

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

А. П. ИВАНОВ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Методические указания

Санкт-Петербург
2013

ГЛАВА 1. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ.

§1. Полином Лагранжа

Пусть на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ рассматривается функция $f(\cdot)$ и пусть известны её значения в $(n+1)$ различных узлах x_0, x_1, \dots, x_n , принадлежащих $[a, b]$. Возьмём многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1.1)$$

Коэффициенты a_i выбираем так, чтобы совпадали значения $f(\cdot)$ и $P_n(\cdot)$ в узлах интерполирования $\{x_i\}$:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Эти равенства дают квадратную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{a_i\}$, причём определитель её суть определитель Вандермонда, что гарантирует существование и единственность решения СЛАУ (1.2).

Искомый интерполяционный полином может быть представлен в виде

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i) \omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i). \quad (1.3)$$

Многочлены $\{l_k(x)\}$ называют *множителями Лагранжа*

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = \\ &= \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k) \omega'_{n+1}(x_k)}, \end{aligned}$$

где $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, а формулу (1.3) *формулой Лагранжа* для интерполяционного многочлена $L_n(x)$. Полином $L_n(\cdot)$ часто называют просто *полиномом Лагранжа*.

§2. Погрешность метода. Остаточный член формулы Лагранжа

Представление величины $r_n(x) = f(x) - L_n(x)$ в заданной точ-

ке $x = x^* \in [a, b]$ на классе функций $f(\cdot) \in \mathbb{C}^{n+1}[a, b]$ можно получить в виде

$$r_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x^*), \quad \xi \in (a, b). \quad (2.1)$$

Будем называть равенство (2.1) формулой Лагранжа для остатка интерполирования или *методической погрешностью* интерполирования.

§3. Выбор узлов интерполирования

Рассмотрим множество Φ_n всевозможных функций $f(\cdot)$, которые $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и производная которых порядка $(n+1)$ ограничена по модулю числом M_{n+1} : $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, $x \in [a, b]$. В этом классе функций остаток интерполирования (методическая погрешность интерполирования) имеет оценку:

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n|. \quad (3.1)$$

Она является *точной* и достигается в том случае, когда $f(\cdot)$ есть многочлен степени $n+1$ вида

$$f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots$$

Задача 1. Функция $f(\cdot)$ задана таблично, \hat{x} – не табличное значение аргумента, в котором необходимо приблизить функцию $f(\cdot)$ при помощи интерполяционного многочлена степени n , взяв за узлы любые табличные значения аргумента $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$.

Множитель $\frac{M}{(n+1)!}$ не зависит от выбора узлов. Поэтому при фиксированном значении \hat{x} необходимо выбрать $\{x_{i_k}\}$ так, чтобы произведение

$$|\hat{x} - x_{i_0}| |\hat{x} - x_{i_1}| \dots |\hat{x} - x_{i_n}|$$

имело *наименьшее значение*. Очевидно, что для этого набор $\{x_{i_k}\}_{k=0}^n$ следует выбирать из условий:

$$x_{i_0} = \min_i |\hat{x} - x_i|; \quad x_{i_1} = \min_{i \neq i_0} |\hat{x} - x_i|; \dots, \quad x_{i_n} = \min_{i \neq i_0, i_1, \dots, i_{n-1}} |\hat{x} - x_i|.$$

Задача 2. Выбрать узлы x_0, x_1, \dots, x_n на $[a, b]$ так, чтобы правая часть оценки (3.1) принимала минимальное значение.

Если считать $[a, b] = [-1, 1]$, то учитывая свойства полиномов Чебышева можно утверждать, что $\omega_{n+1}(x) = \bar{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$. В общем же случае $[a, b] \neq [-1, 1]$ достаточно сделать преобразование $[a, b] \rightarrow [-1, 1]$ и получим искомые узлы $\{x_i\}$ в виде:

$$x_i = \frac{1}{2} \left[(b-a) \cos \frac{(2i+1)}{2(n+1)} \pi + (b+a) \right], \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.2)$$

При таком выборе узлов оценка (3.1) для методической погрешности принимает вид:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}.$$

Очевидно, что использование указанной оценки весьма затруднительно, поэтому важен вопрос: как ведёт себя последовательность интерполяционных полиномов для заданной функции при увеличении числа узлов интерполирования.

