Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Вологодский государственный университет

Кафедра математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольной работы

Институт машиностроения, энергетики и транспорта

Вологда

2022

Введение

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной и заочной ускоренной формы обучения. Текст содержит варианты контрольной работы, которую необходимо самостоятельно выполнить студентам в третьем семестре. Кроме того, в пособии приведен справочный теоретический материал, необходимый для выполнения контрольных заданий, разбор задач, аналогичных предложенным в контрольной работе.

Номер варианта контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра студента – номера его зачетной книжки. Работа выполняется в отдельной тетради, задачи должны быть представлены в том порядке, в котором они указаны в контрольной работе.

Компьютерное оформление работы на проверку не принимается.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Общие понятия

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного уравнения. Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения $n-$го порядка

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = C. \qquad (1)$$

$C-$произвольная постоянная, часто C = 0.

Например, уравнения $y' - \frac{y}{x} = x;\quad y'' + y = \cos x;\quad y''' - y'' = 0$ являются соответственно уравнениями первого, второго и третьего порядков.

Всякая функция $y = y(x)$, *которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество, называется решением этого уравнения*.

Пример. Функция $y = \sin x$ является решением дифференциального уравнения $y' + \mathrm{ctg}\, x \cdot y - 2\cos x = 0$, т.к.

$(\sin x)' + \mathrm{ctg}\, x \cdot \sin x - 2\cos x = \cos x + \cos x - 2\cos x \equiv 0.$

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

При интегрировании дифференциальных уравнений появляются произвольные постоянные.

Любая функция, зависящая от n *произвольных постоянных, т.е.*

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

и обращающая дифференциальное уравнение (1) в тождество, называется его общим решением.

Общее решение содержит столько произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения.

Если общее решение дифференциального уравнения $n-$*го порядка найдено в виде, не разрешенном относительно* y, *т.е. в виде* $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, *то оно называется общим интегралом.*

Решение дифференциального уравнения, полученное из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

Пример. Покажем, что функция $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x$ является общим решением уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. В самом деле

$$y' = C_2 e^x + (C_1 + C_2 x)e^x = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x;$$
$$y'' = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x + C_2 e^x = (C_1 + 2C_2 + C_2 x)e^x.$$

Следовательно,

$$y'' - 2y' + y = (C_1 + 2C_2 + C_2 x)e^x - 2(C_1 + C_2 + C_2 x)e^x + (C_1 + C_2 x)e^x \equiv 0.$$

Согласно ранее данному определению дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид: $F(x, y, y') = C$.

Если это уравнение можно разрешить относительно производной, тогда оно примет вид: $y' = f(x, y)$.

Общее решение такого уравнения $y = y(x, C)$.

Решение, которое получается из общего решения при данном начальном условии $y(x_0) = y_0$, *называется частным решением.*

Задача нахождения частного решения по начальному условию называется задачей Коши.

Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то уравнение $y' = f(x, y)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка является уравнением с *разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad \otimes$$

Правая часть этого уравнения представляет собой произведение двух множителей, каждый из которых является функцией только одной переменной.

Например, уравнение $y' = \dfrac{x^2}{y + \cos y}$ есть уравнение с разделяющимися переменными, т.к. в нем можно принять $f_1(x) = x^2$ и $f_2(y) = \dfrac{1}{y + \cos y}$. Точно так же, уравнение $xy' + y = y^2$ есть уравнение с разделяющимися переменными, т.к. его можно записать в виде $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$, где $f_1(x) = \dfrac{1}{x}, \quad f_2(y) = y^2 - y.$

Метод интегрирования (решения) уравнений с разделяющимися переменными состоит в следующем. Перепишем уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ в виде

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Разделив переменные, получим $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$

Это уравнение называется *уравнением с разделенными переменными*. Интегрируя обе части этого уравнения, получим

$$F_2(y) = F_1(x) + C \qquad \otimes\otimes.$$

Здесь $F_2(y) = \int \dfrac{dy}{f_2(y)}; \quad F_1(x) = \int f_1(x)dx; \quad C -$произвольная постоянная. Формула $\otimes\otimes$ представляет собой общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.е. является его решением в неявном виде.

Замечание. Разделив обе части исходного уравнения $\otimes$ на $f_2(y)$, можно потерять те решения, при которых $f_2(y)=0$. Действительно, если $f_2(y)=0$. при $y=y_1$, то функция $y=y_1$ есть решение уравнения $\otimes$, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой.

Пример 1. Найдите общее решение уравнения $y'+xy=xy^2$.

Решение. $y'=xy^2-xy$ или $\dfrac{dy}{dx}=x\left(y^2-y\right)$.

Разделим переменные $\dfrac{dy}{y^2-y}=xdx$ и проинтегрируем: $\displaystyle\int\frac{dy}{y^2-y}=\int xdx+C.$

Найдем интеграл из левой части равенства отдельно:

$$\int\frac{dy}{y^2-y}=\int\frac{dy}{y(y-1)}=\int\frac{y-(y-1)}{y(y-1)}dy=$$
$$=\int\frac{dy}{y-1}-\int\frac{dy}{y}=\ln|y-1|-\ln|y|=\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|.$$

Таким образом, $\ln\left|\dfrac{y-1}{y}\right|=\dfrac{x^2}{2}+C.$

Это выражение есть общий интеграл исходного уравнения. В ходе решения мы делили обе части уравнения на $\left(y^2-y\right)$, поэтому могли потерять решения, при которых $y^2-y=0$, т.е. $y=0$ и $y=1$. Проверяем непосредственно, т.е. подстановкой в исходное уравнение, эти решения. Находим, что функции $y=0$ и $y=1$ удовлетворяют данному уравнению. Оба этих решения являются особыми.

Договоримся в дальнейшем не учитывать те решения, которые можно потерять вследствие преобразований исходного уравнения.

Пример 2. Найдите частное решение уравнения $2xy' - y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(3) = 2$.

Решение. Разрешая уравнение относительно y', получим

$$y' = \frac{y}{2x} \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}.$$

Разделяя переменные, находим $\dfrac{2dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируем:

$$2\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_0, \quad 2\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad \text{где} \quad \ln|C_1| = C_0.$$

Потенцируя, получим $y^2 = |C_1 x|$. Освобождаемся от знака модуля:

$y^2 = \pm C_1 x$ или $y^2 = Cx$, где $C = \pm C_1$. Используя начальное условие, получим $C = \dfrac{4}{3}$.

Таким образом, частное решение уравнения имеет вид: $y^2 = \dfrac{4}{3}x$.

Пример 3. Найдите общее решение уравнения

$$(xy - y)dx + (x + xy)dy = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $y(x-1)dx + x(1+y)dy = 0$.

Разделяя переменные, находим $\dfrac{x-1}{x}dx + \dfrac{1+y}{y}dy = 0$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{x-1}{x}dx + \int \frac{1+y}{y}dy = C, \quad \int\left(1 - \frac{1}{x}\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} + 1\right)dy = C,$$

$$x - \ln|x| + \ln|y| + y = C, \qquad x + y + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C.$$

Последнее соотношение есть общий интеграл исходного уравнения.

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *однородным*, если его можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где правая часть есть функция только от отношения переменных $\frac{y}{x}$.

Например, уравнения

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \sin\frac{y}{x} + 2$ и $y' = \ln\frac{y}{x} + 3e^{\frac{y}{x}}$ – однородные.

Уравнение $\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0$ также однородное, т.к. его можно представить в виде

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

(числитель и знаменатель разделили на x^2).

Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$z = \frac{y}{x} \text{ или } y = zx,$$

где $z = z(x)$ – дифференцируемая функция, которую нужно найти.

