

§ 11.1. Постановка задачи приближения функций

Вычисление значения функции $y = f(x)$ — одна из тех задач, с которой на практике постоянно приходится сталкиваться. Естественно, что при решении на компьютере серьезных задач желательно иметь быстрые и надежные алгоритмы вычисления значений используемых функций. Для элементарных, а также для основных специальных функций такие алгоритмы разработаны, реализованы в виде стандартных программ и включены в математическое обеспечение компьютера. Однако в расчетах нередко используются и другие функции, непосредственное вычисление которых затруднено либо приводит к слишком большим затратам машинного времени. Укажем на некоторые типичные ситуации.

1. Функция f задана таблицей своих значений:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (11.1)$$

а вычисления производятся в точках x , не совпадающих с табличными.

2. Непосредственное вычисление значения $y = f(x)$ связано с проведением сложных расчетов и приводит к значительным затратам машинного времени, которые могут оказаться неприемлемыми, если функция f вычисляется многократно.

§ 11.8. Разделенные разности

1. **Таблица разделенных разностей.** Пусть функция f задана на таблице x_0, x_1, \dots, x_n значений аргумента с произвольным (не обязательно постоянным) шагом, причем точки таблицы занумерованы в произвольном (не обязательно возрастающем) порядке. Величины

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

принято называть *разделенными разностями первого порядка функции f* . Разделенные разности второго порядка определяются формулой

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

Аналогично определяются разделенные разности третьего и более высоких порядков. Общее определение *разделенной разности порядка $k \geq 2$* таково:

$$f(x_i; x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}.$$

Таблицу разделенных разностей обычно располагают следующим образом (табл. 11.6).

Таблица 11.6

x	$f(x)$	Разделенные разности порядка			
		первого	второго	...	n -го
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2)$		
x_2	$f(x_2)$.	.		
.	.	.	.		
.	.	.	$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)$		
.	.	$f(x_{n-1}; x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				$f(x_0; x_1; \dots; x_n)$

2. Свойства разделенных разностей. Разделенные разности обладают рядом замечательных свойств. Перечислим без доказательства некоторые из них.

1°. Разделенная разность $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$ является симметричной функцией своих аргументов $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ (т.е. ее значение не меняется при любой их перестановке).

2°. Пусть функция f имеет на отрезке $[a, b]$, содержащем точки $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$, производную порядка k . Тогда справедливо равенство

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad (11.50)$$

где ξ — некоторая точка, расположенная на интервале (a, b) .

Пример 11.3. Пусть задана таблица значений функции $y = \ln x$ (табл. 11.1).

Таблица 11.1

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y	0.000000	0.095310	0.182322	0.262364	0.336472

Пример 11.7. Приведем таблицу (табл. 11.7) разделенных разностей для функции, заданной табл. 11.1. Вычисления произведены на 6-разрядном десятичном компьютере.

Таблица 11.7

x	$f(x)$	Разделенные разности порядка			
		первого	второго	третьего	четвертого
1.0	0.000000				
1.1	0.095310	0.953100			
1.2	0.182322	0.870120	-0.414900	0.221333	
1.3	0.262364	<u>0.800420</u>	<u>-0.348500</u>	<u>0.172667</u>	-0.121665
1.4	0.336472	0.741080	-0.296700		

Перенумеруем теперь узлы, положив $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.1$, $x_3 = 1.4$, $x_4 = 1.0$. Тогда таблица разделенных разностей примет следующий вид (табл. 11.8).

Таблица 11.8

x	$f(x)$	Разделенные разности порядка			
		первого	второго	третьего	четвертого
1.2	0.182322				
1.3	0.262364	<u>0.800420</u>			
1.1	0.095310	0.835270	<u>-0.348500</u>	0.172650	
1.4	0.336472	0.803873	-0.313970	0.197000	-0.121750
1.0	0.000000	0.841180	-0.373070		

В табл. 11.8 подчеркнуты разделенные разности, которые совпадают (как и должно быть в силу свойства 1°) с точностью до вычислительной погрешности с соответствующими разделенными разностями из табл. 11.7 (они также подчеркнуты). ▲

§ 11.9. Интерполяционный многочлен Ньютона.

1. Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями. Используя разделенные разности, интерполяционный многочлен можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\dots + f(x_0; x_1; \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_0; x_1; \dots, x_k) \omega_k(x). \end{aligned} \quad (11.52)$$

Здесь $\omega_0(x) \equiv 1$, $\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$ при $k \geq 1$.

Записанный в таком виде интерполяционный многочлен называют *интерполяционным многочленом Ньютона с разделенными разностями*.

Замечание. Формулу (11.25)* для погрешности интерполяции в точке x , не являющейся узловой, можно уточнить следующим образом:

$$f(x) - P_n(x) = f(x_0; \dots; x_n; x) \omega_{n+1}(x). \quad (11.53)$$

Мы не приводим доказательства этой замечательной формулы. Отметим лишь, что если воспользоваться свойством 2° разделенных разностей, то из нее немедленно получается формула (11.25).

В практическом плане формула (11.52) обладает рядом преимуществ перед формулой Лагранжа. Пусть, например, по каким-либо причинам необходимо увеличить степень интерполяционного многочлена на единицу, добавив в таблицу еще один узел x_{n+1} . При использовании формулы Лагранжа (11.22)** это приводит не только к увеличению числа слагаемых, но и к необходимости вычислять каждое из них заново.

В то же время для вычисления $P_{n+1}(x)$ по формуле Ньютона (11.52) достаточно добавить к $P_n(x)$ лишь одно очередное слагаемое, так как

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = f(x_0; \dots; x_n; x_{n+1})\omega_{n+1}(x). \quad (11.54)$$

Пример 11.8. По табл. 11.1 значений функции $y = \ln x$ из примера 11.3 найдем приближенное значение $\ln x$ при $x = 1.23$, используя интерполяционные многочлены Ньютона с разделенными разностями $P_k(x)$ для $k = 0, 1, \dots, 4$.

Занумеруем узлы таблицы в следующем порядке: $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.1$, $x_3 = 1.4$, $x_4 = 1.0$, т.е. в порядке возрастания расстояния до точки $x = 1.23$. Соответствующие этой нумерации разделенные разности приведены в табл. 11.8 (мы используем только подчеркнутые разности).

Вычисления на 6-разрядном десятичном компьютере дают следующие значения:

$$P_0(x) = 0.182322, \quad P_1(x) = P_0(x) + f(x_0; x_1)\omega_1(x) \approx 0.182322 +$$

$$+ 0.80042 \cdot (1.23 - 1.2) \approx 0.206335,$$

$$P_2(x) = P_1(x) + f(x_0; x_1; x_2)\omega_2(x) \approx 0.206335 - 0.3485(1.23 - 1.2)(1.23 - 1.3) \approx \\ \approx 0.207067.$$

Аналогично получают значения $P_3(x) \approx 0.207020$;

$$P_4(x) \approx 0.207014. \quad \blacktriangle$$

* Погрешность интерполяции

Приведем без доказательства наиболее известную теорему о погрешности интерполяции.

Теорема 11.4. Пусть функция f дифференцируема $n + 1$ раз на отрезке $[a, b]$, содержащем узлы интерполяции $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. Тогда для погрешности интерполяции в точке $x \in [a, b]$ справедливо равенство

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad (11.25)$$

в котором $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, а ξ — некоторая точка, принадлежащая интервалу (a, b) . ■

*** * Многочлен Лагранжа.** Приведем одну из форм записи интерполяционного многочлена — *многочлен Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_{nj}(x). \quad (11.22)$$

Здесь

$$l_{nj}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}.$$

Как нетрудно видеть, $l_{nj}(x)$ представляет собой многочлен степени n , удовлетворяющий условию

$$l_{nj}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Таким образом, степень многочлена L_n равна n и при $x = x_i$ в сумме (11.22) обращаются в ноль все слагаемые, кроме слагаемого с номером $j = i$, равного y_i . Поэтому многочлен Лагранжа (11.22) действительно является интерполяционным.