

В остальной части настоящего раздела мы рассмотрим другой подход к аппроксимации полиномами или иными функциями, когда критерием уже не является совпадение в некоторых точках значений исходной и аппроксимирующей функций.

Мы имеем в виду аппроксимацию по методу наименьших квадратов.

Напомним, что из раздела 2.3 уже известно, что если заданы значения функции f в $n + 1$ различных точках x_0, x_1, \dots, x_n , то существует единственный полином степени n , такой, что

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Предположим теперь, что функция f сама является полиномом степени n , и наша задача состоит в определении его коэффициентов. Тогда, согласно приведенному результату, если бы значения функции f задавались точно, нам было бы достаточно знать эти значения в $n + 1$ различных точках. Однако во многих случаях значения f определяются в результате измерений и могут содержать ошибки. При этом обычно проводят гораздо больше, чем $n + 1$ измерений, надеясь, что в результате "усреднения" эти ошибки исчезнут. То, как эти ошибки "усреднятся", зависит от метода обработки измерений, используемого для определения коэффициентов полинома f . По статистическим соображениям в качестве такого метода часто выбирают метод наименьших квадратов. Этот метод, кроме того, исключительно прост и элегантен с математической точки зрения.

Предположим теперь, что нам задано m точек x_1, \dots, x_m , где $m \geq n + 1$, и по крайней мере $n + 1$ из этих точек различны. Пусть f_1, \dots, f_m — приближенные значения функции f в точках x_1, \dots, x_m . Мы хотим найти такой полином $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, чтобы на нем величина

$$\sum_{i=1}^m [f_i - p(x_i)]^2 \tag{5.2.27}$$

достигала минимума среди всех полиномов степени n , т.е. мы хотим найти такие коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n , чтобы сумма квадратов ошибок $f_i - p(x_i)$ была минимальной.

Простейший случай такой задачи возникает при $n = 0$, когда полином p является просто константой. Предположим, например, что мы имеем m измерений w_1, \dots, w_m веса некоторого предмета, причем эти данные получены на m различных весах. Здесь все точки x_1, \dots, x_m идентичны и в выражении явно не присутствуют. Привлекая принцип наименьших квадратов, приходим к задаче минимизации функции

$$g(w) = \sum_{i=1}^m (w_i - w)^2.$$

Из анализа известно, что функция g достигает минимума (локального) в точке \hat{w} , в которой $g'(\hat{w}) = 0$ и $g''(\hat{w}) \geq 0$. Так как

$$g'(w) = -2 \sum_{i=1}^m (w_i - w), \quad g''(w) = 2m,$$

отсюда следует

$$\hat{w} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m w_i.$$

Поскольку уравнение $g'(w) = 0$ имеет только одно решение, точка \hat{w} будет единственной точкой минимума функции g . Таким образом, аппроксимацией по методу наименьших квадратов для величины w будет просто среднее арифметическое измерений w_1, \dots, w_m .

Следующей по простоте является ситуация, когда используется линейный полином $p(x) = a_0 + a_1 x$. Такие ситуации часто возникают на практике, когда предполагается, что наши данные подчиняются некоторой линейной зависимости. В этом случае функция (5.2.27) принимает вид

$$g(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^m (f_i - a_0 - a_1 x_i)^2, \quad (5.2.28)$$

и мы ищем минимум по коэффициентам a_0 и a_1 . Из анализа известно, что необходимым условием минимума функции g является выполнение соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^m (f_i - a_0 - a_1 x_i) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^m x_i (f_i - a_0 - a_1 x_i) = 0. \end{aligned}$$

Группируя вместе коэффициенты при a_0 и a_1 , приходим к системе двух линейных уравнений

$$m a_0 + \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^m f_i, \quad \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=1}^m x_i f_i$$

относительно неизвестных a_0 и a_1 , решение которой находится по явным формулам:

$$a_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum f_i - \sum x_i f_i \sum x_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad a_1 = \frac{m \sum x_i f_i - \sum f_i \sum x_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

где суммы берутся по всем i от 1 до m .

