Е.С. Мироненко

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 2002

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Основные теоретические сведения

1. *Определителем* (детерминантом) n-го порядка называется число D, равное алгебраической сумме $n!$ членов, составленных определенным образом из элементов a_{ij} определителя. Обозначение:

$$D=\det[a_{ij}]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца и умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Рекуррентная формула для вычисления определителя n-го порядка имеет вид

$$D=a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\dots+a_{nn}A_{nn}$$

(разложение определителя по элементам n-й строки).

Определитель второго порядка

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

2. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ называется число, определяемое равенством

$$(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \qquad (1)$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

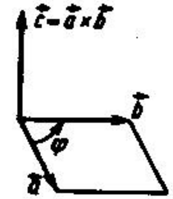

Рис. 1

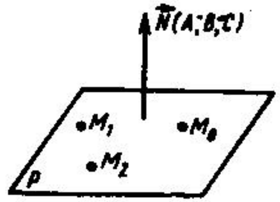

Рис. 2

3. *Векторным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна произведению длин векторов-сомножителей на синус угла между ними и который направлен перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (рис. 1):

$$\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}; \qquad (2)$$

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

Геометрически $|\vec{c}|$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi.$$

4. *Смешанное произведение* трех векторов $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ есть число, равное

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

5. *Общее уравнение плоскости P* имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ — нормальный вектор плоскости (рис. 2).

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Угол между двумя плоскостями, имеющими нормальные векторы $\vec{N}_1=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k}$ и $\vec{N}_2=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k}$, определяется как угол между $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$; косинус этого угла находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}. \qquad (5)$$

6. *Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \qquad (6)$$

7. *Матрицей* $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & m_{mn}\end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times r$ на матрицу $B=(b_{jk})$ размера $r\times n$ называется матрица $C=AB=(c_{ik})$ размера $m\times n$ с элементами

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{ir}b_{rk} \qquad (7)$$

(поэлементное умножение i-й строки матрицы A на k-й столбец матрицы B).

Матрица размера $n\times n$ называется *квадратной матрицей* n-го порядка. Элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} образуют *главную диагональ* матрицы. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется *определителем матрицы* и обозначается $|A|$ или $\det A$.

Матрица E с элементами $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j\end{cases}$ называется *единичной матрицей* n-го порядка.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A ($\det A\neq 0$), если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{8}$$

Элементы a_{ij}^{-1} обратной матрицы $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|}, \tag{9}$$

где A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji}, матрицы A, а $|A|$ — ее определитель.

8. Матрица A_r называется *канонической*, если в начале ее главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю; например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Любая матрица A может быть приведена к каноническому виду A_r путем элементарных преобразований: а) перестановки столбцов (строк); б) умножения столбца (строки) на число, отличное от нуля; в) прибавления к элементам какого-либо столбца (строки) соответствующих элементов другого столбца (строки), умноженных на число.

Матрицы, переходящие друг в друга в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными*: $A \sim A_r$.

Число r единиц, стоящих на главной диагонали канонической матрицы A_r, не зависит от способа приведения матрицы A к каноническому виду и называется *рангом* исходной матрицы A: $r(A) = r$. Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг.

9. *Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными* x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{10}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы; b_i — свободные члены. Определитель третьего порядка Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*. Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы (10) выражается *формулами Крамера*:

$$x_1 = \Delta_1/\Delta; \ x_2 = \Delta_2/\Delta, \ x_3 = \Delta_3/\Delta, \tag{11}$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 — определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 или 3-го столбца соответственно свободными членами b_1, b_2, b_3.

Систему (10) можно записать матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид

$$X = A^{-1}B, \tag{12}$$

если определитель системы отличен от нуля.

Если система линейных уравнений с n неизвестными совместна, а ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т. е.

$$r < n, \tag{13}$$

то система имеет бесконечное множество решений. Свободные $n - r$ неизвестных выбираются произвольно, а главные r неизвестных определяются единственным образом через свободные неизвестные.

10. Вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

называется *собственным вектором* квадратной матрицы A n-го порядка, соответствующим собственному значению λ, если он удовлетворяет матричному уравнению

$$AX = \lambda X, \text{ или } (A - \lambda E)X = 0.$$

Здесь E — единичная матрица n-го порядка, а 0 — нулевой вектор-столбец. При условии, что вектор $X \neq 0$, получаем *характеристическое уравнение* для определения собственных значений λ:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{14}$$

Координаты собственного вектора X_i, соответствующего собственному значению λ_i, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)\,x_n = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

Пример 1. По координатам вершин пирамиды $A_1\ (3;\ -2;\ 2)$, $A_2\ (1;\ -3;\ 1)$, $A_3\ (2;\ 0;\ 4)$, $A_4\ (6;\ -4;\ 6)$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Решение. 1) Находим векторы A_1A_2 и A_1A_3:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(1-3)\vec{i}+(-3-(-2))\vec{j}+(1-2)\vec{k}=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k};$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}=(2-3)\vec{i}+(0-(-2))\vec{j}+(4-2)\vec{k}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}.$$

Длины этих векторов, т. е. длины ребер A_1A_2 и A_1A_3, таковы:

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6};$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3.$$

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ находим по формуле (1):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 2=-2,$$

а косинус угла между ними — по формуле (5):

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{|\overrightarrow{A_1A_2}|\,|\overrightarrow{A_1A_3}|}=\frac{-2}{3\sqrt{6}}=-0{,}27.$$

Отсюда следует, что φ — тупой угол, равный $\pi-\arccos 0{,}27=1{,}85$ рад с точностью до 0,01. Это и есть искомый угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3.

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, т. е. половине модуля векторного произведения этих векторов [см. формулу (2)]:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=5\vec{j}-5\vec{k}.$$

Здесь определитель вычисляется с помощью разложения по первой строке. Следовательно,

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+(-5)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

4) Объем V пирамиды равен $^1/_6$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $A_1\vec{A_2}$, $A_1\vec{A_3}$, $A_1\vec{A_4}$. Вектор $A_1\vec{A_4}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$. Используя формулу (3), получаем

$$V=\frac{1}{6}\,|\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}|=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{6}\operatorname{mod}(-30)=5.$$

Пример 2. Найти угол между плоскостью P_1, проходящей через точки A_1 (2; −4; 1), A_2 (−1; 2; 0), A_3 (0; −2; 3), и плоскостью P_2, заданной уравнением $5x+2y-3z+1=0$.

Решение. Уравнение плоскости P_1 находим по формуле (4):

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+4 & z-1\\ -1-2 & 2+4 & 0-1\\ 0-2 & -2+4 & 3-1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-2 & y+4 & -1\\ -3 & 6 & -1\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$7(x-2)+4(y+4)+3(z-1)=0,\ 7x+4y+3z=1.$$

По уравнениям плоскостей определяем их нормальные векторы: $\vec{N_1}=7\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{N_2}=5\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Угол φ между плоскостями P_1 и P_2 находим по формуле (5):

$$\cos\varphi=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{|\vec{N_1}|\,|\vec{N_2}|}\approx 0{,}64,$$

откуда $\varphi=\arccos 0{,}64=0{,}87$ рад.

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A_1 (4; −3; 1) и A_2 (5; −3; 0).

Решение. Используя формулу (6), получаем

$$\frac{x-4}{5-4}=\frac{y(-3)}{-3-(-3)}=\frac{z-1}{0-1},\quad \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-1}{-1}.$$

Равенство нулю знаменателя второй дроби означает, что прямая принадлежит плоскости $y=-3$.

Пример 4. С помощью формул Крамера найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=-5,\\ x_1-2x_2+2x_3=17,\\ x_1+x_2+3x_3=4.\end{cases}\qquad(16)$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -9\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & -9\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-26.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то решение системы может быть найдено по формулам Крамера (11). Для этого найдем Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5 & 1 & -3\\ 17 & -2 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{vmatrix}=-78,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -5 & -3\\ 1 & 17 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=130,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5\\ 1 & -2 & 17\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-52.$$

Подставляя найденные значения определителей в формулы (11), получаем искомое решение системы: $x_1=\Delta_1/\Delta=3$, $x_2=\Delta_2/\Delta=-5$, $x_3=\Delta_3/\Delta=2$.

Пример 5. Найти решение системы примера 4 с помощью обратной матрицы.

Решение. Здесь

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы системы отличен от нуля (см. пример 4): $|A|=-26$, то матрица A имеет обратную. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-8,\ A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6,\ A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1,\ A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5.$$

Согласно формуле (9), матрица A^{-1}, обратная к A, имеет вид

$$A^{-1}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления A^{-1}, исходя из определения обратной матрицы (8) и используя формулу (7):

$$A^{-1}A=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8\cdot 2+(-6)\cdot 1+(-4)\cdot 1 & -8\cdot 1+(-6)(-2)+(-4)\cdot 1 & -8\cdot(-3)+(-6)\cdot 2+(-4)\cdot 3\\ -1\cdot 2+9\cdot 1+(-7)\cdot 1 & -1\cdot 1+9\cdot(-2)+(-7)\cdot 1 & -1(-3)+9\cdot 2+(-7)\cdot 3\\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 1 & 3\cdot 1+(-1)(-2)+(-5)\cdot 1 & 3(-3)+(-1)\cdot 2+(-5)\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-26 & 0 & 0\\ 0 & -26 & 0\\ 0 & 0 & -26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Матричное решение системы (16) в силу формулы (12) имеет вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-78\\ 130\\ -52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 2\end{pmatrix},$$

откуда следует (из условия равенства двух матриц), что $x_1=3$, $x_2=-5$, $x_3=2$.

Пример 6. Найти решение однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases}8x_1-3x_2-4x_3=0,\\ -x_1+x_2+x_3=0,\\ 4x_1+x_2=0.\end{cases}\qquad(17)$$

Решение. Однородная система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы системы

$$A=\begin{pmatrix}8 & -3 & -4\\ -1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

меньше числа неизвестных [см. формулу (13)]. Приведем матрицу A к каноническому виду A_r путем элементарных преобразований. Прибавляя к 1-му столбцу 3-й, а из 3-го вычитая 2-й, получаем

$$A\sim\begin{pmatrix}4 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Умножим 1-й столбец на $^1/_4$, а затем вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Из 3-й строки вычтем 2-ю, умноженную на 4, а затем ко 2-му и 3-му столбцам прибавим 1-й столбец, умноженный соответственно на 3 и 1:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и система (17) имеет нетривиальное решение. Примем за главные неизвестные x_1 и x_2. Тогда система (17) сводится к системе двух уравнений

$$\begin{cases} -x_1+x_2=-x_3, \\ 4x_1+x_2=0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид $x_1=\frac{1}{5}x_3$, $x_2=-\frac{4}{5}x_3$. Придавая свободному неизвестному x_3 произвольные значения $x_3=5t$, получаем решение системы (17) в виде $x_1=t$, $x_2=-4t$, $x_3=5t$.

Пример 7. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид (14):

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 6\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0, \text{ или } \lambda^2-3\lambda-4=0,$$

откуда следует, что матрица A имеет два собственных значения $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=-1$. Собственный вектор X_1, соответствующий $\lambda_1=4$, определяется из системы уравнений вида (15)

$$\begin{cases}(1-4)x_1+ \quad 6x_2=0, \\ \quad x_1+(2-4)x_2=0,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}-3x_1+6x_2=0, \\ \quad x_1-2x_2=0,\end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $x_1=2x_2$. Полагая $x_2=t$, получаем решение в виде $x_1=2t$, $x_2=t$. Следовательно, первый собственный вектор есть $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t$.

Второй собственный вектор X_2, соответствующий собственному значению $\lambda_2=-1$, определяется из системы уравнений вида (15):

$$\begin{cases}(1+1)x_1 \quad +6x_2=0, \\ \quad x_1+(2+1)x_2=0.\end{cases}$$

Эта система уравнений также сводится к одному уравнению $x_1+3x_2=0$; полагая $x_2=t$, запишем ее решение в виде $x_1=-3t$, $x_2=t$. Следовательно, второй собственный вектор есть $X_2=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}t$.

Таким образом, матрица A имеет два собственных различных значения $\lambda_1=4$ и $\lambda_2=-1$ и два собственных вектора, равных (с точностью до постоянного множителя) $X_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные теоретические сведения

1. Прямоугольные координаты (x, y) точки M и ее полярные координаты (ρ, φ) связаны соотношениями

$$x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi,$$
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=y/x, \tag{1}$$

где ρ — полярный радиус, а φ — полярный угол точки M (рис. 3).

2. Определение конечного предела функции в точке: число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $|x-a|<\delta$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a}(x)=A$ или $f(x)\to A$ при $x\to a$.

Функция $f(x)$ $(F(x))$ называется *бесконечно малой (бесконечно большой)* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ $(\lim\limits_{x\to a}F(x)=\infty)$.

Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, одновременно стремящиеся к нулю или бесконечности при $x\to a$, называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$. Обозначение: $f(x)\sim\varphi(x)$.

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \tag{2}$$

если $f(x)\sim f_1(x)$, $\varphi(x)\sim\varphi_1(x)$.

3. К *основным элементарным функциям* относятся: 1) степенная функция $y=x^n$; 2) показательна функция $y=a^x$; 3) логарифмическая функция $y=\log_a x$; 4) тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$; 5) обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$.

Предел элементарной функции в точке области ее определения равен частному значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

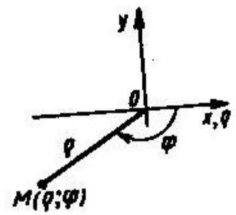

Рис. 3

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, $0/0$, ∞/∞, 1^∞, 0^0, ∞^0. Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются: 1) сокращение на множитель, создающий неопределенность; 2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x\to\infty$); 3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших; 4) использование двух замечательных пределов:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)}=1; \quad \lim_{\alpha(x)\to 0} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e. \qquad (3)$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)}=0, \text{ если } \lim_{x\to a} f(x)=\infty;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)}=\infty, \text{ если } \lim_{x\to a} f(x)=0;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}=0, \text{ если } \lim_{x\to a} f(x)=0, \ \lim_{x\to a} \varphi(x)=\infty;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty, \text{ если } \lim_{x\to a} f(x)=\infty, \ \lim_{x\to a} \varphi(x)=0.$$

4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если:

1) частное значение функции в точке $x=a$ равно $f(a)$;
2) существуют конечные односторонние пределы функции

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0), \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0); \qquad (4)$$

3) односторонние пределы равны:

$$f(a-0)=f(a+0)=C; \qquad (5)$$

4) предельное значение функции в точке $x=a$ равно ее частному значению $f(a)$:

$$C=f(a). \qquad (6)$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Точка $x=a$ называется *точкой устранимого разрыва*, если $f(a)\neq C$ [нарушается условие (6)].

Точка $x=a$ называется *точкой разрыва первого рода*, если оба односторонних предела конечны, но $f(a-0)\neq f(a+0)$ [нарушается условие (5)].

Точка $x=a$ называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует [нарушается условие (4)].

5. Выражение вида $z=x+yi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *комплексным числом* (в *алгебраической и тригонометрической форме* соответственно). Здесь $i^2=-1$, $x=\operatorname{Re} z$ — действительная часть, а $y=\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z; ρ и φ — *модуль и аргумент* числа z:

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}, \ \varphi=\arg z \ (\operatorname{tg}\varphi=y/x). \qquad (7)$$

Комплексные числа изображаются точками на комплексной плоскости (рис. 4).

Рис. 4

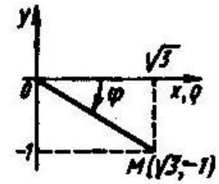

Рис. 5

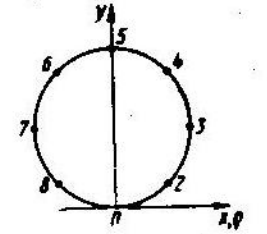

Рис. 6

Извлечение корня n-й степени (n — натуральное число) из числа $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(z\neq 0)$ производится по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (8)$$

где $\sqrt[n]{\rho}$ — арифметический корень из модуля z, а $k=0, 1, ..., n-1$.

Пример 1. Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3};\ -1)$ (рис. 5).

Решение. Используя формулы (1), находим полярный радиус и полярный угол точки M: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\varphi=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\pi/6$, так как точка M лежит в IV четверти.

Пример 2. Построить по точкам график $\rho=2\sin\varphi$ в полярной системе координат. Найти уравнение полученной кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox — с полярной осью. Определить вид кривой.

Решение. Так как полярный радиус не отрицателен, т. е. $\rho\geqslant 0$, то $\sin\varphi\geqslant 0$, откуда $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$; значит, вся кривая расположена в верхней полуплоскости. Составим вспомогательную таблицу:

Номера точек	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\sin\varphi$	0	0,38	0,71	0,92	1	0,92	0,71	0,38	0
$\rho=2\sin\varphi$	0	0,76	1,42	1,84	2	1,84	1,42	0,76	0

Для построения кривой на луче, проведенном из полюса под углом φ_k, откладываем соответствующее значение полярного радиуса $\rho_k=\rho(\varphi_k)$ и соединяем полученные точки (рис. 6).

Найдем уравнение кривой $\rho=2\sin\varphi$ в прямоугольной системе координат. Для этого заменим ρ и φ их выражениями через x и y по формулам (1):

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ x^2+y^2=2y.$$

Окончательно имеем $x^2+(y-1)^2=1$, т. е. рассматриваемое уравнение выража[ет] окружность с центром в точке (0; 1) и единичным радиусом.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)}$.

Решение. Подставляя вместо x его предельное значение, равное 3, получа[ем] в числителе бесконечно большую, а в знаменателе — бесконечно малую фун[к]цию:

$$\lim_{x\to 3}\operatorname{ctg}(x-3)=\infty,\ \lim_{x\to 3}\ln(4-x)=0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{ctg}(x-3)}{\ln(4-x)}=\infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Решение. Подстановка предельного значения аргумента приводит к неоп[]ределенности вида ∞/∞. Так как под знаком предела стоят отношение дву[х] многочленов, то разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргуме[н]та, т. е. на x^4. В результате получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+5/x^3}{-4+7/x^4}=\frac{-12+0}{-4+0}=-3,$$

поскольку при $x\to\infty$ функции $5/x^3$ и $7/x^4$ являются бесконечно малыми.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln(1-x^2)}$.

Решение. Для раскрытия получающейся здесь неопределенности вида 0[/0] используем метод замены бесконечно малых эквивалентными. Так как при $x\to$[0] $1-\cos 4x=2\sin^2 2x\sim 8x^2$, $\ln(1-x^2)\sim -x^2$, то на основании формулы (2) находи[м]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-x^2}=-8.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

Решение. Подстановка $x=-2$ приводит к неопределенности 1^∞. Произведе[м] замену переменных: $y=x+2$, $\lim\limits_{x\to -2}y=0$. Тогда

$$\lim_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{y\to 0}(1+2y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left((1+2y)^{\frac{1}{2y}}\right)^2=e^2.$$

Здесь использован второй замечательный предел (3).

Пример 7. Указать слагаемое, эквивалентное всей сумме $\alpha(x)=\sin^3 x-4\operatorname{tg}$[$x$] при $x\to 0$.

Решение. Очевидно, что при $x\to 0$ оба слагаемых являются бесконеч[но]

[м]алыми. Найдем предел отношения суммы к каждому из слагаемых, используя [з]амену бесконечно малых эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x-4\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{4\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}\right)=1-4\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin^3 x}=\infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x-4\operatorname{tg}x}{-4\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{-4\operatorname{tg}x}+1=1.$$

Следовательно, функция $\alpha(x)=\sin^3 x-4\operatorname{tg}x$ эквивалентна при $x\to 0$ второму слагаемому.

Пример 8. Исследовать функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1} & \text{при } x<-1,\\ \sqrt{1-x^2} & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x & \text{при } x>0\end{cases}$$

на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

Решение. Так как данная функция определена на всей числовой оси, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т. е. точки $x=-1$ и $x=0$. Вычислим односторонние пределы в этих точках.

Для точки $x=-1$ имеем:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1-0}\frac{|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to -1-0}\frac{-(x-1)}{x+1}=-1;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to -1+0}\sqrt{1-x^2}=0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=-1$ существуют, но не равны между собой. Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода.

Для точки $x=0$ получаем

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\sqrt{1-x^2}=1,\ f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}(1-x)=1.$$

Односторонние пределы функции при $x\to 0$ равны между собой и равны частному значению функции: $f(0)=\sqrt{1-x^2}\,|_{x=0}=1$. Следовательно, исследуемая точка является точкой непрерывности.

График данной функции приведен на рис. 7.

Пример 9. Изобразить на комплексной плоскости числа: 1) $z_1=-8$, 2) $z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. Записать число z_1 в тригонометрической, а число z_2 — в алгебраической форме.