Дифференцируя равенство $y = zx$, находим $y' = z'x + z$. Подставляя это выражение в исходное уравнение $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, получим

$$z'x + z = \varphi(z) \text{ или } x\frac{dz}{dx} + z = \varphi(z).$$

В полученном уравнении переменные разделяются

$$xdz = [\varphi(z) - z]dx.$$

Предполагая, что $\varphi(z) - z \neq 0$, получим

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C.$$

Найдя интеграл в левой части последнего равенства и подставляя вместо z отношение $\left(\frac{y}{x}\right)$, получим общий интеграл однородного уравнения $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример 1. Найдите общее решение уравнения $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение. Разрешим уравнение относительно y':

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x} \text{ или } y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Правая часть уравнения зависит от $\frac{y}{x}$. Уравнение однородное, поэтому сделаем замену $z=\frac{y}{x}$ или $y=zx$, тогда $y'=z'x+z$.

Подставив в уравнение выражения для y и y', получим

$z'x+z=\sqrt{1-z^2}+z$ или $z'x=\sqrt{1-z^2}$, $x\frac{dz}{dx}=\sqrt{1-z^2}$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x},\ \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{dx}{x}+C_0,$$

$$\arcsin z=\ln|x|+\ln|C_1|\ \ (\text{где } \ln|C_1|=C_0),$$

$$\arcsin z=\ln|C_1x|$$

Подставив $z=\frac{y}{x}$, для искомой функции y получим общее решение уравнения:

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|C_1x|.$$

Пример 2. Найдите общее решение уравнения $(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$. Это уравнение однородное, т.к. разделив числитель и знаменатель правой части на x^2, получим

$$y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}},$$

где правая часть уравнения зависит от $\frac{y}{x}$. Применяя подстановку $z = \frac{y}{x}$ или $y = zx$, получим

$$z'x + z = \frac{1+z}{1-z} \text{ или } z'x = \frac{1+z}{1-z} - z,\ z'x = \frac{1+z^2}{1-z},\ x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2}{1-z}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x},\ \int \frac{1-z}{1+z^2}dz = \int \frac{dx}{x} + C_0,$$

$$\int\left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2}\right)dz = \int \frac{dx}{x} + C_0,\ \mathrm{arctg} z - \frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right) = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\text{где } \ln|C| = C_0,\ \mathrm{arctg} z = \ln\left|Cx\sqrt{1+z^2}\right|.$$

Возвращаясь к функции y, получим общее решение уравнения:

$$\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left|Cx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| \text{ или } \mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left|C\sqrt{x^2+y^2}\right|.$$

Пример 3. Найдите общее решение уравнения $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

Решение. Данное уравнение однородное, т.к. правая часть его есть функция только от отношения $\frac{y}{x}$. Произведя замену $z = \frac{y}{x}$ или $y = zx$, получим

$$z'x + z = z\ln z \text{ или } x\frac{dz}{dx} = z\ln z - z,\ x\frac{dz}{dx} = z\left(\ln z - 1\right).$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{dz}{z\left(\ln z - 1\right)} = \frac{dx}{x},\ \int \frac{dz}{z\left(\ln z - 1\right)} = \int \frac{dx}{x} + C_0,$$

$$\int \frac{d\left(\ln z - 1\right)}{\ln z - 1} = \int \frac{dx}{x} + C_0,\ \ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

(где $\ln|C_1| = C_0$).

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|xC_1|, \ |\ln z - 1| = |xC_1|,$$
$$\ln z - 1 = \pm C_1 x, \ \ln z = Cx + 1 \ \text{(где } C = \pm C_1\text{)},$$

откуда $z = e^{Cx+1}$. Подставляя $z = \dfrac{y}{x}$, получим общее решение уравнения:

$$y = xe^{Cx+1}.$$

1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ является *линейным,* если его можно представить виде

$$y' = P(x)y + Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x (или постоянные). Таким образом, искомая функция y и ее производная y' входят в линейное уравнение в первой степени.

Например, уравнения $y' = y\sin^2 x + x^2$ и $xy' = y + e^x$;

уравнение же $yy' + xy^3 = \cos x$ не является линейным.

Для решения линейного уравнения $y' = P(x)y + Q(x)$ применим подстановку $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Одну из тих функций будем выбирать произвольно, другую определим в соответствии с этим выбором так, чтобы их произведение удовлетворяло исходному уравнению.

Дифференцируя $y = uv$, получим

$y' = u'v + uv'$.

Тогда линейное уравнение примет вид

$$u'v + uv' = P(x)uv + Q(x) \text{ или}$$

$$u'v + u(v' - P(x)v) = Q(x) \otimes.$$

Используя произвольный выбор одной из функций потребуем, чтобы в уравнении $\otimes$выражение в скобках обратилось в нуль, т.е. чтобы

$$v' - P(x)v = 0.$$

Разделяя переменные в этом уравнении относительно функции *v*, находим

$$\frac{dv}{v} = P(x)dx.$$

Решаем полученное уравнение и выбираем какое-нибудь частное его решение: $\ln|v| = \int P(x)dx, \quad |v| = e^{\int P(x)dx}, \; v = \pm e^{\int P(x)dx} = v(x).$

Подставив найденную функцию $v(x)$ в уравнение $\otimes$, получаем

$$u'v = Q(x) \quad \text{или} \quad u' = \frac{Q(x)}{v(x)}, \quad du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx, \qquad \text{откуда}$$

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C = u(x, C).$$

Теперь, зная вид функций $v(x)$ и $u(x, C)$, можем выписать общее решение линейного уравнения y:

$$y = uv = v(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C\right].$$

Замечание. Произвольная постоянная С входит в решение линейного уравнения только один раз: либо в формулу функции u, либо в формулу функции v. Начинать решение можно либо с нахождения функции v, либо с нахождения функции u.

Пример 1. Найдите общее решение уравнения $y' - \frac{3}{x} y = -\frac{x}{2}$.

Решение. Полагая $y = uv$, найдем $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в исходное уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x} uv = -\frac{x}{2},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{x} v\right) = -\frac{x}{2}. \quad \otimes$$

Для нахождения v используем уравнение $v' - \frac{3}{x} v = 0$, из которого следует

$v' = \frac{3}{x} v$ или $\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}$. Интегрируя последнее уравнение находим:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3dx}{x}, \quad \ln|v| = 3\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|x^3\right| \quad \text{или} \quad v = x^3.$$

Подставляя функцию v в уравнение $\otimes$, получаем для определения u уравнение: $x^3 u' = -\frac{x}{2}$ или $u' = -\frac{1}{2x^2}$, $du = -\frac{dx}{2x^2}$. Интегрируя, получим :

$$u = -\int \frac{dx}{2x^2} + C, \quad u = \frac{1}{2x} + C.$$

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = uv = \left(\frac{1}{2x} + C\right) x^3 = \frac{x^2}{2} + Cx^3.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y' + xy = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1.$

Решение. Сделаем замену $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим:

$$u'v + uv' + xuv = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + xv) = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \qquad \otimes$$

Для нахождения функции v используем уравнение $v' + xv = 0,$ из которого следует $v' = -xv$ или $\frac{dv}{v} = -xdx.$ Интегрируем последнее уравнение:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int xdx, \quad \ln|v| = -\frac{x^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Подставляя функцию v в уравнение $\otimes$, получаем для определения функции u уравнение $u'\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ или $u' = x\mathrm{e}^{x^2}$, $du = x\mathrm{e}^{x^2}\,dx.$

Интегрируя, находим $u = \int x\mathrm{e}^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C.$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$y = uv = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Подставляя в полученное общее решение начальное условие, находим:

$$1 = \frac{1}{2} + C, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, частным решением является $y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right).$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

2.1. Общие сведения

Уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$,

где $p = p(x)$, $q = q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции в некотором интервале, называется *неоднородным* линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Если $f(x) = 0$ в этом интервале, то уравнение принимает вид

$$y'' + py' + qy = 0$$

и называется *однородным* линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, определенные и непрерывные в некотором интервале, называются *линейно-независимыми*, если их отношение не является постоянным числом, $\frac{y_1}{y_2} \neq const.$

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются *линейно-зависимыми*, если существует такое постоянное число $\lambda \neq 0$, что $\frac{y_1}{y_2} \equiv \lambda$.

