

### Контрольная работа 3

#### «Определение опорных реакций для произвольной пространственной системы сил»

##### Пример № 1

Рассматривается равновесие вала, на котором установлены два круглых колеса с радиусами  $R_1, R_2$ . Эти колёса загружены активными силами  $F_1 - F_7$ . По условию задания активные силы параллельны соответствующим координатным осям системы отсчёта  $OXYZ$ . Требуется определить реакции внешних связей, наложенных на конструкцию, и величину силы  $F_4$ .

Дано:  $F_1 = 5 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 2 \text{ кН}$ ;  $F_3 = 0,5 \text{ кН}$ ;  $F_5 = 1 \text{ кН}$ ;  $F_6 = 0,5 \text{ кН}$ ;  $F_7 = 1 \text{ кН}$ ;  $R_1 = 0,12 \text{ м}$ ;  $R_2 = 0,25 \text{ м}$ ;  $a = 0,15 \text{ м}$ ;  $b = 0,2 \text{ м}$ ;  $c = 0,45 \text{ м}$ .

Определить:  $X_A = ?$   $Y_A = ?$   $Z_A = ?$   $X_B = ?$   $Z_B = ?$   $F_4 = ?$

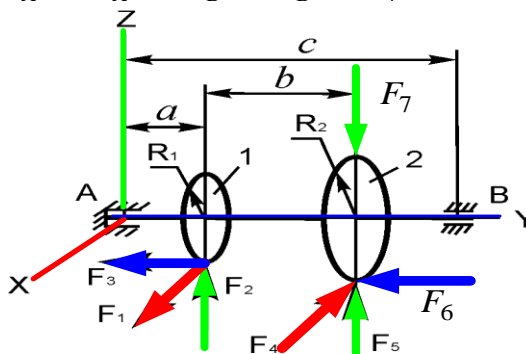


Рис. 1

Показать опорные реакции в подпятнике  $A$  и подшипнике  $B$  (рис. 2).

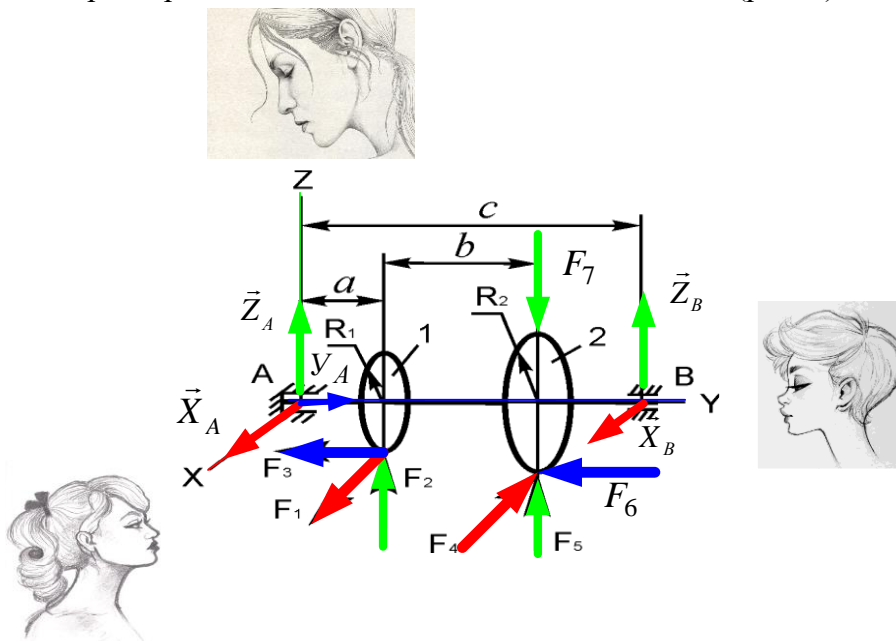


Рис. 2. Схема с опорными реакциями

Составим шесть уравнений равновесия:

1). Смотрим навстречу оси  $Y$  и записываем моменты сил относительно оси  $Y$   
 $\sum M_y = 0$ ;  $-F_1 R_1 + F_4 R_2 = 0$ ; из этого уравнения найдем  $F_4$ .

$$F_4 = \frac{F_1 R_1}{R_2} = \frac{5 \cdot 0,12}{0,25} = 2,4 \text{ кН}.$$

2). Смотрим навстречу оси  $X$  и записываем моменты сил относительно оси  $X$

$\sum M_x = 0$ ;  $-F_3 R_1 + F_2 a + F_5(a+b) - F_6 R_2 - F_7(a+b) + Z_B c = 0$ ; из этого уравнения найдем  $Z_B$ .

