

# **1. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ**

## **1.1. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ**

Практическое занятие №1

Основные положения

Матрица – это совокупность чисел или объектов другой природы, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Такая таблица, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется  $m \times n$  матрицей. Числа или любые объекты, расположенные в клетках матрицы, называются ее элементами. Величины  $m$  и  $n$  называются порядками матрицы.

Две матрицы, имеющие одинаковое число  $m$  строк и одинаковое число  $n$  столбцов, называются матрицами одинакового размера.

Различают следующие типы матриц: прямоугольная, квадратная, столбец, строка, диагональная (у которой отличны от нуля элементы главной диагонали), верхняя треугольная (ненулевые элементы расположены на главной диагонали и над ней), нижняя треугольная (ненулевые элементы расположены на главной диагонали и под ней), единичная (диагональная матрица с единицами по главной диагонали).

Рассмотрим операции над матрицами.

#### **1. Сложение (вычитание) матриц.**

Суммой (разностью) матриц  $A$  и  $B$  одинакового типа называется матрица  $C$  того же типа, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц  $A$  и  $B$ .

#### **2. Умножение матрицы на число.**

Произведением матрицы  $A$  на число  $\lambda$  называется матрица  $C$  того же типа, что и  $A$ , элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы  $A$  на число  $\lambda$ . Возможно сделать и обратную операцию: упростить элементы матрицы вынесением за матрицу общего множителя.

#### **3. Умножение матрицы на матрицу.**

Произведением матрицы  $A$  размера  $(m1 \times n1)$  на матрицу  $B$  размера  $(n1 \times n2)$  называется матрица  $C$  размера  $(m1 \times n2)$ , элементы которой определяются по формуле:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n1} a_{i,k} \times b_{k,j}, \quad (i=1,2,\dots,m1; j=1,2,\dots,n2). \quad (1.1)$$

Умножение матриц возможно в случае, когда число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$ .

#### **4. Операция транспонирования матрицы.**

Операция транспонирования заключается в перемене местами строк и столбцов с сохранением их номеров.

### **Пример 1**

Из элементов  $(a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a)$  составить:

а) квадратную матрицу и произвести ее упрощение вынесением общего множителя;

б) нижнюю треугольную матрицу размера  $(3 \times 3)$  из любых элементов списка.

### Решение

Квадратная матрица имеет одинаковое количество строк и столбцов. Поэтому производим заполнение матрицы  $D$  исходными элементами:

$$D = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ 4a & 5a & 6a \\ 7a & 8a & 9a \end{bmatrix}.$$

Матрицу  $D$  можно упростить вынесением общего множителя ( $a$ ) за знак матрицы:

$$D = a \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Составляем нижнюю треугольную матрицу. Заполняем главную диагональ и ниже ее элементами списка; сверху от главной диагонали ставим нули:

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 4a & 2a & 0 \\ 5a & 6a & 3a \end{bmatrix}.$$

### Пример 2

Выполнить действия:

$$6 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

### Решение

Приоритетность операций над матрицами остается такой же, как и с числами: сначала умножение матриц на соответствующие числа, затем вычитание результирующих матриц.

Производим следующие действия:

1) умножаем число на первую матрицу:

$$6 \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 30 \\ 54 & 24 & 0 \\ 36 & 30 & 6 \end{bmatrix};$$

2) умножаем число на вторую матрицу:

$$2 \times \begin{bmatrix} -5 & 8 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 16 & 8 \\ 12 & 6 & 6 \\ 16 & 18 & 4 \end{bmatrix};$$

3) производим операцию вычитания матриц:

$$\begin{bmatrix} 6 & 18 & 30 \\ 54 & 24 & 0 \\ 36 & 30 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 16 & 8 \\ 12 & 6 & 6 \\ 16 & 18 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 22 \\ 42 & 18 & -6 \\ 20 & 12 & 2 \end{bmatrix}.$$

### Пример 3

Найти произведение матриц по формуле умножения:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

### Решение

- 1) Проверяем возможность умножения матриц; первая матрица имеет размерность  $(2 \times 2)$ , а вторая  $(2 \times 3)$ . Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно, умножение матриц возможно.

2) Согласно (1.1), имеем:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^2 a_{i,k} \times b_{k,j}, \quad (i=1,2; j=1,2,3), \quad (1.2)$$

где  $c_{i,j}$ -элементы результирующей матрицы  $C$ .

3) запишем выражение (2) в развернутом виде и произведем расчет элементов матрицы  $C$ :

$$c_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \times b_{k1} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} = 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11;$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \times b_{k2} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 16;$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \times b_{k3} = a_{11} \times b_{13} + a_{12} \times b_{23} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8;$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \times b_{k1} = a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} = 5 \times 1 + 1 \times 3 = 8;$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \times b_{k2} = a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14;$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \times b_{k3} = a_{21} \times b_{13} + a_{22} \times b_{23} = 5 \times 1 + 1 \times 2 = 7.$$

4) Окончательно получим:

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 16 & 8 \\ 8 & 14 & 7 \end{bmatrix}.$$

## Задания практического занятия № 1

1. Из предложенных элементов составить матрицы: квадратную, столбец, строку, верхнюю треугольную, нижнюю треугольную.
2. Вычислить элементы результирующей матрицы.
3. Произвести умножение двух матриц по формуле (1.1).
4. Вынести общий множитель за знак матрицы.