В общем случае полиномов степени n мы приходим к задаче минимизации функции (5.2.27), т.е. ищем минимум функции

$$g(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - f_i)^2. \quad (5.2.29)$$

Из анализа известно, что, как и в случае $n = 2$, необходимым условием минимума функции g является обращение в нуль всех ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial g}{\partial a_j} (a_0, a_1, \dots, a_n) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Выписывая эти частные производные в явном виде, получаем соотношения

$$\sum_{i=1}^m x_i^j (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - f_i) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (5.2.30)$$

которые представляют собой систему $n + 1$ линейных уравнений относительно $n + 1$ неизвестных a_0, a_1, \dots, a_n . Эти уравнения обычно называют *нормальными уравнениями*. Собирая коэффициенты при a_i и переписывая

уравнения (5.2.30) в векторно-матричной форме, приходим к системе

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & & & & \\ \sum x_i^2 & & & & \\ \dots & & & & \\ \sum x_i^n & & & & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_i \\ \sum x_i f_i \\ \dots \\ \sum x_i^n f_i \end{bmatrix}, \quad (5.2.31)$$

где все суммы берутся от 1 до m .

Заметим, что систему (5.2.31) можно переписать в виде

$$E^T E a = E^T f, \quad (5.2.32)$$

где

$$E = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_m \end{bmatrix}. \quad (5.2.33)$$

Матрица E — это матрица типа Вандермонда размера $m \times (n+1)$. В предположении, что по крайней мере $n+1$ из точек x_i различны, можно показать, что ранг матрицы E равен $n+1$. Следовательно, матрица $E^T E$ является положительно определенной. Отсюда, в частности, следует, что решение системы (5.2.31) дает единственную точку минимума функции g из (5.2.29), так что задача аппроксимации по методу наименьших квадратов имеет единственное решение.

Изложенная выше процедура непосредственно распространяется на более общую задачу приближения по методу наименьших квадратов, когда аппроксимирующие функции не обязательно являются полиномами. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ — заданные функции одной переменной, w_1, \dots, w_m — заданные положительные числа, называемые *весами*, а x_1, \dots, x_m и f_1, \dots, f_m — то же, что и раньше. Тогда общая линейная задача аппроксимации по методу наименьших квадратов заключается в нахождении чисел a_0, a_1, \dots, a_n , которые минимизируют функцию

$$\begin{aligned} g(a_0, a_1, \dots, a_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^m w_i [a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_n \varphi_n(x_i) - f_i]^2. \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

Если $w_1 = w_2 = \dots = w_m = 1$, а $\varphi_j(x) = x^j$, то g — просто функция (5.2.29). В качестве базисных часто используются также функции

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sin j\pi x, & j &= 0, 1, \dots, n, \\ \varphi_j(x) &= e^{\alpha_j x}, & j &= 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где α_j — заданные числа.

Веса w_i обычно используются для придания большей или меньшей роли тем или иным членам суммы (5.2.34). Если, например, значения f_i получены в результате измерений и мы достаточно твердо уверены, скажем, в измерениях f_1, \dots, f_{10} , а по поводу остальных имеем некоторые сомнения, то можем положить $w_1 = w_2 = \dots = w_{10} = 5$ и $w_{11} = \dots = w_m = 1$.

Действуя точно так же, как и раньше, можем получить нормальные уравнения для функции (5.2.34). Частные производные первого порядка от функции g имеют вид

$$\frac{\partial g}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^m w_i \varphi_j(x_i) [a_0 \varphi_0(x_i) + a_1 \varphi_1(x_i) + \dots + a_n \varphi_n(x_i) - f_i].$$

Приравнявая эти производные нулю и объединяя коэффициенты при a_i , приходим к линейной системе уравнений, которая в векторно-матричной форме записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \sum w_i \varphi_0(x_i) \varphi_0(x_i) & \sum w_i \varphi_1(x_i) \varphi_0(x_i) & \dots & \sum w_i \varphi_n(x_i) \varphi_0(x_i) \\ \sum w_i \varphi_0(x_i) \varphi_1(x_i) & & & \\ \dots & & & \\ \sum w_i \varphi_0(x_i) \varphi_n(x_i) & & & \sum w_i \varphi_n(x_i) \varphi_n(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_i \varphi_0(x_i) f_i \\ \sum w_i \varphi_1(x_i) f_i \\ \dots \\ \sum w_i \varphi_n(x_i) f_i \end{bmatrix}, \quad (5.2.35)$$

где все суммы берутся от 1 до m . Как и прежде, можем переписать эту систему в форме (5.2.32), где теперь

$$E = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} \varphi_0(x_1) & \sqrt{w_1} \varphi_1(x_1) & \dots & \sqrt{w_1} \varphi_n(x_1) \\ \sqrt{w_2} \varphi_0(x_2) & \sqrt{w_2} \varphi_1(x_2) & \dots & \sqrt{w_2} \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{w_m} \varphi_0(x_m) & \dots & \dots & \sqrt{w_m} \varphi_n(x_m) \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} f_1 \\ \sqrt{w_2} f_2 \\ \dots \\ \sqrt{w_m} f_m \end{bmatrix}. \quad (5.2.36)$$

Чтобы система (5.2.35) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы E в (5.2.36) был равен $n + 1$. Это в свою очередь накладывает определенные условия на точки x_1, \dots, x_m и функции $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Нормальные уравнения очень полезны для теоретических рассуждений. Однако для практических вычислений их можно использовать только при малых n , поскольку уже при $n \geq 5$ эти уравнения обычно оказываются очень плохо обусловленными. Опишем теперь другой подход к построению полинома метода наименьших квадратов, основанный на использовании ортогональных полиномов.