$$Z_B = \frac{F_3 R_1 - F_2 a - F_5(a+b) + F_6 R_2 + F_7(a+b)}{c};$$

$$Z_B = \frac{0,5 \cdot 0,12 - 2 \cdot 0,15 - 1(0,15 + 0,2) + 0,5 \cdot 0,25 + 1(0,15 + 0,2)}{0,45} = -0,255 \text{ кН.}$$

3). Смотрим навстречу оси  $Z$  и записываем моменты сил относительно оси  $Z$   
 $\sum M_z = 0$ ;  $-F_1 a + F_4(a+b) - X_B c = 0$ ; из этого уравнения найдем  $X_B$ .

$$X_B = \frac{-F_1 a + F_4(a+b)}{c}; \quad X_B = \frac{-5 \cdot 0,15 + 2,4(0,15 + 0,2)}{0,45} = 0,2 \text{ кН.}$$

4). Составим уравнение проекций на ось  $X$  (красная ось):

$\sum X_i = 0$ ;  $X_A + F_1 - F_4 + X_B = 0$ ; из этого уравнения найдем  $X_A$ .

$$X_A = -F_1 + F_4 - X_B; \quad X_A = -5 + 2,4 - 0,2 = -2,8 \text{ кН.}$$

5). Составим уравнение проекций на ось  $Y$  (синяя ось):

$\sum Y_i = 0$ ;  $Y_A - F_3 - F_6 = 0$ ; из этого уравнения найдем  $Y_A$ .

$$Y_A = F_3 + F_6; \quad Y_A = 0,5 + 0,5 = 1,0 \text{ кН.}$$

6). Составим уравнение проекций на ось  $Z$  (зеленая ось):

$\sum Z_i = 0$ ;  $Z_A + F_2 + F_5 - F_7 + Z_B = 0$ ; из этого уравнения найдем  $Z_A$ .

$$Z_A = -F_2 - F_5 + F_7 - Z_B; \quad Z_A = -2 - 1 + 1 + 0,255 = -1,745 \text{ кН.}$$

### Контрольная работа 3

#### «Определение опорных реакций для произвольной пространственной системы сил» Пример № 2

Рассматривается равновесие однородной прямоугольной плиты с размерами  $a$  и  $b$  и весом  $G$ . На плиту действует активная сила  $F$ , которая параллельна соответствующей координатной оси системы отсчёта  $OXYZ$ . Требуется определить реакции внешних связей, наложенных на плиту. По условию задания  $CD$  – невесомый стержень. В некоторых вариантах два стержня  $CD$  и  $EK$ .

Дано: Вес пластины  $G = 8$  кН; сила  $F = 4$  кН; размеры  $a = 3$  м;  $b = 2$  м;  $c = 1,2$  м.

Определить:  $X_A = ?$   $Z_A = ?$   $X_B = ?$   $Z_B = ?$   $R_C = ?$

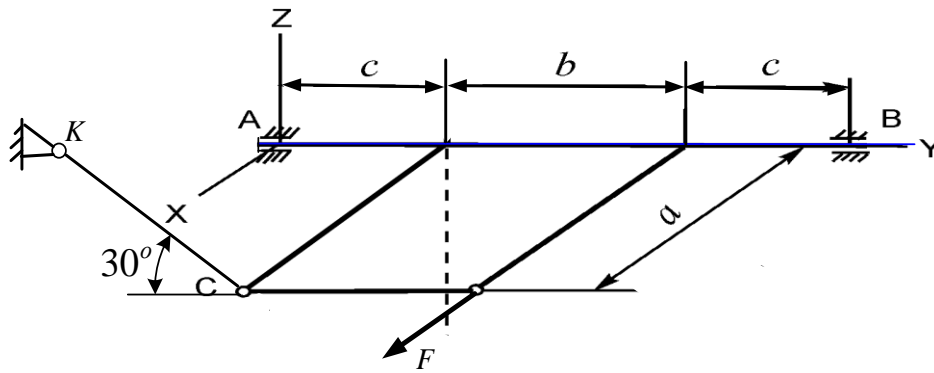


Рисунок 1.

Показать вес пластины  $G$  в центре пластины, опорные реакции в подпятнике  $A$ , опорные реакции в подшипнике  $B$ .

Стержень  $CK$  рассечь, вдоль стержня показать  $R_C$ , опору  $K$  не рисовать. Все наклонные силы разложить по осям.

