

При аппроксимации решений дифференциальных уравнений, а также во многих других ситуациях, оказывается желательным, чтобы аппроксимирующие функции были по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемыми. Этого нельзя добиться с помощью кусочно-квадратичных полиномов, за исключением случая, когда данные таковы, что их можно аппроксимировать одним квадратичным полиномом на всем интервале. Таким образом, приходим к рассмотрению кусочно-кубического полинома  $C(x)$ , обладающего следующими свойствами:

$C(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция; (5.2.8)

на каждом отрезке  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , (5.2.9)

функция  $C(x)$  является кубическим полиномом.

Такая функция называется *кубическим сплайном*. Это название происходит от гибкой деревянной рейки, используемой чертежниками для проведения кривых.

На каждом отрезке  $I_i$  функция  $C(x)$  представляется в виде

$$C(x) = C_i(x) = a_{i3}x^3 + a_{i2}x^2 + a_{i1}x + a_{i0}, \quad x \in I_i. \quad (5.2.10)$$

Условие (5.2.8), разумеется, влечет за собой непрерывность функций  $C$  и  $C'$  на всем отрезке  $I$ . Следовательно, должны выполняться  $3n - 6$  условий

$$\begin{aligned} C_{i-1}(x_i) &= C_i(x_i), \quad C'_{i-1}(x_i) = C'_i(x_i), \\ C''_{i-1}(x_i) &= C''_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Так как для построения функции  $C$  надо определить  $4n - 4$  коэффициента  $a_{ij}$  в (5.2.10), то нам нужно еще  $n + 2$  дополнительных условия. В случае задачи интерполяции или аппроксимации мы потребуем, чтобы функция  $C$  принимала в узлах заданные значения

$$C(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.2.12)$$

что дает  $n$  дополнительных соотношений. Нам нужно еще два условия, и их можно выбрать из самых разных соображений. Так называемый естест-

венный кубический сплайн удовлетворяет дополнительным условиям

$$C''(x_1) = C''(x_n) = 0. \quad (5.2.13)$$

Сплайн  $C$  можно было бы построить, решив линейную систему уравнений (5.2.11) – (5.2.13) относительно неизвестных коэффициентов  $a_{ij}$ . Существует, однако, другой подход, приводящий к простой трехдиагональной системе уравнений, в которой неизвестными являются значения вторых производных  $C$  в узлах сетки. Саму функцию  $C$  мы можем затем определить с помощью интегрирования. Чтобы прийти к этой трехдиагональной системе, нужно выполнить целый ряд преобразований, к которым мы теперь и приступаем.

Во-первых, заметим, что так как  $C_i$  – кубический полином, то  $C_i''$  – линейная функция. Поэтому из формулы линейной интерполяции следует

$$C_i''(x) = C_i''(x_i) + \frac{(x - x_i)}{h_i} [C_i''(x_{i+1}) - C_i''(x_i)], \quad (5.2.15)$$

где  $h_i = x_{i+1} - x_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ). Проинтегрировав это выражение дважды, приходим к формуле для  $C(x)$ :

$$\begin{aligned} C_i'(x) &= C_i'(x_i) + \int_{x_i}^x C_i''(t) dt = \\ &= C_i'(x_i) + C_i''(x_i)(x - x_i) + \frac{[C_i''(x_{i+1}) - C_i''(x_i)]}{2h_i} (x - x_i)^2, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

$$\begin{aligned} C_i(x) &= C_i(x_i) + \int_{x_i}^x C_i'(t) dt = C_i(x_i) + C_i'(x_i)(x - x_i) + \\ &+ C_i''(x_i) \frac{(x - x_i)^2}{2} + \frac{[C_i''(x_{i+1}) - C_i''(x_i)]}{6h_i} (x - x_i)^3. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Для удобства в дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} y_i &= C_i(x_i) = C_{i-1}(x_i), \quad y_i' = C_i'(x_i) = C_{i-1}'(x_i), \\ y_i'' &= C_i''(x_i) = C_{i-1}''(x_i), \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

в которых учтены условия (5.2.11) и (5.2.12). Заменяя теперь  $i$  на  $i - 1$  в (5.2.16) и полагая  $x = x_i$ , получим

$$y_i' = y_{i-1}' + (y_i'' + y_{i-1}'') \frac{h_{i-1}}{2}. \quad (5.2.19)$$

Полагая затем  $x = x_{i+1}$  в (5.2.17) и разрешая это соотношение относительно  $y_i'$ , получаем

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y_{i+1}'' \frac{h_i}{6} - y_i'' \frac{h_i}{3}. \quad (5.2.20)$$

Приравнивание правых частей (5.2.19) и (5.2.20) дает

$$y'_{i-1} + (y''_i + y''_{i-1}) \frac{h_{i-1}}{2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y''_{i+1} \frac{h_i}{6} - y''_i \frac{h_i}{3}. \quad (5.2.21)$$

