

ПРИМЕР: построить интерполяционный полином Ньютона для функции, заданной таблично:

x	0	2	3
y	1	3	2

$$N_2(x) = y_1 + f(x_1; x_2)(x - x_1) + f(x_1; x_2; x_3)(x - x_1)(x - x_2)$$

Воспользуемся альтернативной формулой для вычисления разделенных разностей:

$$f(x_1; x_2; \dots; x_{k-1}; x_k) = \sum_{i=1}^k g_{i,k} \cdot y_i,$$

$$\text{где } g_{i,k} = \frac{1}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \times \dots \times (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)}, \quad y_i = f(x_i).$$

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) = 1, & y_2 &= f(2) = 3 \\ f(x_1; x_2) &= \sum_{i=1}^2 g_{i,2} \cdot y_i = g_{1,2} \cdot y_1 + g_{2,2} \cdot y_2 \\ g_{1,2} &= \frac{1}{(x_1 - x_2)}, & g_{2,2} &= \frac{1}{(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

$$\text{Получаем, что } g_{1,2} = \frac{1}{(0-2)} = -\frac{1}{2}, \quad g_{2,2} = \frac{1}{(2-0)} = \frac{1}{2}$$

$$f(x_1; x_2) = 1 * \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 * \frac{1}{2} = 1.$$

Далее

$$\begin{aligned} y_1 &= f(0) = 1, & y_2 &= f(2) = 3, & y_3 &= f(3) = 2 \\ f(x_1; x_2; x_3) &= \sum_{i=1}^3 g_{i,3} \cdot y_i = g_{1,3} \cdot y_1 + g_{2,3} \cdot y_2 + g_{3,3} \cdot y_3 \\ g_{1,3} &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, & g_{2,3} &= \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, & g_{3,3} &= \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{aligned}$$

$$\text{Получаем, что } g_{1,3} = \frac{1}{6}, \quad g_{2,3} = -\frac{1}{2}, \quad g_{3,3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x_1; x_2; x_3) = 1 * \left(\frac{1}{6}\right) + 3 * \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 * \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}.$$

Итоговый интерполяционный полином в форме Ньютона:

$$N_2(x) = 1 + 1(x - 0) + \left(-\frac{2}{3}\right)(x - 0)(x - 2) = 1 + x - \frac{2}{3}x(x - 2).$$