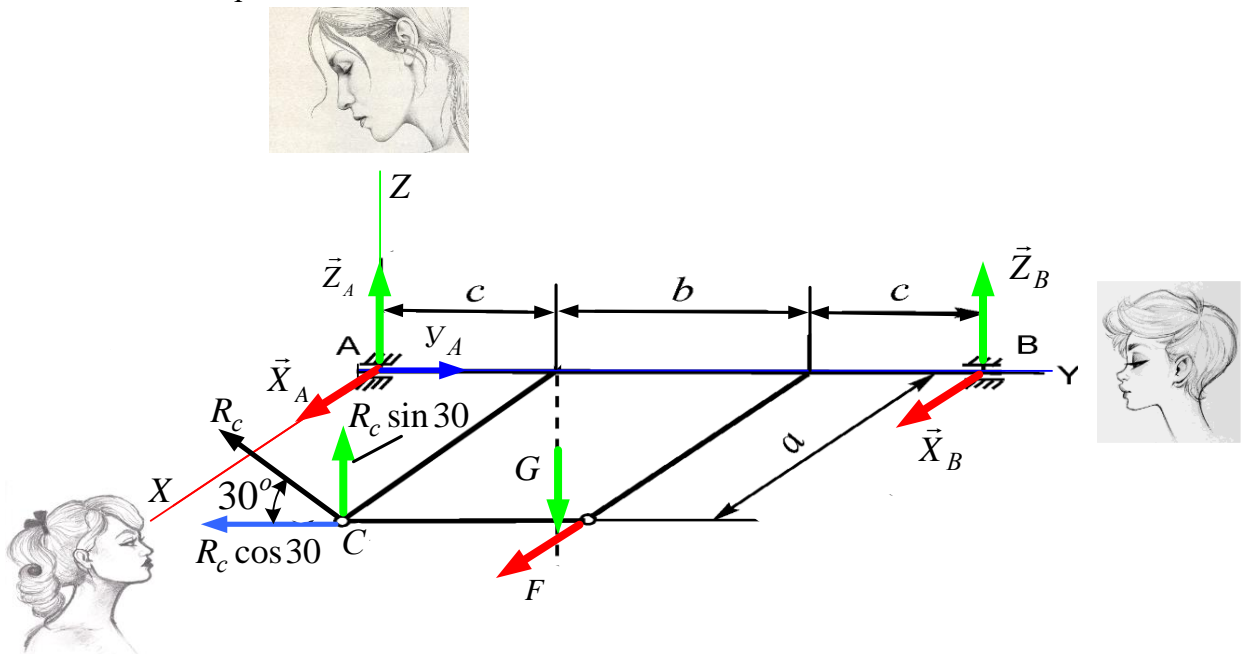


Рис. 2

Составим шесть уравнений равновесия:

1). Смотрим навстречу оси  $Y$  и записываем моменты сил относительно оси  $Y$

$$\sum M_y = 0; -R_C \sin 30^\circ \cdot a + G \cdot 0,5a = 0; \text{ из этого уравнения найдем } R_C.$$

$$R_c \sin 30 \cdot a = \frac{G \cdot 0,5a}{\sin 30 \cdot a} = G = 8 \text{ кН.}$$

2). Смотрим навстречу оси  $X$  и записываем моменты сил относительно оси  $X$   
 $\sum M_x = 0$ ;  $R_c \sin 30 \cdot c - G(c + 0,5b) + Z_B(2c + b) = 0$ ; из этого уравнения найдем  $Z_B$ .

$$R_c \sin 30 \cdot c - G(c + 0,5b) + Z_B(2c + b) = 0;$$

$$Z_B = \frac{-R_c \sin 30 \cdot c + G(c + 0,5b)}{c + 0,5b}; Z_B = \frac{-8 \cdot 1,2 + 8(1,2 + 0,5 \cdot 2)}{1,2 + 0,5 \cdot 2} = 3,63 \text{ кН}$$

3). Смотрим навстречу оси  $Z$  и записываем моменты сил относительно оси  $Z$   
 $\sum M_z = 0$ ;  $-R_c \cos 30 \cdot a - F(a + b) - X_B(2c + b) = 0$ ; из этого уравнения найдем  $X_B$ .

$$X_B = \frac{-R_c \cos 30 \cdot a - F(a + b)}{2c + b}; X_B = \frac{-8 \cdot 0,866 \cdot 3 - 4(3 + 2)}{2 \cdot 1,2 + 2} = -5,017 \text{ кН.}$$