Пример. Функции e^x и e^{-x} – линейно независимы, т.к.

$$\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq const.$$

Функции $2x$ и x – линейно зависимы, т.к. $\frac{2x}{x} \equiv 2 = const.$

Теорема 1. Если $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – любые два линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 – решения линейного однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то имеем тождества:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \qquad y_2'' + py_2' + qy_2 = 0.$$

Используя их, получим тождество:

$$\begin{gathered}(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ = C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0.\end{gathered}$$

Следовательно, выражение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ является решением линейного однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, и поскольку это решение содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2, то оно является общим решением.

Замечание. Если же y_1 и y_2 – линейно зависимые функции, то решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ не будет общим. Действительно, пусть $\dfrac{y_1}{y_2} \equiv \lambda$ ($\lambda = const \neq 0$), откуда $y_1 = \lambda y_2$. Подставим это равенство в решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y = C_1 \lambda y_2 + C_2 y_2 = y_2(\lambda C_1 + C_2) = C y_2, \quad \text{где } C = (\lambda C_1 + C_2) = const.$$

Полученное решение содержит только одну произвольную постоянную, поэтому оно не может быть общим.

Теорема 2. Общее решение неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $y''+py'+qy=0$ и любого частного решения данного неоднородного уравнения.

Доказательство. Пусть $y_0=C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение однородного уравнения и $\bar{y}$ – любое частное решение неоднородного уравнения. Следовательно, имеем тождества $y_0''+py_0'+qy_0=0,\ \bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y}=f(x)$. Складывая их почленно, получим тождество

$$y_0''+py_0'+qy_0+\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y}=(y_0+\bar{y})''+p(y_0+\bar{y})'+q(y_0+\bar{y})=f(x).$$

Следовательно, функция $y=y_0+\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2+\bar{y}$ – решение неоднородного уравнения $y''+py'+qy=f(x)$ и при этом общее, т.к. в эту функцию входят две произвольные постоянные.

2.2. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть в линейном однородном уравнении $y''+py'+qy=0$ коэффициенты p и q – действительные числа.

Частное решение этого уравнения будем искать в виде функции $y=\mathrm{e}^{kx}$, где k – действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя по x выбранную функцию, получим $y'=k\,\mathrm{e}^{kx},\ y''=k^2\,\mathrm{e}^{kx}$. Подставляя производные в исходное уравнение, получим:

$$\mathrm{e}^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0.$$

Учитывая, что $\mathrm{e}^{kx}\neq 0$, необходимо, чтобы

$$k^2+pk+q=0. \qquad \otimes$$

Алгебраическое уравнение $\otimes$ называется *характеристическим* уравнением линейного однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Заметим, что характеристическое уравнение может быть составлено по данному линейному однородному уравнению заменой y'', y' и y на k^2, k и 1, т.е. степень k совпадает с порядком производной, при этом учитывается, что производная нулевого порядка есть сама функция.

При решении характеристического уравнения как квадратного относительно k могут получиться три вида корней.

1) Корни k_1 и k_2 – действительные и разные числа. В этом случае два частных решения $y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x}$ являются линейно независимыми, т.к. их отношение $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\mathrm{e}^{k_1 x}}{\mathrm{e}^{k_2 x}} = \mathrm{e}^{(k_1 - k_2)x} \neq const$. Из теоремы 1 следует, что общее решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ в данном случае будет таким:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{k_2 x}$$

Пример. Найдите частное решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0$. Так как его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ – действительные и различные числа, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}.$$

Подставляя начальные условия в выражения для функции и ее производной

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 3 = -C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{4}{3}$. Таким образом, решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x}$.

2) Корни k_1 и k_2 – действительные и равные числа $(k_1 = k_2 = k)$. В этом случае одно частное решение будет $y_1 = e^{kx}$, в качестве второго возьмем $y_2 = xe^{kx}$. Убедимся непосредственной подстановкой в уравнение $y'' + py' + qy = 0$, что выбранная функция является его решением. Так как

$$y' = \left(xe^{kx}\right)' = e^{kx} + kxe^{kx} = e^{kx}(1 + kx);$$

$$y'' = \left(e^{kx}(1 + kx)\right)' = ke^{kx}(1 + kx) + ke^{kx} = ke^{kx}(2 + kx).$$

получим

$$ke^{kx}(2 + kx) + pe^{kx}(1 + kx) + qxe^{kx} = e^{kx}\left(k^2x + 2k + p + pkx + qx\right) =$$
$$= e^{kx}\left[\left(k^2 + pk + q\right)x + 2k + p\right] = e^{kx}(-p + p) = 0.$$

Примечание: в преобразованиях использовано условие, что k является кратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, т.е. находится по формуле $k = -\frac{p}{2}$.

Таким образом, в данном случае общее решение однородного линейного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \mathrm{e}^{k x} + C_2 x \mathrm{e}^{k x}$$

Пример. Найдите общее решение уравнения $y'' + 12y' + 36y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение

$k^2 + 12k + 36 = 0$ или $(k + 6)^2 = 0,$

его корни $k_1 = k_2 = -6$, общее решение $y = C_1 \mathrm{e}^{-6x} + C_2 x \mathrm{e}^{-6x}$.

3) Корни k_1 и k_2 – комплексные числа. Для комплексных корней получаются решения следующего вида:

$$y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x} = \mathrm{e}^{(\alpha + \beta i)x} = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \mathrm{e}^{i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x),$$
$$y_2 = \mathrm{e}^{k_2 x} = \mathrm{e}^{(\alpha - \beta i)x} = \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \mathrm{e}^{-i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i \sin\beta x).$$

Они линейно независимы, т.к.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)}{\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)} = \frac{(\cos\beta x + i\sin\beta x)^2}{(\cos\beta x - i\sin\beta x)(\cos\beta x + i\sin\beta x)} =$$
$$= \frac{\cos^2\beta x + 2i\cos\beta x\sin\beta x + i^2\sin^2\beta x}{\cos^2\beta x - i^2\sin^2\beta x} = \frac{\cos^2\beta x - \sin^2\beta x + 2i\cos\beta x\sin\beta x}{\cos^2\beta x + \sin^2\beta x} =$$
$$= \cos 2\beta x + i\sin 2\beta x \neq const.$$

Общее решение можно записать в таком виде:

$$y = C^* y_1 + C^{**} y_2 = C^* \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C^{**}\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) =$$
$$= \mathrm{e}^{\alpha x}\left[(C^* + C^{**})\cos\beta x + (C^* - C^{**})i\sin\beta x\right] = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

где $C_1 = C^* + C^{**}, \qquad C_2 = (C^* - C^{**})i.$

Следовательно, общее решение в данном случае можно записать так:

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Если корни k_1 и k_2 чисто мнимые, т.е. $k_1 = i\beta,\ k_2 = -i\beta\ \ (\beta \neq 0)$, то общее решение в этом случае имеет вид:

$$y = \left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Пример. Найдите общее решение уравнения $4y'' - 8y' + 5y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $4k^2 - 8k + 5 = 0,$ его корни $k_{1,2} = 1 + 0{,}5i,$ общее решение $y = \mathrm{e}^x\left(C_1 \cos 0{,}5x + C_2 \sin 0{,}5x\right).$

Составим таблицу формул общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$ в зависимости от вида корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

Корни характеристического уравнения	Формула общего решения $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$
$k_1 \neq k_2$	$y = C_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{k_2 x}$
$k_1 = k_2$	$y = C_1 \mathrm{e}^{kx} + C_2 x \mathrm{e}^{kx}$
$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$
$k_{1,2} = \pm\beta i$	$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$

2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим решение уравнений вида $y''+py'+qy=f(x)$ для тех случаев, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид. Вид правой части определяет и вид частного решения неоднородного уравнения $\bar{y}$, который уточняется с учетом значения корней характеристического уравнения.

