\ 7 & 4 \\ 12 & 2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}; \quad 29. \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 8 \\ 7 & 9 \\ 9 & 6 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}; \quad 30. \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 10 \end{pmatrix};$$