Пусть q_0, q_1, \dots, q_n — полиномы степеней 0, 1, \dots , n соответственно. Будем говорить, что полиномы q_i взаимно ортогональны на множестве точек x_1, \dots, x_m , если

$$\sum_{i=1}^m q_k(x_i) q_j(x_i) = 0, \quad k, j = 0, 1, \dots, n; \quad k \neq j. \quad (5.2.37)$$

Мы вскоре вернемся к вопросу о том, как построить такой набор ортогональных полиномов, а сейчас давайте предположим, что мы их уже имеем, и подставим $\varphi_i = q_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) в нормальные уравнения (5.2.35), где все веса w_i взяты равными единице. Тогда, в силу (5.2.37), все лежащие вне главной диагонали элементы матрицы коэффициентов системы (5.2.35) обратятся в нуль и система уравнений примет вид

$$\sum_{i=1}^m [q_k(x_i)]^2 a_k = \sum_{i=1}^m q_k(x_i) f_i, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

так что

$$a_k = \left(\sum_{i=1}^m q_k(x_i) f_i \right) / \left(\sum_{i=1}^m [q_k(x_i)]^2 \right), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.2.38)$$

Таким образом, по методу наименьших квадратов получаем полином

$$q(x) = \sum_{k=0}^n a_k q_k(x). \quad (5.2.39)$$

Естественно возникает вопрос, совпадает ли полином (5.2.39) с полиномом, полученным из нормальных уравнений (5.2.31). При нашем стандартном предположении, что среди m точек x_i есть по крайней мере $n + 1$ различных, ответ на этот вопрос положителен. Это следует из того факта, что, как уже отмечалось выше, задача аппроксимации по методу наименьших квадратов имеет единственное решение, т.е. существует единственный полином степени меньшей или равной n , который минимизирует (5.2.27). Следовательно, чтобы убедиться, что полином (5.2.39) является тем же самым минимизирующим полиномом, достаточно показать, что любой полином степени n может быть представлен в виде линейной комбинации полиномов q_i , т.е. по заданному полиному

$$\hat{p}(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n \quad (5.2.40)$$

можно найти коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_n такие, что

$$\hat{p}(x) = c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) + \dots + c_n q_n(x). \quad (5.2.41)$$

Это может быть сделано следующим образом. Пусть

$$q_i(x) = d_{i0} + d_{i1}x + \dots + d_{in}x^n, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $d_{ii} \neq 0$. Приравнявая правые части (5.2.40) и (5.2.41), получаем

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = \\ = c_0 d_{00} + c_1 (d_{10} + d_{11}x) + \dots + c_n (d_{n0} + \dots + d_{nn}x^n). \end{aligned}$$

Приравнявая теперь коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} b_n &= c_n d_{nn}, \\ b_{n-1} &= c_n d_{n,n-1} + c_{n-1} d_{n-1,n-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ b_0 &= c_n d_{n0} + c_{n-1} d_{n-1,0} + \dots + c_0 d_{00}, \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

которые являются необходимыми и достаточными условиями тождественности полиномов (5.2.40) и (5.2.41). При заданных b_0, b_1, \dots, b_n соот-

ношения (5.2.42) представляют собой треугольную систему уравнений относительно коэффициентов c_i , которая разрешима, так как $d_{ii} \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Таким образом, полином (5.2.39) дает просто другое представление единственного полинома метода наименьших квадратов, получаемого как решение системы нормальных уравнений (5.2.31).

Использование ортогональных полиномов позволяет преобразовать нормальные уравнения в тривиальную диагональную систему уравнений. Однако все трудности теперь переносятся на вычисление полиномов q_i . Имеется несколько возможных способов построения ортогональных полиномов, но мы остановимся только на одном, особенно подходящем для вычислений.