1) Пусть правая часть имеет вид $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{ax}$, где a – действительное число, $P_n(x)$ – многочлен степени n, которая в частном случае может быть и равной 0, тогда $P_n(x)=const\neq 0$.

а) Если a не является корнем характеристического уравнения, то частное решение выбираем в виде:

$\bar{y}=Q_n(x)\mathrm{e}^{ax}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами, подлежащими определению.

б) Если a является корнем характеристического уравнения, то частное решение выбираем в виде:

$\bar{y}=x^r Q_n(x)\mathrm{e}^{ax}$, где r – кратность корня (для уравнений второго порядка r может принимать значения 1 или 2).

Пример 1. Найдите общее решение уравнения

$$y''-5y'+6y=6x^2-10x+2.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-5k+6=0$, его корни $k_1=2,\ k_2=3$.

Общее решение однородного уравнения: $y_0=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$.

Для определения вида частного решения неоднородного уравнения заметим, что его правая часть имеет вид $P_2(x)\mathrm{e}^{0x}$. Так как $a=0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде:

$$\bar{y} = Q_2(x)\mathrm{e}^{0x} = Ax^2 + Bx + C,$$

где *A, B, C* – неопределенные коэффициенты.

Для их определения подставим $\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''$ в исходное уравнение.

Учитывая, что $\bar{y}' = 2Ax + B,\ \ \bar{y}'' = 2A$ после подстановки получим:

$$2A - 5(2Ax + B) + 6\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 6x^2 - 10x + 2.$$

Перегруппируем слагаемые по степеням *x*:

$$6Ax^2 + (6B - 10A)x + 6C - 5B + 2A = 6x^2 - 10x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получим систему для определения коэффициентов:

$$\begin{cases} 6A = 6 \\ 6B - 10A = -10 \\ 6C - 5B + 2A = 2 \end{cases}$$

Ее решением являются значения $A = 1,\ B = 0,\ C = 0$. Следовательно, $\bar{y} = x^2$ и общим решением данного уравнения будет:

$$y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + x^2$$

Пример 2. Найдите общее решение уравнения $y'' + y' = 2x + 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$, его корни $k_1 = 0,\ k_2 = -1$, решение однородного уравнения $y_0 = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x}$.

Выберем вид частного решения $\bar{y}$. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x)=P_1(x)\mathrm{e}^{0x}$$

Так как 0 является корнем характеристического уравнения кратности 1, то частное решение выбираем в виде

$$\bar{y}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx.$$

Находим производные $\bar{y}'=2Ax+B,\ \ \bar{y}''=2A.$ После подстановки в исходное уравнение получим:

$$2A+2Ax+B=2x+1 \quad \text{или} \quad 2Ax+2A+B=2x+1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\begin{cases}2A=2\\2A+B=1\end{cases}$$

Решением системы являются значения $A=1,\ \ B=-1$. Следовательно, $\bar{y}=x^2-x$ и общее решение уравнения имеет вид:

$$y=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{-x}+x^2-x.$$

Пример 3. Найдите общее решение уравнения $y''-y=6\mathrm{e}^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-1=0$, его корни $k_1=-1,\ k_2=1$.

Решение однородного уравнения $y_0=C_1\,\mathrm{e}^{-x}+C_2\,\mathrm{e}^{x}$.

Так как правая часть исходного уравнения имеет вид $const\cdot\mathrm{e}^{2x}$, а число $a=2$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $\bar{y}=A\mathrm{e}^{2x}$.

Найдем производные: $\bar{y}' = 2A\mathrm{e}^{2x}$, $\bar{y}'' = 4\mathrm{e}^{2x}$. Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение, получим

$$4A\mathrm{e}^{2x} - A\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}, \quad 3A\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}, \quad A = 2, \quad \bar{y} = 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Общим решением уравнения будет $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{2x}$.

Пример 4. Найдите общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 2\mathrm{e}^{x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет кратный корень $k_{1,2} = 1$, поэтому решение однородного уравнения имеет вид: $y_0 = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 + C_2 x\right)$. Учитывая вид правой части уравнения и то, что $a = 1$ совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения, частное решение будем искать в виде:

$$\bar{y} = Ax^2\mathrm{e}^{x}$$

Находим производные:

$$\bar{y}' = A\left(2x\mathrm{e}^{x} + x^2\mathrm{e}^{x}\right) = A\left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{x},$$
$$\bar{y}'' = A\left[\left(2x + 2\right)\mathrm{e}^{x} + \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{x}\right] = A\left(x^2 + 4x + 2\right)\mathrm{e}^{x}.$$

Подставляем их и выбранную в качестве решения функцию в уравнение:

$$A\left(x^2 + 4x + 2\right)\mathrm{e}^{x} - 2A\left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{x} + Ax^2\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{x}.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим $A = 1$, $\bar{y} = x^2\mathrm{e}^{x}$.

Общее решение имеет вид $y = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 + C_2 x\right) + x^2\mathrm{e}^{x}$.

2) Пусть правая часть имеет вид $f(x)=M\cos bx+N\sin bx$, где M, N, b – действительные числа, причем M, N не равны 0 одновременно.

Укажем вид частного решения $\bar{y}$.

а) Если $\pm bi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $\bar{y}$ ищут в форме тригонометрического двучлена

$$\bar{y}=A\cos bx+B\sin bx,$$

где A и B – неопределенные коэффициенты, подлежащие определению; причем при выборе решения нужно указывать оба эти коэффициента, даже если один из коэффициентов M или N тождественно равен 0.

б) Если $\pm bi$ – корни характеристического уравнения, то частное решение выбираем в виде $\bar{y}=x(A\cos bx+B\sin bx)$.

Пример 1. Найдите общее решение уравнения $y''+y'+y=-13\sin 2x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2+k+1=0$, найдем его корни

$$k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Общее решение однородного уравнения будет

$$y_0=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Числа $\pm bi=\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение выбираем в виде

$$\bar{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Дифференцируем

$\bar{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad \bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Подставляем выбранную для решения функцию и ее производные в исходное уравнение:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = -13\sin 2x,$$
$$(-3A + 2B)\cos 2x + (-2A - 3B)\sin 2x = -13\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в правой и левой части уравнения, получим систему для определения *A* и *B*:

$$\begin{cases} -3A + 2B = 0 \\ -2A - 3B = -13 \end{cases}$$

Ее решение $A = 2$, $B = 3$. Следовательно, частное решение

$$\bar{y} = 2\cos 2x + 3\sin 2x$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 2\cos 2x + 3\sin 2x.$$

Пример 2. Найдите общее решение уравнения $y'' + y = \cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$, его корни $k_{1,2} = \pm i$. Общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Так как числа $\pm bi = \pm i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = x(A\cos x + B\sin x).$$

Находим производные

$$\bar{y}' = A\cos + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$
$$\bar{y}'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) =$$
$$= -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x).$$

Подставив $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в исходное уравнение, после приведения подобных получим $-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в правой и левой части уравнения, найдем $A = 0$, $B = 1/2$. Тогда частное решение

$$\bar{y} = \frac{x}{2}\sin x$$

Общим решением будет $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x$.

3) Пусть правая часть имеет вид $f(x) = \mathrm{e}^{ax}(M\cos bx + N\sin bx)$, где M, N, a, b – действительные числа (M и N одновременно не равны 0, $a \neq 0$).

Составим комплексные числа $a \pm bi$, где действительная часть a есть коэффициент при x в множителе e^{ax}, а мнимая часть b - коэффициент при x в аргументе функций $\cos bx$ и $\sin bx$.