4). Составим уравнение проекций на ось  $X$  (красная ось):

$$\sum X_i = 0; X_A + F + X_B = 0; \text{ из этого уравнения найдем } X_A.$$

$$X_A = -F - X_B; X_A = -4 + 5,017 = 1,017 \text{ кН.}$$

5). Составим уравнение проекций на ось  $Y$  (синяя ось):

$$\sum Y_i = 0; Y_A - R_c \cos 30 = 0; \text{ из этого уравнения найдем } Y_A.$$

$$Y_A = R_c \cos 30; Y_A = 8 \cdot 0,866 = 6,928 \text{ кН.}$$

6). Составим уравнение проекций на ось  $Z$  (зеленая ось):

$$\sum Z_i = 0; Z_A + R_c \sin 30 - G - Z_B = 0; \text{ из этого уравнения найдем } Z_A.$$

$$Z_A = -R_c \sin 30 + G - Z_B = 0; Z_A = -8 \cdot 0,5 + 8 - 3,63 = 0,37 \text{ кН.}$$

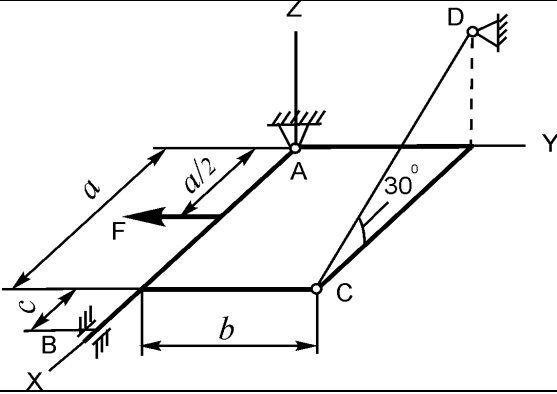
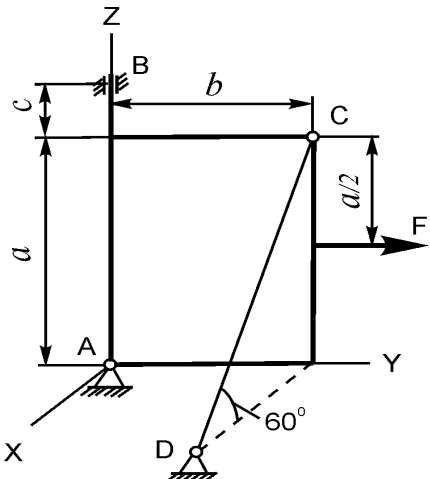
### Варианты контрольной работы 3

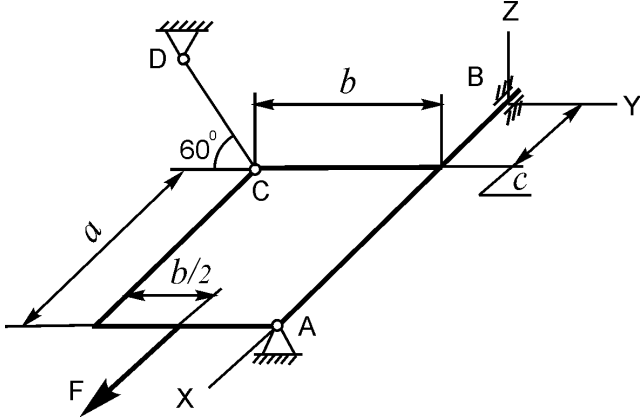
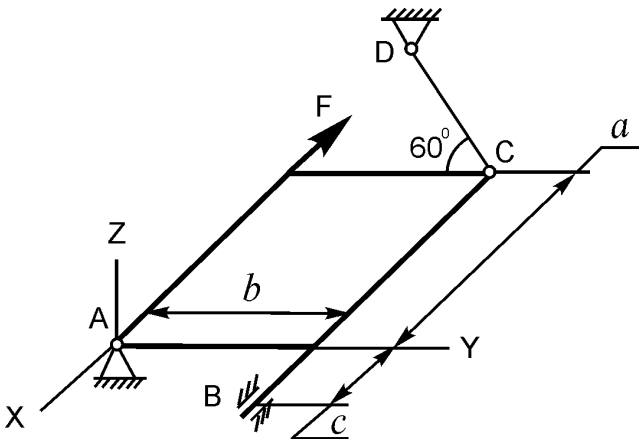
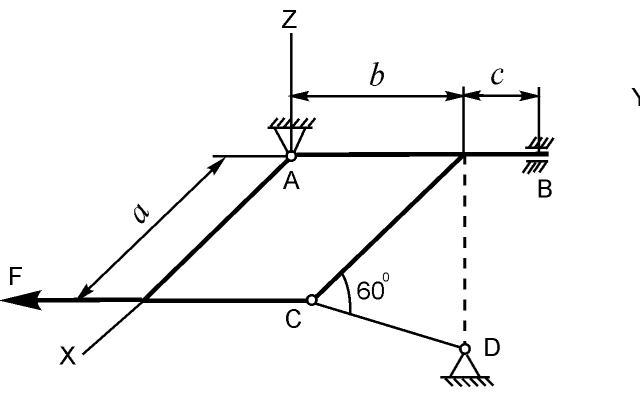
#### «Определение реакций опор твердого тела для произвольной пространственной системы сил»

