Цилиндрические функции

I.1 Понятие о цилиндрических функций

Определение OI.1. *Цилиндрическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения второго порядка:*

$$u'' + \frac{1}{z}u' + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})u = 0 \tag{I.1}$$

где z - комплексное переменное, ν - параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения.

Термин "цилиндрические функции"обязан своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение (I.1) встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрической области. Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе под названием функций Бесселя, и иногда это наименование присваивается всему классу цилиндрических функций.

I.2 Функции Бесселя с целым положительным параметром ν

Для рассмотрения многих проблем, связанных с применением цилиндрических функций, достаточно ограничиться изучением специального класса этих функций, который соответствует случаю, когда параметр ν в уравнении (I.1) равен нулю или целому положительному числу.

$$u'' + \frac{1}{z}u' + (1 - \frac{n^2}{z^2})u = 0, n = 0, 1, 2... \tag{I.2}$$

Как и для любого линейного дифференциального уравнения 2-го порядка общее решение уравнения (I.2) представляется в виде линейной комбинации двух линейно независимых функций, каждая из которых удовлетворяет уравнению (I.2)

$$u(z) = C_1 J_n(z) + C_2 Y_n(z) \tag{I.2a}$$

Здесь $J_n(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка n, которая для любых значений z определяется как сумма ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, |\ (z)\ | < \infty\ , \tag{I.3}$$

$Y_n(z)$ – функция Бесселя второго рода порядка n (она же функция Неймана, Вебера).

Для получения общего интеграла уравнения (I.1), дающего выражение произвольной цилиндрической функции с целым значком $\nu = n$ (n=0,1,2,...), необходимо построить второе решение уравнения, линейно независимое с $J_n(z)$ В качестве такого решения может быть взята функция Бесселя второго рода, $Y_n(z)$, аналитическое выражение для которой можно записать в виде ряда

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) ln\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}[\psi(k+1)+\psi(k+n+1)]. \qquad (I.4)$$

где $\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}, \psi(1) = -\gamma$ (γ-постоянная Эйлера) и, в случае n=0, первую из сумм надлежит положить равной нулю.

Простейшими функциями рассматриваемого класса являются функции Бесселя порядка нуль и единица:

$$\left.\begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \frac{(\frac{z}{2})^2}{1!^2} + \frac{(\frac{z}{2})^4}{2!^2} - \frac{(\frac{z}{2})^6}{3!^2} + ..., \\ J_1(z) &= \frac{z}{2}\left[1 - \frac{(\frac{z}{2})^2}{1!2!} + \frac{(\frac{z}{2})^4}{2!3!} - \frac{(\frac{z}{2})^6}{3!4!} + ...\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (I.4a)$$

Функции Бесселя других порядков могут быть выражены через эти две функции.

$$\frac{d}{dz} z^n J_n(z) = z^n J_{n-1}(z), n = 1, 2, ... \qquad (I.5)$$

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z), n = 0, 1, 2, ... \qquad (I.6)$$

откуда непосредственно следует:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), n = 1, 2, ... \qquad (I.7)$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z), n = 1, 2, ... \qquad (I.8)$$

Полученные формулы известны под название рекуррентных соотношений для функций Бесселя.

Функция Бесселя второго рода удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям,что и функции первого рода,именно:

$$\left.\begin{aligned} Y_{n-1}(z) + Y_{n+1}(z) &= \frac{2n}{z} Y_n(z), \\ Y_{n-1}(z) + Y_{n+1}(z) &= 2Y_n'(z), \\ \frac{d}{dz}\left(z^n Y_n(z)\right) &= z^n Y_{n-1}(z), \\ \frac{d}{dz}\left(z^{-n} Y_n(z)\right) &= -z^{-n} Y_{n+1}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (I.9)$$

Асимптотическое представление функций Бесселя 1-го и 2-го рода.

Здесь рассмотрено асимптотическое поведение функций Беселя 1-го и 2-го рода от вещественной переменной $x \geq 0$.