§4. О сходимости интерполяционного процесса

Решив задачу интерполирования по заданному числу узлов на интервале $[a, b]$, мы должны ответить на вопрос: как ведёт себя последовательность интерполяционных полиномов при неограниченном возрастании числа узлов на $[a, b]$? Будет ли (и если будет, то при каких условиях) иметь место свойство:

$$r_n(x_*, f) = f(x_*) - L_n(x_*, f) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty ?$$

Поскольку ответ на поставленный вопрос зависит в том числе и от свойств функции $f(\cdot)$, обозначаем здесь полином Лагранжа через $L_n(x, f)$, чтобы подчеркнуть указанное обстоятельство.

Уточним задачу. Рассмотрим бесконечную треугольную таблицу узлов, расположенных на $[a, b]$:

$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1^1 & & & \\ x_1^2 & x_2^2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}. \quad (4.1)$$

Определение 4.1. Построение интерполяционных полиномов $L_n(x, f)$ по таблице (4.1) для функции $f(\cdot)$ будем называть *интерполяционным процессом* (для экономии места – ИП).

Определение 4.2. Если для $\hat{x} \in [a, b]$ имеет место: $r_n(\hat{x}, f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то говорят, что ИП для $f(\cdot)$ по таблице (4.1) сходится в точке \hat{x} .

Определение 4.3. Если сходимость ИП имеет место для всех $x \in [a, b]$, то говорят, что ИП сходится для $f(\cdot)$ на $[a, b]$.

Определение 4.4. Если $r_n(x, f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ *равномерно* на $[a, b]$, то говорят о *равномерной* сходимости ИП к $f(\cdot)$ на $[a, b]$.

Замечание 4.1. Некоторые факты.

- Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(\cdot)$ можно выбрать узлы (4.1) так, что интерполяционный процесс будет равномерно на $[a, b]$ сходиться к этой функции. В основе утверждения – теорема Вейерштрасса о приближении функций полиномами.
- (т. Фабера) Для любой таблицы (4.1) существует непрерывная функция, для которой интерполяционный процесс не является равномерно сходящимся.
- Для целой функции интерполяционный процесс по любой таблице (4.1) равномерно на $[a, b]$ сходится к ней.

Пример Бернштейна. Для $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$ интерполяционный процесс по равноотстоящим узлам не сходится ни в одной точке, кроме точек $-1, 0, 1$ (при этом -1 и $+1$ считаются узлами интерполирования).

Рассмотрим несколько примеров построения интерполяционного полинома и оценки методической погрешности.

Пример 4.1. С какой методической погрешностью можно найти значение $\sin \frac{\pi}{4}$, имея таблицу:

x	0	$\pi/6$	$\pi/2$
$f(x)$	0	1/2	1

Установим связь между параметрами задачи и параметрами, использованными при рассмотрении вопроса о построении интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(x) = \sin x, \quad n = 2, \quad a = 0, \quad b = \pi/2, \quad M_3 = 1.$$

$$\begin{aligned} \left| r_n\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| &= \left| \sin \frac{\pi}{4} - L_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{1}{3!} \left| \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right| = \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{12} \approx \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{1}{4} \approx \frac{1}{37}, \end{aligned}$$

т.е. относительная погрешность вычисления указанного значения с помощью полинома Лагранжа составляет $\approx 3\%$.

Пример 4.2. Построить полином Лагранжа по таблице:

x	0	2	3
$f(x)$	1	3	2

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)(-3)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)}{2(-1)} \cdot 3 + \frac{x(x-2)}{3 \cdot 1} \cdot 2 = \\ &= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1. \end{aligned}$$

Пример 4.3. Построить полином Лагранжа по таблице:

x	0	2	3	5
$f(x)$	1	3	2	5

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)} \cdot 3 + \\ &+ \frac{x(x-2)(x-5)}{3 \cdot 1 \cdot (-2)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 5 = \\ &= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1. \end{aligned}$$

Примеры 4.2 и 4.3 показывают, что при добавлении узла в таблицу приходится заново проделывать всю работу. Этот недостаток может быть устранен при записи интерполяционного полинома в иной форме, известной как полином Ньютона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков.* Численные методы. — М.: Изд. Физматлит, 2000.
2. *В. М. Вержбицкий.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Изд. Высшая школа , 2000.
3. *Г. Н. Воробьёва, А. Н. Данилова.* Практикум по вычислительной математике. — М.: Изд. Высшая школа, 1990.