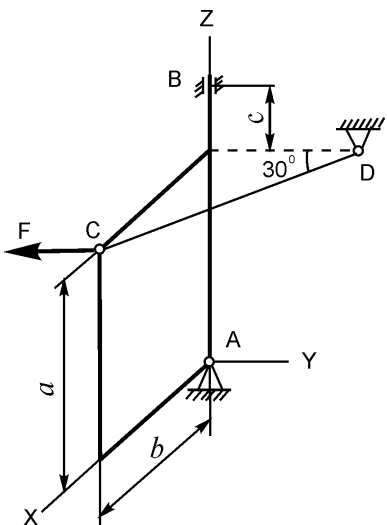
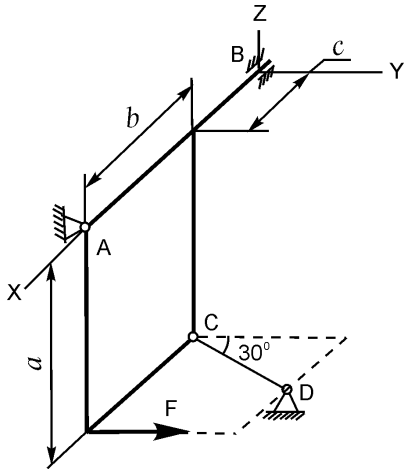
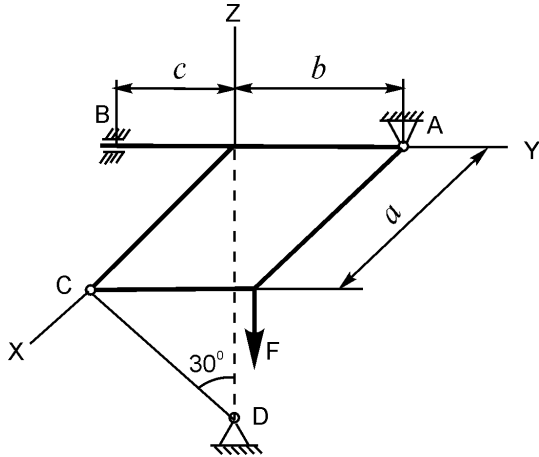
В вариантах 1 - 15 расчетно-графической (контрольной) работы (табл. ) рассматривается равновесие однородной прямоугольной плиты с размерами  $a$  и  $b$  и весом  $G$ . На плиту действует активная сила  $F$ , которая параллельна соответствующей координатной оси системы отсчёта  $OXYZ$ . Требуется определить реакции внешних связей, наложенных на плиту. По условию задания  $CD$  – невесомый стержень. В вариантах 16 – 30 рассматривается равновесие вала, на котором установлены два круглых колеса с радиусами  $R_1$ ,  $R_2$ . Эти колёса загружены активными силами  $F_1 - F_5$ . По условию задания активные силы параллельны соответствующим координатным осям системы отсчёта  $OXYZ$ . Требуется определить реакции внешних связей, наложенных на конструкцию, и величину силы  $F_4$ .

Исходные данные для расчёта и определяемые величины приведены в табл. .