Пусть

$$q_0(x) \equiv 1, \quad q_1(x) \equiv x - \alpha_1, \quad (5.2.43)$$

где константа α_1 должна быть определена из условия ортогональности q_0 и q_1 на множестве точек x_i . Следовательно, должно выполняться соотношение

$$0 = \sum_{i=1}^m q_0(x_i) q_1(x_i) = \sum_{i=1}^m (x_i - \alpha_1) = \sum_{i=1}^m x_i - m\alpha_1,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i. \quad (5.2.44)$$

Пусть теперь

$$q_2(x) = xq_1(x) - \alpha_2 q_1(x) - \beta_1,$$

где константы α_2 и β_1 определяются из условий ортогональности q_2 полиномам q_0 и q_1 , т.е. из условий

$$\sum_{i=1}^m [x_i q_1(x_i) - \alpha_2 q_1(x_i) - \beta_1] = 0,$$

$$\sum_{i=0}^m [x_i q_1(x_i) - \alpha_2 q_1(x_i) - \beta_1] q_1(x_i) = 0.$$

Учитывая, что $\sum q_1(x_i) = 0$, из этих соотношений получаем

$$\sum_{i=1}^m x_i q_1(x_i) - m\beta_1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m x_i [q_1(x_i)]^2 - \alpha_2 \sum_{i=1}^m [q_1(x_i)]^2 = 0,$$

так что

$$\beta_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i q_1(x_i),$$

$$\alpha_2 = \left(\sum_{i=1}^m x_i [q_1(x_i)]^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^m [q_1(x_i)]^2 \right).$$

Построение последующих полиномов q_i проводится аналогичным образом. Считая, что полиномы q_0, q_1, \dots, q_j уже найдены, положим

$$q_{j+1}(x) = xq_j(x) - \alpha_{j+1}q_j(x) - \beta_jq_{j-1}(x), \quad (5.2.45)$$

где константы α_{j+1} и β_j подлежат определению из условий ортогональности. В частности, должны выполняться равенства

$$\sum_{i=1}^m q_{j+1}(x_i)q_j(x_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^m q_{j+1}(x_i)q_{j-1}(x_i) = 0. \quad (5.2.46)$$

Отметим, что при выполнении этих двух соотношений полином q_{j+1} будет ортогонален всем другим полиномам q_k ($k < j-1$). Действительно, из (5.2.45) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m q_{j+1}(x_i)q_k(x_i) &= \sum_{i=1}^m x_i q_j(x_i)q_k(x_i) - \\ &- \alpha_{j+1} \sum_{i=1}^m q_j(x_i)q_k(x_i) - \beta_j \sum_{i=1}^m q_{j-1}(x_i)q_k(x_i). \end{aligned} \quad (5.2.47)$$

Два последних члена в (5.2.47) равны нулю по предположению, а полином $xq_k(x)$ имеет степень $k+1$ и, следовательно, может быть представлен как линейная комбинация полиномов q_0, q_1, \dots, q_{k+1} . Отсюда следует, что и первый член в правой части (5.2.47) также равен нулю.

Возвращаясь к условиям (5.2.46) и подставляя в них q_{j+1} из (5.2.45), приходим к следующим формулам для α_{j+1} и β_j :

$$\alpha_{j+1} = \left(\sum_{i=1}^m x_i [q_j(x_i)]^2 \right) / \left(\sum_{i=1}^m [q_j(x_i)]^2 \right), \quad (5.2.48)$$

$$\beta_j = \left(\sum_{i=1}^m x_i q_j(x_i)q_{j-1}(x_i) \right) / \left(\sum_{i=1}^m [q_{j-1}(x_i)]^2 \right). \quad (5.2.49)$$

Отметим, что знаменатель в (5.2.48) может обратиться в нуль только в том случае, если $q_j(x_i) = 0$ ($i = 1, \dots, m$). Но поскольку по предположению среди точек x_i есть по меньшей мере $n+1$ различных и $j \leq n$, отсюда бы следовало, что полином $q_j(x)$ тождественно равен нулю, что противоречит определению q_j . Таким образом, знаменатель в формулах (5.2.48) и (5.2.49) отличен от нуля.

Теперь можем сформулировать алгоритм построения ортогональных полиномов следующим образом:

1. Положить $q_0(x) \equiv 1$, $q_1(x) = x - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$.
2. Для $j = 1, \dots, n-1$ положить $q_{j+1}(x) = xq_j(x) - \alpha_{j+1}q_j(x) - \beta_jq_{j-1}(x)$, где α_{j+1} задается формулой (5.2.48), а β_j — формулой (5.2.49).
3. Вычислить коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n полинома метода наименьших квадратов $a_0q_0(x) + a_1q_1(x) + \dots + a_nq_n(x)$ по формулам (5.2.38).

