Задача Штурма-Лиувилля

Разложить функцию $f(x) = x^2 - a^2 + x$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \tag{1}$$

$$y(-a) = y(a), y'(-a) = y'(a), \quad x \in (-a, a), \quad a > 0. \tag{2}$$

Как и в предыдущих случаях рассмотриваем 3 варианта:

1) $\lambda < 0$, $y(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$, подставляя в кравые условия(2), получим $C_1 = C_2 = 0$

2) $\lambda = 0$, $y(x) = C_1 x + C_2$, подставляя в кравые условия(2), получим $C_1 = 0, C_2$ - любое число, например, 1.

3) $\lambda > 0$, $y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$

Подставим полученное в 3) варианте решение в краевые условия(2), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1, C_2

$$\begin{aligned} y(a) - y(-a) &= -2C_1 \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0, \\ y'(a) - y'(-a) &= -2C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Т.е. матрица системы линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2\sin(\sqrt{\lambda}a) & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Для существования ненулевого решения системы (3) необходимо и достаточно, чтобы определитель ее равнялся НУЛЮ. Приравняем его нулю и найдем значения λ, которые обеспечивают существование ненулевого решения.

$$4\sqrt{\lambda}\sin^2(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\sqrt{\lambda_k}a = k\pi, \quad k = 1, 2, ...\infty \tag{5}$$

Подстановка λ_k в (4) приводит к нулевой матрице. Получается, что решением уравнения (3) являются любые значения C_1, C_2. Какие возможны варианты выбора векторов $(C_1, C_2)^T$? Можно выбирать любые линейно-независимые варианты. Т.к. вектор состоит из 2-х компонент, то существует всего 2 линейно-независимых вектора. Например, можно взять простейший вариант - единичные вектора

$$(1,0)^T, \quad (0,1)^T \tag{5}$$

Тогда набор собственных функций(линейно-независимых) будет иметь вид

$$\left\{1,\ \cos(\frac{k\pi x}{a}),\ \ \sin(\frac{k\pi x}{a}),\ \ k=1,2,3...\infty\right\}. \tag{6}$$

В результате мы получили всем знакомый из курса мат.анализа набор функций для классического разложения любой кусочно-непрерывной функции в ряд Фурье.

Разложение функции $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos(\sqrt{\lambda_k}x) + B_k\sin(\sqrt{\lambda_k}x) \tag{7}$$

где

$$A_k = \frac{\int\limits_{-a}^{a} f(x)\cos(\frac{k\pi x}{a})dx}{\int\limits_{-a}^{a}\cos^2(\frac{k\pi x}{a})dx},\ k=0,1,2,3,...,\infty \quad B_k = \frac{\int\limits_{-a}^{a} f(x)\sin(\frac{k\pi x}{a})dx}{\int\limits_{-a}^{a}\sin^2(\frac{k\pi x}{a})dx},\ k=1,2,3,...,\infty$$

В результате интегрирования получим

$$A_0 = \frac{2a}{3},\ \ A_k = \frac{4(-1)^{k+1}a^2}{\pi^2k^2},\ \ B_k = \frac{2(-1)^{k+1}a}{\pi k},\quad k=1,2,3,...,\infty$$

The weight is 1 !!

Самостоятельная работа

Разложить функцию $f(x) = 1 + x$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \lambda y(x) = 0,\ \ y(0) = y(l),\ \ y'(0) = y'(l),\ \ x \in (0,l),\ \ l > 0$$

Домашнее задание

Разложить функцию $f(x) = (x-a)(b-x)$ по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\quad y(a) = y(b),\ \ y'(a) = y'(b)$$