Таблица

Номер варианта	Расчётная схема	Исходные данные	Определяемые величины
1	2	3	4
1		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 5 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$
2		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 6 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $X_B = ?$ $R_C = ?$

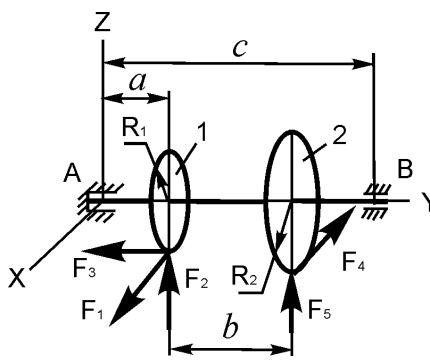
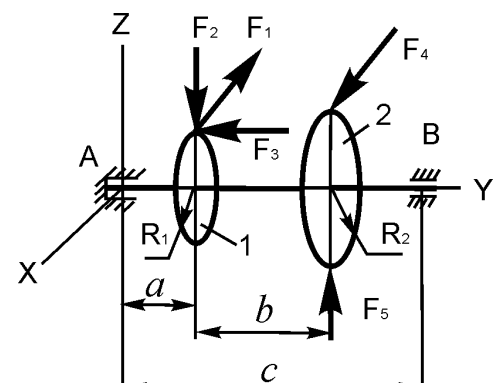
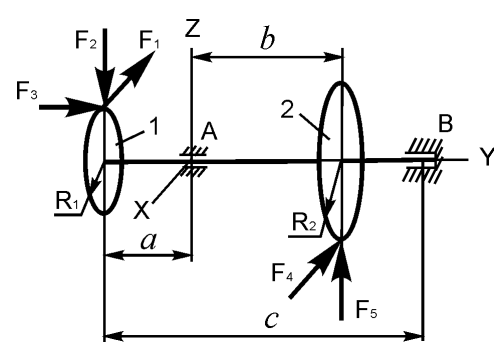
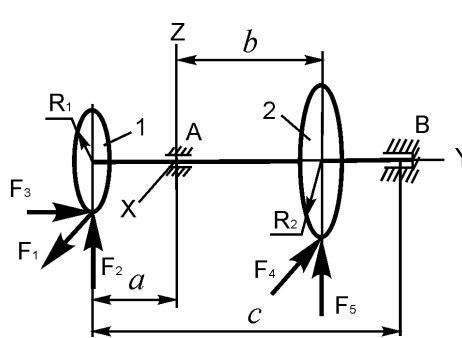
1	2	3	4
3		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 7 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$
4		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 8 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$
5		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 9 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$

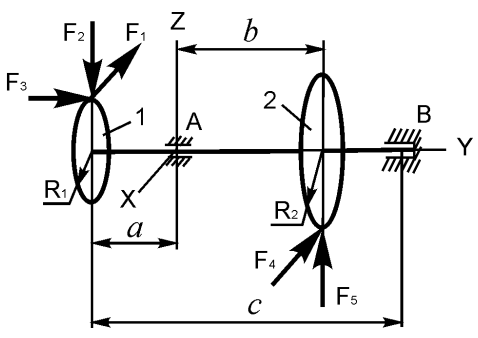
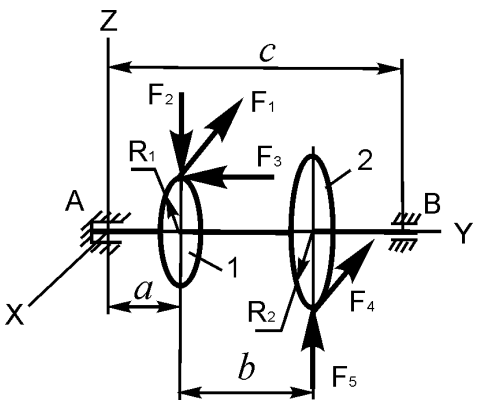
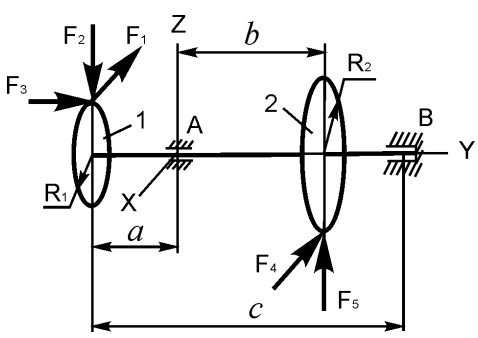
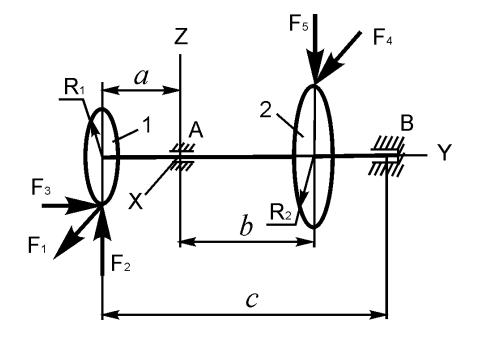
1	2	3	4
6		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 10 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $X_B = ?$ $R_C = ?$
7		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 4 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$
8		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 3 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$