а) Если $a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение выбираем в виде

$$\bar{y} = \mathrm{e}^{ax}(A\cos bx + B\sin bx),$$

где A и B – неопределенные коэффициенты.

б) Если $a \pm bi$ – корни характеристического уравнения, то частное решение выбираем в виде

$$\bar{y} = x\mathrm{e}^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

Пример. Найдите общее решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{x}(\cos x - 7\sin x).$$

Решение. Так как корни характеристического уравнения $k^2+k-2=0$ равны -2 и 1, то общее решение однородного уравнения будет

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Составим числа $a \pm bi = 1 \pm i$. Они не совпадают с корнями характеристического уравнения, следовательно, частное решение нужно искать в виде $\bar{y} = e^x (A\cos x + B\sin x)$.

Найдем производные

$$\bar{y}' = e^x (A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) =$$
$$= e^x\left[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right];$$
$$\bar{y}'' = e^x\left[(A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right] + e^x\left[-(A+B)\sin x + (B-A)\cos x\right] =$$
$$= e^x (2B\cos x - 2A\sin x).$$

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в исходное уравнение и приводя подобные, получим

$$e^x\left[(-A+3B)\cos x + (B+3A)\sin x\right] = e^x(\cos x - 7\sin x).$$

Сокращая на e^x и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим систему для определения коэффициентов *A* и *B*:

$$\begin{cases} -A+3B=1 \\ -3A-B=-7 \end{cases}$$

Ее решением являются $A = 2$, $B = 1$. Следовательно

$$\bar{y} = e^x (2\cos x + \sin x).$$

Общее решение исходного уравнения будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x (2\cos x + \sin x).$$

3. Числовые ряды

3.1. Основные понятия

Пусть имеется бесконечная числовая последовательность $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..\}$. Числовым рядом называется сумма членов этой последовательности $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приведем примеры числовых рядов. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ... \frac{1}{2^{n-1}}, ...\right\}$ называется геометрическим рядом $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Из курса средней школы известна формула вычисления такой суммы. В таком случае говорят, что ряд сходится. Основным вопросом теории рядов является вопрос о сходимости ряда. Рассмотрим этот вопрос подробно.

Пусть дан числовой ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Рассмотрим конечные суммы, которые называются *частичными суммами ряда*

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
....
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
....

Получаем бесконечную последовательность частичных сумм $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots\} = \{S_n\}$. *Если существует* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$*, то говорят, что ряд сходится и сумма ряда равна* $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Свойства числовых рядов

1) Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$, то сходится ряд и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S + \sigma$.

2) При умножении ряда на некоторое число $\lambda \neq 0$ сходимость ряда не меняется.

То есть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$ имеют одинаковую сходимость.

3) Рассмотрим ряд

$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n + \ldots = S_m + R_m$.

$R_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ называется остатком ряда. Остаток ряда является рядом и получается из данного ряда отбрасыванием нескольких членов.

Справедливо утверждение: числовой ряд и любой из его остатков имеют одинаковую сходимость

4) Ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{m \to \infty} R_m = 0$.

Пример 1: Дана сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии $1 + g + g^2 + \ldots. + g^n + \ldots \sum_{n=0}^{\infty} g^n$. Частичные суммы этого ряда $S_n = 1 + g + \ldots. + g^n$. Выполним преобразования:

$1 + g + \ldots. + g^n = \dfrac{\left(1 + g + \ldots + g^n\right)\left(1 - g\right)}{1 - g} = \dfrac{1 - g^n}{1 - g}$, и вычислим $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - g^n}{1 - g}$.

1) Если $|g| < 1$, то $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \dfrac{1 - g^n}{1 - g} = \dfrac{1}{1 - g}$. Следовательно, ряд сходится.

2) В случае если $|g|>1$ – ряд расходится. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-g^n}{1-g} = \infty$

.

3) При $g=1$ частичные суммы $S_n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ раз} = n$, значит $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Таким образом, рад расходится.

4) При $g=-1$ ряд расходится. Так как при рассмотрении частичных сумм получается последовательность $\{S_n\} = \{1,0,1,0,\ldots\}$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Пример 2: Исследовать на сходимость гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами S_{2^k} и вспомогательную последовательность $S^*_{2^k}$ и сравним их значения.

$S_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $S^*_1 = 1$

$S_2 = 1+\dfrac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $S^*_2 = 1+\dfrac{1}{2}$

$S_4 = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$ $\qquad\qquad$ $S^*_4 = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4} = 1+\dfrac{2}{2}$

…………………………………… $\qquad$ ………………………………

$S_{2^k} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^k}$ $\qquad\qquad$ $S^*_{2^k} = 1+\dfrac{k}{2}$.

$S_{2^k} \le S^*_{2^k} \quad \forall k = 0,1,\ldots$

$$\lim_{k\to\infty} S^*_{2^k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{k}{2}\right) = \infty \Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_{2^k} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Для частичных сумм с нечетными номерами справедливо равенство $S_{2^k+1} = S_{2^k} + \frac{1}{2^k+1}$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(S_{2^k} + \frac{1}{2^k+1}\right) = \infty$. Отсюда следует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то есть гармонический ряд расходится.

3.2. *Признаки сходимости положительных числовых рядов*

Основным вопросом теории рядов теории является вопрос о сходимости ряда. На этот вопрос отвечают теоремы, которые называются признаками сходимости.

Теорема 1. Необходимый признак сходимости.

Пусть ряд $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Сходимость ряда означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Поскольку $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, то $a_n = S_n - S_{n-1}$.
Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Следствие является достаточным условием расходимости ряда.

Теорема 2. Признак сравнения.

Пусть имеются два положительных ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2). Причем выполняется условие $a_n \le b_n \quad \forall n$ Тогда, если а) сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);

б) если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Доказательство. Пусть $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $\sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

а) Если ряд (2) сходится. Тогда $\lim\limits_{m \to \infty} \sigma_n = \sigma$, то есть последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена и $\sigma_n \le M \ \ \forall n$. Но, в силу условия теоремы $S_n \le \sigma_n$ и поэтому $S_n \le M \quad \forall n$. Следовательно, последовательность S_n возрастает и ограничена сверху, значит $\exists \lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. Таким образом ряд (1) сходится.

б) Второе утверждение теоремы является следствием первого.

Теорема 3. Предельный признак сравнения

Пусть имеются два ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ \ (0 < \mathrm{k} < \infty)$, то ряды имеют одинаковую сходимость (сходятся или расходятся одновременно).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется обобщенным гармоническим рядом. Сходимость этого ряда зависит от параметра p. Если $\begin{cases} p > 1, \text{ряд сходится} \\ p \le 1, \text{ряд расходится} \end{cases}$. Проверку этого утверждения проведем позднее с помощью интегрального признака.

Обобщенный гармонический ряд часто используют в качестве «эталонного» ряда.

Теорема 4. (Признак Даламбера)

Пусть для положительного ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то ряд расходится; если $q = 1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. В этом случае нужно использовать или другой признак.

В признаке Даламбера используется только сам исследуемый ряд, ряд для сравнения не нужен, это облегчает применение признака.

Рекомендация. Признак Даламбера часто применяют в тех случаях, когда выражение для a_n содержит либо показательную функцию, либо факториал.

Теорема 5. (Радикальный признак Коши)

Пусть для положительного ряда $a_1 + a_2 \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится; если $q > 1$, то ряд расходится; если $q = 1$, то признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. В этом случае нужно использовать или другой признак.

Для радикального признака Коши справедливо то же замечание, что и для признака Даламбера.

Рекомендация. Радикальный признак Коши часто используют тогда, когда a_n представляет собой показательно-степенную функцию вида $a_n = \left(f(n)\right)^{g(n)}$.

