1. **Энтропия, условная энтропия, взаимная информация**
2. Мировая серия — это серия из семи игр, которая заканчивается, как только любая из команд выигрывает четыре игры. Пусть X - случайная величина, представляющая результат Мировой серии между командами A и B; возможными значениями X, например, являются AAAA, BABABAB, BBBAAAA. Пусть Y - количество сыгранных игр, которое колеблется от 4 до 7. Предполагая, что A и B равны, и что игры независимы, вычислите H(X), H (Y), H (Y | X) и H (X | Y).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  YX | 0 |  1 |
| 0 | $$1/3$$ | $$1/3$$ |
| 1 | $$0$$ | $$1/3$$ |

1. Пусть $p(x,y)$ задано таблицей

 Найти:

 (a) H (X), H (Y).

 (b) H (X | Y), H (Y | X).

 (c) H (X, Y).

 (d) H (Y) − H (Y | X).

 (e) I (X; Y).

 **3.** Две урны содержат по r красных, w белых и b черных шаров. Из каждой урны извлекаются k ≥ 2 шариков по одному. При этом из первой урны извлечение происходит с возвращением (после извлечения шарик обратно кладётся в урну), а из второй – без возвращения. Какая из урн будет иметь большую энтропию после завершения эксперимента?

 **4.** Предположим, у кого-то есть n монет, среди которых может быть, а может и не быть одной фальшивой монеты. Если есть фальшивая монета, она может быть либо тяжелее, либо легче других монет. Монеты могут быть взвешены на весах. Найдите верхнюю границу количества монет n, чтобы при k взвешиваниях наверняка была найдена поддельная монета (если таковая имеется) и правильно объявлено, что она тяжелее или легче.

 **5.** Пусть $X$ и $Y$ – независимые целочисленные случайные величины, $X$ равномерно распределена на множестве $\left\{1,2,…8\right\}$, а $Pr\left\{Y=k\right\}=$ $2^{-k}, k=1,2,3, … .$ Найти $H\left(X\right), H\left(Y\right), H(X+Y,X-Y)$.

 **6.** Пусть $X,Y,Z$ – попарно независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха ½. Найти минимально возможное значение совместной энтропии $H(X,Y,Z)$.

 **7.** Пусть $X,Y$ – независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностями успеха p и q соответственно, $Z=X⊕Y$. Найти: $H\left(X\right), H\left(Y\right), I\left(Z;X\right), I(Z;Y)$.

 **8.** Пусть $X,Y$ – независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностями успеха p и q соответственно, $Z=X+Y$. Найти: $H\left(X\right), H\left(Y\right), I\left(Z;X\right), I(Z;Y)$.

 **9.** Распределения $p(x)$ и $q(x)$ заданы таблицей

|  |  |
| --- | --- |
| Символ | *p(x*) *q*(*x*)  |
| *a**b**c* | 1/2 1/31/4 1/31/4 1/3  |

 Найти: $H\left(p\right), H\left(q\right), D(p|\left|q\right), D(q||p)$

 **10.** Совместное распределение величин $\left(X,Y\right)$ задано таблицей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  **Y****X** |  ***a*** |  **b** |  **c** |
|  **1** |  **1/6** |  **1/12** | **1/12** |
|  **2** | **1/12** |  **1/6** | **1/12** |
|  **3**  | **1/12** | **1/12** |  **1/6** |

Пусть $\tilde{X}\left(Y\right)$ – оценка величины $X$ по наблюдаемой величине $Y$. Найти вероятность ошибки при оптимальном (в среднем) оценивании и сравнить её с оценкой из неравенства Фано.