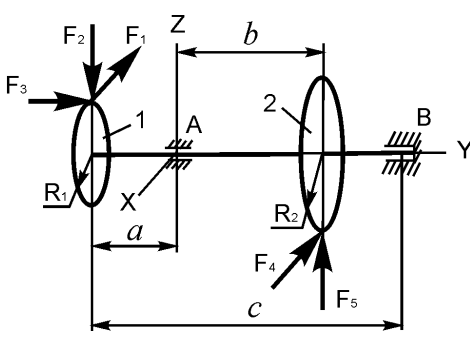
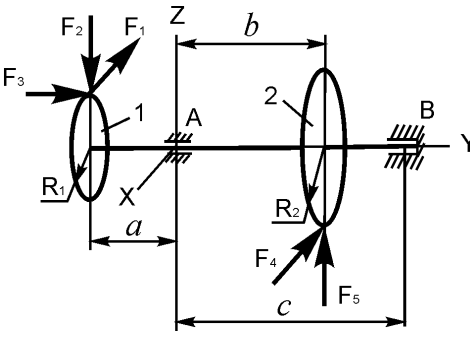
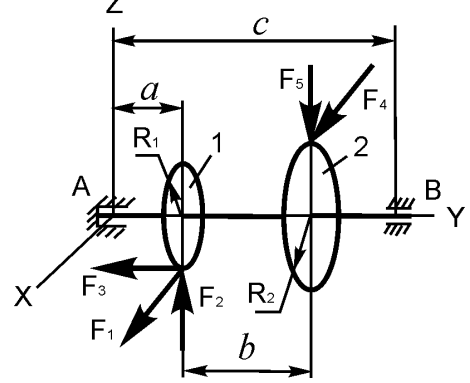
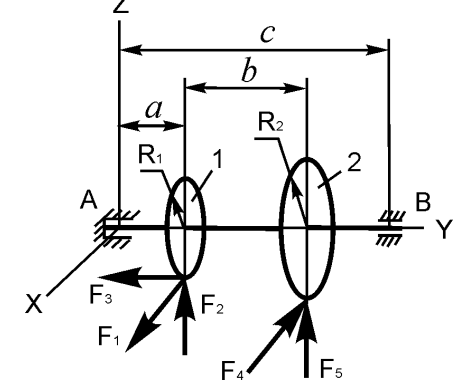
1	2	3	4
9		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 2 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$
10		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 2 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$
11		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 5 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $R_C = ?$ $R_E = ?$



1	2	3	4
15		$G = 8 \text{ кН};$ $F = 8 \text{ кН};$ $a = 3 \text{ м};$ $b = 2 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $R_C = ?$
16		$F_1 = 4 \text{ кН};$ $F_2 = 1,2 \text{ кН};$ $F_3 = 0,4 \text{ кН};$ $F_5 = 0,5 \text{ кН};$ $R_1 = 0,09 \text{ м};$ $R_2 = 0,27 \text{ м};$ $a = 0,1 \text{ м};$ $b = 0,2 \text{ м};$ $c = 0,1 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
17		$F_1 = 10 \text{ кН};$ $F_2 = 3 \text{ кН};$ $F_3 = 1 \text{ кН};$ $F_5 = 1,5 \text{ кН};$ $R_1 = 0,05 \text{ м};$ $R_2 = 0,12 \text{ м};$ $a = 0,1 \text{ м};$ $b = 0,15 \text{ м};$ $c = 0,22 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
18		$F_1 = 8 \text{ кН};$ $F_2 = 2,5 \text{ кН};$ $F_3 = 1 \text{ кН};$ $F_5 = 2 \text{ кН};$ $R_1 = 0,2 \text{ м};$ $R_2 = 0,3 \text{ м};$ $a = 0,1 \text{ м};$ $b = 0,12 \text{ м};$ $c = 0,2 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$