Как уже отмечалось, такой подход предпочтительнее с вычислительной точки зрения, поскольку он позволяет избежать решения системы (5.2.31), которая может оказаться очень плохо обусловленной. Другим преимуществом этого подхода является возможность строить полином метода

наименьших квадратов степень за степенью. Например, если мы заранее не знаем, полином какой степени нас удовлетворит, мы можем начать с полинома первой степени, затем построить полином второй степени и т.д., пока не получим полином, который мы будем считать подходящим. В приведенном алгоритме построения ортогональных полиномов коэффициенты a_i не зависят от n ; как только вычислен полином q_j , мы можем найти коэффициент a_j и, следовательно, получить полином наименьших квадратов степени j .

Мы теперь приведем простой пример, используя те же данные

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/4, \quad x_3 = 1/12, \quad x_4 = 3/4, \quad x_5 = 1,$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = 1,$$

что и в примере построения кубического сплайна. Так как здесь задается пять точек x_i , эти данные единственным образом определяют интерполяционный полином четвертой степени. Давайте получим линейный и квадратичный полиномы метода наименьших квадратов как на основе нормальных уравнений, так и с помощью ортогональных полиномов.

Для вычисления коэффициентов линейного полинома метода наименьших квадратов на основе нормальных уравнений нам потребуются следующие величины:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = \frac{5}{2}, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = \frac{15}{8}, \quad \sum_{i=1}^5 f_i = 5, \quad \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 2. \quad (5.2.50)$$

Тогда по приведенным ранее формулам для коэффициентов a_0 и a_1 получим

$$a_0 = \frac{\left(\frac{15}{8}\right)(5) - (2)\left(\frac{5}{2}\right)}{(5)\left(\frac{15}{8}\right) - \left(\frac{25}{4}\right)} = \frac{7}{5}, \quad a_1 = \frac{(5)(2) - (5)\left(\frac{5}{2}\right)}{(5)\left(\frac{15}{8}\right) - \left(\frac{25}{4}\right)} = \frac{-4}{5}.$$

Следовательно, линейный полином метода наименьших квадратов, построенный по этим данным, имеет вид

$$p_1(x) = 7/5 - (4/5)x. \quad (5.2.51)$$

При вычислении с помощью ортогональных полиномов тот же самый полином представляется в форме

$$a_0 q_0(x) + a_1 q_1(x) = a_0 + a_1(x - \alpha_1), \quad (5.2.52)$$

где a_0 и a_1 определяются по формулам (5.2.38), а α_1 — по формуле (5.2.44):

$$a_0 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 f_i = 1, \quad \alpha_1 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{2},$$

$$a_1 = \frac{\sum \left(x_i - \frac{1}{2}\right) f_i}{\sum \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sum x_i f_i - \frac{1}{2} \sum f_i}{\sum x_i^2 - \sum x_i + \frac{5}{4}} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{\frac{15}{8} - \frac{5}{2} + \frac{5}{4}} = \frac{-4}{5}.$$

Таким образом, полином (5.2.52) есть просто $1 - (4/5)(x - 1/2)$ и, как и следовало ожидать, он идентичен полиному (5.2.51).

Для определения коэффициентов квадратичного полинома по методу наименьших квадратов из нормальных уравнений нам необходимо решить систему (5.2.31) при $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_i \\ \sum x_i f_i \\ \sum x_i^2 f_i \end{bmatrix}.$$

При наших данных эта система имеет вид

$$\begin{bmatrix} 640 & 320 & 240 \\ 320 & 240 & 200 \\ 240 & 200 & 177 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 640 \\ 256 \\ 176 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему, находим

$$a_0 = 7/5, \quad a_1 = -4/5, \quad a_2 = 0. \quad (5.2.53)$$

Таким образом, лучшим в смысле метода наименьших квадратов аппроксимирующим квадратичным полиномом оказывается линейный полином, т.е. добавление квадратичного члена не дает никакого улучшения по сравнению с линейной аппроксимацией. В том, что значения (5.2.53) правильны, можно убедиться, построив квадратичный полином метода наименьших квадратов с помощью ортогональных полиномов. Представление через ортогональные полиномы имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 q_0(x) + a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) &= \\ &= \frac{7}{5} - \frac{4}{5}x + a_2 \left[x \left(x - \frac{1}{2} \right) - \alpha_2 \left(x - \frac{1}{2} \right) - \beta_1 \right], \end{aligned}$$

где коэффициенты α_2 и β_1 находятся по формулам (5.2.48) и (5.2.49):

$$\alpha_2 = \frac{\sum x_i \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2}{\sum \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{5} \sum x_i \left(x_i - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, $q_2(x) = x^2 - x - 1/8$ и из (5.2.38) получаем, что $a_2 = 0$.