

Задача №3. Расчет вала на прочность и жёсткость при кручении

Цель задачи:

По заданной мощности и частоте вращения вала из условий прочности и жесткости на кручение, определить диаметры ступенчатого трансмиссионного вала. Материал вала Ст3: модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}$.

Данные для расчета берутся из таблицы 1, схема нагружения вала внешними нагрузками представлена на рисунке 1.

Содержание и порядок расчета задачи:

1. Вычертить схему с указанием числовых данных.
2. По заданной мощности P и частоте вращения вала n определить значения внешних моментов T , передаваемых шкивами вала.
3. Составить уравнения внутренних крутящих моментов по участкам.
4. Построить эпюру внутренних крутящих моментов.
5. Из условия прочности определить диаметр вала на каждом участке. Полученный результат округлить по ГОСТ 6636–69 до ближайшего из ряда Ra40: 10, 10.5, 11, 11.5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 100, 105, 110, 120, 125, 130, 140, 150, 160 мм.
6. Приняв допускаемый относительный угол закручивания (на 1 погонный метр) $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}$ и модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, из условия жесткости определить диаметр вала по участкам. Полученный результат округлить по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40.
7. Окончательно принять диаметр вала на каждом участке по наибольшему значению, полученному из условий прочности и жесткости. Построить схему стержня в масштабе по полученным размерам.
8. Определить угол закручивания по длине вала. Определить взаимный угол закручивания концевых сечений.

Таблица 1

Цифры шифра	Схема	l , м	P_1 , Вт	P_2 , Вт	P_3 , Вт	$[\tau]$, МПа	n , об/мин
	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	
1	1	0,8	840	756	2100	80	40
2	2	1,0	1386	1323	2646	75	60
3	3	1,2	2016	2100	3024	70	80
4	4	0,6	2940	3150	3045	65	100
5	5	0,9	4032	4410	2898	60	120
6	6	1,4	5292	5880	6762	55	140
7	7	1,6	6384	7560	6384	50	160
8	8	1,8	7938	9450	3780	45	180
9	9	2,0	9660	11550	6300	40	200
0	10	0,7	12600	15120	6300	35	240