1	2	3	4
19		$F_1 = 12 \text{ кН};$ $F_2 = 4 \text{ кН};$ $F_3 = 1,5 \text{ кН};$ $F_5 = 2 \text{ кН};$ $R_1 = 0,1 \text{ м};$ $R_2 = 0,2 \text{ м};$ $a = 0,1 \text{ м};$ $b = 0,2 \text{ м};$ $c = 0,4 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
20		$F_1 = 3 \text{ кН};$ $F_2 = 1 \text{ кН};$ $F_3 = 0,5 \text{ кН};$ $F_5 = 1,2 \text{ кН};$ $R_1 = 0,07 \text{ м};$ $R_2 = 0,25 \text{ м};$ $a = 0,12 \text{ м};$ $b = 0,15 \text{ м};$ $c = 0,45 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
21		$F_1 = 9 \text{ кН};$ $F_2 = 3,5 \text{ кН};$ $F_3 = 2 \text{ кН};$ $F_5 = 1,25 \text{ кН};$ $R_1 = 0,06 \text{ м};$ $R_2 = 0,15 \text{ м};$ $a = 0,2 \text{ м};$ $b = 0,3 \text{ м};$ $c = 0,7 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
22		$F_1 = 3 \text{ кН};$ $F_2 = 1 \text{ кН};$ $F_3 = 0,5 \text{ кН};$ $F_5 = 2,5 \text{ кН};$ $R_1 = 0,15 \text{ м};$ $R_2 = 0,18 \text{ м};$ $a = 0,1 \text{ м};$ $b = 0,12 \text{ м};$ $c = 0,3 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$

1	2	3	4
23		$F_1 = 7 \text{ кН};$ $F_2 = 2,8 \text{ кН};$ $F_3 = 0,8 \text{ кН};$ $F_5 = 4 \text{ кН};$ $R_1 = 0,07 \text{ М};$ $R_2 = 0,12 \text{ М};$ $a = 0,12 \text{ М};$ $b = 0,2 \text{ М};$ $c = 0,47 \text{ М}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
24		$F_1 = 6 \text{ кН};$ $F_2 = 2 \text{ кН};$ $F_3 = 0,6 \text{ кН};$ $F_5 = 2,5 \text{ кН};$ $R_1 = 0,06 \text{ М};$ $R_2 = 0,16 \text{ М};$ $a = 0,2 \text{ М};$ $b = 0,25 \text{ М};$ $c = 0,55 \text{ М}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
25		$F_1 = 11 \text{ кН};$ $F_2 = 4 \text{ кН};$ $F_3 = 2 \text{ кН};$ $F_5 = 5 \text{ кН};$ $R_1 = 0,1 \text{ М};$ $R_2 = 0,2 \text{ М};$ $a = 0,1 \text{ М};$ $b = 0,12 \text{ М};$ $c = 0,3 \text{ М}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
26		$F_1 = 2 \text{ кН};$ $F_2 = 0,8 \text{ кН};$ $F_3 = 0,2 \text{ кН};$ $F_5 = 1 \text{ кН};$ $R_1 = 0,05 \text{ М};$ $R_2 = 0,12 \text{ М};$ $a = 0,14 \text{ М};$ $b = 0,11 \text{ М};$ $c = 0,45 \text{ М}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$

1	2	3	4
27		$F_1 = 8 \text{ кН};$ $F_2 = 3 \text{ кН};$ $F_3 = 1,2 \text{ кН};$ $F_5 = 3,6 \text{ кН};$ $R_1 = 0,06 \text{ м};$ $R_2 = 0,15 \text{ м};$ $a = 0,1 \text{ м};$ $b = 0,2 \text{ м};$ $c = 0,55 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
28		$F_1 = 14 \text{ кН};$ $F_2 = 5 \text{ кН};$ $F_3 = 2 \text{ кН};$ $F_5 = 3 \text{ кН};$ $R_1 = 0,08 \text{ м};$ $R_2 = 0,12 \text{ м};$ $a = 0,12 \text{ м};$ $b = 0,24 \text{ м};$ $c = 0,5 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Y_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
29		$F_1 = 12 \text{ кН};$ $F_2 = 4 \text{ кН};$ $F_3 = 1 \text{ кН};$ $F_5 = 4,8 \text{ кН};$ $R_1 = 0,1 \text{ м};$ $R_2 = 0,25 \text{ м};$ $a = 0,12 \text{ м};$ $b = 0,18 \text{ м};$ $c = 0,8 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$
30		$F_1 = 5 \text{ кН};$ $F_2 = 2 \text{ кН};$ $F_3 = 0,5 \text{ кН};$ $F_5 = 1 \text{ кН};$ $R_1 = 0,12 \text{ м};$ $R_2 = 0,25 \text{ м};$ $a = 0,15 \text{ м};$ $b = 0,2 \text{ м};$ $c = 0,45 \text{ м}$	$X_A = ?$ $Y_A = ?$ $Z_A = ?$ $X_B = ?$ $Z_B = ?$ $F_4 = ?$