6

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
1	(9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1)	$2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 8 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$	$4 \ 5 \ 6 \times \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 3a & 5a & 6a \\ 4b & 5c & 7d & 8e \\ 3 & 8 & 7 & 4 \\ 3k & 2k & 2k & k \end{bmatrix}$
2	(a; b; c; d; e; f; g; i; k)	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix} : 4 + 5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 8 & 9 \\ 4 & 0 & 5 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 & 4 & 22 & 28 \\ 38 & 2 & 4 & 56 \\ 78 & 34 & 6 & 8 \\ 10 & 30 & 42 & 88 \end{bmatrix}$
3	(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)	$6 \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 4a & 8a & 4a \\ 10d & 2d & 14d & 2d \\ c & 6d & 4a & 3a \\ 6d & fa & at & ca \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
4	(i; 2i; 3i; 4i; 5i; 6i; 7i; 8i; 9i)	$\begin{bmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 16 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times 5 + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 9 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 & 38 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 7 & 14 \\ 22 & 4 & 5 & 10 \\ 28 & 16 & 9 & 2 \end{bmatrix}$
5	(2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18)	$\left( \begin{bmatrix} -4 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ -3 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 12 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 18 & 9 & 3 & 0 \\ 21 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$
6	(sin(x); sin(2x); sin(3x); sin(4x); sin(5x); sin(6x); sin(7x);	$\left( \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ -3 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) : 4$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9a & 3 & 6 & 12 \\ 14 & 6b & 9ab & 15 \\ 12b & 15 & 3a & 6b \\ 9 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
7	(-1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9)	$\left( 2 \times \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 8 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \times 4$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & 14 & 16 \\ 18 & 23 & 24 & 20 \\ 8 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
8	(a; 2a; 3a; 4a; 5a; 6a; 7a; 8a ;9a)	$4 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 12 & 3 & 0 \\ 6 & 14 & 9 & 3 \\ 9 & 20 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
9	(1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17)	$8 \times \left( \begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 2 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 6 & 14 \\ 8 & 6 & 2 & 0 \\ 10 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
10	(f(x); 2f(x); 3f(x); 4f(x); 5f(x); 6f(x); 7f(x); 8f(x); 9f(x))	$12 \times \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 & 5 \\ 8 & 3 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 & 6 \\ 10 & 7 & 4 & 2 \\ 12 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
11	(x; x <sup>2</sup> ; x <sup>3</sup> ; x <sup>4</sup> ; x <sup>5</sup> ; x <sup>6</sup> ; x <sup>7</sup> ; x <sup>8</sup> ; x <sup>9</sup> )	$\begin{bmatrix} 15 & 18 & 19 \\ 10 & 11 & 8 \\ 14 & 7 & 6 \end{bmatrix} - 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18 & 3 & 22 & 28 \\ 38 & 1 & 4 & 16 \\ 6 & 8 & 4 & 10 \\ 12 & 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$



Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
12	(1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9)	$4 \times \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} - 2 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 11 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 18 & 9 & 27 & 6 \\ 21 & 2 & 9 & 15 \end{bmatrix}$
13	(a; b; c; d; e; f; g; k; l)	$5 \times \begin{bmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times 4$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a & 3 & 6a & 7a \\ 2c & 7b & 4a & 9a \\ 3a & 6b & 8c & 2d \\ 9a & 3a & 7a & 3a \end{bmatrix}$
14	(i; 2i; 3i; 4i; 5i; 6i; 7i; 8i; 9i)	$7 \times \left( \begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} 5 & 9 & 1 \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} 18 & 38 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 14 & 16 \\ 22 & 4 & 0 & 62 \\ 8 & 14 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
15	$(a; a^2; a^4; a^6; a^8; a^{10}; a^{12}; a^{14}; a^{16})$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 8 & 10 & -5 \end{bmatrix} \times 4 - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 9 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 6a & 2 & 3b \\ 3 & 1a & 3 & 2c \\ 7 & 2b & 9a & 5 \\ 8a & 4a & 9a & 0 \end{bmatrix}$

Варианты практического занятия №1 (продолжение)

№ варианта	Задания			
	1	2	3	4
16	$(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7; x_8; x_9)$	$8 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -5 & 8 \\ -3 & 1 & 6 \\ -5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 19 & 28 & 32 \\ 15 & 2 & 36 & 49 \\ 64 & 8 & 12 & 20 \\ 4 & 13 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
17	$(1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9)$	$\left( \begin{bmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right) \times 3$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 25 & 35 \\ 30 & 45 & 55 & 50 \\ 65 & 85 & 20 & 10 \\ 0 & 100 & 95 & 110 \end{bmatrix}$
18	$(9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1)$	$8 \times \left( \begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 6 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$	$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 81 & 8 & 25 & 54 \\ 18 & 72 & 45 & 63 \\ 0 & 7 & 81 & 90 \\ 18 & 5 & 9 & 27 \end{bmatrix}$
19	$(2; 3; 4; 7; 8; 9; 4; 5; 10)$	$-2 \times \begin{bmatrix} 8 & 8 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} - 4 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \\ 6 & 9 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$