Решение. 1) Для числа z_1 имеем $x_1=\operatorname{Re}z_1=-8$, $y_1=\operatorname{Im}z_1=0$. Откладывая по оси Ox $x_1=-8$, а по оси Oy $y_1=0$, получаем точку комплексной плоскости, соответствующую числу z_1 (рис. 8). Модуль этого числа находим по формуле (7):

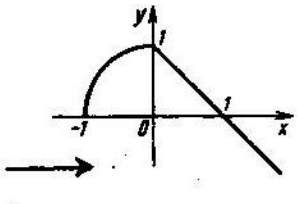

Рис. 7

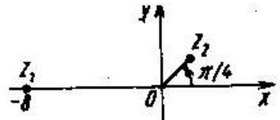

Рис. 8

$\rho_1=|z_1|=\sqrt{(-8)^2+0^2}=8$. Аргумент определяем из равенства $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{0}{(-8)}$

Так как число z_1 находится в левой полуплоскости, то его аргумент $\varphi_1=$

Тригонометрическая форма числа z_1 имеет вид $z_1=8(\cos\pi+i\sin\pi)$.

2) Модуль числа z_2 равен ρ_2, а аргумент $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$. Для его изображения комплексной плоскости проводим из полюса луч под углом $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$ к полярной о и откладываем на нем отрезок длиной $\rho_2=2$. Полученная точка соответству числу z_2 (рис. 8). Его действительная часть $\operatorname{Re} z_2=x_2=\rho_2\cos\varphi_2=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{}$ а мнимая часть $\operatorname{Im} z_2=y_2=\rho_2\sin\varphi_2=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$. Таким образом, алгебраическ форма числа z_2 имеет вид $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

Пример 10. Вычислить $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Модуль числа -8 равен 8, а аргумент равен π. Используя форму (8), получаем

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right);$$

$$k=0,\ 1,\ 2.$$

При $k=0$: $\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right)=$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}.$$

При $k=1$: $\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=$

$$=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2.$$

При $k=2$: $\sqrt[3]{-8}=2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=$

$$=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

1. **Правило Лопиталя.** *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность 0/0 или ∞/∞) равен пределу отношения их производных:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\tag{1}$$

если предел справа существует.

2. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой экстремума* функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума). Необходимое условие экстремума: если x_0 — экстремальная точка функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует. Достаточное условие экстремума: x_0 является экстремальной точкой функции $f(x)$, если ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс — при минимуме.

3. Точка x_0 называется *точкой перегиба* кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости. Необходимое условие точки перегиба: если x_0 — точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует. Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

4. Прямая $y_{\text{нс}}=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x; f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).\tag{2}$$

При $k=0$ имеем *горизонтальную асимптоту*: $y=b$.

Если

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0}f(x)=\infty,\tag{3}$$

то прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой.*

5. **Общая схема исследования функции и построения ее графика.**

I. *Элементарное исследование:*

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на симметричность и периодичность;

3) вычислить предельные значения функции в ее граничных точках;

4) выяснить существование асимптот;

5) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечен графика функции с координатными осями;

6) сделать эскиз графика функции, используя полученные результаты.

II. *Исследование графика функции по первой производной:*

1) найти решения уравнений $y'(x)=0$, $y'(x)=\infty$ и y' не существует;

2) точки, «подозрительные» на экстремум, исследовать с помощью достато ного условия экстремума, определить вид экстремума;

3) вычислить значения функции в точках экстремума;

4) найти интервалы монотонности функции;

5) нанести на эскиз графика экстремальные точки;

6) уточнить вид графика функции согласно полученным результатам.

III. *Исследование графика функции по второй производной:*

1) найти решения уравнений $y''(x)=0$, $y''(x)=\infty$ и y'' не существует;

2) точки, «подозрительные» на перегиб, исследовать с помощью достато ного условия;

3) вычислить значения функции в точках перегиба;

4) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

5) нанести на эскиз графика точки перегиба;

6) окончательно построить график функции.

Если исследование проведено без ошибок, то результаты всех этапов долж согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходи проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить найден ошибки.

6. *Частной производной* первого порядка функции нескольких перемен $u=f(x, y, z)$ по аргументу x называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y,\ z)-f(x,\ y,\ z)}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

(приращение получает только один аргумент x). Обозначение: u'_x, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Отыскан

частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ сводится к дифференцированию функции одной переме

ной $u(x)=f(x, y_0, z_0)$, полученной при фиксировании аргументов y и z: $y=y_0$, $z=$

7. *Скалярным полем* $U=U(M)$ называется скалярная функция точки M вмес с областью ее определения.

Уравнение

$$U(x,\ y,\ z)=C\ (\text{или}\ U(x,\ y)=C)$$

определяет семейство *поверхностей* (или *линий*) *уровня*, на которых скаляр поле принимает одно и то же значение C.

Скалярное поле $U(M)$ характеризуется *градиентом*

$$\operatorname{grad} U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (6)$$

и производной по направлению $\vec{l}=l_x\vec{i}+l_y\vec{j}+l_z\vec{k}$, равной скалярному произведению grad U и единичного вектора $\vec{l^0}$ направления $\vec{l}$:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=(\operatorname{grad} U,\ \vec{l^0})=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{lx}{|\vec{l}\,|}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{ly}{|\vec{l}\,|}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{lz}{|\vec{l}\,|}. \qquad (7)$$

Пример 1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{1-4x}$ в точке, абсцисса которой $x_0=-2$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_0=\sqrt{1-4x_0}=3$. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0: $k=y'(x_0)=(\sqrt{1-4x})'_{x_0}=-\dfrac{4}{2\sqrt{1-4x_0}}\Bigg|_{x_0=-2}=-\dfrac{2}{3}$.

Подставляя значения x_0, y_0 и y'_0 в уравнения касательной $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ и нормали $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, получаем:

$$y-3=-\frac{2}{3}(x+2),\ 2x+3y-5=0\ (\text{касательная});$$

$$y-3=\frac{3}{2}(x+2),\ 3x-2y+12=0\ (\text{нормаль}).$$

Пример 2. Используя правило Лопиталя, вычислить предел функции:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4};\ 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

Решение. 1) Подстановка предельного значения аргумента $x=2$ приводит к неопределенности вида 0/0. Раскроем ее с помощью правила Лопиталя (1):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-5x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-x^2-8x+12)'}{(x^3-5x^2+8x-4)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}.$$

Однократное применение правила Лопиталя не приводит к раскрытию неопределенности (по-прежнему получаем $\dfrac{0}{0}$), поэтому применим его еще раз:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{3x^2-10x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x^2-2x-8)'}{(3x^2-10x+8)'}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-10}=\frac{12-2}{12-10}=5.$$

Таким образом, в результате двукратного применения правила Лопиталя находим, что искомый предел равен 5.

2) Убедившись, что имеет место неопределенность вида ∞/∞, применя
правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{x^2})'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2xe^{x^2}}{2x}=\infty.$$

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

Решение. Находим первую производную: $y'=-\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. Из уравнений $y'=$ и $y'=\infty$ получаем точки, «подозрительные» на экстремум: $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=-$ Исследуем их, определяя знак первой производной слева и справа от кажд точки. Для наглядности результаты представим в виде таблицы изменения зн на y':

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	$-$	0	+	∞	$-$	0	$-$
y	убыв.	min	возр.	не опр.	убыв.	0	убыв.

В первой строке указаны интервалы, на которые область определения фу ции разбивается точками x_1, x_2, x_3, и сами эти точки. Во второй строке указа знаки производной y' в интервалах монотонности. В третьей строке приведе заключение о поведении функции.

Исследуемая функция, как следует из таблицы, имеет минимум в то $x=-3$: $y(-3)=27/4$. Точки $x=-1$ и $x=0$ не являются точками экстремума, т как в первой точке функция не определена, а в окрестности второй точки пер производная сохраняет знак.

Пример 4. Найти асимптоты графика функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

Решение. Точка $x=-1$ является точкой разрыва функции. Так $\lim_{x\to-1\pm0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty$, то прямая $x=-1$ служит вертикальной асимптотой гра ка функции [см. формулы (3)].

Ищем наклонные асимптоты $y_{ac}=kx+b$, используя формулы (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2\cdot x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}+x\right)=2.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y_{ac}=-x+2$.

Пример 5. Построить график функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$, используя общую с исследования функции.

Решение. I. Область определения: $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$. Функция не является симметричной и периодической. Находим предельные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-1\pm0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty.$$

График функции имеет одну вертикальную асимптоту $x=-1$ и одну наклонную асимптоту $y=-x+2$ (см. пример 4). Он пересекает координатные оси в точке (0; 0).

II. Функция имеет один минимум при $x=-3$ (см. пример 3).

III. Вторая производная $y''=\frac{-6x}{(x+1)^4}$ обращается в бесконечность при $x=-1$ и равна нулю в точке $x=0$, которая является единственной точкой перегиба (см. таблицу):

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	+	∞	+	0	$-$
y	$\cup$	не опр.	$\cup$	точка перегиба	$\cap$

Учитывая полученные результаты, строим график функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$ (рис. 9).

Пример 6. Найти первую производную функции $y=f(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases}x=\ln(1-t),\\ y=(t-1)^2.\end{cases}$$

Решение. Дифференцируем $x(t)$ и $y(t)$ по параметру t: $x'_t=-\frac{1}{1-t}$, $y'_t=2(t-1)$. Искомая производная от y по x равна отношению производных от $y(t)$ и от $x(t)$ по t:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2(t-1)}{-1/(1-t)}=2(t-1)^2.$$

Пример 7. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u=z\sqrt{x^3}-ye^z$.

Решение. Считая функцию u функцией только одной переменной x, а переменные y и z рассматривая как постоянные [см. формулу (4)], находим $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3}{2}z\sqrt{x}$. Аналогично, считая u функцией только y, а затем только z, получаем $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\sqrt{x^3}-ye^z$.

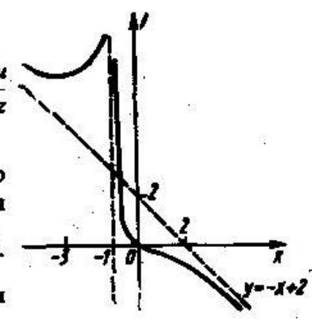

Рис. 9

Пример 8. Найти поверхности уровня скалярного поля $U=x^2+y^2+z^2$. Выч… лить производную поля в точке $A\ (-2\sqrt{3};\ -1;\ 1)$ по направлению вектора … где $B\ (0;\ -4;\ 3)$.

Решение. Поверхностями уровня данного поля являются концентричес… сферы с центром в начале координат [см. формулу (5)]: $x^2+y^2+z^2=C$. Град… вычисляется по формуле (6): $\operatorname{grad} U=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$.

Найдем единичный вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{l}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2\sqrt{3}\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{12+9+4}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{2}{5}\vec{k},$$

а затем по формуле (7) производную скалярного поля U по направлению вект… $\overrightarrow{AB}$ в точке A:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_A=(\operatorname{grad} U,\ \vec{l}^0)=\left.\left(2x\cdot\frac{2\sqrt{3}}{5}+2y\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+2z\cdot\frac{2}{5}\right)\right|_A=-2{,}8.$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial l}<0$, то данное скалярное поле убывает в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные теоретические сведения

1. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется выражение в… $\int f(x)dx=F(x)+C$, если $F'(x)=f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* … заданной функции $f(x)$.

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы.

1) Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C;\quad \int f(x+b)dx=F(x+b)+C,$$

где a и b — некоторые постоянные.

2) *Подведение под знак дифференциала:*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)),$$

так как $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$.

3) *Формула интегрирования по частям:*

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не в… вало особых затруднений. За u, как правило, принимается такая функция, … ференцирование которой приводит к ее упрощению. К классам функций, ин…

…рируемых по частям, относится, в частности, функции вида $P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x)\operatorname{arctg} x$, где $P(x)$ — многочлен от x.

4) *Интегрирование рациональных дробей*, т. е. отношений двух многочленов $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ (соответственно k-й и n-й степени): $R(x)=P_k(x)/Q_n(x)$, сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на элементарные, всегда интегрируемые дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^l},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},\tag{4}$$

где l и m — целые положительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней. При этом в случае неправильной дроби $(k\geqslant n)$ должна быть предварительно выделена целая часть.

5) *Интегрирование методом замены переменной* (способом подстановки) является одним из эффективных приемов интегрирования. Его сущность состоит в переходе от переменной x к новой переменной t: $x=\varphi(t)$. Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т. е. выбор функции $\varphi(t)$, не всегда очевидна. Однако для некоторых часто встречающихся классов функций можно указать такие стандартные подстановки:

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}}\right)dx,\quad \sqrt[n]{\frac{ax+b}{ax+d}}=t;$$

$$\int R(x,\ \sqrt{a^2-x^2})dx,\quad x=a\sin t;$$

$$\int R(x,\ \sqrt{a^2+x^2})dx,\quad x=a\operatorname{tg} t;$$

$$\int R(x,\ \sqrt{x^2-a^2})dx,\quad x=\frac{a}{\sin t},$$

где R — символ рациональной функции.

2. *Формула Ньютона — Лейбница* для вычисления определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a),\tag{5}$$

если $F'(x)=f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и частью графика функции $y=f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x)\geqslant 0$, и со знаком минус, если $f(x)\leqslant 0$.

3. Если интервал интегрирования $[a,\ b]$ не ограничен (например, $b=\infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при $x=b$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,\tag{6}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Интегралы в левых частях равенств (6) и (7) называются *несобственными инте* *ралами*. Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если существует ко ный предел в правой части равенств (6) и (7). Если же предел не существует и равен бесконечности, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

4. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$, y и частью графика кривой $y=f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда объем получ ного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b (f(x))^2dx.$$

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{(2x-3)^2}$.

Решение. Так как $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$, то, используя формулы (1), получим

$$\int\frac{dx}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2}=-\frac{1}{2(2x-3)}+C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2(2x-3)}+C\right)'=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{(2x-3)^2}=\frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Пример 2. Найти $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$.

Решение. Так как $\cos x\,dx=d(\sin x)$, то по формуле (2) находим

$$\int\cos x\,e^{\sin x}dx=\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+C.$$

Пример 3. Найти $\int x\cos 2x\,dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Положим $u=$ $dv=\cos 2x\,dx$; тогда $du=dx$, $v=\frac{1}{2}\sin 2x$. Используя формулу (3), имеем

$$\int x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx$.

Решение. Подынтегральная рациональная дробь является правильной и лагается на элементарные дроби вида (4):

$$\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x-2}.$$

Освобождаясь от знаменателей в обеих частях этого равенства и приравни

ислители, получаем тождество для вычисления неопределенных коэффициентов , B и C:

$$3x^2-7x+10\equiv Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2+4C.$$

оставим систему трех уравнений с тремя неизвестными. Одно уравнение полу- им, полагая $x=2$ (корень знаменателя подынтегральной функции). Два других олучим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях ождества, например при x^2 и x^0:

$$\begin{aligned} x=2:&\quad 8=4C+4C,\\ x^2:&\quad 3=A+C,\\ x^0:&\quad 10=-2B+4C.\end{aligned}$$

ешение этой системы дает: $A=2$, $B=-3$, $C=1$. Таким образом,

$$\int\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx=\int\left(\frac{2x-3}{x^2+4}+\frac{1}{x-2}\right)dx=$$

$$=\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x-2}=\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln|x-2|+C.$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл $\int_4^9\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение. Применим метод замены переменной; положим $\sqrt{x}=t$, откуда $x=2t\,dt$. Найдем пределы интегрирования по переменной t: при $x=4$ имеем $t=2$, при $x=9$ имеем $t=3$. Переходя в исходном интеграле к новой переменной и применяя формулу Ньютона — Лейбница (5), получаем

$$\int_4^9\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int_2^3\frac{t-1}{t+1}\cdot 2t\,dt=(t^2-4t+4\ln|t+1|)\Big|_2^3=$$

$$=(9-12+4\ln 4)-(4-8+4\ln 3)=2{,}15.$$

Пример 6. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходи- ость: 1) $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; 2) $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение. 1) Первый интеграл является несобственным интегралом с бес- онечным верхним пределом интегрирования. Согласно определению (6), имеем

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln|\ln x|)\Big|_e^b=\lim_{b\to+\infty}\ln|\ln b|-0=\infty.$$

ледовательно, данный интеграл расходится.

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной ункции; $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x=0$. огласно определению (7), получаем

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}(\operatorname{tg} x)\Big|_\varepsilon^{\pi/4}=1-\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{tg}\varepsilon=1,$$

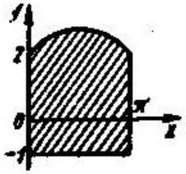

Рис. 10

т. е. этот несобственный интеграл сходится.

Пример 7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограни ной кривыми $y_1=\sin x+2$, $y_2=-1$, $x=0$, $x=\pi$ (рис. 10).

Решение. $S=\int_0^\pi (y_1-y_2)dx=\int_0^\pi (\sin x+2+1)dx=2+3\pi.$

Пример 8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг ос кривой $y=\sqrt{4x-x^2}$, $y=0$, $x=2$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

Решение. Объем полученного тела вращения найдем по формуле (8):

$$V=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2(4x-x^2)dx=\frac{16\pi}{3}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Основные теоретические сведения

1. Вычисление двойного интеграла от функции $f(x, y)$, определенной в обл D, сводится к вычислению двукратного интеграла вида

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy,$$

если область D определяется условиями $a\leqslant x\leqslant b$, $f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x)$, или вида

$$\iint_D f(x, y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx,$$

если область D определяется условиями $c\leqslant y\leqslant d$, $\varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y)$. Перехо равенства (1) к (2) или обратно называется *изменением порядка интегриров* Значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования.

2. Вычисление тройного интеграла от функции $f(x, y, z)$, определе в области V, сводится к вычислению интеграла вида

$$\iiint_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz=\iint_{D_{xy}} dx\,dy\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)dz,$$

где D_{xy} — проекция области V на плоскость xOy, $z=\psi_1(x, y)$ и $z=\psi_2(x,$ уравнения поверхностей, ограничивающих область V соответственно снизу рху. В тройном интеграле, так же как и в двойном, порядок интегриров может быть изменен.

3. Наряду с прямоугольной системой коорди ат пространстве могут быть введены цилиндричес ая и сферическая системы координат (рис. 11). Прямоугольные координаты $(x; y; z)$ точки M свя аны с ее цилиндрическими $(\rho; \varphi; z)$ и сферическими $; \theta; \varphi)$ координатами соотношениями

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z;\end{cases}\qquad \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta.\end{cases}\tag{4}$$

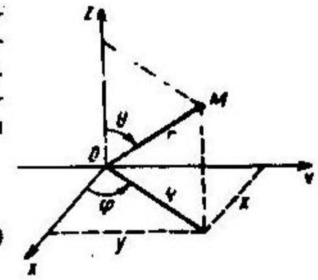

Рис. 11

ройной интеграл записывается в виде

$$\iiint_V f(P)\,dv=\begin{cases}\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \text{ — в декартовой системе координат;}\\ \iiint_V f(\rho, \varphi, z)\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz \text{ — в цилиндрической системе;}\\ \iiint_V f(r, \theta, \varphi)\,r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr \text{ — в сферической системе.}\end{cases}\tag{5}$$

4. Вычисление криволинейного интеграла по координатам от функций, опре еленных на кривой Г, сводится к вычислению определенного интеграла вида

$$\int_\Gamma P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz=$$
$$=\int_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt+Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt+$$
$$+R(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt,\tag{6}$$

сли кривая Г задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ и $t=\alpha$ соответству начальной точке кривой Г, а $t=\beta$ — ее конечной точке.

5. Вычисление поверхностного интеграла от функции $F(x, y, z)$, определенной а двусторонней поверхности σ, сводится к вычислению двойного интеграла, апример, вида

$$\iint_\sigma F(x, y, z)d\sigma=\iint_{D_{xy}} F(x, y, f(x, y))\frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},\tag{7}$$

сли поверхность σ, заданная уравнением $z=f(x, y)$, однозначно проецируется на лоскость xOy в область D_{xy}. Здесь γ — угол между единичным вектором нор али $\vec{n}$ к поверхности σ и осью Oz:

$$\vec{n}=\pm\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}}.\tag{8}$$

Требуемая условиями задачи сторона поверхности σ определяется выбором со-
ответствующего знака в формуле (8).

6. С помощью тройных интегралов можно вычислить:

а) объем V тела и его массу M:

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz,\ M=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

где μ — объемная плотность распределения массы;

б) момент инерции однородного тела относительно, например, оси Oz:

$$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dx\,dy\,dz.$$

7. *Векторным полем* $\vec{a}\,(M)$ называется векторная функция точки M вм[есте]
с областью ее определения:

$$\vec{a}\,(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Векторное поле $\vec{a}\,(M)$ характеризуется скалярной величиной — *дивергенцией*

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

и векторной величиной — *ротором*:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

8. *Потоком* векторного поля $\vec{a}\,(M)$ через поверхность σ называется по[верх]-
ностный интеграл

$$\Pi=\iint\limits_\sigma (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхност[и],
а $(\vec{a},\vec{n})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

9. *Циркуляцией* векторного поля $\vec{a}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)$[$\vec{k}$ вдоль]
замкнутой кривой Г называется криволинейный интеграл

$$Ц=\oint\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\oint\limits_\Gamma \vec{a}\,d\vec{r},$$

где $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$.