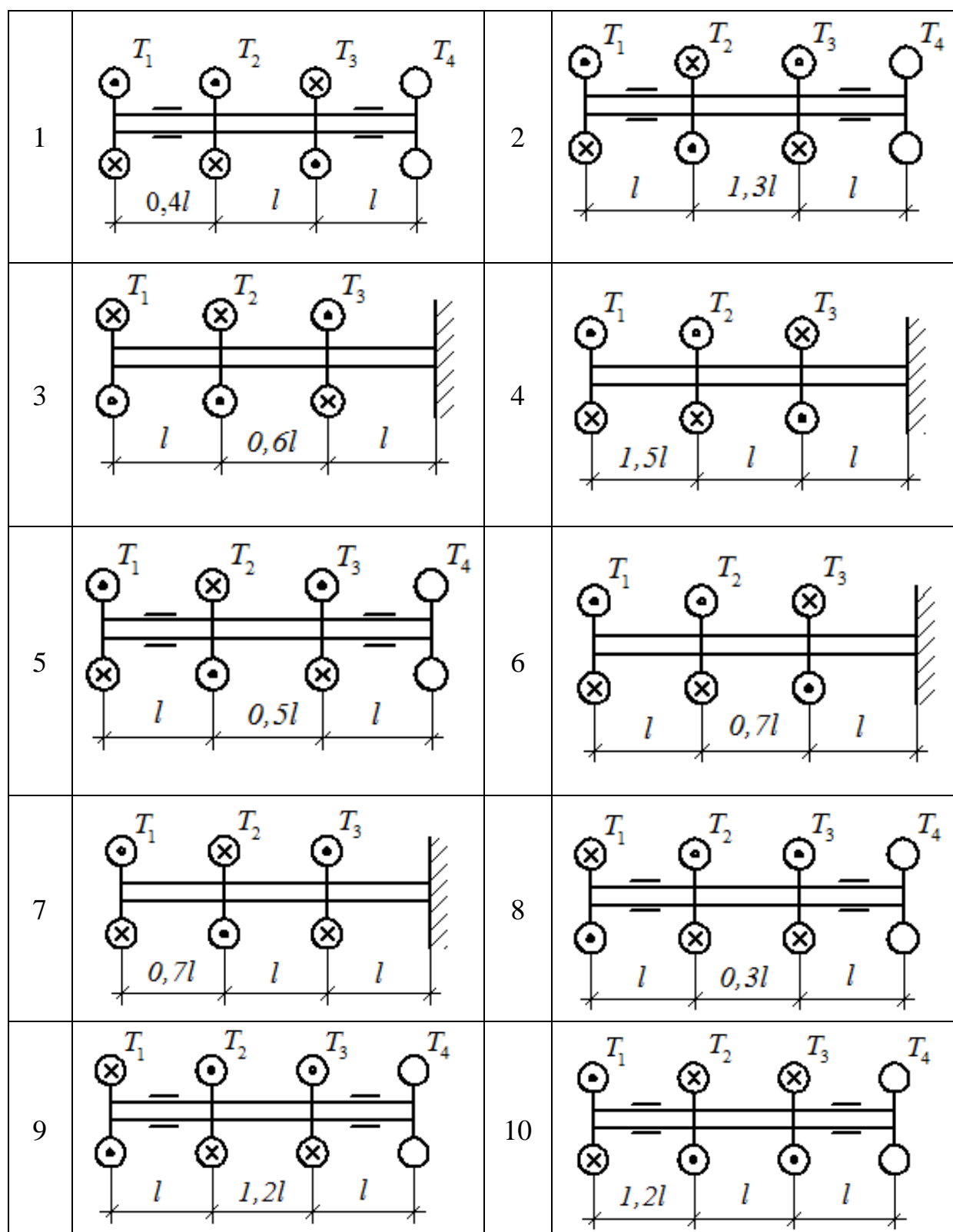


Рисунок 1. Варианты расчетных схем

Пример решения задачи.

Вал круглого поперечного сечения нагружен, как показано на рис. 2. Из условия прочности и жесткости определить диаметры поперечных сечений ступенчатого вала при условии, что мощности, передаваемые, соответственно 1, 2 и 3 шкивами: $P_1=6280$ Вт, $P_2=10467$ Вт, $P_3=2093$ Вт, частота вращения вала $n=200$ об/мин, допускаемый угол закручивания на единицу длины $[\theta]=1,75 \cdot 10^{-2}$ рад/м, допускаемое касательное напряжение $[\tau]=45$ МПа, модуль сдвига $0,8 \cdot 10^5$ МПа.

1. Вычертить схему с указанием числовых данных (рис. 2).

2. По заданной мощности P и частоте вращения вала n определить значения внешних моментов T , передаваемых шкивами вала по формуле:

$$T \cdot \omega = P,$$

где угловая скорость вращения вала ω может быть выражена через известную частоту вращения $\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}$.

Таким образом, можно определить значения для внешних скручивающих моментов, передаваемых на вал:

$$T_1 = \frac{P_1 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{6280 \cdot 30}{3,14 \cdot 200} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{10467 \cdot 30}{3,14 \cdot 200} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_3 = \frac{P_3 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{2093 \cdot 30}{3,14 \cdot 200} = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Неизвестный скручивающий момент T_4 найдем из уравнения равновесия для всего вала. Условно примем направление момента T_4 совпадающим с направлением момента T_2 , которое принято за положительное. Тогда уравнение равновесия принимает вид:

$$-T_1 + T_2 - T_3 + T_4 = 0.$$

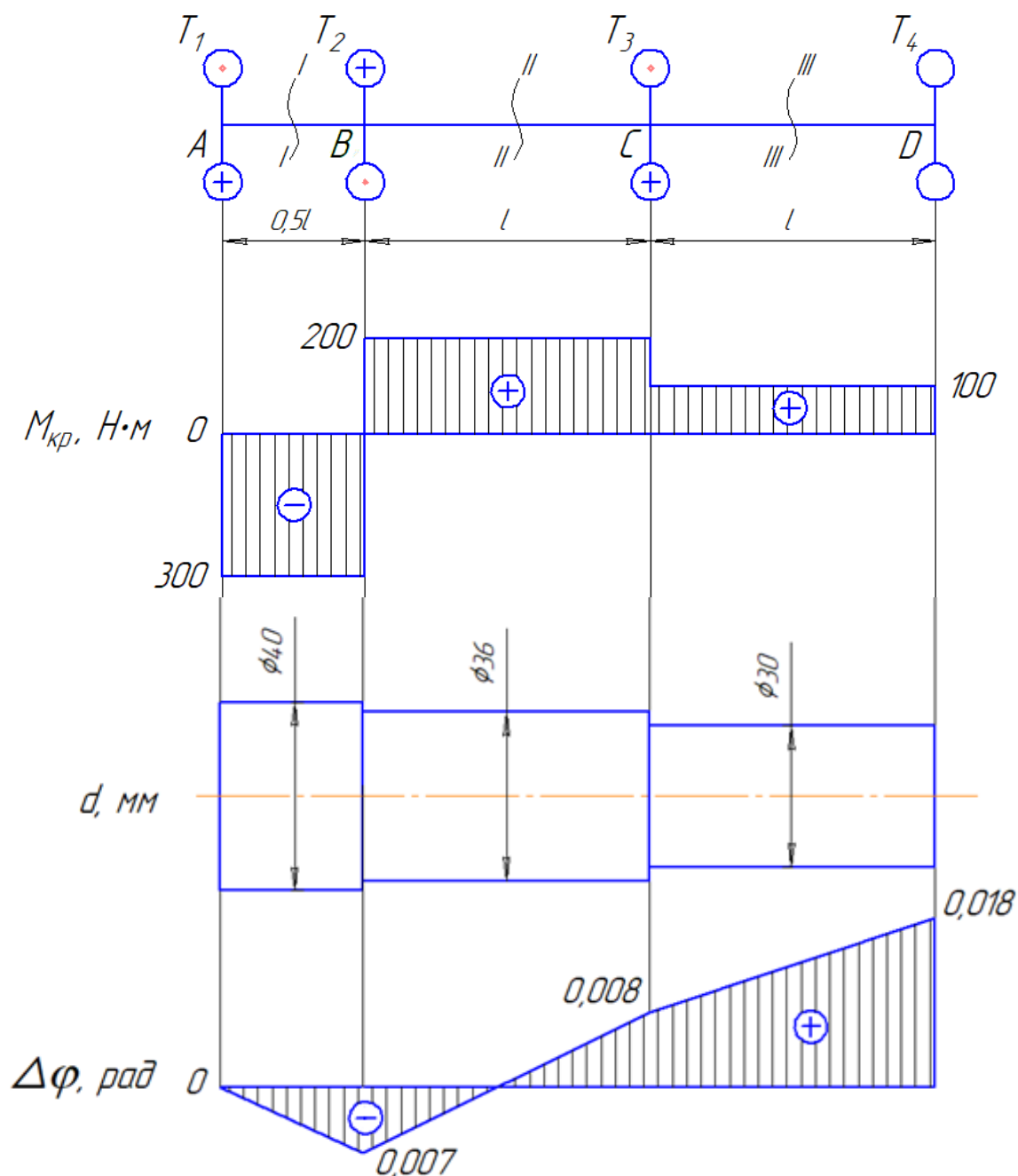


Рисунок 2. Схема нагружения вала, эпюры $M_{кр}$, ϕ и схема вала

Из решения этого уравнения получим:

$$T_4 = T_1 - T_2 + T_3 = 300 - 500 + 100 = -100 \text{ Н·м.}$$

Знак минус означает, что первоначальное направление скручивающего момента выбрано неверно и имеет направление вращения в противоположную сторону.

3. Составить уравнения внутренних крутящих моментов по участкам.

Внутренние крутящие моменты $M_{кр}$ на каждом участке определяются по методу сечений с учетом правила знаков: если смотреть на отсеченную часть бруса со стороны внешней нормали к сечению, то момент будет положителен в том случае, когда сумма внешних скручивающих моментов

поворачивает отсеченную часть по часовой стрелке, и отрицателен при повороте бруса в противоположном направлении.

Для этого слева на право проведем последовательно сечения на трех участках вала и рассмотрим равновесие соответствующих оставшихся левых частей.

В сечении I-I $M_{кр_1} = -T_1 = -300 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

В сечении II-II $M_{кр_2} = -T_1 + T_2 = -300 + 500 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

В сечении III-III $M_{кр_3} = -T_1 + T_2 - T_3 = -300 + 500 - 100 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

4. Построить эпюру внутренних крутящих моментов.

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$, откладывая по вертикальной оси значения моментов. Положительные моменты откладываем вверх по осевой линии, отрицательные – вниз (см. рис.2).

5. Из условия прочности определить диаметр вала на каждом участке.