Теперь мы хотим исключить  $y'_{i-1}$  из (5.2.21). Заменяя для этого  $i$  на  $i-1$  в (5.2.20) и подставляя выражение для  $y'_{i-1}$  в (5.2.21), получаем

$$\begin{aligned} \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - y''_i \frac{h_{i-1}}{6} - y''_{i-1} \frac{h_{i-1}}{3} + (y''_i + y''_{i-1}) \frac{h_{i-1}}{2} = \\ = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y''_{i+1} \frac{h_i}{6} - y''_i \frac{h_i}{3}, \end{aligned}$$

что после перегруппировки членов дает

$$\begin{aligned} y''_{i-1} h_{i-1} + 2y''_i (h_i + h_{i-1}) + y''_{i+1} h_i = \\ = 6 \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right], \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Это система  $n-2$  линейных уравнений с  $n-2$  неизвестными  $y''_2, \dots, y''_{n-1}$ ; напомним, что  $y''_1 = y''_n = 0$  согласно условию (5.2.13). Если положить

$$\gamma_i = 6 \left[ \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right], \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (5.2.23)$$

то система (5.2.22) примет вид  $Hu = \gamma$ , где  $y = (y''_2, \dots, y''_{n-1})$ ,  $\gamma = (\gamma_2, \dots, \gamma_{n-1})$  и

$$H = \begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (5.2.24)$$

Матрица  $H$  трехдиагональная и диагонально доминирующая. (Она является также симметричной и положительно определенной.) Следовательно, система  $Hu = \gamma$  легко и эффективно решается методом Гауссова исключения без каких-либо перестановок.

После того как значения  $y''_i$  найдены, мы должны еще получить представления для полиномов  $C_1, \dots, C_{n-1}$ . Так как величины  $y_i$  нам тоже известны, значения первых производных в узлах сетки можно определить из (5.2.20):

$$y'_i = C'_i(x_i) = C'_{i-1}(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - y''_{i+1} \frac{h_i}{6} - y''_i \frac{h_i}{3}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.2.25)$$

Выражения для самих  $C_i(x)$  можно затем получить из формулы (5.2.17), переписав ее в обозначениях  $y_i$ ,  $y'_i$  и  $y''_i$ :

$$C_i(x) = y_i + y'_i(x - x_i) + y''_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + (y''_{i+1} - y''_i) \frac{(x - x_i)^3}{6h_i}, \quad (5.2.26)$$

$$i = 1, \dots, n-1.$$

Отметим, что если вы хотите вычислить  $C(x)$  при некотором конкретном

значении  $\hat{x}$ , то сначала необходимо определить отрезок  $I_i$ , в котором лежит точка  $\hat{x}$ , и затем воспользоваться выражением для соответствующего полинома  $C_i$ .

Теперь приведем простой пример построения кубического сплайна. Пусть заданы следующие узлы и соответствующие значения функции:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 1/4, \quad x_3 = 1/2, \quad x_4 = 3/4, \quad x_5 = 1, \\ y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 1. \end{aligned}$$

Здесь  $n = 5$  и все  $h_i$  равны  $1/4$ . Матрица  $H$  в (5.2.24) и вектор  $\gamma$ , координаты которого вычисляются по формулам (5.2.23), имеют вид

$$H = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} -48 \\ 0 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, величины  $y_2''$ ,  $y_3''$  и  $y_4''$  находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 4y_2'' + y_3'' &= -192, \\ y_2'' + 4y_3'' + y_4'' &= 0, \\ y_3'' + 4y_4'' &= 192, \end{aligned}$$

которая легко решается методом исключения. Накладывая, согласно (5.2.13), дополнительные условия  $y_1'' = y_5'' = 0$ , получаем

$$y_1'' = 0, \quad y_2'' = -48, \quad y_3'' = 0, \quad y_4'' = 48, \quad y_5'' = 0.$$

Подставляя эти значения  $y_i''$  в (5.2.25), находим значения  $y_i'$ :

$$y_1' = 6, \quad y_2' = 0, \quad y_3' = -6, \quad y_4' = 0.$$

Теперь по формулам (5.2.26) составляем выражения для кубических полиномов  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , определяя тем самым искомый кубический сплайн:

$$C(x) = \begin{cases} C_1(x) = 1 + 6x - 32x^3, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ C_2(x) = 2 - 24\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 32\left(x - \frac{1}{4}\right)^3, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ C_3(x) = 1 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right) + 32\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ C_4(x) = 24\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 32\left(x - \frac{3}{4}\right)^3, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Если нужно вычислить значение  $C$  в некоторой точке, скажем, при  $x = 0,35$ , то сначала замечаем, что  $0,35 \in [1/4, 1/2]$ , и используем для вычисления полином  $C_2$ :

$$C(0,35) = C_2(0,35) = 2 - 24(0,1)^2 + 32(0,1)^3 = 1,792.$$