10. *Формула Остроградского* устанавливает связь между потоком вектор[ного]
поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность σ и дивергенцией поля:

$$\oiint\limits_\sigma (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV, \qquad (13)$$

где V — объем, ограниченный поверхностью σ.

11. *Формула Стокса* устанавливает связь между циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ и его ротором:

$$\oint\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_\sigma (\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,d\sigma, \qquad (14)$$

где σ — поверхность, ограниченная замкнутым контуром Г, а $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности. Направление нормали должно быть согласовано с направлением обхода контура Г.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$I=\int_0^1 dx\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Зная пределы интегрирования, найдем границы области интегрирования D: $x=0$, $x=1$, $y=2\sqrt{x}$, $y=-2\sqrt{x}$ и построим их (рис. 12). Область D располагается в полосе $0\leqslant x\leqslant 1$ и ограничена снизу и сверху соответствующими ветвями параболы $y^2=4x$.

Найдем новые пределы внешнего (по y) и внутреннего (по x) интегрирования. Так как область D проецируется на ось Oy в отрезок AB, то пределами внешнего интегрирования являются ординаты точек A и B, т. е. $y=-2$ и $y=2$ соответственно. Левой границей области является кривая $x=y^2/4$ (уравнение параболы $y^2=4x$ разрешено относительно x), а правой — прямая $x=1$. Таким образом, двойной интеграл I с измененным порядком интегрирования запишется в виде

$$I=\int_{-2}^{2} dy\int_{y^2/4}^{1} f(x,y)\,dx.$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_V(-2z)\,dV$, если область V ограничена поверхностями σ_1: $z=2$ и σ_2: $z^2=x^2+y^2$ $(z\geqslant 0)$ (рис. 13).

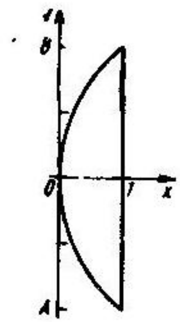

Рис. 12

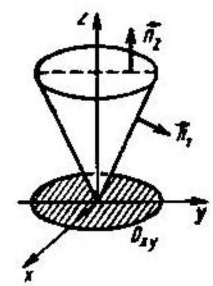

Рис. 13

3-94

Решение. Исключая z из уравнений σ_1 и σ_2, получим уравнение грани области D_{xy} (проекции V на плоскость xOy): $x^2+y^2=4$. Для вычисления интегр I переходим к цилиндрическим координатам по формулам (4) с предела интегрирования $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 2$, $\rho\leqslant z\leqslant 2$ ($z=\rho$ — уравнение верхней ча конуса $z^2=x^2+y^2$ в цилиндрических координатах). По формуле (5) получаем

$$I=\iiint\limits_V(-2z)\,dV=\iiint\limits_V(-2z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho\int_\rho^2 2z\,dz=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,(z^2|_\rho^2)\,d\rho=$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho(4-\rho^2)\,d\rho=-\int_0^{2\pi}\left((2\rho^2-\frac{\rho^4}{4})|_0^2\right)d\varphi=-4\int_0^{2\pi}d\varphi=-8\pi.$$

Пример 3. Вычислить поверхностный интеграл

$$I=\iint\limits_{\sigma_2}\frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,d\sigma,$$

где σ_2 — внешняя часть конуса $z^2=x^2+y^2$ ($z\geqslant 0$), отсекаемая плоскостью z (рис. 13).

Решение. Поверхность σ_2 однозначно проецируется в область D_{xy} плоско xOy, и интеграл вычисляется по формуле (7).

Единичный вектор внешней нормали к поверхностит σ_2 найдем по фор (8):

$$\vec{n}_2=\pm\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Здесь в выражении для нормали выбран знак плюс, так как угол γ между осью и нормалью $\vec{n}_2$ — тупой и, следовательно, $\cos\gamma=\pm\dfrac{(-z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ должен отрицательным. Учитывая, что $z=\sqrt{x^2+y^2}$, на поверхности σ_2 получаем

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{dx\,dy}{z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_{D_{xy}}z^2\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Область D_{xy} есть круг $x^2+y^2\leqslant 4$. Поэтому в последнем интеграле перехо к полярным координатам (при этом $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 2$):

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3\,d\rho=\int_0^{2\pi}\left((\frac{\rho^4}{4})|_0^2\right)d\varphi=4\int_0^{2\pi}d\varphi=8\pi.$$

Пример 4. Найти дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}-z^2\vec{k}$.

Решение. По формуле (9) получаем

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}y+\frac{\partial}{\partial y}(-x)+\frac{\partial}{\partial z}(-z^2)=-2z.$$

Ротор данного векторного поля находим по формуле (10):

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & -z^2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(-z^2)-\frac{\partial}{\partial z}(-x)\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(-z^2)-\frac{\partial}{\partial z}y\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}y\right)\vec{k}=-2\vec{k}.$$

Пример 5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}-z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ, образованную плоскостью $z=2$ и частью конуса $z^2=x^2+y^2$ ($z\geqslant 0$). Проверить результат с помощью формулы Остроградского.

Решение. Поверхность σ состоит из двух поверхностей: σ_1 — части плоскости $z=2$ и σ_2 — части конуса $z^2=x^2+y^2$ (рис. 13). Поэтому поток через σ равен сумме потоков вектора $\vec{a}$ через составляющие поверхности:

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},\vec{n}_1)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2)\,d\sigma,$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — внешние нормали к плоскости и конусу соответственно.

Для поверхности $z=2$ в силу формулы (8) получим $\vec{n}_1=\vec{k}$ и, следовательно,

$$\Pi_1=\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},\vec{n}_1)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}(-z^2)\,d\sigma=-4\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=$$

$$=-4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\,d\rho=-4\int_0^{2\pi}((\rho^2/2)|_0^2)\,d\varphi=-8\int_0^{2\pi}d\varphi=-16\pi,$$

так как на поверхности σ_1 имеем $z=2$.

Вычислим поток через поверхность σ_2, уравнение которой в явном виде задается соотношением $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вектор внешней нормали равен $\vec{n}_2=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. По формуле (11) получаем

$$\Pi_2=\iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n}_2)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_2}\frac{xy-xy+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{\sigma_2}\frac{z^3\,d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=8\pi$$

(см. пример 3).

Таким образом, поток векторного поля через поверхность $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ р

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=-16\pi+8\pi=-8\pi.$$

Найдем решение этой задачи с помощью формулы Остроградского
Дивергенция поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}-z^2\vec{k}$ равна $\operatorname{div}\vec{a}=-2z$ (см. пример 4), и пот

$$\Pi=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV=\iiint\limits_V(-2z)dV=-8\pi,$$

как это было вычислено в примере 2.

Пример 6. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}-z^2\vec{k}$
контуру Г, образованному пересечением поверхностей σ_1: $z=2$ и σ_2: $z^2=x^2$
($z\geqslant 0$). Проверить результат с помощью формулы Стокса.

Решение. Пересечением указанных поверхностей является окружн
$x^2+y^2=4$, $z=2$ (рис. 13). Направление обхода контура выбирается обычно
чтобы ограниченная им область оставалась слева. Запишем параметриче
уравнения контура Г:

$$\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\\ z=2,\end{cases}\quad\text{откуда}\quad\begin{cases}dx=-2\sin t\,dt,\\ dy=2\cos t\,dt,\\ dz=0,\end{cases}$$

причем параметр t изменяется от 0 до 2π. По формуле (12) с учетом (6) и
получаем

$$Ц=\oint\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t)dt-2\cos t\cdot 2\cos t\,dt-4\cdot 0=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(-4\sin^2 t-4\cos^2 t)dt=-4\int\limits_0^{2\pi}dt=-8\pi.$$

Применим теперь формулу Стокса (14). В качестве поверхности σ, натян
на контур Г, можно взять часть плоскости $z=2$. Направление нормали $\vec{n}$
к этой поверхности согласуется с направлением обхода контура Г. Ротор дан
векторного поля вычислен в примере 4: $\operatorname{rot}\vec{a}=-2\vec{k}$. Поэтому искомая
куляция

$$Ц=\iint\limits_{\sigma}(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint\limits_{\sigma}(-2\vec{k},\vec{k})d\sigma=$$

$$=-2\iint\limits_{\sigma}d\sigma=-2\iint\limits_{D_{xy}}\rho d\rho\, d\varphi=-2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\rho\, d\rho=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}\left(\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2\right)d\varphi=-4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=-8\pi,$$

что совпадает со значением циркуляции, полученным непосредственным выч
нием.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

РЯДЫ

Основные теоретические сведения

1. Числовой ряд

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{1}$$

называется *сходящимся*, если существует предел его частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

Число $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называется *суммой* ряда. Если же предел частичных сумм не существует, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Необходимый признак сходимости: если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

К достаточным признакам сходимости рядов с положительными членами ($a_n\geqslant 0$) относятся:

а) **Признак сравнения в предельной форме**: если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\ (k\neq 0,\ \infty), \tag{2}$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ одновременно сходятся или расходятся. В качестве эталонных рядов для сравнения обычно служат:

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$, сходящийся при $\alpha>1$ и расходящийся при $\alpha\leqslant 1$;

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$, сходящийся при $0\leqslant q<1$ и расходящийся при $q\geqslant 1$.

б) **Признак Даламбера**: если существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \tag{3}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится при $0\leqslant q<1$ и расходится при $q>1$. Если же $q=1$, то вопрос о сходимости ряда этим признаком не решается.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с членами, имеющими разные знаки, называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, и *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится.

в) **Признак Лейбница**: если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяют услов

1) $a_n a_{n+1} < 0$ (т. е. ряд знакочередующийся); 2) $|a_1| > |a_2| > ... > |a_n| > ...$; 3) $\lim_{n\to\infty} |a_n|$

то ряд сходится. Погрешность Δ, происходящая от замены суммы сходящ знакочередующегося ряда суммой его первых n членов, по абсолютной вели меньше первого из отброшенных членов:

$$\Delta = |S - S_n| < |a_{n+1}|.$$

2. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

называется *степенным рядом* [относительно $(x-a)$], точка $x = a$ — *центром* *ложения*, a_n — *коэффициентами ряда*. Число R называется *радиусом сходим* степенного ряда, если ряд (5) сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a|$ При $|x-a| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Интервал $]a-R, a$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (5). Радиус сходим R может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Степенной ряд (5) внутри интервала сходимости можно почленно диффе цировать и интегрировать с сохранением радиуса сходимости.

3. *Степенным рядом с комплексными членами* называется выражение вид

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n,$$

где $z_n = x_n + iy_n$, a_n — комплексные постоянные. Областью сходимости этого является круг с центром в начале координат: $|z| < R$, где R — радиус сходим ряда.

По определению,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ..., \ R = \infty;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \ R = \infty;$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \ R = \infty.$$

Отсюда следует, что

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

4. *Рядом Фурье* периодической функции $f(x)$, $-l \leqslant x \leqslant l$, называется ряд вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \ n = 0, 1, 2, ...;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ n = 1, 2, ...$$

Функция, заданная на полупериоде [0, l], может быть представлена различными рядами Фурье. При четном продолжении данной функции на второй полупериод $[-l, 0)$ получается ряд по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}; \quad (9)$$

$$b_n = 0; \ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \ n = 0, 1, 2, ...;$$

а при нечетном продолжении -- ряд по синусам:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}; \ a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}; \ n = 1, 2, 3, ...$$

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}.$$

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Даламбера (3). Так как общий член ряда $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}$, то, заменяя в выражении n-го члена n на $n+1$, находим $a_{n+1} = \frac{\operatorname{arctg}(2n+5)}{n+1}$. Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n \to \infty$:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\operatorname{arctg}(2n+5)}{(n+1)\operatorname{arctg}(2n+3)} = 1.$$

Поскольку полученный предел равен единице, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (здесь для вычисления предела было использ правило Лопиталя). Применим теперь признак сравнения в предельной фо

В качестве эталонного ряда выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$ и в силу формул получим

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,(2n+3)\cdot n}{n\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{arctg}\,(2n+3)=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, исследуемый ряд является расходящимся, так как эталонный с общим членом $b_n=1/n$ расходится (гармонический ряд).

Пример 2. Найти радиус и интервал сходимости степенного $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(x+2)^n$. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимо

Решение. Радиус сходимости находим по формуле (6):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)((n+1)^2+1)}{(n+4)(n^2+1)}=1.$$

Интервал сходимости данного ряда определяется неравенством $|x+2|<1$ $-3<x<-1$.

Исследуем концы интервала сходимости. При $x=-1$ получаем числовой

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(-1+2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1},$$

расходимость которого может быть установлена с помощью предельного при ка сравнения (эталонный пряд — гармонический).

При $x=-3$ получаем числовой знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}(-3+2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n^2+1},$$

который сходится по признаку Лейбница. Так как ряд, составленный из абсо ных членов данного ряда, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$, расходится, то исследуемый сходится условно.

Таким образом, интервал сходимости исследуемого степенного ряда и вид $-3\leqslant x<1$.

Пример 3. Вычислить $I=\int\limits_{-0,6}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ря степеням x:

$$(1+x^2)^{-1/3}=1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^4-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^6+\dots,\quad |x|<1.$$

Так как отрезок интегрирования $[-0,6;\,0]$ находится внутри интервала сходи сти биномиального ряда, то ряд можно почленно интегрировать. Подставляя интеграл вышеприведенное разложение подынтегральной функции и почленно тегрируя в указанных пределах, получаем

$$I=\int\limits_{-0,6}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}=\int\limits_{-0,6}^{0}\left(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x^4-\frac{14}{81}x^6+\dots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{1}{3\cdot 3}x^3+\frac{2}{9\cdot 5}x^5-\frac{14}{81\cdot 7}x^7+\dots\right)\Bigg|_{-0,6}^{0}=$$

$$=-\left(-0,6+\frac{(0,6)^3}{9}-\frac{2\cdot(0,6)^5}{45}+\frac{14\cdot(0,6)^7}{567}-\dots\right).$$

етвертый член $14\cdot\frac{(0,6)^7}{567}\approx 0,0007$ меньше 0,001. Поэтому согласно неравенству) для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью статочно ограничиться первыми тремя членами ряда:

$$I=0,6-\frac{(0,6)^3}{9}+\frac{2\cdot(0,6)^5}{45}\approx 0,579.$$

Пример 4. Найти сумму ряда с комплексными членами:

$$1+\pi i-\frac{\pi^2}{2!}-\frac{\pi^3}{3!}i+\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\pi^5}{5!}i-\dots.$$

Решение. Общий член данного ряда имеет вид

$$z_n=\frac{\pi^n}{n!}i^n=\frac{(\pi i)^n}{n!},$$

е. ряд, по определению, является функцией $f(z)=e^z$ при $z=\pi i$ [см. формулу (7)]. едовательно, сумма этого ряда равна значению функции $f(z)=e^z$ в указанной чке: $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ [см. формулу (8)]. Таким образом, получаем $\sum_{0}\frac{(\pi i)^n}{n!}=-1$.

Пример 5. Разложить периодическую функцию $f(x)=|x-1|$, $0\leqslant x\leqslant 3$, в ряд рье по косинусам. Построить график функции.

Решение. Данная функция определена на полу риоде [0, 3], т. е. $l=3$. Для разложения такой нкции в ряд Фурье по косинусам ее следует про лжить на второй полупериод $[-3,\,0)$ четным разом (рис. 14). Для четной функции коэффициен $b_n=0$, а коэффициенты a_n вычисляются по фор лам (9):

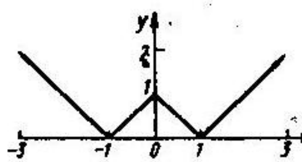

Рис. 14

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 |x-1|\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx.$$

Так как

$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{при } x\geqslant 1,\\ -(x-1) & \text{при } x<1,\end{cases}$$

то отрезок интегрирования разобьем на два отрезка: от 0 до 1, где $f(x)=-$ и от 1 до 3, где $f(x)=x-1$. Тогда

$$a_n=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx+\int_1^3 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right).$$

При $n=0$ имеем

$$a_0=\frac{2}{3}\left(\int_0^1 (1-x)\,dx+\int_1^3 (x-1)\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1+\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^3\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{3}.$$

Для вычисления коэффициентов a_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ применим метод интегри ния по частям:

$$\int_a^b u\,dv=(uv)\big|_a^b-\int_a^b v\,du,$$

причем в первом интеграле примем $u=1-x$, $dv=\cos\dfrac{n\pi x}{3}\,dx$, откуда $du=$

$v=\dfrac{3}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$. Во втором интеграле положим $u=x-1$, $dv=\cos\dfrac{n\pi x}{3}\,dx$, от $du=dx$, $v=\dfrac{3}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}$. Тогда

$$a_n=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1+\frac{3}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{n\pi}(x-1)\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^3-\frac{3}{n\pi}\int_1^3\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{n^2\pi^2}\left(-\cos\frac{n\pi}{3}+1+\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi+1-2\cos\frac{n\pi}{3}\right)=\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n+1-2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

ак как $\cos n\pi=(-1)^n$.

Следовательно, искомое разложение функции в ряд Фурье по косинусам меет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{3}=$$

$$=\frac{5}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left((-1)^n+1-2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3}.$$

то разложение справедливо в области непрерывности данной функции.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основные теоретические сведения

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется ифференцируемая функция $y=\varphi(x,\ C)$, которая при любом значении произволь ой постоянной C является решением данного уравнения. Решения, получающие из общего решения $y=\varphi(x,\ C)$ при определенном значения произвольной остоянной C, называются *частными*. Задача нахождения частного решения, довлетворяющего начальным условиям $y=y_0$ при $x=x_0$ (другая запись $_{x=x_0}=y_0$), называется *задачей Коши*.

График всякого решения $y=\varphi(x)$ данного дифференциального уравнения, остроенный на плоскости xOy, называется *интегральной кривой* этого уравнения.

2. Уравнение вида $y'+A(x)y=B(x)$ называется *линейным*. Если $B(x)=0$, то равнение называется *однородным*; если $B(x)\neq 0$ — *неоднородным*. Общее решение днородного уравнения получается путем разделения переменных; общее решение еоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего од ородного уравнения с помощью вариации произвольной постоянной интег рования C.

Данное неоднородное уравнение можно интегрировать также с помощью мены $y=uv$, где u, v — две неизвестные функции.

3. *Дифференциальное уравнение n-го порядка*, разрешенное относительно про водной, имеет вид $y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$.

Задача нахождения решения $y=\varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего чальным условиям $y|_{x=x_0}=y_0$; $y'|_{x=x_0}=y'_0$; ...; $y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$, называется дачей Коши.

Для нахождения частного решения иногда используют так называемые краевые условия. Эти условия (их число не должно превышать порядка ура ния) задаются не в одной точке, а на концах некоторого промежутка. Крае условия ставятся лишь для уравнений порядка выше первого.

4. **Теорема существования и единственности решения задачи Коши.** Если в ур нении $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$: а) непрерывна по в своим аргументам $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения; б) им ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ по аргумент $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то найдется интервал $x_0-h<x<x_0+h$ $(h>0)$, на котором сущест ет единственное решение $y=\varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее услови $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$; ...; $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где значения $x=x_0$; $y=y_0$; $y'=y'_0$; $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ содержатся в области D.

Проинтегрировать (в конечном виде) уравнение n-го порядка можно тол в некоторых частных случаях.

5. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянны коэффициентами* имеет вид $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$, где a_0, a_1, a_2 — числа, при $a_0\neq 0$. Если $f(x)=0$, то уравнение называется *однородным*, а если $f(x)\neq 0$ *неоднородным*.

6. Квадратное уравнение $a_0k^2+a_1k+a_2=0$ называется *характеристическ уравнением* дифференциального уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$. Пу $D=a_1^2-4a_0a_2$ — дискриминант квадратного уравнения. Возможны следую случаи:

1) $D>0$ — общим решением уравнения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$ является функ $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ (k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения);

2) $D=0$ — общим решением служит функция $y=(C_1+C_2x)e^{kx}$ (k — кор характеристического уравнения);

3) $D<0$ — общим решением является функция $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin$ ($k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$ — корни характеристического уравнения).

7. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения втор порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теорем

Теорема. Если y^* — некоторое частное решение неоднородного уравне $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ и Y — общее решение соответствующего однородного у нения $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет $y=Y+y^*$.

Укажем правило нахождения частного решения неоднородного уравне методом неопределенных коэффициентов.

1) Пусть $f(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$; тогда:

а) $y^*=Ax^2+Bx+C$, если нуль не является корнем характеристического ура ения;

б) $y^*=Ax^3+Bx^2+Cx$, если нуль является простым корнем характеристичес ого уравнения;

в) $y^*=Ax^4+Bx^3+Cx^2$, если нуль является двукратным корнем характеристи ского уравнения.

2) Пусть $f(x)=be^{\alpha x}$; тогда:

а) $y^*=Ae^{\alpha x}$, если число α не является корнем характеристического уравнения;

б) $y^*=Axe^{\alpha x}$, если число α является корнем характеристического уравнения;

в) $y^*=Ax^2e^{\alpha x}$, если число α является двукратным корнем характеристичес ого уравнения.