При $x \to +\infty$ имеем

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right) \qquad (I.10)$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sin\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right) \qquad (I.11)$$

и при $x \to 0$

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \qquad (I.12)$$

$$Y_n(x) = -\frac{2^n(n-1)!}{\pi x^n}, \quad n > 0 \qquad (I.13)$$

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} ln\frac{2}{x} \qquad (I.14)$$

Из (I.13) – (I.14) следует что при решении задачи Штурма-Лиувилля на интервале (0,a) задача становится сингулярной, поэтому из условия конечности решения при $x = 0$ необходимо положить в (I.2a) константу C_2=0.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля (Голоскоков Д.П., стр.199):

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\lambda rR=0,\ \ 0<r<a, \tag{4.51}$$

$$R|_{r=0}=O(1),\ \ R|_{r=a}=0, \tag{4.52}$$

либо

$$R|_{r=0}=O(1),\ \ \left.\frac{dR}{dr}+hR\right|_{r=a}=0,\ \ h\geq 0. \tag{4.53}$$

Чтобы записать общий интеграл уравнения (4.51), сделаем замену переменной

$$x=\sqrt{\lambda}r\Rightarrow\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{dx}\sqrt{\lambda},\ \ \frac{d^2R}{dr^2}=\frac{d^2R}{dx^2}(\sqrt{\lambda})^2.$$

Уравнение (4.51) примет вид

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+R=0. \tag{4.54}$$

Уравнение (4.54) — уравнение Бесселя нулевого порядка ($n=0$). Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$R=AJ_0(x)+BY_0(x),\ \ \lambda\neq 0,$$

следовательно, общий интеграл уравнения (4.51) будет иметь вид

$$R(r)=AJ_0(\sqrt{\lambda}r)+BY_0(\sqrt{\lambda}r),\ \ \lambda\neq 0.$$

Мы знаем, что

$$\lim_{r\to 0}J_0(\sqrt{\lambda}r)=1,\ \ \lim_{r\to 0}Y_0(\sqrt{\lambda}r)=\infty,$$

следовательно, в силу ограниченности функции в нуле, $B=0$.

Таким образом, для условий первого рода будем иметь

$$J_0(\sqrt{\lambda}a)=0\ (A\neq 0), \tag{4.55}$$

а для условий третьего рода (см. (I.6)) получим

$$haJ_0(\sqrt{\lambda}a)-\sqrt{\lambda}aJ_1(\sqrt{\lambda}a)=0\ (A\neq 0). \tag{4.56}$$

Уравнения (4.55),(4.56) представляют собой нелинейные алгебраические уравнения относительно собственных чисел λ.

Рассмотрим отдельно случай $\lambda = 0$. В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0,\ 0 < r < a.$$

Откуда

$$R = A + B\ln r.$$

В случае условий первого и третьего рода, как легко видеть, будем иметь A = 0, B = 0 ($h \neq 0$); таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи. В случае условий второго рода $R'(a) = 0$ ($h = 0$), и мы будем иметь $\lambda = \lambda_0 = 0$ собственное значение; $R = R_0(r) = 1$ — соответствующая собственная функция.

Из формулы (I.10) следует, что уравнения (4.55),(4.56) будут иметь бесконечное счетное количество корней $\{\lambda_k\}$- собственных значений. Собственные функции

$$R_k(r) = J_0(\sqrt{\lambda_k}\, r),\ \ k=1,2, \ldots \infty \qquad (4.57)$$

Система полученных собственных функций является полной и ортогональной (весовая функция равна r).

Формулы для разложения функции f(r) в ряд по собственным функциям имеют вид ($\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$)

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k r)$$

$$C_k = \frac{\int_0^a f(r)\, J_0(\mu_k r)\, r\, dr}{\int_0^a J_0^2\, (\mu_k r)\, r\, dr}$$

Домашнее задание N 6.

Решить задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda r R = 0,$$

a<r<b, b>a>0, h>0, h1>0, h2>0

1) $R(a) = 0, \; R(b) = 0,$
2) $R'(a) = 0, \; R'(b) = 0,$
3) $R(a) = 0, \; R'(b) = 0,$
4) $\mathrm{R}'(a) - hR(a) = 0, R'(b) = 0,$
5) $\mathrm{R}'(a) - h_1 R(a) = 0, \; \mathrm{R}'^{(b)} + h_2 R(b) = 0,$