Теорема 6. (Интегральный признак Коши)

Пусть члены ряда $a_1 + a_2 \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и не возрастают. И пусть $f(x)$ непрерывная, неотрицательная и невозрастающая на интервале $[1;\infty)$ функция такая, что $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n \ldots$. тогда справедливы утверждения:

а) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и данный ряд;

б) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и данный ряд.

Используем интегральный признак Коши для исследования на сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x}, \ p = 1; \\ \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}, \ p \neq 1; \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b, \ p = 1; \\ \lim\limits_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b, \ p \neq 1; \end{cases} =$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{b\to\infty}\ln b, \quad p=1;\\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right), \ p<1;\\ \lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{1}{p-1}\left(1-\dfrac{1}{b^{p-1}}\right), \ p>1;\end{cases} = \begin{cases}\infty, \ p=1;\\ \infty, \ p<1;\\ \dfrac{1}{p-1}, \ p>1.\end{cases}$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится, если $p>1$, и расходится, если $p\le 1$.

Пример 1. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Так как общий член этого ряда $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ представляет собой правильную рациональную дробь, то ее можно разложить на простейшие дроби: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. С учетом этого разложения S_n можно представить в виде:

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, таким образом ряд сходится и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Пример 2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Решение. Дан ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$. Для любого $\forall n\in N$ выполняются неравенства $n>\ln n\Rightarrow\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$. Данный ряд расходится, так как расходится гармонический ряд.

Пример 3. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^3-n-1}$.

Решение. Выберем для сравнения расходящейся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Выбор обусловлен тем, что отношение старших степеней числителя и знаменателя дроби $\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$. Проверим условие теоремы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^3-n-1}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n}{3n^3-n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{3}.$$

Ряды имеют одинаковую сходимость. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^3-n-1}$ расходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+n+4}$ расходится.

Пример 4. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Решение. Так как

$$a_n=\frac{2^n}{n!};\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\text{ то }\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2}{n!(n+1)}\cdot\frac{n!}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$$

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ сходится.

Пример 5. Исследуйте ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{5n-1}$.

Решение. Общий член ряда $a_n=\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{5n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{5-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^5<1.$$

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^{5n-1}$ сходится.

Пример 6. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Решение. Общий член ряда $a_n=\frac{1}{n\ln n}$. Составим функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ и рассмотрим интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}\big(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\big)=\infty.$$

Ответ: ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится.

3.3. Знакопеременные числовые ряды

Знакопеременным рядом называется числовой ряд с членами произвольного знака.

Теорема 1.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (1) сходится, если

сходится ряд $|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (2) составленный из модулей его членов.

Доказательство. Обозначим частичные суммы рядов (1) и (2) $u_1+u_2+\ldots+u_n+=s_n$ и $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|=\sigma_n$. Составим два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$, $p_n=\begin{cases}u_n,\, u_n>0\\ 0,\; u_n<0\end{cases}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$, $p_n=\begin{cases}-u_n,\, u_n<0\\ 0,\; u_n>0\end{cases}$ с частичными суммами соответственно s_n' и s_n''. Новые ряды сходятся так как $s_n'+s_n''=\sigma_n$ ($\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ существует, то существуют $\lim_{n\to\infty}s_n'$ и $\lim_{n\to\infty}s_n''$). Данный (1) ряд сходится, потому что $s_n'-s_n''=s_n$, и тогда существует $\lim_{n\to\infty}s_n$.

Если сходится ряд (2), то ряд (1) называют *абсолютно сходящимся*. Если ряд (1) сходится, но ряд (2) расходится, то ряд (1) называют *условно сходящимся.*

Среди знакопеременных особо выделяют знакочередующиеся ряды.

Знакочередующимся рядом называется числовой ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n;\quad a_n>0.$$

Теорема 2 (Признак Лейбница).

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n;\quad a_n>0$выполняются условия:

а) $a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ... > 0$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то этот ряд сходится.

Замечание. Условие (а) может выполняться для всех *n*, начиная с некоторого $k > 1$.

Можно показать, что абсолютная погрешность приближенного вычисления суммы *s* сходящегося ряда подчиняется условию

$$|R_n| = |s - s_n| \le u_{n+1}, \text{ где } s_n = a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n-1} a_n .$$

Пример 1. Докажите сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ и проверьте характер сходимости.

Решение. 1) Исследование на условную сходимость.

а) $\frac{1}{10^1} > \frac{2}{10^2} > \frac{3}{10^3} > ... > 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{10^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(10^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{10^x \ln 10} = 0$.

2) Исследование на абсолютную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n} .$$

$$a_n = \frac{n}{10^n}; \; a_{n+1} = \frac{n+1}{10^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n} = \frac{1}{10} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{10} = \lambda < 1.$$

Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Решение. Проверим выполнение условий Лейбница

а) $\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{\ln 3}>...>\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}>...$

б) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$.

Данный ряд сходится условно, так как $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится.

4. Тригонометрические ряды

Функциональным рядом называется выражение вида

$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, где $f_n(x)$- функции аргумента x, определенные на множестве D.

Если аргументу x придать значение $x_0\in D$, то функциональный ряд преобразуется в числовой ряд $f_1(x_0)+f_2(x_0)+\ldots+f_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$, который может быть сходящийся или расходящийся. Если числовой ряд сходится, то x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости.* В области сходимости функциональный ряд имеет сумму, которая является функцией аргумента x: $S=S(x)$.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos x+b_2\sin x+\ldots+a_n\cos x+b_n\sin x+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos x+b_n\sin x,$$

где $a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ldots,\ a_n,\ b_n$- действительные числа, называемые коэффициентами разложения.

Если коэффициенты разложения вычисляются по формулам :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nxdx,$$

то они называются *коэффициентами Фурье*, а ряд с такими коэффициентами называется *рядом Фурье*.

Теорема Дирихле: Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π на отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, т.е. или непрерывна на всем отрезке, или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi;\pi]$, т.е. или монотонна на всем отрезке, или отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функция монотонна.

Тогда соответствующий $f(x)$ ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$ и при этом: в каждой точке непрерывности функции сумма ряд совпадает с функцией $S(x)=f(x)$;

в каждой точке разрыва x^* сумма ряда равна $S(x^*)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x^*-0} f(x)+\lim\limits_{x\to x^*+0} f(x)\right)$;

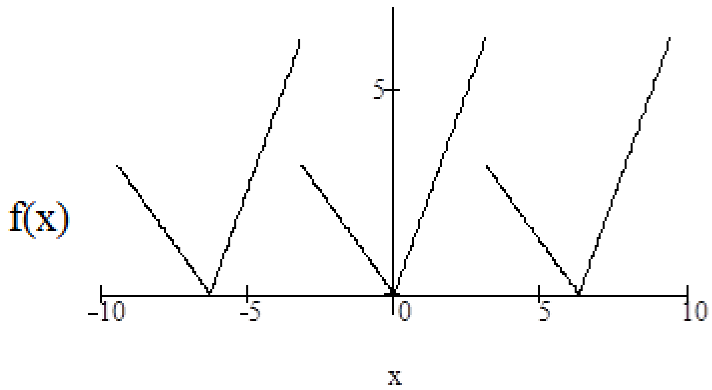
на концах отрезка - $S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x)+\lim\limits_{x\to\pi+0} f(x)\right)$.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0\\ 2x, & 0\le x<\pi\end{cases}.$$

Решение.

График функции изображен на рисунке. Он показывает, что в интервале $(-\pi;\pi)$ функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.



Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cdot\cos nxdx.$$

Выполним в интеграле $\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nxdx$ замену, положив $x=-z$.

Будем иметь:

$$\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nxdx=-\int_{\pi}^{0}(-z)\cos(-nz)dz=\int_{\pi}^{0} z\cos nzdz=-\int_{0}^{\pi} z\cos nzdz=-\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx.$$

Тогда

$$a_n = \frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx dx = \frac{3}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{3}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \frac{3}{n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{3\left((-1)^n - 1\right)}{n^2}$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cdot\sin nx dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx dx.$$

Так же, как в предыдущем случае, докажем, что $\int_{-\pi}^{0} x\cdot\sin nx dx = \int_0^{\pi} x\cdot\sin nx dx$.