3) Пусть $f(x)=e^{\alpha x}(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$; тогда:

а) $y^*=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, если число $\alpha+\beta i$ не является корнем харак еристического уравнения;

б) $y^*=x\cdot e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, если число $\alpha+\beta i$ является корнем харак еристического уравнения;

8. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные функции независимой переменной t, называется *ормальной системой*.

Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений с постоянными оэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{cases}$$

ту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального равнения $\frac{dX}{dt}=AX$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\ \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Решение системы ищем в виде $x_1=p_1e^{\lambda t}$, $x_2=p_2e^{\lambda t}$, ..., $x_n=p_ne^{\lambda t}$. Подставив значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ в систему дифференциальных уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1+a_{12}p_2+\dots+a_{1n}p_n=0, \\ a_{21}p_1+(a_{22}-\lambda)p_2+\dots+a_{2n}p_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}p_1+a_{n2}p_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)p_n=0. \end{cases}$$

Система должна иметь ненулевое решение, поэтому для определения λ получаем уравнение n-й степени:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Пусть это характеристическое уравнение имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет n решений:

1-е решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_1$:

$$x_{11}=p_{11}e^{\lambda_1 t};\ x_{21}=p_{21}e^{\lambda_1 t};\ \dots;\ x_{n1}=p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-е решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_2$:

$$x_{12}=p_{12}e^{\lambda_2 t};\ x_{22}=p_{22}e^{\lambda_2 t};\ \dots;\ x_{n2}=p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

. . . .

n-е решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_n$:

$$x_{1n}=p_{1n}e^{\lambda_n t};\ x_{2n}=p_{2n}e^{\lambda_n t};\ \dots;\ x_{nn}=p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Получена фундаментальная система решений. Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1=c_1x_{11}+c_2x_{12}+\dots+c_nx_{1n}, \\ x_2=c_1x_{21}+c_2x_{22}+\dots+c_nx_{2n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=c_1x_{n1}+c_2x_{2n}+\dots+c_nx_{nn}. \end{cases}$$

9. Пусть $u=u(x;\ t)$ — функция, характеризующая отклонение точек струны от положения равновесия в момент времени t. Функция $u=u(x;\ t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f,$$

где $a^2=T_0/\rho$, $f=F/\rho$, ρ — масса единицы длины (линейная плотность струны); F — сила, действующая на струну перпендикулярно оси Ox и рассчитанная на единицу длины; T_0 — начальное натяжение.

Если $f=0$ (т. е. внешняя сила отсутствует), то получается уравнение свободных колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Пусть $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ (форма и скорость струны в начальный момент времени). Эти условия называются *начальными условиями* задачи.

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний струны имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz.$$

Решение дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u|_{t=0}=\varphi(x)$; $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$ и граничным (краевым) условиям $u|_{x=0}=0$ и $u|_{x=l}=0$, может быть представлено как сумма бесконечного ряда:

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$, $b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$.

Граничные условия вводятся при изучении колебаний струны длины l, закрепленной в двух точках $x=0$ и $x=l$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xy+e^x+xy'=0$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$.

Решение. Перепишем данное уравнение так: $xy'+xy=-e^x$ — и рассмотрим однородное уравнение $xy'+xy=0\Rightarrow x(y'+y)=0$. Так как $x\neq 0$ (значение $x=0$ не является решением неоднородного уравнения), то $y'+y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-dx\Rightarrow\ln y=-x+\ln C\Rightarrow\ln\frac{y}{C}=-x\Rightarrow y\ C\cdot e^{-x}$ — общее решение однородного уравнения.

Применяем далее метод вариации произвольной постоянной C. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y=C(x)e^{-x}$, $y'=C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}$. Подставив значения y и y' в неоднородное уравнение, получим

$$xC'(x)e^{-x}-xC(x)e^{-x}+xC(x)e^{-x}=e^{-x}\Rightarrow xe^{-x}C'(x)=e^{-x}.$$

Так как $e^{-x}\neq 0$, то

$$xC'(x)=1\Rightarrow x\frac{dC(x)}{dx}=1\Rightarrow dC(x)=\frac{dx}{x}\Rightarrow C(x)=\ln x+C.$$

Подставив это значение $C(x)$ в общее решение неоднородного уравнения, получим $y=(\ln x+C)e^{-x}$ — общее решение неоднородного уравнения.

Для нахождения частного решения подставим значения $x=1$, $y=2$ в общее решение: $y(1)=2\Rightarrow 2=(0+C)\cdot 1\Rightarrow C=2$. Значит, $y=(\ln x+2)e^{-x}$ — частное решение неоднородного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $2xy'''=y''$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=-1$; $y'(1)=0$; $y''(1)=1$.

Решение. Пусть $y''=z$. Имеем $2xz'-z=0\Rightarrow 2x\frac{dz}{dx}=z\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}\Rightarrow$ $\Rightarrow\ln z=\frac{1}{2}\ln x+\ln C_1\Rightarrow z=C_1\sqrt{x}$. Но $z=y''\Rightarrow y''=C_1\sqrt{x}\Rightarrow y'=C_1\frac{x^{3/2}}{3/2}+C_2$; $y'=\frac{2}{3}C_1x\sqrt{x}+C_2\Rightarrow y=\frac{2}{3}C_1\frac{x^{5/2}}{5/2}+C_2x+C_3$. Следовательно, $y=\frac{4}{15}C_1x^2\cdot\sqrt{x}+$ $+C_2x+C_3$ — общее решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим в выражения для y, y' и y'' значение $x=1$:

$$y(1)=-1\Rightarrow\frac{4}{15}C_1+C_2+C_3=-1;$$

$$y'(1)=0\Rightarrow\frac{2}{3}C_1+C_2=0;$$

$$y''(1)=1\Rightarrow C_1=1.$$

Из системы уравнений $C_2+C_3=-\frac{19}{15}$; $C_2=-\frac{2}{3}$ находим $C_2=-\frac{2}{3}$; $C_3=-\frac{3}{5}$. Значит, искомое частное решение имеет вид

$$y=\frac{4}{15}x^2-\sqrt{x}-\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+13y=5\sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0=\frac{2}{29}$; $y'_0=\frac{1}{29}$ при $x=0$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y''+4y'+13y=0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+13=0$, откуда $k_1=-2-3i$, $k_2=-2+3i$. Следовательно, $Y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ общее решение однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$. Имеем

$$y^{*\prime}=-2A\cdot\sin 2x+2B\cos 2x,\ y^{*\prime\prime}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим эти выражения в неоднородное уравнение

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-8A\sin 2x+8B\cos 2x+13A\cos 2x+$$
$$+13B\sin 2x=5\sin 2x;$$
$$(9A+8B)\cos 2x+(-8A+9B)\sin 2x=5\sin 2x$$

и получим систему для вычисления коэффициентов A и B:

$$\begin{cases}9A+8B=0\\ -8A+9B=5\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A=-\frac{8}{29},\\ B=\frac{9}{29}.\end{matrix}$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^*=-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения — вид

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y_0=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1-\frac{8}{29}=\frac{2}{29}\Rightarrow C_1=\frac{10}{29};$$

$$y'=-2x^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+e^{-2x}(-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x)+$$
$$+\frac{16}{29}\sin 2x+\frac{18}{29}\cos 2x;\ y'_0=\frac{1}{29}\Rightarrow -2C_1+3C_2+\frac{18}{29}=\frac{1}{29}\Rightarrow C_2=\frac{1}{29}.$$

Искомое частное решение таково:

$$y=e^{-2x}\left(\frac{10}{29}\cos 3x+\frac{1}{29}\sin 3x\right)-\frac{8}{29}\cos 2x+\frac{9}{29}\sin 2x.$$

Пример 4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_1-3x_2,\\ \frac{dx_2}{dt}=x_2-3x_1.\end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-3x_2,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=-3x_1+x_2.\end{cases}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)^2-9=0\Rightarrow 1-\lambda=\pm 3\Rightarrow\lambda_1=-2;\ \lambda_2=4.$$

Подставим найденные значения корней характеристического уравнения в систему линейных алгебраических уравнений относительно p_1, p_2.

Для $\lambda=-2$ имеем

$$\begin{cases}(1+2)p_1-3p_2=0\\ -3p_1+(1+2)p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3p_1-3p_2=0\\ -3p_1+3p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1-p_2=0,\\ p_1-p_2=0\end{cases}$$

(второе уравнение есть следствие первого). Возьмем, например, $p_1=k$; тогда $p_2=k$. Полагая $k=1$, найдем $p_1=1$; $p_2=1$. Итак, для $\lambda=-2$ получим $x_{11}=e^{-2t}$; $x_{21}=e^{-2t}$.

Для $\lambda=4$ имеем

$$\begin{cases}(1-4)p_1-3p_2=0\\ -3p_1+(1-4)p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3p_1-3p_2=0\\ -3p_1-3p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1+p_2=0,\\ p_1+p_2=0\end{cases}$$

(второе уравнение есть следствие первого). Возьмем, например, $p_1=k$; тогда $p_2=-k$. Полагая $k=1$, найдем $p_1=1$; $p_2=-1$. Итак, для $\lambda=4$ получим $x_{12}=e^{4t}$; $x_{22}=-e^{4t}$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda=-2$: $x_{11}=e^{-2t}$; $x_{21}=e^{-2t}$,

для $\lambda=4$: $x_{12}=e^{4t}$; $x_{22}=-e^{4t}$.

Следовательно, общее решение системы имеет вид

$$x_1=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t},\ x_2=C_1e^{-2t}-C_2e^{4t}.$$

Пример 5. Дана струна, закрепленная на концах $x=0$, $x=l$. Пусть в начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной OAB, изображенной на рис. 15. Найти форму струны для любого момента времени, если

$$\psi(x)=\begin{cases}2ax,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\[2mm] 2a(l-x),\ \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Решение. Из рисунка и условия задачи имеем

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\[2mm] \dfrac{2h}{l}(l-x),\ \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

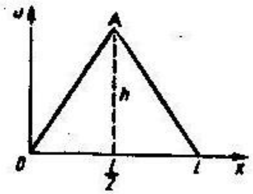

Рис. 15

Находим

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{4h}{l^2}\int_0^{l/2}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{4h}{l^2}\int_{l/2}^{l}(l-x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Интеграл $\int x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$ берем по частям; $u=x$, $dv=\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$, откуда $du=dx$, $v=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}$; следовательно;

$$\int x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{l}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{l}+\int\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=-\frac{l}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Итак,

$$a_k=\frac{4h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+\frac{4h}{l}\int_{l/2}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx-\frac{4h}{l^2}\int_{l/2}^{l}x\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

В результате получим $a_k=\dfrac{8h}{k^2\pi^2}\sin\dfrac{k\pi}{2}$. Далее, находим

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{4a}{k\pi a}\int_0^{l/2}x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{4a}{k\pi a}\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{4a}{k\pi a}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{4al}{k\pi a}\int_{l/2}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx-\frac{4a}{k\pi a}\int_{l/2}^{l}x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Окончательно получим $b_k=\frac{8al^2}{k^3\pi^3 a}\sin\frac{k\pi}{2}$.

Таким образом, искомая функция имеет вид

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{h}{k^2}\cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{al^2}{k^3}\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные теоретические сведения

1. При классическом определении *вероятность* события A определяется соотношением $P(A)=\frac{m}{n}$, где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A, а n — общее число возможных элементарных исходов испытания. Предполагается, что элементарные исходы единственно возможны и равновозможны. *Относительная частота* события A есть $w(A)=\frac{m}{n}$, где m — число испытаний, в которых событие A наступило, а n — общее число произведенных испытаний.

При статистическом определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту.

2. **Схема испытаний Бернулли (повторение опытов).** Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p\,(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), есть

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{где } q=1-p. \tag{1}$$

Вероятность того, что событие наступит:

а) менее k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k-1)$,

б) более k раз: $P_n(k+1)+P_n(k+2)+\ldots+P_n(n)$,

в) не менее k раз: $P_n(k)+P_n(k+1)+\ldots+P_n(n)$,

г) не более k раз: $P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(k)$.

3. Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям. В таких случаях пользуются предельными теоремами Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), выражается приближенным равенством

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$; $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Функция $\varphi(x)$ — четная, т. е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$. При $x>5$ можно считать, что $\varphi(x)=0$.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0<p<1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, выражается приближенным равенством

$$P(k_1;k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{3}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ — функция Лапласа; $x_1=(k_1-np)/\sqrt{npq}$; $x_2=(k_2-np)/\sqrt{npq}$. При $x>5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$. Функция Лапласа — четная, т. е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$; $\Phi(0)=0$.

4. *Нормальным распределением* называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность распределения которого имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m — математическое ожидание, а σ — среднее квадратическое отклонение величины X.

Вероятность того, что x примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), составляет

$$P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right), \tag{4}$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, выражается равенством

$$P(|x-m|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma). \tag{5}$$

5. Если линия регрессии Y на X — прямая, то корреляцию называют *линейной*. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r_в\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}), \tag{6}$$

где $r_в=\frac{\sum n_{xy}xy-n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$.

Если данные наблюдения над признаками X и Y заданы в виде корреляционной таблицы с равноотстоящими вариантами, то целесообразно перейти к условным вариантам $u_i=\dfrac{x_i-C_1}{h_1}$, $v_j=\dfrac{y_j-C_2}{h_2}$, где C_1 — ложный нуль вариант X (в качестве его выгодно принять варианту, расположенную примерно в центре вариационного ряда и имеющую наибольшую частоту); h_1 — шаг, т. е. разность между соседними вариантами X. Величины C_2 и h_2 относятся к варианте Y. В этом случае выборочный коэффициент корреляции

$$r_в=\frac{\sum n_{uv}uv-n\bar{u}\cdot\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}. \qquad (7)$$

Величины $\bar{u}$, $\bar{v}$ σ_u, σ_v могут быть найдены либо методом произведений, либо непосредственно по формулам

$$\bar{u}=\frac{\sum n_u u}{n};\ \bar{v}=\frac{\sum n_v v}{n};\ \sigma_u=\sqrt{\overline{u^2}-(\bar{u})^2};\ \sigma_v=\sqrt{\overline{v^2}-(\bar{v})^2}.$$

Зная эти величины, можно определить входящие в уравнение регрессии значения по формулам

$$\bar{x}=\bar{u}h_1+C_1;\ \bar{y}=\bar{v}h_2+C_2;\ \sigma_x=\sigma_u h_1;\ \sigma_y=\sigma_v h_2.$$

Пример 1. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 5 человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут 2 женщины и 3 мужчины.

Решение. Число всех способов выбора 5 человек из 25 равно C_{25}^5, а число способов выбора двух женщин из 5 равно C_5^2. Каждая такая двойка может сочетаться с каждой тройкой из 20 мужчин. Число таких троек равно C_{20}^3. Искомая вероятность составляет

$$P=\frac{C_5^2\cdot C_{20}^3}{C_{25}^5}=\frac{380}{1771}\approx 0{,}215.$$

Пример 2. Слово «лотос», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекают одну за другой три буквы. Какова вероятность того, что при этом появится слово «сто»?

Решение. Вероятность появления буквы «с» равна 1/5. Вероятность появления вслед за ней буквы «т» равна $\frac{1}{4}$, и, наконец, вероятность появления буквы «о» равна $\frac{2}{3}$. Искомая вероятность $P=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}\approx 0{,}033$.

Пример 3. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,2 может оказаться брюнетом, с вероятностью 0,3 — блондином, с вероятностью 0,4 — шатеном и с вероятностью 0,1 — рыжим. Какова вероятность того, что среди пяти

случайно встреченных лиц: а) не менее четырех блондинов; б) два блондина и три шатена; в) хотя бы один рыжий?

Решение. а) Искомая вероятность составляет [см. формулу (1)]

$$P=P_5(4)+P_5(5)=C_5^4(0{,}3)^4\cdot(0{,}7)^1+C_5^5(0{,}3)^5\cdot(0{,}7)^0=0{,}03078.$$

б) Искомая вероятность

$$P=P_5(2)\cdot P_5(3)=[C_5^2\cdot(0{,}3)^2\cdot(0{,}7)^3]\cdot[C_5^3\cdot(0{,}4)^3\cdot(0{,}6)^2]=$$
$$=0{,}3078\cdot 0{,}2304\approx 0{,}07.$$

в) Искомая вероятность

$$P=1-P_5(0)=1-C_5^0\cdot(0{,}1)^0\cdot(0{,}9)^4=1-0{,}6561=0{,}3439.$$

Пример 4. Игральную кость подбрасывают 500 раз. Какова вероятность того, что шестерка при этом выпадет 50 раз?

Решение. Здесь $n=500$; $k=50$; $p=1/6$; $q=5/6$; $\sqrt{npq}=\sqrt{500\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{50}{6}$; $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{50-500\cdot(1/6)}{50/6}=-4$; $\varphi(-4)=\varphi(4)=0{,}000134$. По формуле (2) находим искомую вероятность:

$$P_{500}(50)=\frac{0{,}000134}{50/6}=0{,}000016.$$

Пример 5. Пусть вероятность того, что покупателю необходимо купить обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 400 покупателей не более 100 потребуют обувь этого размера.

Решение. По условию, $n=400$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $k_1=0$; $k_2=100$; $\sqrt{npq}=\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=8$; $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0-400\cdot 0{,}2}{8}=-10$; $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{8}=2{,}5$. Согласно формуле (3), искомая вероятность есть

$$P_{400}(0;\ 100)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-10)=\Phi(2{,}5)+\Phi(10)=$$
$$=0{,}49379+0{,}5=0{,}99379.$$

Пример 6. Непрерывная случайная величина X распределена нормально. Известно, что $D(x)=4$ и $P(x<1)=0{,}5$. Найти $P(x>0)$.

Решение. По формуле (4) получим

$$P(x>0)=P(0<x+\infty)=\Phi\left(\frac{+\infty-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-a}{\sigma}\right)=$$
$$=\Phi(+\infty)+\Phi\left(\frac{a}{2}\right).$$

Найдем a. Имеем

$$P(x<1)=P(-\infty<x<1)=\Phi\left(\frac{1-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{1-a}{2}\right)-\Phi(-\infty)=\Phi\left(\frac{1-a}{2}\right)+0{,}5,$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{1-a}{2}\right)+0{,}5=0{,}5\Rightarrow\Phi\left(\frac{1-a}{2}\right)=0\Rightarrow\frac{1-a}{2}=0\Rightarrow a=1.$$

Окончательно находим

$$P(x>0)=\Phi(+\infty)+\Phi\left(\frac{a}{2}\right)=0{,}5+\Phi(0{,}5)=$$

$$=0{,}5+0{,}191462=0{,}691462.$$

Пример 7. Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно 2; $M(x)=16$. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значения случайной величины.

Решение. По формуле (5) имеем $P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=$ $=0{,}95\Rightarrow\Phi\left(\frac{\delta}{2}\right)=0{,}475\Rightarrow\frac{\delta}{2}=1{,}96\Rightarrow\delta=3{,}92.$ Найдем границы интервала: $|x-a|<\delta\Rightarrow|x-16|<3{,}92\Rightarrow-3{,}92<x-16<3{,}92\Rightarrow 12{,}08<x<19{,}92.$

Пример 8. Найти выборочное уравнение прямой линии $\bar{y}_x-\bar{y}=r_в\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ регрессии Y и X по данным корреляционной таблицы (табл. 1).

Таблица 1

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
10	2	3	—	—	—	—	5
20	—	7	3	—	—	—	10
30	—	—	2	50	2	—	54
40	—	—	1	10	6	—	17
50	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

Решение. Составим корреляционную таблицу (табл. 2) в условных вариантах, выбрав в качестве ложных нулей $C_1=19$ и $C_2=30$.

Таблица 2

v	u						n_v
	−3	−2	−1	0	1	2	
−2	2	3	—	—	—	—	5
−1	—	7	3	—	2	—	10
0	—	—	2	50	2	—	54
1	—	—	1	10	6	—	17
2	—	—	—	4	7	3	14
n_u	2	10	6	64	15	3	$n=100$

Найдем $\bar{u}$ и $\bar{v}$:

$$\bar{u}=\frac{\Sigma n_u u}{n}=\frac{-6-20-6+0+15+6}{100}=-0{,}11;$$

$$\bar{v}=\frac{\Sigma n_v v}{n}=\frac{-10-10+0+17+28}{100}=0{,}25.$$

Найдем $\bar{u^2}$ и $\bar{v^2}$:

$$\bar{u^2}=\frac{\Sigma n_u u^2}{n}=\frac{2\cdot 9+10\cdot 4+6\cdot 1+64\cdot 0+15\cdot 1+3\cdot 4}{100}=$$

$$=\frac{91}{100}=0{,}91;$$

$$\bar{v^2}=\frac{\Sigma n_v v^2}{n}=\frac{5\cdot 4+10\cdot 1+54\cdot 0+17\cdot 1+14\cdot 4}{100}=\frac{103}{100}=1{,}03.$$

Найдем σ_u и σ_v:

$$\sigma_u=\sqrt{\bar{u^2}-(\bar{u})^2}=\sqrt{0{,}91-(-0{,}11)^2}\approx 0{,}95;$$

$$\sigma_v=\sqrt{\bar{v^2}-(\bar{v})^2}=\sqrt{1{,}03-(0{,}25)^2}\approx 0{,}97.$$

Найдем $\Sigma n_{uv}uv$, для чего составим расчетную таблицу. Суммируя числа последнего столбца табл. 3, получим $\sum_v vU=72$. Для контроля вычислений находим сумму чисел последней строки: $\sum_u uV=72$.