Расчет на прочность ведется по допускаемому касательному напряжению при кручении $[\tau]$.

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления для круглого сечения, d –

диаметр вала. Диаметр вала можно определить $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}}$.

Для каждого из участков диаметр вала равен:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр_1}}{\pi \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} \geq 0,0324 \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр_2}}{\pi \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} \geq 0,0283 \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр_3}}{\pi \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} \geq 0,0225 \text{ м}.$$

Полученный результат округлить по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40: $d_1^{\text{ГОСТ}} = 34 \text{ мм}$, $d_2^{\text{ГОСТ}} = 30 \text{ мм}$, $d_3^{\text{ГОСТ}} = 24 \text{ мм}$.

6. Из условия жесткости определить диаметр вала на каждом участке.

Известны допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}$ и модуль сдвига $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Расчет на жесткость ведется по относительному углу закручивания $[\theta]$.

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_{\rho}} \leq [\theta],$$

где $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции для круглого сечения, d – диаметр вала. Диаметр вала можно определить $d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}}$.

Для каждого из участков диаметр вала равен:

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр1}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 300}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} \geq 0,0384 \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр2}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 200}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} \geq 0,0347 \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр3}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 100}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} \geq 0,0292 \text{ м}.$$

Полученный результат округлить по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40: $d_1^{\text{ГОСТ}} = 40 \text{ мм}$, $d_2^{\text{ГОСТ}} = 36 \text{ мм}$, $d_3^{\text{ГОСТ}} = 30 \text{ мм}$.

7. Окончательно принять диаметр вала на каждом участке по наибольшему значению, полученному из условий прочности и жесткости.

В соответствии с расчетам на прочность и жесткость выбираем наибольшее значение диаметров для каждого участка и полученный результат округляем до ближайшего значения из ряда по ГОСТ 6636-69. В результате получим окончательные значения диаметров: $d_1^{\text{ГОСТ}} = 40 \text{ мм}$, $d_2^{\text{ГОСТ}} = 36 \text{ мм}$, $d_3^{\text{ГОСТ}} = 30 \text{ мм}$. Построим схему вала в масштабе по полученным размерам (см. рис. 2).

8. Определить угол закручивания по длине вала. Определить взаимный угол закручивания концевых сечений.

Абсолютные углы закручивания для каждого участка можно определить по формуле $\Delta\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p}$.

Полярные моменты инерции сечения для каждого из участков равны:

$$J_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,040^4}{32} = 2,51 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4;$$

$$J_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,036^4}{32} = 1,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4;$$

$$J_{p3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,034^4}{32} = 1,31 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

Далее определим углы закручивания на каждом участке:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{кр1} \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} = \frac{-300 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2,51 \cdot 10^{-7}} = -0,007 \text{ рад} - \text{угол поворота сечения}$$

В относительно сечения A (или угол закручивания участка AB).

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_{\text{кр}_2} \cdot l_2}{G \cdot J_{\rho_2}} = \frac{200 \cdot 1,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,65 \cdot 10^{-7}} = 0,015 \text{ рад} - \text{угол поворота сечения } C$$

относительно сечения B (или угол закручивания участка BC).

$$\Delta\varphi_3 = \frac{M_{\text{кр}_3} \cdot l_3}{G \cdot J_{\rho_3}} = \frac{100 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,31 \cdot 10^{-7}} = 0,010 \text{ рад} - \text{угол поворота сечения } D$$

относительно сечения C (или угол закручивания участка DC).

Построим эпюру углов закручивания для всего вала. За начало координат выберем крайний левый конец вала (сечение A). В пределах каждого участка вала эпюра линейна, поэтому достаточно знать углы поворота только для граничных сечений участков.

В сечении A полный угол закручивания равен нулю $\Delta\varphi_A = 0$.

В сечении B полный угол закручивания вала относительно сечения A равен $\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_1 = -0,007 \text{ рад}$.

В сечении C полный угол закручивания вала относительно сечения B равен $\Delta\varphi_C = \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_2 = -0,007 + 0,015 = 0,008 \text{ рад}$.

В сечении D полный угол закручивания вала относительно сечения C равен $\Delta\varphi_D = \Delta\varphi_C + \Delta\varphi_3 = 0,008 + 0,010 = 0,018 \text{ рад}$.

Эпюра полных углов закручивания ступенчатого вала показана на рис.

2.