Получим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx dx = -\frac{\pi}{\pi n}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

В результате получим ряд

$$\frac{3}{4}\pi - \frac{6}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right] + \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right] =$$

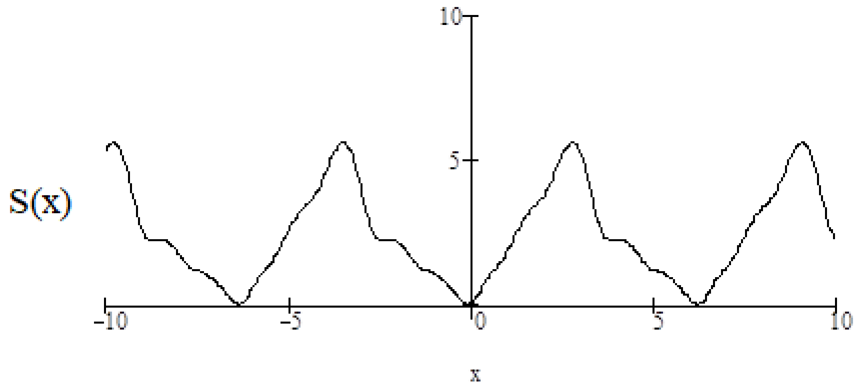
$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n},$$

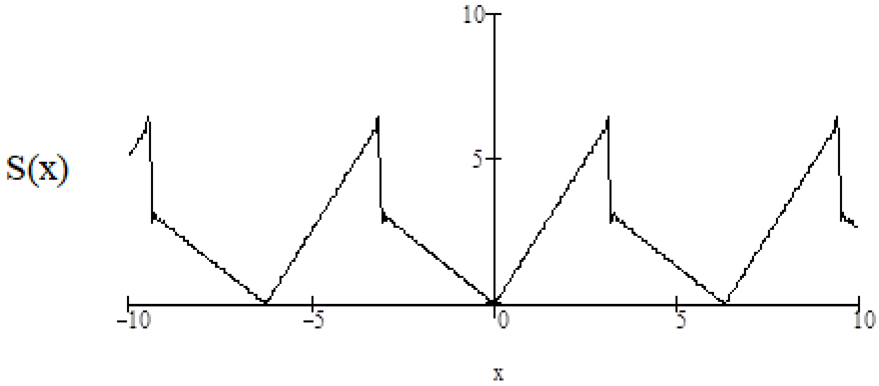
сумма которого $S(x) = -x$ при $-\pi < x < 0$, $S(x) = 2x$ при $0 \le x < \pi$

и на концах интервала в точках π и $-\pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

На рисунках представлены графики частичных сумм при $n = 5, 50$





Если функция $f(x)$ периодическая с периодом $2l$ на интервале удовлетворяет условиям теоремы Дирихле $(-l;l)$, где l произвольное число, то ее можно разложить в ряд Фурье, выполнив замену переменной $t=\dfrac{\pi}{l}x$. Все свойства, перечисленные выше, сохраняются, а формулы вычисления коэффициентов имеют вид:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

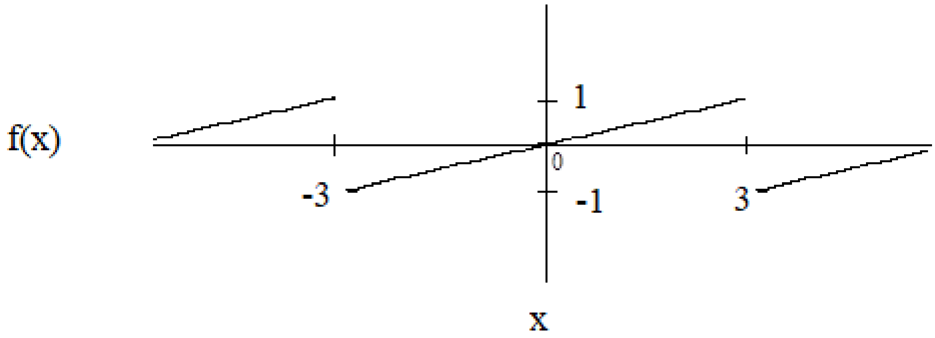
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

разложение в ряд Фурье: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{\pi nx}{l}+b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $T=6$ $(l=3)$, заданную на отрезке $[-3;3]$ формулой $f(x)=\dfrac{1}{3}x$.

Решение. Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на отрезке $[-3;3]$.

График функции изображен на рисунке.



Найдем коэффициенты Фурье для данной функции:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\frac{x}{3}dx = 0,$$

$a_n = \frac{1}{9}\int_{-3}^{3} x\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx = 0$. Коэффициенты равны 0 т.к. подынтегральные функции нечетны, а промежуток интегрирования симметричен относительно начала координат.

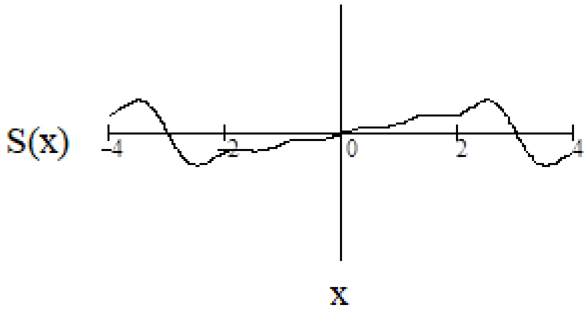
$b_n = \frac{1}{9}\int_{-3}^{3} x\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{9}\int_{0}^{3} x\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx$ т.к. подынтегральная функция четна и промежуток интегрирования симметричен относительно начала координат. Интегрируя по частям, получим

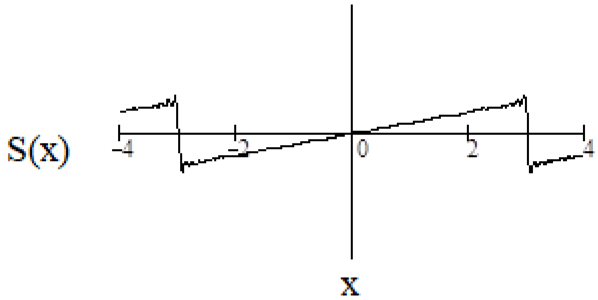
$$b_n = -\frac{2}{3n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{2}{3n\pi}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{(-1)^{n+1}2}{n\pi}.$$

Напишем ряд Фурье: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3} = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{3} - \frac{2}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{3} + \ldots.$

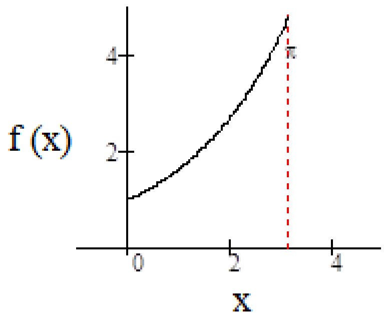
Сумма ряда на концах промежутка $[-3;3]$ равна $\frac{f(-3+0)+f(3-0)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$, а во внутренних точках этого промежутка сходится к $f(x) = \frac{x}{3}$.

На рисунках представлены графики частичных сумм при $n=5,\,50$.





Пример 3. Функция $f(x)=e^{ax}$ задана на промежутке $[0;\pi]$. График функции изображен на рисунке (для $a=0.5$).

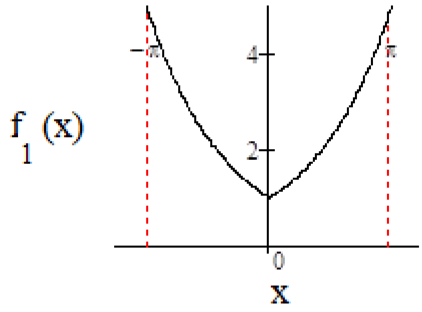


Найти разложение функции в ряд 1) по косинусам, 2) по синусам.