Указания к составлению табл. 3. Произведения частоты n_{uv} на варианту u, т. е. $n_{uv}u$, записывают в правом верхнем углу клетки, содержащей частоту. Складывают все числа, помещенные в правых верхних углах клеток данной строки, и их сумму помещают в клетку этой же строки «столбца U». Умножают варианту v на U и полученное произведение записывают в соответствующую клетку «столбца vU». Сложив все числа «столбца vU», получают сумму $\sum\limits_{v} vU$, которая равна искомой сумме $\Sigma n_{uv}uv$. Для данной таблицы $\Sigma n_{uv}uv=72$. Для контроля расчета аналогичные вычисления производят по столбцам: произведения $n_{uv}v$ записывают в левый нижний угол клетки, содержащей частоту; все числа, помещенные в левых нижних углах одного столбца, складывают и их сумму помещают в «строку V». Умножают каждую варианту V на u и результат записывают в клетках последней строки. Сложив все числа последней строки, получают сумму $\sum\limits_{u} uV$, которая также равна искомой сумме $\Sigma n_{uv}uv$ (в данном случае 72). По формуле (7) найдем искомый выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{\text{в}}=\frac{\Sigma n_{uv}uv-n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}=\frac{72-100\cdot(-0{,}11)\cdot 0{,}31}{100\cdot 0{,}95\cdot 0{,}97}=0{,}82.$$

Таблица 3

v	u							
	-3	-2	-1	0	1	2	$U=\Sigma n_{uv}u$	vU
-2	-6 2 -4	-6 3 -6	—	—	—	—	-12	24
-1	—	-14 7 -7	-3 3 -3	—	—	—	-17	17
0	—	—	-2 2 0	0 50 0	2 2 0	—	0	0
1	—	—	-1 1 1	0 10 10	6 6 6	—	5	5
2	—	—	—	0 4 8	7 7 14	6 3 6	13	26
$V=\Sigma n_{uv}v$	-4	-13	-2	18	20	6		$\Sigma vU=72$
uV	12	26	2	0	20	12	$\Sigma uV=72$	←↑ Контроль

Далее находим h_1 и h_2, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, σ_x и σ_y:

$$h_1=9-4=5;\ h_2=20-10=10;$$

$$\bar{x}=\bar{u}\cdot h_1+C_1=-0{,}11\cdot 5+19=18{,}45;$$

$$\bar{y}=\bar{v}\cdot h_2+C_2=0{,}25\cdot 10+30=32{,}5;\ \sigma_x=h_1\cdot\sigma_u=5\cdot 0{,}95=4{,}75;$$

$$\sigma_y=h_2\cdot\sigma_v=10\cdot 0{,}97=9{,}7.$$

Подставив найденные величины в формулу (6), получим

$$\bar{y}_x-32{,}5=0{,}82\cdot\frac{9{,}7}{4{,}75}(x-18{,}45),\ \text{или}\ \bar{y}_x=1{,}67x+2{,}2.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

I. По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти: 1) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3; 6) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$; 7) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.

1. $A_1(-1;\ 2;\ 1)$, $A_2(-2;\ 2;\ 5)$; $A_3(-3;\ 3;\ 1)$, $A_4(-1;\ 4;\ 3)$.

2. $A_1(-2;\ 1;\ -1)$, $A_2(-3;\ 1;\ 3)$, $A_3(-4;\ 2;\ -1)$, $A_4(-2;\ 3;\ 1)$.

3. $A_1(1;\ 1;\ 2)$, $A_2(0;\ 1;\ 6)$, $A_3(-1;\ 2;\ 2)$, $A_4(1;\ 3;\ 4)$.

4. $A_1(-1;\ -2;\ 1)$, $A_2(-2;\ -2;\ 5)$, $A_3(-3;\ -1;\ 1)$, $A_4(-1;\ 0;\ 3)$.

5. $A_1(2;\ -1;\ 1)$, $A_2(1;\ -1;\ 5)$, $A_3(0;\ 0;\ 1)$, $A_4(2;\ 1;\ 3)$.

6. $A_1(-1;\ 1;\ -2)$, $A_2(-2;\ 1;\ +2)$, $A_3(-3;\ 2;\ -2)$, $A_4(-1;\ 3;\ 0)$.

7. $A_1(1;\ 2;\ 1)$, $A_2(0;\ 2;\ 5)$, $A_3(-1;\ 3;\ 1)$, $A_4(1;\ 4;\ 3)$.

8. $A_1(-2;\ -1;\ 1)$, $A_2(-3;\ -1;\ 5)$, $A_3(-4;\ 0;\ 1)$, $A_4(-2;\ 1;\ 3)$.

9. $A_1(1;\ -1;\ 2)$, $A_2(0;\ -1;\ 6)$, $A_3(-1;\ 0;\ 2)$, $A_4(1;\ 1;\ 4)$.

10. $A_1(1;\ -2;\ 1)$, $A_2(0;\ -2;\ 5)$, $A_3(-1;\ -1;\ 1)$, $A_4(1;\ 0;\ 3)$.

11. $A_1(0;\ 3;\ 2)$, $A_2(-1;\ 3;\ 6)$, $A_3(-2;\ 4;\ 2)$, $A_4(0;\ 5;\ 4)$.

12. $A_1(-1;\ 2;\ 0)$, $A_2(-2;\ 2;\ 4)$, $A_3(-3;\ 3;\ 0)$, $A_4(-1;\ 4;\ 2)$.

13. $A_1(2;\ 2;\ 3)$, $A_2(1;\ 2;\ 7)$, $A_3(0;\ 3;\ 3)$, $A_4(2;\ 4;\ 5)$.

14. $A_1(0;\ -1;\ 2)$, $A_2(-1;\ -1;\ 6)$, $A_3(-2;\ 0;\ 2)$, $A_4(0;\ 1;\ 4)$.

15. $A_1(3;\ 0;\ 2)$, $A_2(2;\ 0;\ 6)$, $A_3(1;\ 1;\ 2)$, $A_4(3;\ 2;\ 4)$.

16. $A_1(0;\ 2;\ -1)$, $A_2(-1;\ 2;\ 3)$, $A_3(-2;\ 3;\ 7)$, $A_4(0;\ 4;\ 1)$.

17. $A_1(2;\ 3;\ 2)$, $A_2(1;\ 3;\ 6)$, $A_3(0;\ 4;\ 2)$, $A_4(2;\ 5;\ 4)$.

18. $A_1(-1;\ 0;\ 2)$, $A_2(-2;\ 0;\ 6)$, $A_3(-3;\ 1;\ 2)$, $A_4(-1;\ 2;\ 4)$.

19. $A_1(2;\ 0;\ 3)$, $A_2(1;\ 0;\ 7)$, $A_3(0;\ 1;\ 3)$, $A_4(2;\ 2;\ 5)$.

20. $A_1(2;\ -1;\ 2)$, $A_2(1;\ -1;\ 6)$, $A_3(0;\ 0;\ 2)$, $A_4(2;\ 1;\ 4)$.

II. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления. Проверить правильность вычисления обратной матрицы, используя матричное умножение.

1. $\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=1, \\ x_2-5x_3=-9. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -2x_2-5x_3=-12, \\ -2x_1-x_2+3x_3=7, \\ -x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x_1+x_2+3x_3=10, \\ -2x_2-x_3=-4, \\ 2x_1-x_2+3x_3=3. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} -x_1+2x_3=5, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=10, \\ 3x_1-2x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3=-15, \\ 3x_1-x_2+x_3=-2, \\ -x_1+3x_3=7. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1-4x_2+3x_3=-1, \\ -2x_2-3x_3=-8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-1, \\ -x_1+3x_3=7, \\ x_1+x_2+3x_3=6. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 3x_1-2x_2=-5, \\ x_1-2x_2+x_3=-1, \\ x_1+3x_2-x_3=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-2, \\ x_1-2x_2-4x_3=-11, \\ -2x_1-x_2=1. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} -x_1+3x_2=4, \\ 3x_1-2x_2+x_3=-3, \\ 2x_1+x_2-x_3=-3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1+7x_2-3x_3=-10, \\ 2x_1+9x_2-x_3=8, \\ -x_1+6x_2-3x_3=3. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+4x_2+x_3=6, \\ -3x_1+3x_2-7x_3=-13. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=-10, \\ -x_1+5x_2-2x_3=5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=3. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} -2x_1+5x_2-6x_3=-8, \\ x_1+7x_2-5x_3=-9, \\ 4x_1+2x_2-x_3=-12. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -3x_1+5x_2-6x_3=-5, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=8, \\ x_1+4x_2-x_3=1. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 3x_1-9x_2+8x_3=5, \\ 2x_1-5x_2+5x_3=4, \\ 2x_1-x_2+x_3=-4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=-5, \\ x_1+9x_2-4x_3=-1, \\ -2x_1+6x_2-3x_3=6. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 4x_1-x_2+5x_3=6, \\ x_1-2x_2+4x_3=9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -2x_1+x_2-3x_3=-4, \\ 4x_1+7x_2-2x_3=-6, \\ x_1-8x_2+5x_3=1. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x_1+7x_2-2x_3=3, \\ 3x_1+5x_2+x_3=5, \\ -2x_1+5x_2-5x_3=-4. \end{cases}$

III. Найти множество решений однородной системы трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

1. $\begin{cases} 3x_1-5x_2-x_3-2x_4=0, \\ 8x_1-6x_2+3x_3-7x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4=0. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3-9x_4=0, \\ 5x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0, \\ x_1+7x_2-6x_3-15x_4=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1+x_2-3x_3-10x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-7x_3-20x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-6x_4=0, \\ 7x_1+3x_2+2x_3-15x_4=0, \\ 5x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-6x_4=0, \\ 7x_1-3x_2-7x_3-18x_4=0, \\ 4x_1-x_2-5x_3-12x_4=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-x_4=0, \\ 5x_1-7x_2-2x_3-5x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3-9x_4=0, \\ 3x_2-7x_3-10x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3-8x_4=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 5x_1-2x_2+4x_3-4x_4=0, \\ x_1+2x_2-2x_3-6x_4=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+3x_3+x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+8x_3+4x_4=0, \\ -x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+5x_3+4x_4=0, \\ -2x_1+x_2+3x_3+6x_4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1-8x_2-7x_3-x_4=0, \\ -x_1+7x_2-5x_3-1{,}5x_4=0, \\ x_1+6x_2-3x_3+5x_4=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3+2x_4=0, \\ -x_1-2x_2-7x_3-x_4=0, \\ 5x_1-4x_2-x_3+3x_4=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+8x_2-6x_3-2x_4=0, \\ -2x_1-3x_2+x_3-x_4=0, \\ -3x_1-2x_2-4x_3-4x_4=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-3x_3+x_4=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -3x_1-9x_2+25x_3+x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_2+9x_3-5x_4=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ -4x_1+5x_2-3x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} -x_1-3x_2+x_3-8x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+5x_3-12x_4=0, \\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0, \\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-4x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-7x_2-6x_3-3x_4=0, \\ -3x_1+x_2-4x_3-5x_4=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+4x_2-7x_3-3x_4=0, \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4=0, \\ -x_1-3x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$

IV. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -8 & 2 & -5 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -6 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 8 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} -6 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 8 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -8 \\ -8 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

I. Привести уравнение кривой второго порядка $f(x, y)=0$ к каноническому виду и найти точки пересечения ее с прямой $Ax+By+C=0$. Построить графики кривой и прямой.

1. $2x^2-4x-y+3=0$, $2x-y-1=0$.
2. $x-2y^2+4y-3=0$, $x-2y+1=0$.
3. $x^2-2x-y+2=0$, $x-y=0$.
4. $x-y^2+2y-2=0$, $x+y-2=0$.
5. $x^2-2x+y+2=0$, $x-y-2=0$.
6. $x+y^2-2y+3=0$, $x+y+1=0$.
7. $2x^2+8x+y+7=0$, $2x+y+3=0$.
8. $x+2y^2-4y+4=0$, $x-2y+4=0$.

9. $x^2+4x+y+3=0,\ x-y+3=0.$
10. $x+2y^2+4y+1=0,\ x+2y+1=0.$
11. $x^2-2x+y-3=0,\ 3x-y-2=0.$
12. $y^2+x-4y+6=0,\ 3x+10=0.$
13. $2x^2+y^2-12x+10=0,\ x+y-2=0.$
14. $x^2+2x+y-2=0,\ 2x-y+4=0.$
15. $2x^2+4x+y^2-2=0,\ 2x+y+2=0.$
16. $x^2+2y^2-12y+10=0,\ x+y-3=0.$
17. $x^2+y^2-6x+5=0,\ 2x+y-6=0.$
18. $y^2+x+4y+3=0,\ x+2y+2=0.$
19. $x^2+2y^2+8y+4=0,\ 5y+4=0.$
20. $x^2+y^2-4y+3=0,\ 3x+y-3=0.$

II. Требуется: 1) построить по точкам график функции $\rho=\rho(\varphi)$ в полярной системе координат. Значения функции вычислять в точках $\varphi_k=\pi k/8$; 2) найти уравнение кривой в прямоугольной системе координат, начало которой совмещено с полюсом, а положительная полуось Ox — с полярной осью; 3) определить вид кривой.

1. $\rho=6\cos\varphi.$
2. $\rho=-2\sin\varphi.$
3. $\rho=2\cos\varphi.$
4. $\rho=-4\sin\varphi.$
5. $\rho=-4\cos\varphi.$
6. $\rho=-2\cos\varphi.$
7. $\rho=4\cos\varphi.$
8. $\rho=-6\sin\varphi.$
9. $\rho=4\sin\varphi.$
10. $\rho=2\sin\varphi.$
11. $\rho^2=2\cos 2\varphi.$
12. $\rho^2=2\sin 2\varphi.$
13. $\rho^2=4\cos 2\varphi.$
14. $\rho^2=4\sin 2\varphi.$
15. $\rho^2=6\cos 2\varphi.$
16. $\rho^2=-2\cos 2\varphi.$
17. $\rho^2=-2\sin 2\varphi.$
18. $\rho^2=-4\cos 2\varphi.$
19. $\rho^2=-4\sin 2\varphi.$
20. $\rho^2=6\sin 2\varphi.$

III. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x}{-5x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\ln(x+4)}{\operatorname{ctg}(x+2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{\frac{5}{x+1}}$

2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^2+7x+2}{x^2-5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0,5-0}\dfrac{2x-1}{\ln(0,5-x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2-x}{3x^2+7x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{1-\cos\frac{2}{x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x+1}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{-\frac{2}{x-4}}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+5}{-5x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin(3x-1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-\sin^2 3x)}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{4}{x+3}}$;

5. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-x}{2x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{e^{x-3}}{x^2-5x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^2(\pi-3x)}{(3x-\pi)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{-\frac{3}{4-2x}}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x+2}{x^2+4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{x+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}(1-5x^2)^{-\frac{3}{x^2}}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^2+5x}{x^2+4x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{3x^2+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1-3x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to-4}(9+2x)^{\frac{6}{x+4}}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x-1}{-2x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{\sin 5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}(-3-2x)^{-\frac{2}{x+2}}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-7x^2+4x}{3x^2-x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\operatorname{ctg}(x-3)}{2^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+4}{\arcsin(x+2)}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{-\frac{3}{x-1}}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-3x-1}{-4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{\operatorname{tg}(x+1)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{e^{-x^2}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{1}{6-2x}}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$,

3) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{6x^2+5x+1}{2x^2-x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{2}{x-4}}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{\operatorname{tg}\pi x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2-2x+7}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6}$, 4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{\frac{-4}{x+3}}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x+1}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$,

3) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 2x)^{\frac{1}{1-\cos 4x}}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x\cdot(\operatorname{tg}x+x)$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to 0}(2+x)^{\frac{1}{x^2}}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x-10}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1/3}\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^{-x^2}-1}{\operatorname{arctg}x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(9-x^3)^{\frac{4}{x-2}}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{ctg}x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$,

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x^2)^{\frac{1}{2(1-x)}}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{e^{x+2}-1}{\ln(x+2)}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+9x+17}{21x^3+10x-2}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$, 4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to -1}(4-x)^{\frac{1}{(1+x)^2}}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2-3x+1}$, 4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$.

IV. Функция $f(x)$ представляет собой сумму трех одночленов. Указать среди них одночлен, эквивалентный всей сумме: а) при $x\to 0$; б) при $x\to\infty$.

1. $f(x)=5x^2-3x+\sqrt[3]{x}$.
2. $f(x)=-3x^2+x-\sqrt[4]{x^3}$.
3. $f(x)=x^2-5x+4\sqrt[3]{x^2}$.
4. $f(x)=-2x^2+4x-3\sqrt[4]{x^5}$.
5. $f(x)=-4x^2-2x+5\sqrt[3]{x^4}$.
6. $f(x)=4x^2+7x-2\sqrt[5]{x}$.
7. $f(x)=-6x^2-2x+3\sqrt[3]{x^5}$.
8. $f(x)=x^2-4x-\sqrt[5]{x^2}$.
9. $f(x)=-5x^2-3x+\sqrt[4]{x}$.
10. $f(x)=3x^2+6x-2\sqrt[5]{x^3}$.
11. $f(x)=3x^2+7\sin 2x$.
12. $f(x)=5x^3+1-\cos x$.
13. $f(x)=x^4-2\sin^2 x$.
14. $f(x)=3x^5-2\cos x+2$.
15. $f(x)=x^3+4\sin^2 3x$.
16. $f(x)=2x^6-1+\cos(x^2)$.
17. $f(x)=3x^3-\sin x$.
18. $f(x)=x^4+3-3\cos 2x$.
19. $f(x)=2x^5-\sin^3 x$.
20. $f(x)=6x^2+\sqrt{1-\cos 2x}$.

V. Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $y=\dfrac{|x+5|}{x+5}-\dfrac{5}{x}$.
2. $y=\dfrac{|x-5|}{x-5}+\dfrac{5}{x}$.
3. $y=\dfrac{|x+4|}{x+4}-\dfrac{4}{x}$.
4. $y=\dfrac{|x-4|}{x-4}+\dfrac{4}{x}$.
5. $y=\dfrac{|x+3|}{x+3}-\dfrac{3}{x}$.
6. $y=\dfrac{|x-3|}{x-3}+\dfrac{3}{x}$.

7. $y=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{2}{x}$.

8. $y=\frac{|x-2|}{x-2}+\frac{2}{x}$.

9. $y=\frac{|x+1|}{x+1}-\frac{1}{x}$.

10. $y=\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{1}{x}$.

11. $y=\begin{cases}\frac{|x+2|}{x+2}, & x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$

12. $y=\begin{cases}\frac{|x+3|}{x+3}, & x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\leqslant x\leqslant 3,\\ \frac{1}{x-3}, & x>3.\end{cases}$

13. $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

14. $y=\begin{cases}-\frac{2|x|}{x}, & x<0,\\ \sqrt{4-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{1}{x-2}, & x>2.\end{cases}$

15. $y=\begin{cases}\frac{3|x|}{x}, & x<0,\\ \sqrt{9-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ \frac{1}{x-3}, & x>3.\end{cases}$

16. $y=\begin{cases}-\frac{1}{x+2}, & x<-2,\\ -\sqrt{4-x^2}, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{|x-2|}{x-2}, & x>2.\end{cases}$

17. $y=\begin{cases}-\frac{1}{x+3}, & x<-3,\\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\leqslant x\leqslant 3,\\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x>3.\end{cases}$

18. $y=\begin{cases}-\frac{1}{x+1}, & x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{|x|}{x}, & x>0.\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}-\frac{1}{x+2}, & x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{2|x|}{x}, & x>2.\end{cases}$

20. $y=\begin{cases}-\frac{1}{x+3}, & x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{3|x|}{x}, & x>0.\end{cases}$

VI. А. Найти алгебраическую и тригонометрическую формы числа $z=z_1+z_2$. Изобразить числа z_1, z_2 и z на комплексной плоскости. Вычислить z^{12} по формуле Муавра.

Номер задачи	z_1	z_2	Номер задачи	z_1	z_2
1.	-2	$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	2.	$-2i$	$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
3.	-2	$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	4.	$-2i$	$2\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$
5.	2	$2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	6.	$-2i$	$2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
7.	2	$2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$	8.	$2i$	$2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
9.	2	$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	10.	-2	$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Б. Решить уравнение $az^3+bz^2+cz+d=0$ и изобразить его корни z_1, z_2, z_3 на комплексной плоскости.

Проверить, что

$$z_1+z_2+z_3=-\frac{b}{a},\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=\frac{c}{a},\ z_1z_2z_3=-\frac{d}{a}.$$

Номер задачи	a	b	c	d	Номер задачи	a	b	c	d
11	9	15	11	5	12	9	-21	17	-5
13	4	-12	13	-5	14	2	4	3	1
15	9	21	17	5	16	4	8	9	-5
17	4	12	13	5	18	9	-15	11	-5
19	2	-4	3	-1	20	4	8	9	5

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

1. Найти производную функции одной переменной, исходя из определения производной.

1. $y=-\frac{5}{3x-4}$.

2. $y=\frac{3}{5x+4}$.

3. $y=-\frac{4}{3x-5}$.

4. $y=\frac{5}{4x+3}$.

5. $y=-\frac{3}{4x-5}$.

6. $y=\frac{5}{3x+4}$.

7. $y=-\frac{3}{5x-4}$.

8. $y=\frac{4}{3x+5}$.

9. $y=-\frac{5}{4x-3}$.

10. $y=\frac{3}{4x+5}$.

11. $y=\sqrt{2x-3}$.

12. $y=\sqrt{1-2x}$.

13. $y=\sqrt{4-3x}$.

14. $y=\sqrt{3x+4}$.

15. $y=\sqrt{3x-7}$.

16. $y=\sqrt{2x+3}$.

17. $y=\sqrt{3-2x}$.

18. $y=\sqrt{2x-9}$.

19. $y=\sqrt{1+2x}$.

20. $y=\sqrt{5-3x}$.

II. Найти производные первого порядка данных функций, используя правила вычисления производных.

1. 1) $y=3x^5-\sin x$, 2) $y=\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x$,

3) $y=\frac{\ln x}{4-3\cos x}$, 4) $\begin{cases} x=\arcsin 2t, \\ y=\frac{1}{1-4t^2}. \end{cases}$

2. 1) $y=4x^4+e^x$, 2) $y=\sin x\ln x$,

3) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{\mathrm{ctg}\,x}$, 4) $\begin{cases} x=(1-t)^2, \\ y=\cos(t-1)^2. \end{cases}$

3. 1) $y=3\sqrt[3]{x}-\ln x$, 2) $y=e^x\arcsin x$,

3) $y=\frac{\mathrm{ctg}\,x}{x^4}$, 4) $\begin{cases} x=(t-1)^2, \\ y=\sin(t-1)^2. \end{cases}$

4. 1) $y=5x^2-\arcsin x$, 2) $y=\sqrt[3]{x^2}\ln x$,

3) $y=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{e^x}$. 4) $\begin{cases} x=\mathrm{tg}\,t^2, \\ y=t^2-5. \end{cases}$

5. 1) $y=4\sqrt[6]{x}+\mathrm{arctg}\,x$, 2) $y=x^5e^x$,

3) $y=\frac{\mathrm{tg}\,x}{\ln x}$, 4) $\begin{cases} x=7+t^2, \\ y=\mathrm{ctg}\,3t^2. \end{cases}$

6. 1) $y=5\sqrt[5]{x}-7\,\mathrm{arcctg}\,x$, 2) $y=\cos x\cdot(3x-1)$,

3) $y=\frac{3x^5}{e^x}$, 4) $\begin{cases} x=\ln(1-t^4), \\ y=\arccos t^2. \end{cases}$

7. 1) $y=10x^3+2\cos x$, 2) $y=\sin x\cdot\sqrt[4]{x}$,

3) $y=\frac{\ln x}{\arcsin x}$, 4) $\begin{cases} x=\frac{3}{1+t^2}, \\ y=\mathrm{arctg}\,t. \end{cases}$

8. 1) $y=6\sqrt[3]{x^2}-7\,\mathrm{tg}\,x$, 2) $y=e^x\cdot\arccos x$,

3) $y=\frac{\mathrm{ctg}\,x}{2x^4}$, 4) $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\,(1+t)^2, \\ y=\sqrt{t^2+2t+2}. \end{cases}$

9. 1) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+3\,\mathrm{ctg}\,x$, 2) $y=\ln x\cdot\mathrm{arctg}\,x$,

3) $y=\frac{e^x}{\arcsin x}$, 4) $\begin{cases} x=\sin^2(1-4t), \\ y=\cos^2(1-4t). \end{cases}$

10. 1) $y=7x^6+2\arccos x$, 2) $y=e^x\cdot\mathrm{ctg}\,x$,

3) $y=\frac{5\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}$, 4) $\begin{cases} x=3e^{-t}, \\ y=(2+e^{-t})^3. \end{cases}$

11. 1) $y=\frac{7}{5\sqrt[7]{x^5}}$; 2) $y=\sin^4\frac{x}{4}$.

3) $y=e^{\mathrm{arctg}\frac{x}{3}}$, 4) $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\,t^2, \\ y=\ln(1+t^4). \end{cases}$

12. 1) $y=\frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}$; 2) $y=\mathrm{tg}^5\frac{2x}{5}$;

3) $u=\cos\ln(1-x^2)$; 4) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{(1-t^2)^3}. \end{cases}$

13. 1) $y=\frac{5}{6\sqrt[5]{x^6}}$; 2) $y=\cos^3\frac{4x}{3}$;

3) $y=\mathrm{ctg}\,e^{7x}$; 4) $\begin{cases} x=\ln(5-2t), \\ y=\mathrm{arctg}\,(5-2t). \end{cases}$

14. 1) $y=\frac{3}{7\sqrt[3]{x^7}}$; 2) $y=\mathrm{ctg}^4\frac{x}{4}$;

3) $y=\arcsin\sqrt[3]{4-5x}$; 4) $\begin{cases} x=te^{-4t}, \\ y=(1-4t)^2. \end{cases}$

15. 1) $y=\frac{3}{3\sqrt[3]{x^4}}$; 2) $y=\ln^5\frac{x}{5}$;

3) $y=e^{\arcsin(2x-4)}$; 4) $\begin{cases} x=\mathrm{ctg}\,(1-2t), \\ y=\frac{1}{\cos^2(1-2t)}. \end{cases}$

16. 1) $y=\dfrac{5}{7\sqrt[5]{x^7}}$; 2) $y=\arcsin^4\dfrac{5x}{3}$;

3) $y=\ln(x-\cos 3x)$; 4) $\begin{cases}x=\sin^3(t-4),\\ y=\cos^3(t-4).\end{cases}$

17. 1) $y=\dfrac{4}{5\sqrt[4]{x^5}}$; 2) $y=\arccos^4\dfrac{5x}{3}$;

3) $y=\sin\ln(x^3+1)$; 4) $\begin{cases}x=te^{-5t},\\ y=(5t-1)^2.\end{cases}$

18. 1) $y=\dfrac{6}{5\sqrt[6]{x^5}}$; 2) $y=\operatorname{arcctg}^5\dfrac{2x}{5}$;

3) $y=\operatorname{tg} e^{5-2x}$; 4) $\begin{cases}x=\cos^3(2t+6),\\ y=\sin^3(2t+6).\end{cases}$

19. 1) $y=\dfrac{7}{6\sqrt[7]{x^6}}$; 2) $y=\operatorname{arctg}^3\dfrac{4x}{3}$;

3) $y=\ln(2-\cos^2 x)$; 4) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sin^2(2-t)},\\ y=\operatorname{tg}(2-t).\end{cases}$

20. 1) $y=\dfrac{5}{4\sqrt[5]{x^4}}$; 2) $y=\sin^4\dfrac{e^x}{4}$;

3) $y=\ln(3x^2-\operatorname{tg} 2x)$; 4) $\begin{cases}x=\sqrt{(1-t^2)^3},\\ y=\arcsin t.\end{cases}$

III. Составить уравнения касательной и нормали к графику кривой $y=f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x_0.

1. $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x+2$; $x_0=-1$.
2. $y=3\sqrt[3]{x^2}-8x-1$; $x_0=1$.
3. $y=3\sqrt[3]{x^2}+6x+3$; $x_0=-1$.
4. $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x-2$; $x_0=1$.
5. $y=3\sqrt[3]{x^2}+6x+1$; $x_0=-1$.
6. $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x+2$; $x_0=1$.
7. $y=3\sqrt[3]{x^2}+8x-1$; $x_0=-1$.
8. $y=3\sqrt[3]{x^2}-6x-3$; $x_0=1$.
9. $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x+2$; $x_0=-1$.

10. $y=3\sqrt[3]{x^2}-6x-1$; $x_0=1$.
11. $y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$, $x_0=-\sqrt{2}$.
12. $y=\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=1$.
13. $y=\sqrt{\dfrac{6-x^2}{3}}$, $x_0=-\sqrt{3}$.
14. $y=-\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$, $x_0=\sqrt{2}$.
15. $y=-\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=1$.
16. $y=-\sqrt{\dfrac{6-x^2}{3}}$, $x_0=-\sqrt{3}$.
17. $y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$, $x_0=\sqrt{2}$.
18. $y=\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=-1$.
19. $y=-\sqrt{\dfrac{6-x^2}{3}}$, $x_0=\sqrt{3}$.
20. $y=-\sqrt{4-2x^2}$, $x_0=-1$.

IV. Вычислить предел функции с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-6x}-1+2x}{x^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x/2}-2-x}{x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin 2x-12x}{x^3}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1-2x}{x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 2x-6x}{x^3}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)+3x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1+5x}{x^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x-4x}{x^3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x-6x}{x^3}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+0{,}5x)-x}{x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+2)}{(x+2)}$. 14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$.

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$.

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5-2x}-1}$.

V. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции.

1. $y=x^3+6x^2+9x+4$.
2. $y=x^3+3x^2-9x+5$.
3. $y=x^3+6x^2-15x+8$.
4. $y=x^3-3x^2-24x-28$.
5. $y=x^3+12x^2+45x+50$.
6. $y=x^3-6x^2+9x-4$.
7. $y=x^3-3x^2-9x-5$.
8. $y=x^3-6x^2-15x-8$.
9. $y=x^3+3x^2-24x+28$.
10. $y=x^3-12x^2+45x-50$.
11. $y=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$.
12. $y=\dfrac{-x^2+5x-6}{x^2-3x+3}$.
13. $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^2+x+1}$.
14. $y=\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}$.
15. $y=\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+x+1}$.
16. $y=\dfrac{-x^2+7x+9}{x^2-3x+3}$.
17. $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$.
18. $y=\dfrac{-x^2-x+3}{x^2-3x+3}$.
19. $y=\dfrac{-x^2+3x+1}{x^2+x+1}$.
20. $y=\dfrac{2x^2-8x+9}{x^2-3x+3}$.

VI. А. Найти градиент скалярного поля $f(r)=\dfrac{3^{2-\alpha}}{\alpha}r^{\alpha}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Вычислить производную этого поля в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

1. $\alpha=-6$; $A(-1;\ 2;\ -2)$, $B(2;\ 6;\ -2)$.
2. $\alpha=6$; $A(-2;\ 2;\ -1)$, $B(-2;\ 6;\ 2)$.
3. $\alpha=-5$; $A(2;\ 2;\ 1)$, $B(6;\ 2;\ -2)$.
4. $\alpha=5$; $A(1;\ 2;\ 2)$, $B(-2;\ 6;\ 2)$.
5. $\alpha=-4$; $A(2;\ -2;\ 1)$, $B(2;\ -6;\ -2)$.
6. $\alpha=4$; $A(-1;\ 2;\ 2)$, $B(2;\ 2;\ 6)$.
7. $\alpha=-3$; $A(-1;\ -2;\ 2)$, $B(2;\ -6;\ 2)$.
8. $\alpha=3$; $A(-2;\ 1;\ 2)$, $B(-2;\ -2;\ 6)$.
9. $\alpha=-2$; $A(1;\ -2;\ -2)$, $B(-2;\ -2;\ -6)$.
10. $\alpha=2$; $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(-2;\ -6;\ 2)$.

VI. Б. Дано скалярное поле $u=u(x,\ y)$. Требуется: 1) составить уравнение линии уровня $u=C$ и построить ее график; 2) вычислить с помощью градиента производную скалярного поля $u=u(x,\ y)$ в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$; 3) найти наибольшую скорость изменения скалярного поля в точке A.

Номер задачи	$u=u(x,\ y)$	C	Координаты точки A	Координаты точки B
11	$x^2+y^2+4x+2y$	-4	$\left(-2+\frac{\sqrt3}{2};\ -\frac12\right)$	$\left(-2+\frac{\sqrt3}{2};\ 0\right)$
12	$x^2+y^2+2x-2y$	2	$\left(-\frac12;\ 1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\left(0;\ 1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$
13	$x^2+y^2+2x-4y$	-1	$\left(-1-\frac{\sqrt3}{2};\ \frac52\right)$	$\left(-1-\frac{\sqrt3}{2};\ 0\right)$
14	$x^2+y^2-2x-2y$	7	$\left(\frac12;\ 1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\left(0;\ 1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$
15	$x^2+y^2+2x+4y$	4	$\left(-1+\frac{\sqrt3}{2};\ -\frac32\right)$	$\left(-1+\frac{\sqrt3}{2};\ 0\right)$
16	$x^2+y^2-2x+2y$	2	$\left(1{,}5;\ -1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\left(0;\ -1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$
17	$x^2+y^2-2x-4y$	-1	$\left(1-\frac{\sqrt3}{2};\ \frac52\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt3}{2};\ 0\right)$
18	$x^2+y^2-4x-2y$	-4	$\left(\frac32;\ 1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\left(0;\ 1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$
19	$x^2+y^2-2x+4y$	4	$\left(1+\frac{\sqrt3}{2};\ -\frac52\right)$	$\left(1+\frac{\sqrt3}{2};\ 0\right)$
20	x^2+y^2+x+2y	7	$\left(-\frac12;\ -1+\frac{\sqrt3}{2}\right)$	$\left(0;\ -1+\frac{\sqrt3}{2}\right)$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

I. Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

1. 1) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{7+x^2}$; 2) $\displaystyle\int\frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$; 3) $\displaystyle\int(3-x)\cos x\,dx$.

2. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{5}}$; 2) $\displaystyle\int\frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$; 3) $\displaystyle\int x\ln(1-3x)\,dx$.

3. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\displaystyle\int\frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$; 3) $\displaystyle\int xe^{-7x}\,dx$.

4. 1) $\int \frac{dx}{5x+3}$; 2) $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$; 3) $\int \operatorname{arctg} 4x\,dx$.

5. 1) $\int \sin(2-3x)dx$; 2) $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$; 3) $\int \sqrt{x^3}\ln x\,dx$.

6. 1) $\int e^{\frac{1}{4}x-2}\,dx$; 2) $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$; 3) $\int x\sin 5x\,dx$.

7. 1) $\int \frac{dx}{7+4x^2}$; 2) $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$; 3) $\int (2x+5)\sin x\,dx$.

8. 1) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$; 2) $\int \frac{5x\,dx}{x^2+x-6}$; 3) $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}}$.

9. 1) $\int \cos\left(\frac{x}{3}-4\right)dx$; 2) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+2x-8}$; 3) $\int \arcsin\frac{x}{3}\,dx$.

10. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; 2) $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2+2x-15}$; 3) $\int xe^{3x}\,dx$.

11. 1) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; 2) $\int \frac{19-4x}{2x^2+x-3}\,dx$; 3) $\int (5x-2)\ln x\,dx$.

12. 1) $\int x\sqrt{3-x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6}\,dx$; 3) $\int x\cdot\cos^2 2x\,dx$.

13. 1) $\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$; 2) $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3}\,dx$; 3) $\int \ln(3+x^2)\,dx$.

14. 1) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x}\,dx$; 2) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12}\,dx$; 3) $\int x\cdot\arcsin x\,dx$.

15. 1) $\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x}$; 2) $\int \frac{4x+31}{2x^2+11x+12}\,dx$; 3) $\int (2-x)\sin x\,dx$.

16. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}\,dx}{x}$; 2) $\int \frac{11x-2}{x^2+x-2}\,dx$; 3) $\int (1-\ln x)dx$.

17. 1) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$; 2) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4}\,dx$; 3) $\int (3x+4)\cos x\,dx$.

18. 1) $\int \frac{x^2dx}{8+x^3}$; 2) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}\,dx$; 3) $\int \operatorname{arcctg}(4x)\,dx$.

19. 1) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^2 x+3}$; 2) $\int \frac{4x+27}{2x^2-x-6}\,dx$; 3) $\int x\ln^2 x\,dx$.

20. 1) $\int \frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3}$; 2) $\int \frac{x-13}{x^2-2x-8}\,dx$; 3) $\int x^2\sin 3x\,dx$.

II. Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{x}$.

2. $\int_{-3/4}^0 \frac{3x\,dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

3. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{4-x}$.

4. $\int_{-8}^0 \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$.

5. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$.

6. $\int_{-4}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(5-x)^3}}$.

7. $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$.

8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$.

9. $\int_{-1/4}^0 \frac{dx}{1+\sqrt{3x+1}}$.

10. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$.

11. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{4+x}$.

12. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x}\,dx$.

13. $\int_0^3 \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

14. $\int_2^1 \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}}\,dx$.

15. $\int_{25}^{49} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-6}$.

16. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+7}}$.

17. $\int_{-8}^0 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3}\,dx$.

18. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

19. $\int_1^2 \frac{dx}{2+\sqrt[4]{x-1}}$.

20. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+5}$.

III. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1. $\int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.

2. $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

3. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

4. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$.

5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{x-1}$.

6. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \operatorname{tg} x\,dx$.

7. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

9. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

10. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx$.

11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{9x^2+1}$.

13. $\int\limits_{0}^{8} \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

14. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-5x}\,dx$.

15. $\int\limits_{0}^{e^{-2}} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

16. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2} x\,dx$.

17. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

18. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$.

19. $\int\limits_{-5}^{-4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$.

20. $\int\limits_{14}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$.

IV. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными кривыми. Сделать чертеж области.

1. $3x^2-4y=0$, $2x-4y+1=0$.
2. $3x^2+4y=0$, $2x-4y-1=0$.
3. $2x+3y^2=0$, $2x+2y+1=0$.
4. $3x^2-4y=0$, $2x+4y-1=0$.
5. $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$.
6. $2x-3y^2=0$, $2x+2y-1=0$.
7. $3x^2-2y=0$, $2x-2y+1=0$.
8. $4x+3y^2=0$, $4x+2y+1=0$.
9. $3x^2-2y=0$, $2x+2y-1=0$.
10. $4x-3y^2=0$, $4x+2y-1=0$.
11. $y=x^3+3$, $x=0$, $y=x-1$, $x=2$.
12. $y=x^3+2$, $x=0$, $y=x-2$, $x=2$.
13. $y=x^3+1$, $x=0$, $y=x-3$, $x=2$.

14. $y=x^3-1$, $x=0$, $y=x-5$, $x=2$.
15. $y=x^3-2$, $x=0$, $y=x-6$, $x=2$.
16. $y=x^3+3$, $x=0$, $y=x+7$, $x=-2$.
17. $y=x^3+2$, $x=0$, $y=x+6$, $x=-2$.
18. $y=x^3+1$, $x=0$, $y=x+5$, $x=-2$.
19. $y=x^3-1$, $x=0$, $y=x+3$, $x=-2$.
20. $y=x^3-2$, $x=0$, $y=x+2$, $x=-3$.

V. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой L.

1. $x^2-y=0$, $x=-1$, $y=0$.
2. $x^2+y=0$, $x=0$, $y=-1$.
3. $x^2+2=0$, $x=1$, $y=0$.
4. $x^2-y=0$, $x=0$, $y=1$.
5. $x^2-y=0$, $x=1$, $y=0$.
6. $x-y^2=0$, $x=1$, $y=0$.
7. $x-y^2=0$, $x=0$, $y=-1$.
8. $x+y^2=0$, $x=-1$, $y=0$.
9. $x-y^2=0$, $x=0$, $y=1$.
10. $x+y^2=0$, $x=0$, $y=1$.
11. $x=-4x^3$, $x=0$, $y=4$.
12. $y=-4x^3$, $x=1$, $y=0$.
13. $y=4x^3$, $x=0$, $y=4$.
14. $y=4x^3$, $x=1$, $y=0$.
15. $y=1+8x^3$, $x=0$, $y=9$.
16. $y=4x^3$, $x=0$, $y=-4$.
17. $y=-4x^3$, $x=-1$, $y=0$.
18. $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$.
19. $y=4x^3$, $x=-1$, $y=0$.
20. $y=1+8x^3$, $x=-1/2$, $y=1$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

I. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Сделать чертеж области интегрирования.

1. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-8x^2}^{-2x+6} f(x, y)\,dy$.

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-4y-4}^{-8y^3} f(x, y)\,dx$.

3. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{8x^3}^{4x+4} f(x, y)\,dy$.

4. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{2y-6}^{8y^3} f(x, y)\,dx$.

5. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{4x-4}^{8x^3} f(x, y)\,dy$.

6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{8y^3}^{2y+6} f(x, y)\,dx$.

7. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-2x-6}^{-8x^3} f(x, y)\,dy$.

8. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-8y^3}^{-4y+4} f(x, y)\,dx$.

9. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-4x-4}^{-8x^3} f(x, y)\,dy$.

10. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{4y-4}^{8y^3} f(x, y)\,dx$.

11. $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)\,dy$.

12. $\int\limits_{-5}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-6y-y^2}} f(x, y)\,dx$.

13. $\int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{-\sqrt{8x-x^2}}^{0} f(x, y)\,dy$.

14. $\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{-4y-y^2}}^{0} f(x, y)\,dx$.

15. $\int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{-4x-x^2}} f(x, y)\,dy.$ 16. $\int\limits_{1}^{7} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{8y-y^2}} f(x, y)\,dx.$

17. $\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{-6x-x^2}}^{0} f(x, y)\,dy.$ 18. $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{4y-y^2}}^{0} f(x, y)\,dx.$

19. $\int\limits_{2}^{6} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{8x-x^2}} f(x, y)\,dy.$ 20. $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{6y-y^2}}^{0} f(x, y)\,dx.$

II. А. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями. Сделать схематический чертеж.

1. $x^2+y^2=4,\ y+2z-4=0,\ z=0.$
2. $x^2+y^2=1,\ y+2z+2=0,\ z=0.$
3. $x^2+y^2=4,\ y-2z+4=0,\ z=0.$
4. $x^2+y^2=1,\ y-2z-2=0,\ z=0.$
5. $x^2+y^2=9,\ y+2z-6=0,\ z=0.$
6. $x^2+y^2=4,\ y-2x-4=0,\ z=0.$
7. $x^2+y^2=1,\ y-2z+2=0,\ z=0.$
8. $x^2+y^2=4,\ y+2z+4=0,\ z=0.$
9. $x^2+y^2=1,\ y+2z-2=0,\ z=0.$
10. $x^2+y^2=9,\ y-2x+6=0,\ z=0.$

Б. Выполнить следующие задания, сделав схематический чертеж.

1. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y=3$, $2y-z=0$, $z=0$.

2. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x-y-z=0$, $x-4=0$, $y=0$, $z=0$.

3. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y-4=0$, $y-2z=0$, $z=0$.

4. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x-y+z=0$, $y-4=0$, $x=0$, $z=0$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y-1=0$, $x-y-1=0$, $x=0$, $z=0$, $z-2=0$.

6. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y-2=0$, $3y-2z=0$, $z=0$.

7. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $3y+z=0$, $x+y=0$, $x-2=0$, $z=0$.

8. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y-1=0$, $y-2z=0$, $z=0$.

9. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x-3y=0$, $2x-z=0$, $y-2=0$, $z=0$.

10. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x+y=0$, $x-y=0$, $x-1=0$, $z=0$, $z=3$.

III. А. Требуется: 1) найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверх-

ность $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ (выбирается внешняя нормаль к σ); 2) вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ по контуру Г, образованному пересечением поверхностей σ_1 и σ_2 (направление обхода должно быть выбрано так, чтобы область, ограниченная контуром Г, находилась слева); 3) проверить правильность вычисленных значений потока и циркуляции с помощью формул Остроградского и Стокса; 4) дать заключение о наличии источников или стоков внутри области, ограниченной поверхностью σ; 5) сделать схематический чертеж поверхности σ.

1. $\vec{a}=(3y-5x)\vec{i}+(6x+5y)\vec{j}+(4z-xy+4)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z+1)^2,\ \sigma_2: z=1.$
2. $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+(x^2+2z+4)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z+2)^2,\ \sigma_2: z=4.$
3. $\vec{a}=(3x+2y)\vec{i}+(5x-2y)\vec{j}+(3z-y^2-3)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z-1)^2,\ \sigma_2: z=3.$
4. $\vec{a}=(3x-4y)\vec{i}+(3y-x)\vec{j}+(xy-2z+4)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z-2)^2,\ \sigma_2: z=4.$
5. $\vec{a}=(-x-2y)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+(3z-2xy+9)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z+3)^2,\ \sigma_2: z=-1.$
6. $\vec{a}=(7x+5y)\vec{i}+(8x-y)\vec{j}+(3xy-2z-2)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z+1)^2,\ \sigma_2: z=-3.$
7. $\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}+(5z-4y)\vec{j}+(6z-2y^2-6)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z-1)^2,\ \sigma_2: z=-1.$
8. $\vec{a}=(6x+5z)\vec{i}+(3x-y)\vec{j}+(2y^2-z+4)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z-4)^2,\ \sigma_2: z=6.$
9. $\vec{a}=(y-2x)\vec{i}+(4x+3y)\vec{j}+(3z-2y^2+9)\vec{k}$,
   $\sigma_1: x^2+y^2=(z+3)^2,\ \sigma_2: z=-5.$
10. $\vec{a}=(5x+4y)\vec{i}+(7x-2y)\vec{j}+(2xy+z-4)\vec{k}$,
    $\sigma_1: x^2+y^2=(z-4)^2,\ \sigma_2: z=2.$

Б. Выполнить те же задания, что и в п. А, взяв в качестве вектора $\vec{a}$ вектор $\operatorname{rot}\vec{G}$.

11. $\vec{G}=(2x-z)\vec{i}+(2y-xz)\vec{j}+(4-2x)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2+2z+3=0,\ \sigma_2: z=-2.$
12. $\vec{G}=(x+2)\vec{i}+(y-xz)\vec{j}+(3-z)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2+2z+1=0,\ \sigma_2: z=-1.$
13. $\vec{G}=(2x+z)\vec{i}+(2y-xz)\vec{j}+(3+x)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2+2z-3=0,\ \sigma_2: z=1.$
14. $\vec{G}=(x-6)\vec{i}-(xz-y)\vec{j}+(1+z^2)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2+2z-5=0,\ \sigma_2: z=2.$
15. $\vec{G}=3z\vec{i}+(4-xz)\vec{j}+(z^2+3x)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2+2z-7=0,\ \sigma_2: z=3.$
16. $\vec{G}=(x+z)\vec{i}+(y-xz)\vec{j}+(2z+x)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2-2z-3=0,\ \sigma_2: z=-2.$
17. $\vec{G}=2x\vec{i}-(xz-2y)\vec{j}+(4+z^2)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2-2z-3=0,\ \sigma_2: z=-1.$
18. $\vec{G}=(2x-z)\vec{i}-(xz-2y)\vec{j}-(x-z)\vec{k};\ \sigma_1: x^2+y^2-2z+1=0,\ \sigma_2: z=1.$

19. $\vec{G}=(3x+z)\vec{i}+(3y-xz)\vec{j}+(1+x)\vec{k}$; σ_1: $x^2+y^2-2z+3=0$, σ_2: $z=2$.

20. $\vec{G}=(x+1)\vec{i}+(y-2-xz)\vec{j}+z\vec{k}$; σ_1: $x^2+y^2-2z+5=0$, σ_2: $z=3$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

I. Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью достаточных признаков сходимости.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{4n^3-1}$.

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n-3}{7^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2}{3n^3+1}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{6^n}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5n+4}{2n^3-3}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{3^n}$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n-5}{5n^3+4}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{4^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{6n^3+5}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1+n}{n^3}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{arctg}\,\frac{5}{n^2+4}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{n}}{n^2+n-1}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{3}{n^2}\right)$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-1/n^2}-1}{n}$.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\frac{n-2}{n^2+5}$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{n-1}$.

20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1-\cos 2n}{3n^2+4}$.

II. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+3}{3^n}(x+3)^n$.

2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-6}{6^n}(x-6)^n$.

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{4^n}(x-4)^n$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2}{2^n}(x+2)^n$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}(x+6)^n$.

6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-5}{5^n}(x-5)^n$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2}{2^n}(x-2)^n$.

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4}{4^n}(x+4)^n$.

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+5}{5^n}(x+5)^n$.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-3}{3^n}(x-3)^n$.

11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n^2-1)(x-2)^n$.

14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2x)^{2n}}{\ln(4n+2)}$.

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{\sqrt[3]{n^4-2}}$.

17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n}$.

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(3n-1)(x+2)^n$.

19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{4^n}$.

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(3x)^{2n}}{\ln(2n-1)}$.

III. Вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд и почленное интегрирование полученного ряда. Результат должен быть получен с точностью до 0,001.

1. $\int\limits_{-0,4}^{0}\sin\frac{5x^2}{2}\,dx$.

2. $\int\limits_{-0,25}^{0}\frac{\sin 2x}{x}\,dx$.

3. $\int\limits_{-1/3}^{0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\,dx$.

4. $\int\limits_{-0,75}^{0}\cos\frac{4x^2}{3}\,dx$.

5. $\int\limits_{-0,3}^{0}\cos\frac{10x^2}{3}\,dx$.

6. $\int\limits_{-0,2}^{0}\frac{\ln(1-2x^3)dx}{x}$.

7. $\int\limits_{-0,2}^{0}e^{-5x^2}\,dx$.

8. $\int\limits_{0}^{0,16}e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

9. $\int\limits_{-1}^{0}\sin\frac{x^2}{5}\,dx$.

10. $\int\limits_{-0,5}^{0}\mathrm{arctg}\,x^2\,dx$.

11. $\int\limits_{-0,5}^{0} \frac{\ln(1-x^2)}{x}\,dx.$

12. $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{\sin 0,6x\,dx}{x}.$

13. $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$

14. $\int\limits_{-1}^{1} \sin x^2\,dx.$

15. $\int\limits_{0}^{0,5} e^{-x^3}\,dx.$

16. $\int\limits_{0}^{3/4} \operatorname{arctg} x^2\,dx.$

17. $\int\limits_{-0,2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

18. $\int\limits_{0}^{0,1} \frac{e^{-2x}-1}{x}\,dx.$

19. $\int\limits_{-0,5}^{0} xe^{-2x^3}\,dx.$

20. $\int\limits_{0}^{1} \cos\sqrt{2x}\,dx.$

IV. А. Представить функцию $w=f(z)$ комплексной переменной z в виде степенного ряда. Используя полученное представление, найти сумму ряда при $z=z_0$.

1. $f(z)=\cos iz;\ z_0=-\frac{\pi i}{6}.$

2. $f(z)=\cos i\pi z;\ z_0=-\frac{i}{6}.$

3. $f(z)=\sin iz;\ z_0=-\frac{\pi i}{3}.$

4. $f(z)=\sin\frac{\pi z i}{2};\ z_0=-\frac{2i}{3}.$

5. $f(z)=e^{-iz};\ z_0=-\frac{\pi}{2}.$

6. $f(z)=e^{-iz/3};\ z_0=-\frac{3\pi}{2}.$

7. $f(z)=\sin 2iz;\ z_0=-\frac{\pi i}{6}.$

8. $f(z)=\cos 2iz;\ z_0=\frac{\pi i}{12}.$

9. $f(z)=\cos\frac{iz}{3};\ z_0=-\frac{\pi i}{2}.$

10. $f(z)=e^{iz/2};\ z_0=\pi.$

Б. Найти сумму ряда, используя разложения в степенной ряд соответствующих функций комплексной переменной.

11. $1+\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi^2}{2^2\cdot 2!}-\frac{\pi^3}{2^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^4}{2^4\cdot 4!}+\dots.$

12. $1+\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\pi^6}{6!}+\dots.$

13. $1-\frac{\pi}{3}i-\frac{\pi^3}{3^2\cdot 2!}+\frac{\pi^3}{3^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^4}{3^4\cdot 4!}+\dots.$

14. $1+\frac{\pi}{6}i-\frac{\pi^2}{6^2\cdot 2!}-\frac{\pi^3}{6^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^4}{6^4\cdot 4!}+\dots.$

15. $1-\frac{\pi}{4}i-\frac{\pi^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{\pi^3}{4^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}+\dots.$

16. $\frac{\pi}{2}i+\frac{\pi^3}{2^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^5}{2^5\cdot 5!}i+\frac{\pi^7}{2^7\cdot 7!}i+\dots.$

17. $1-\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi^2}{2^2\cdot 2!}+\frac{\pi^3}{2^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^4}{2^4\cdot 4!}+\dots.$

18. $1+\frac{\pi}{3}i-\frac{\pi}{3^2\cdot 2!}-\frac{\pi^3}{3^3\cdot 3!}i+\frac{\pi^4}{3^4\cdot 4!}+\dots.$

19. $2i+\frac{2^3\cdot i}{3!}+\frac{2^5\cdot i}{5!}+\frac{2^7\cdot i}{7!}+\frac{2^9\cdot i}{9!}+\dots.$

20. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^6}{6!}+\dots.$

V. Представить периодическую функцию $f(x)$, заданную на полупериоде $[0, l]$, рядом Фурье по синусам или косинусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

1. $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ по косинусам.

2. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\cos x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ по синусам.

3. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\sin x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ по косинусам.

4. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \cos x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ по синусам.

5. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ \sin x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ по косинусам.

6. $f(x)=\begin{cases}1+\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ по синусам.

7. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \cos x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ по косинусам.

8. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ -\sin x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\end{cases}$ по синусам.

9. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ \sin x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ по косинусам.

10. $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ \sin x, & \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ по синусам.

11. $f(x)=\begin{cases}2x; & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ 6; & 3<x\leqslant 6\end{cases}$ по синусам.

12. $f(x)=\begin{cases}-x; & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ -2; & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ по косинусам.

13. $f(x)=\begin{cases}1; & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x; & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ по синусам.

14. $f(x)=\begin{cases}-2; & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x-4; & 1<<x\leqslant 2\end{cases}$ по косинусам.

15. $f(x)=\begin{cases}x; & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2; & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ по синусам.

16. $f(x)=\begin{cases}-2x; & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ -6; & 3<x\leqslant 6\end{cases}$ по косинусам.

17. $f(x)=\begin{cases}3; & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ -x+6; & 3<x\leqslant 6\end{cases}$ по синусам.

18. $f(x)=\begin{cases}-4; & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-8; & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ по косинусам.

19. $f(x)=\begin{cases}3x; & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3; & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ по синусам.

20. $f(x)=\begin{cases}-x; & 0\leqslant x\leqslant 3,\\ -3; & 3<x\leqslant 6\end{cases}$ по косинусам.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 7

I. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$.

1. $y'\sin x-y\cos x=1$; $y_0=0,\ x_0=\frac{\pi}{2}$.

2. $y'-y\sin x=e^{-\cos x}\sin 2x$; $y_0=3,\ x_0=\frac{\pi}{2}$.

3. $y'+\frac{2y}{x}=-x^2$; $y_0=1,\ x_0=3$.

4. $y'+y=\frac{e^{-x}}{1+x^2}$; $y_0=2,\ x_0=0$.

5. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; $y_0=5,\ x_0=-2$.

6. $xy'-2y=x^3\cos x$; $y_0=1,\ x_0=\pi$.

7. $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$; $y_0=0,\ x_0=e$.

8. $y'+2xy=xe^{-x^2}$; $y_0=4,\ x_0=0$.

9. $y'\cos x-2y\sin x=2$; $y_0=3$; $x_0=0$.

10. $y'-\frac{3y}{x}=x^3e^x$; $y_0=e,\ x_0=1$.

11. $xy'-3y=x^4e^x$; $y_0=e,\ x_0=1$.

12. $y'\cos x+y\sin x=1$; $y_0=2,\ x_0=0$.

13. $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$; $y_0=1,\ x_0=\frac{\pi}{2}$.

14. $y'-\frac{y}{x}=-2\ln x$; $y_0=1,\ x_0=1$.

15. $xy'+2y=\frac{1}{x}$; $y_0=1,\ x_0=3$.

16. $y'-y\cos x=-\cos x$; $y_0=3,\ x_0=0$.

17. $y'+2xy=e^{-x^2}\sin x$; $y_0=1,\ x_0=0$.

18. $x^2y'+xy+1=0$; $y_0=2$; $x_0=1$.

19. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x}$; $y_0=5,\ x_0=0$.

20. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$; $y_0=\frac{1}{2},\ x_0=0$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y''x\ln x = y'$; $y(e) = e-1$; $y'(e) = 1$.
2. $y'''\cos^4 x = -\sin 2x$; $y(\pi) = 0$; $y'(\pi) = 2$; $y''(\pi) = -1$.
3. $2xy'' = y'$; $y(9) = 8$; $y'(9) = 3$.
4. $y'' = y'\ln y'$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
5. $y''(x^2+1) = 2xy'$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.
6. $y''\cos x + y'\sin x = 0$; $y(0) = -\frac{1}{4}$, $y'(0) = 2$.
7. $xy'' = (1+2x^2)y'$; $y(1) = \sqrt{e}+1$; $y'(1) = \sqrt{e}$.
8. $y''' = \sin^2 x$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 1{,}8$; $y''(0) = 0$.
9. $y'' = 2\sqrt{1+y'}$; $y(0) = 5$; $y'(0) = -1$.
10. $y'' + y'^2 = 0$; $y(2) = \ln(2e)$; $y'(2) = \frac{1}{2}$.
11. $xy'' = (1+2x^2)y'$; $y(2) = 0$, $y'(2) = e$.
12. $y''x\ln x = y'$; $y(e) = 3$, $y'(e) = 4$.
13. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
14. $y^{(IV)} = \cos^2 x$; $y(0) = \frac{1}{32}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1/8$, $y'(0) = 0$.
15. $yx'' = y'\ln y'$; $y(1) = 0$, $y'(1) = e$.
16. $y'' = \sqrt{1-y'^2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
17. $y'''(x-1) - y'' = 0$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$.
18. $y'' = x\sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
19. $y'' - (x+2)^5 = 1$; $y(-1) = \frac{1}{12}$, $y'(-1) = -\frac{1}{4}$.
20. $y'' = 2x\ln x$; $y(1) = \frac{13}{18}$, $y'(1) = \frac{3}{2}$.

III. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = x^2+1$; $y(0) = -3$, $y'(0) = -\frac{1}{5}$.
3. $y'' - 4y' + 4y = -x^2+3x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = \frac{4}{3}$.

4. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{4}$.
5. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
6. $y'' + 4y = \sin 2x + 1$; $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.
7. $y'' + y' = e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
8. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.
9. $y'' + 9y = 36e^{3x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
10. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$.
11. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x}$; $y(0) = \frac{2}{3}$; $y'(0) = 2$.
12. $y'' - 4y + 8y = 8x^2 + 4$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 3$.
13. $y'' + y' - 5y = 50\cos x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 5$.
14. $y'' + 2y' + 5y = 13e^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 4$.
15. $y'' - 4y' + 5y = 10x$; $y(0) = 10$; $y'(0) = 6$.
16. $y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2$; $y(0) = 3$; $y'(0) = \frac{4}{3}$.
17. $y'' - 6y' + 9y = 4e^x$; $y(0) = 3$; $y(0) = 8$.
18. $y'' - 4y' + 4y = -169\sin 3x$; $y(0) = -12$; $y'(0) = 16$.
19. $y'' + 2y' - 8y = 16x + 4$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 6$.
20. $y'' - 4y' + 5y = 5x^2 - 4$; $y(0) = \frac{2}{25}$; $y(0) = \frac{3}{5}$.