Решение. Функция задана на отрезке $[0;\pi]$.

1. Продолжим функцию четным образом на отрезок $[-\pi;0]$.

График функции изображен на рисунке (для $a=0.5$).



Продолженная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

В силу четности $b_n = 0$, $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}dx = \dfrac{2}{a\pi}\left(e^{a\pi} - 1\right)$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}\cos nx dx = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2}.$$

Вычислим $\int e^{ax}\cos nx dx$, используя метод интегрирования по частям дважды.

$$I = \int e^{ax}\cos nx dx = \frac{1}{a}\int \cos nx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos nx + \frac{n}{a}\int e^{ax}\sin nx dx =$$

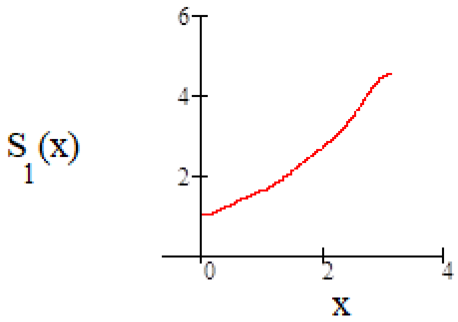
$$= \frac{e^{ax}}{a}\cos nx + \frac{n}{a^2}\int \sin nx d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}}{a}\cos nx + \frac{ne^{ax}}{a^2}\sin nx - \frac{n^2}{a^2}I,$$

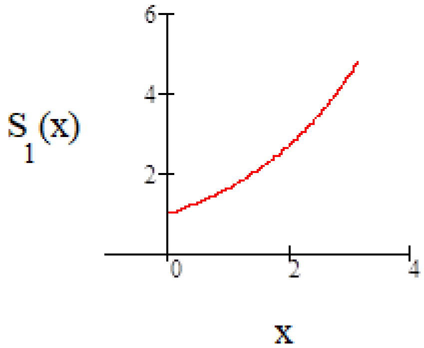
$$\Rightarrow I\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right) = e^{ax}\left(\frac{1}{a}\cos nx + \frac{n}{a^2}\sin nx\right) \Rightarrow I = \frac{a^2 e^{ax}}{a^2 + n^2}\left(\frac{1}{a}\cos nx + \frac{n}{a^2}\sin nx\right).$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{a^2 e^{ax}}{a^2 + n^2}\left(\frac{1}{a}\cos nx + \frac{n}{a^2}\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2}.$$

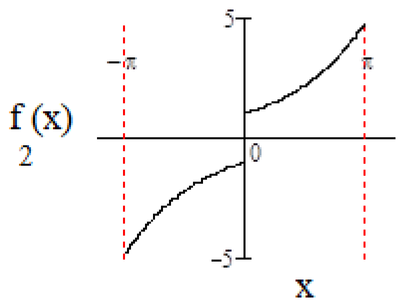
Таким образом, $e^{ax} = \dfrac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \dfrac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2}\cos nx$ для $\forall x \in [0;\pi]$.

На рисунках представлены графики частичных сумм при $n = 5,\ 50$.





2. Продолжим функцию нечетным образом на отрезок $[-\pi;0]$. График функции изображен на рисунке (для $a=0.5$).



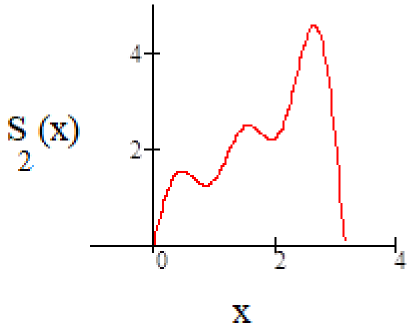
Продолженная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

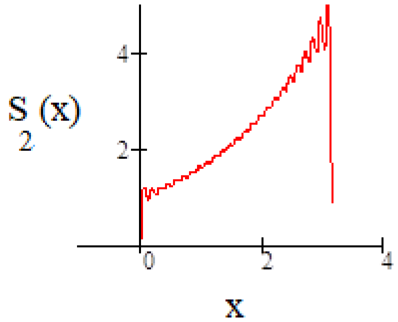
В силу нечетности $a_0=0, a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\frac{\left(1-(-1)^n e^{ax}\right)\cdot n}{a^2+n^2}.$$

Вычисление интеграла проводится аналогично предыдущему. Таким образом, $e^{ax}=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1-(-1)^n e^{a\pi}\right)\cdot n}{a^2+n^2}\sin nx$ для $x\in(0;\pi)$.

На рисунках представлены графики частичных сумм при $n = 5, 50$.





КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Тема: Дифференциальные уравнения

Задача 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения первого порядка

1.1 а) $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$; б) $xy'=y-e^{\frac{y}{x}}$; в) $xy'-2y=2x^4$.

1.2 а) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$; б) $x^2y'=4x^2+5xy+y^2$;

в) $y'+y=2e^x$.

1.3 а) $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$; б) $xy'-y=x\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

в) $x^2y'+xy+1=0$.

1.4 а) $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$; б) $(x+y)y'=y$;

в) $y'-2xy=2x$.

1.5 а) $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$; б) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; в) $y'+y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$.

1.6 а) $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$; б) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$; в) $y'+2xy=xe^{x^2}$.

1.7 а) $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$; б) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$;

в) $xy'+y=e^x$.

1.8 а) $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$; б) $xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$;

в) $xy'+y=2\ln x$.

1.9 а) $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0;$ б) $x^2y'=6x^2+6xy+y^2;$ в) $y'+\dfrac{y}{x}=\sin x.$

1.10 а) $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0;$ б) $x(x^2+3y^2)y'=2x^2y+4y^3;$

в) $xy'-y=2x^3.$

Задача 2. Найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка

2.1 $y''-y'-2y=18xe^x.$

2.2 $y''+4y=3\cos x.$

2.3 $y''-2y'-3y=16xe^{3x}$

2.4 $y''+6y'+9y=2e^{-3x}.$

2.5 $y''+y'-2y=20\cos(2x).$

2.6 $y''-y'-6y=-50xe^{-2x}.$

2.7 $y''-3y'-4y=xe^{4x}.$

2.8 $y''+9y=5\cos(2x)-10\sin(2x).$

2.9 $y''+2y'+y=2\cos(3x)+14\sin(3\text{x}).$

2.10 $y''-4y=xe^{2x}.$

Тема: Числовые ряды

Задача 3. Исследуйте на сходимость ряд.

3.1 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

3.2 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+3)^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$.

3.3 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3.4 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3.5 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$.

3.6 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

3.7 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^4}$; б) $\sum(-1)^n\left(\frac{3n-1}{n}\right)^n$.

3.8 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n+2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln^2 n}$.

3.9 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt[4]{n^6+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+3)!}{2^n}$.

3.10 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$.

Тема: Тригонометрические ряды

Задача 4.

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию.

4.1 $f(x) = |x|,\ (-\pi;\pi)$,

4.2 $f(x) = x,\ [0;\pi]$, по косинусам

4.3 $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \le 0, \\ x, & 0 < x < 3 \end{cases}$

4.4 $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

4.5 $f(x) = |x|,\ (-1;1)$,

4.6 $f(x) = \begin{cases} -x, & -4 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 4 \end{cases}$

4.7 $f(x) = 1 - 2x,\ [0;1]$ по косинусам,

4.8 $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ x/2, & 0 < x < 2 \end{cases}$

4.9 $f(x) = \begin{cases} -2x & -2 < x < 0, \\ 4, & 0 < x < 2 \end{cases}$

4.10 $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \le x \le 0, \\ 3x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$