IV. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 + 5x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 2x_2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 3x_2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1+x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=4x_2-2x_1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4x_1+5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1-2x_2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+6x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1-x_2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1+3x_2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-3x_1+2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=5x_1-6x_2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-3x_1-4x_2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4x_1-x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-2x_1+5x_2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1-2x_2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1-4x_2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-3x_1+2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=5x_1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-3x_1+6x_2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1+2x_2. \end{cases}$

V. Решить уравнение колебания струны методом Фурье.

1. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2hx}{3};\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}, \\ 2h(2-x);\ 3/2\leqslant x\leqslant 2; \end{cases}$ $\psi(x)=x(2-x).$

2. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{-2hx}{3};\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2h(x-3)}{3};\ 3/2\leqslant x\leqslant 3; \end{cases}$ $\psi(x)=x(3-x).$

3. $\varphi(x)=\begin{cases} hx;\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ h;\ 1\leqslant x\leqslant 2, \\ h(3-x);\ 2\leqslant x\leqslant 3; \end{cases}$ $\psi(x)=x(3-x).$

4. $\varphi(x)=\begin{cases} 2hx;\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2h(4-x)}{7};\ \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4; \end{cases}$ $\psi(x)=x(4-x).$

5. $\varphi(x)=\begin{cases} -4hx;\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{4h(x-5)}{19};\ \dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant 5; \end{cases}$ $\psi(x)=x(5-x).$

6. $\varphi(x)=\begin{cases} -hx;\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -h;\ 1\leqslant x\leqslant 3, \\ h(x-4);\ 3\leqslant x\leqslant 4; \end{cases}$ $\psi(x)=x(4-x).$

7. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{hx}{3};\ 0\leqslant x\leqslant 3, \\ \dfrac{h(6-x)}{3};\ 3\leqslant x\leqslant 6; \end{cases}$ $\psi(x)=x(6-x).$

8. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{-2hx}{7};\ 0\leqslant x\leqslant 7/2, \\ \dfrac{2h(x-7)}{7};\ 7/2\leqslant x\leqslant 7; \end{cases}$ $\psi(x)=x(7-x).$

9. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{hx}{2};\ 0\leqslant x\leqslant 2, \\ h;\ 2\leqslant x\leqslant 4, \\ h(5-x);\ 4\leqslant x\leqslant 5; \end{cases}$ $\psi(x)=x(5-x).$

10. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{-hx}{3};\ 0\leqslant x\leqslant 3, \\ -h;\ 3\leqslant x\leqslant 6, \\ h(x-7);\ 6\leqslant x\leqslant 7; \end{cases}$ $\psi(x)=x(7-x).$

11. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2h}{5}\,x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{2h}{5}\,(5-x),\ \dfrac{5}{2}\leqslant x\leqslant 5, \end{cases}$

12. $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2h}{3}\,x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{2h}{3}\,(3-x),\ \dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$

$$\psi(x)=\begin{cases} 2x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}, \\ 2(5-x), \ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 5. \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 2x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}, \\ 2(3-x), \ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

13. $$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{2h}{7}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}, \\ \frac{2h}{7}(7-x), \ \frac{7}{2}\leqslant x\leqslant 7, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 4x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{7}{2}, \\ 4(7-x), \ \frac{7}{2}\leqslant x\leqslant 7. \end{cases}$$

14. $$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{2h}{9}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}, \\ \frac{2h}{9}(9-x), \ \frac{9}{2}\leqslant x\leqslant 9, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 4x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}, \\ 4(9-x), \ \frac{9}{2}\leqslant x\leqslant 9. \end{cases}$$

15. $$\varphi(x)=\begin{cases} -\frac{2b}{11}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{11}{2}, \\ \frac{2h}{11}(x-11), \ \frac{11}{2}\leqslant x\leqslant 11, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 6x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{11}{2}, \\ 6(11-x), \ \frac{11}{2}\leqslant x\leqslant 11. \end{cases}$$

16. $$\varphi(x)=\begin{cases} -\frac{2h}{13}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{13}{2}, \\ \frac{2h}{13}(x-13), \ \frac{13}{2}\leqslant x\leqslant 13, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 6x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{13}{2}, \\ 6(13-x), \ \frac{13}{2}\leqslant x\leqslant 13. \end{cases}$$

17. $$\varphi(x)=\begin{cases} -\frac{2h}{15}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{15}{2}, \\ \frac{2h}{15}(x-15), \ \frac{15}{2}\leqslant x\leqslant 15, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 8x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{15}{2}, \\ 8(15-x), \ \frac{15}{2}\leqslant x\leqslant 15. \end{cases}$$

18. $$\varphi(x)=\begin{cases} -\frac{2h}{3}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}, \\ \frac{2h}{3}(x-3), \ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 8x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}, \\ 8(3-x), \ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

19. $$\varphi(x)=\begin{cases} -\frac{2h}{5}x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}, \\ \frac{2h}{5}(x-5), \ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 5, \end{cases}$$

20. $$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{2h}{17}, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{17}{2}, \\ \frac{2h}{17}(17-x), \ \frac{17}{2}\leqslant x\leqslant 17, \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 10x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}, \\ 10(5-x), \ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 5. \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 10x, \ 0\leqslant x\leqslant\frac{17}{2}, \\ 10(17-x), \ \frac{17}{2}\leqslant x\leqslant 17. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

I. 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

4. Собрание, на котором присутствует 25 человек, в том числе 5 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Считая, что каждый из присутствующих с одинаковой вероятностью может быть избран, найти вероятность того, что в делегацию войдут 2 женщины и 1 мужчина.

5. На полке расставляют наудачу 10 книг. Найти вероятность того, что 3 определенные книги окажутся рядом.

6. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое число очков.

7. Группа из 10 мужчин и 10 женщин делится случайным образом на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин одинаково.

8. В зале 50 мест. Найти вероятность того, что из 10 человек 5 займут определенные места, если места занимаются ими случайным образом.

9. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Рязани, 8 — в Тамбове и 7 — в Воронеже. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

10. В партии из 10 изделий имеется 4 бракованных. Наугад выбирают 5 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 5 изделий окажется 3 бракованных.

11. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75; для второго — 0,8; для третьего — 0,9. Найти вероятность того, что: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) все трое промахнутся; 3) только один стрелок попадет в цель; 4) хотя бы один стрелок попадет в цель.

12. В первом ящике 6 белых и 4 черных шара, во втором — 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары разного цвета?

13. На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь стандартная, для первого станка равна 0,8, для второго — 0,9. Производительность второго станка втрое больше, чем первого. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

14. На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбирают одну за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой?

15. Из партии, в которой 20 деталей без дефектов и 5 с дефектами, берут наудачу 3 детали. Чему равна вероятность того, что: 1) все три детали без дефектов; 2) по крайней мере одна деталь без дефектов?

16. Слово «карета», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекают буквы одну за другой. Какова вероятность получить при таком извлечении слово «ракета»?

17. Ящик содержит 10 деталей, среди которых 3 стандартных. Найти вероятность того, что из наудачу отобранных 5 деталей окажется не более одной стандартной.

18. Брошены два одинаковых игральных кубика. Найти вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани.

19. Для поражения цели достаточно попадания хотя бы одного снаряда. Произведено два залпа из двух орудий. Найти вероятность поражения цели, если вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,3, а из второго — 0,4.

20. В урне лежит 12 белых и 8 красных шаров. Вынули 8 шаров. Какова вероятность того, что: 1) три из них красные; 2) красных шаров вынуто не более трех?

II. 1. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.

2. Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее 2 раз в 4 независимых испытаниях, если вероятность наступления события A в одном испытании равна 0,6.

3. Событие B произойдет в случае, если событие A наступит не менее 4 раз. Найти вероятность наступления события B, если будет произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,8.

4. Вероятность наступления события A хотя бы один раз при трех испытаниях равна 0,936. Найти вероятность наступления события A при одном испытании.

5. Вероятность поражения цели хотя бы одной пулей при 4 независимых выстрелах равна 0,59. Какова вероятность поражения цели при одном выстреле?

6. Пусть вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартная, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 деталей не более 2 нестандартных.

7. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров: а) не более одного потребует ремонта; б) хотя бы один не потребует ремонта.

8. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна 1/7. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из шести.

9. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти вероятность разрушения объекта, если для этого необходимо не менее трех попаданий, а сделано 15 выстрелов.

10. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковые.

11. Вероятность появления события A при одном испытании равна 0,1. Найти вероятность того, что при трех независимых испытаниях оно появится: 1) не менее двух раз; 2) хотя бы один раз.

12. Игральную кость подбрасывают 3 раза. Найти вероятность того, что дважды появится число очков, кратное трем.

13. Событие B появится в случае, если событие A появится не менее четырех раз. Найти вероятность того, что наступит событие B, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,5.

14. Случайно встреченное лицо может оказаться, с вероятностью $p=0{,}2$, брюнетом, с $p=0{,}3$ — блондином, с $p=0{,}4$ — шатеном и с $p=0{,}1$ — рыжим.

Какова вероятность того, что среди трех случайно встреченных лиц: 1) не менее двух брюнетов; 2) один блондин и два шатена; 3) хотя бы один рыжий?

15. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,99. Найти вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

16. В квартире четыре электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется неисправной в течение года, равна 5/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее половины лампочек?

17. В ящике имеется по одинаковому числу деталей, изготовленных заводами № 1 и № 2. Найти вероятность того, что среди пяти наудачу отобранных деталей изготовлены заводом № 1: 1) две детали; 2) менее двух деталей; 3) более двух деталей.

18. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из трех телевизоров: 1) не более одного потребует ремонта; 2) хотя бы один не потребует ремонта.

19. В ящике лежат несколько тысяч одинаковых предохранителей. Половина из них изготовлена I заводом, остальные — II заводом. Наудачу вынули пять предохранителей. Чему равна вероятность того, что I заводом из них изготовлены: 1) два предохранителя; 2) менее двух предохранителей; 3) более двух предохранителей?

20. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что: 1) из трех проверенных изделий только одно нестандартное; 2) нестандартным будет только третье по порядку проверенное изделие.

III. 1. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 60 раз в 100 испытаниях.

2. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие произойдет не менее 20 и не более 30 раз.

3. Вероятность наступления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие произойдет 12 раз в 100 испытаниях.

4. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

6. В опыте Бюффона монета подбрасывалась 4040 раз. При этом «герб» выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

7. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если вероятность того, что отдельное изделие окажется высшего сорта, равна 0,62.

8. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 410 до 430 (включительно) годных.

9. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 750 покупателей не более 120 потребуют обувь этого размера.

10. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдет не менее 700.

11. Игральную кость подбрасывают 500 раз. Какова вероятность того, что цифра 1 при этом выпадет 50 раз?

12. Вероятность получения по лотерее безвыигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 400 наугад купленных билетов не менее 50 и не более 60 безвыигрышных?

13. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (предполагается, что число мужчин и женщин в городе одинаково)?

14. Вероятность наступления события A в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие A появится в этих испытаниях: 1) ровно 90 раз; 2) не менее 80 и не более 90 раз.

15. Вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,75?

16. Игральную кость подбрасывают 320 раз. Какова вероятность того, что цифра 5 при этом выпадет не менее 70 и не более 83 раз?

17. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 625 пассажиров и вероятность этого события.

18. При проведении эксперимента монету подбрасывали 4096 раз, причем герб выпал 2068 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

19. Найти вероятность того, что в партии из 900 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700. Вероятность появления изделия высшего сорта в партии равна 0,8.

20. Игральный кубик подбросили 125 раз. Какова вероятность того, что цифра 6 появилась не более 60 раз?

IV. Заданы математическое ожидание m и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины x. Найти: 1) вероятность того, что x примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|x-m|$ окажется меньше δ.

1. $m=15$, $\sigma=2$, $\alpha=16$, $\beta=25$, $\delta=4$.
2. $m=14$, $\sigma=4$, $\alpha=18$, $\beta=34$, $\delta=8$.
3. $m=13$, $\sigma=4$, $\alpha=15$, $\beta=17$, $\delta=6$.
4. $m=12$, $\sigma=5$, $\alpha=17$, $\beta=22$, $\delta=15$.
5. $m=11$, $\sigma=3$, $\alpha=17$, $\beta=26$, $\delta=12$.
6. $m=10$, $\sigma=2$, $\alpha=11$, $\beta=13$, $\delta=5$.
7. $m=9$, $\sigma=4$, $\alpha=15$,. $\beta=19$, $\delta=18$.
8. $m=8$, $\sigma=2$, $\alpha=6$, $\beta=15$, $\delta=8$.
9. $m=7$, $\sigma=5$, $\alpha=2$, $\beta=22$, $\delta=20$.
10. $m=6$, $\sigma=3$, $\alpha=0$, $\beta=9$, $\delta=9$.
11. $m=15$, $\sigma=2$, $\alpha=9$, $\beta=19$, $\delta=3$.
12. $m=14$, $\sigma=4$, $\alpha=10$, $\beta=20$, $\delta=4$.
13. $m=13$, $\sigma=4$, $\alpha=11$, $\beta=21$, $\delta=8$.
14. $m=12$, $\sigma=5$, $\alpha=12$, $\beta=22$, $\delta=10$.
15. $m=11$, $\sigma=4$, $\alpha=13$, $\beta=23$, $\delta=6$.
16. $m=10$, $\sigma=8$, $\alpha=14$, $\beta=18$, $\delta=2$.
17. $m=9$, $\sigma=3$, $\alpha=9$, $\beta=18$, $\delta=6$.
18. $m=8$, $\sigma=4$, $\alpha=8$, $\beta=12$, $\delta=8$.
19. $m=7$, $\sigma=2$, $\alpha=6$, $\beta=10$, $\delta=4$.
20. $m=6$, $\sigma=2$, $\alpha=4$, $\beta=12$, $\delta=4$.

V. Найти выборочное уравнение прямой $\bar{y}_x-\bar{y}=r_в \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ регрессии Y на X по данной корреляционной таблице.

1.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
10	2	3	—	—	—	—	5
20	—	7	3	—	—	—	10
30	—	—	2	50	2	—	54
40	—	—	1	10	6	—	17
50	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

2.

Y	X						n_y
	10	15	20	25	30	35	
30	2	6	—	—	—	—	8
40	—	4	4	—	—	—	8
50	—	—	7	35	8	—	50
60	—	—	2	10	8	—	20
70	—	—	—	5	6	3	14
n_x	2	10	13	50	22	3	$n=100$

3.

Y	X						n_y
	15	20	25	30	35	40	
5	4	2	—	—	—	—	6
10	—	6	4	—	—	—	10
15	—	—	6	45	2	—	53
20	—	—	2	8	6	—	16
25	—	—	—	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	$n=100$

4.

Y	X						n_y
	15	15	20	25	30	35	
6	4	2	—	—	—	—	6
12	—	6	2	—	—	—	8
18	—	—	5	40	5	—	50
24	—	—	2	8	7	—	17
30	—	—	—	4	7	8	19
n_x	4	8	9	52	19	8	$n=100$

5.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
20	1	5	—	—	—	—	6
30	—	5	3	—	—	—	8
40	—	—	9	40	2	—	51
50	—	—	4	11	6	—	21
60	—	—	—	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	$n=100$

6.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
8	2	4	—	—	—	—	6
12	—	3	7	—	—	—	10
16	—	—	5	30	10	—	45
20	—	—	7	10	8	—	25
24	—	—	—	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n=100$

7.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
10	2	4	—	—	—	—	6
20	—	6	2	—	—	—	8
30	—	—	3	50	2	—	55
40	—	—	1	10	6	—	17
50	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	$n=100$

8.

Y	X						n_y
	11	16	21	26	31	36	
25	2	4	—	—	—	—	6
35	—	6	3	—	—	—	9
45	—	—	6	45	4	—	55
55	—	—	2	8	6	—	16
65	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	$n=100$

9.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
8	3	3	—	—	—	—	6
18	—	5	4	—	—	—	9
28	—	—	40	2	8	—	50
38	—	—	5	10	6	—	21
48	—	—	—	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n=100$

10.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
11	4	2	—	—	—	—	6
21	—	5	3	—	—	—	8
31	—	—	5	45	5	—	55
41	—	—	2	8	7	—	17
51	—	—	—	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	$n=100$

11.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
10	2	6	—	—	—	—	8
20	—	7	3	—	—	—	10
30	—	—	2	40	2	—	44
40	—	—	1	10	13	—	24
50	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	13	6	54	22	3	$n=100$

12.

Y	X						n_y
	15	20	25	30	35	40	
30	1	6	—	—	—	—	7
40	—	—	4	—	—	5	9
50	—	4	7	30	9	—	50
60	—	—	2	10	8	—	20
70	5	—	—	—	6	3	14
n_x	6	10	13	40	23	8	$n=100$

13.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
5	—	—	4	2	—	—	6
10	—	6	—	—	—	4	10
15	45	—	6	—	2	—	53
20	—	6	2	8	—	—	16
25	7	—	—	4	—	4	15
n_x	52	12	12	14	2	8	$n=100$

14.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
6	—	—	—	4	2	—	6
12	—	5	3	—	—	—	8
18	—	5	—	40	5	—	50
24	—	—	2	8	—	7	17
30	8	—	—	4	7	—	19
n_x	8	10	5	56	14	7	$n=100$

15.

Y	X						n_y
	11	16	21	26	31	36	
20	—	—	—	—	7	—	7
30	—	4	3	—	—	—	7
40	1	—	9	40	2	—	52
50	—	6	4	11	6	—	27
60	—	—	—	4	—	3	7
n_x	1	10	16	55	15	3	$n=100$

16.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	27	
8	2	—	—	—	—	4	6
12	—	3	7	—	—	—	10
16	—	—	5	30	10	—	45
20	—	4	7	10	8	—	29
24	5	1	—	—	4	—	10
n_x	7	8	19	40	22	4	$n=100$

17.

Y	X						n_y
	11	16	21	26	31	36	
10	—	4	—	—	1	—	5
20	2	—	2	—	—	6	10
30	—	6	3	40	2	—	51
40	10	—	1	2	6	—	19
50	—	—	—	4	8	3	15
n_x	12	10	6	46	17	9	$n=100$

18.

Y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
25	—	—	4	—	1	1	6
35	7	—	2	—	—	2	11
45	—	—	6	40	4	—	50
55	—	8	2	—	9	—	19
65	3	—	—	4	7	—	14
n_x	10	8	14	44	21	3	$n=100$

19.

Y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
8	—	—	1	—	4	1	6
18	5	—	4	—	—	—	9
28	—	—	40	—	8	2	50
38	—	10	5	—	6	—	21
48	—	—	—	4	7	3	14
n_x	5	10	50	4	25	6	$n=100$

20.

Y	X						n_y
	2	7	12	17	22	37	
11	—	—	—	2	—	4	6
21	3	5	—	—	—	—	8
31	—	—	5	45	—	—	50
41	—	8	2	—	7	—	17
51	—	—	—	4	7	8	19
n_x	3	13	7	51	14	12	$n=100$

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$.
2. $(\sin x)'=\cos x$.
3. $(\cos x)'=-\sin x$.
4. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
6. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
7. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
9. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.
10. $(a^x)'=a^x\ln a$
11. $(e^x)'=e^x$.
12. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.
13. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Основные правила дифференцирования

а) $C'=0$; б) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; в) $(uv)'=u'v+uv'$; г) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Здесь $C=\text{const}$, u и v — дифференцируемые функции.

Таблица простейших интегралов

1. $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1).$

2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C.$

3. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C.$

4. $\int e^x dx=e^x+C.$

5. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

6. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C.$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C.$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;\ -\infty<x<+\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots;\ -\infty<x<+\infty;$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots;\ -1<x<1;$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots;\ -1<x<1;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots;\ -1<x\leqslant 1.$$

Таблица значений функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3882	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2568	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
0,96	0,3315	1,16	0,3770	1,36	0,4131	1,56	0,4406
0,97	0,3340	1,17	0,3790	1,37	0,4147	1,57	0,4418
0,98	0,3365	1,18	0,3810	1,38	0,4162	1,58	0,4429
0,99	0,3389	1,19	0,3830	1,39	0,4177	1,59	0,4441
1,00	0,3413	1,20	0,3849	1,40	0,4192	1,60	0,4452
1,01	0,3438	1,21	0,3869	1,41	0,4207	1,61	0,4463
1,02	0,3461	1,22	0,3883	1,42	0,4222	1,62	0,4474
1,03	0,3485	1,23	0,3907	1,43	0,4236	1,63	0,4484
1,04	0,3508	1,24	0,3925	1,44	0,4251	1,64	0,4495
1,05	0,3531	1,25	0,3944	1,45	0,4265	1,65	0,4505
1,06	0,3554	1,26	0,3962	1,46	0,4279	1,65	0,4515
1,07	0,3577	1,27	0,3980	1,47	0,4292	1,67	0,4525
1,08	0,3599	1,28	0,3997	1,48	0,4306	1,68	0,4535
1,09	0,3621	1,29	0,4015	1,49	0,4319	1,69	0,4545
1,10	0,3643	1,30	0,4032	1,50	0,4332	1,70	0,4554
1,11	0,3665	1,31	0,4049	1,51	0,4345	1,71	0,4564
1,12	0,3686	1,32	0,4066	1,52	0,4357	1,72	0,4573
1,13	0,3708	1,33	0,4082	1,53	0,4370	1,73	0,4582
1,14	0,3729	1,34	0,4099	1,54	0,4382	1,74	0,4591
1,15	0,3749	1,35	0,4115	1,55	0,4394	1,75	0,4599

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,76	0,4608	1,97	0,4756	2,36	0,4909	2,78	0,4973
1,77	0,4616	1,98	0,4761	2,38	0,4913	2,80	0,4974
1,78	0,4625	1,99	0,4767	2,40	0,4918	2,82	0,4976
1,79	0,4633	2,00	0,4772	2,42	0,4922	2,84	0,4977
1,80	0,4641	2,02	0,4783	2,44	0,4927	2,86	0,4979
1,81	0,4649	2,04	0,4793	2,46	0,4931	2,88	0,4980
1,82	0,4656	2,06	0,4803	2,48	0,4934	2,90	0,4981
1,83	0,4664	2,08	0,4812	2,50	0,4938	2,92	0,4982
1,84	0,4671	2,10	0,4821	2,52	0,4941	2,94	0,4984
1,85	0,4678	2,12	0,4830	2,54	0,4945	2,96	0,4985
1,86	0,4686	2,14	0,4838	2,56	0,4948	2,98	0,4986
1,87	0,4693	2,16	0,4846	2,58	0,4951	3,00	0,49865
1,83	0,4699	2,18	0,4854	2,60	0,4953	3,20	0,49931
1,89	0,4706	2,20	0,4861	2,62	0,4956	3,40	0,49966
1,90	0,4713	2,22	0,4868	2,64	0,4959	3,60	0,499841
1,91	0,4719	2,24	0,4875	2,66	0,4961	3,80	0,499928
1,92	0,4726	2,26	0,4881	2,68	0,4963	4,00	0,499968
1,93	0,4732	2,28	0,4887	2,70	0,4965	4,50	0,499997
1,94	0,4738	2,30	0,4893	2,72	0,4967	5,00	0,499997
1,95	0,4744	2,32	0,4898	2,74	0,4969		
1,96	0,4750	2,34	0,4904	2,76	0,4971		