Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Кафедра механики композиционных материалов и конструкций

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Механика»

Вариант 199753

Разработал:

Студент гр. ЭМ-19-1б

ФИО: Жуков Э.А.

Проверил:

к.т.н., доцент кафедры МКМК

Бабушкина А.В.

____
(оценка)

____
(Дата, подпись)

Пермь, 2022

Расчетно-графическая работа №1
«Расчет шарнирно-стержневой системы»

Рассчитать на прочность по допускаемым напряжениям статически-определимую шарнирно-стержневую систему и определить перемещение узла А. Расстояние от заделки до узла А равно l = 1,7 м, значение углов α = 30°, β = 40°, γ = 20°, значение силы Р = 350кН. Материал стержней: Ст.3, модуль упругости Е = $2{,}1 \cdot 10^5$ МПа, допустимое напряжение [σ] = 160 МПа.

1. Вычертить в масштабе схему шарнирно-стержневой системы с указанием численных значений заданных величин на чертеже.

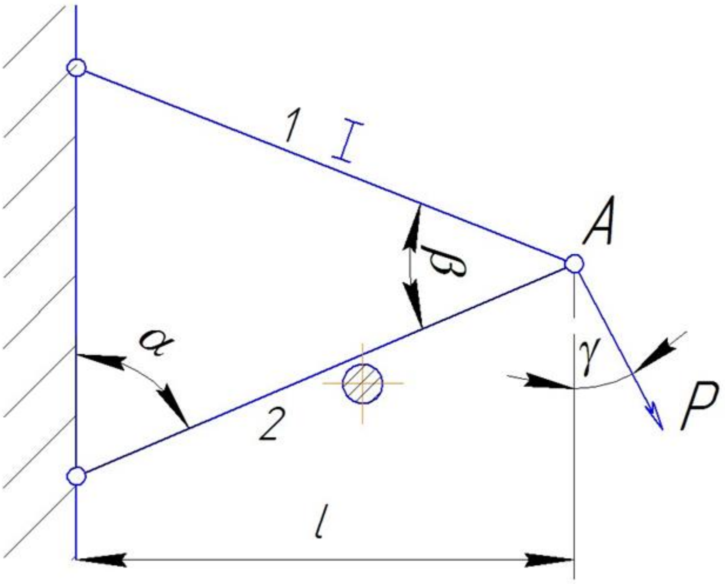


Рисунок 1.1. Схема плоской шарнирно-стержневой системы

2. Рассмотрев условия равновесия узла А, определить усилия в стержнях 1 и 2.

В местах крепления стержней 1 и 2 возникают реакции опор, направленные вдоль оси стержня (Рис. 1.2). Направление реакций опор выбираем произвольно. С учетом внешних сил и внутренних составим систему сходящихся сил, которые сходятся в одной точке – узел А.

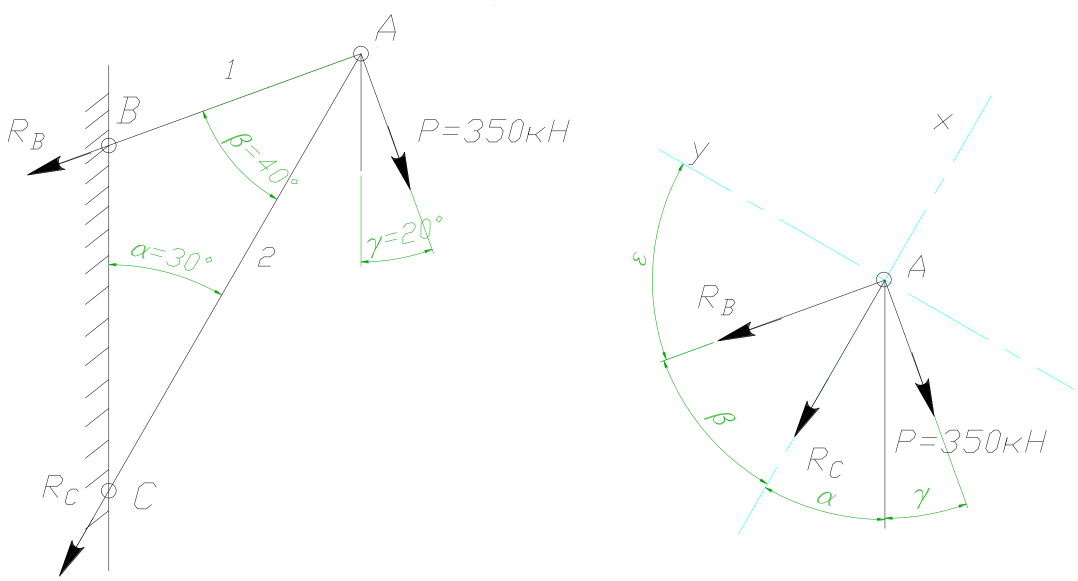


Рисунок 1.2. Схема расположения усилий

Выберем оптимальные оси координат *x* и *y*, составим уравнения равновесия:

$$\Sigma F_i(x) = 0; \ \ \Sigma F_i(y) = 0$$

$$\Sigma F_i(x) = -R_C - P \cdot \cos(\alpha + \gamma) - R_B \cdot \cos(\beta) = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_i(y) = -P \cdot \sin(\alpha + \gamma) + R_B \cdot \cos(\varepsilon) = 0 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) выражаем:

$$R_B = \frac{P \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\cos(\varepsilon)} = \frac{350 \cdot \sin(50°)}{\cos(50°)} = \frac{350 \cdot 0{,}766}{0{,}6428} = 417{,}114 \text{ кН}$$

Из уравнения (*1*) выражаем:

$$R_C = -P \cdot \cos(\alpha + \gamma) - R_B \cdot \cos(\beta) = -350 \cdot \cos(50°) - 471{,}531 \cdot \cos(40°) =$$

$$= -350 \cdot 0{,}6428 - 417{,}0815 \cdot 0{,}766 = -544{,}504 \text{ кН}$$

Под действием силы *P* стержень *1* испытывает растяжение, а стержень *2* испытывает сжатие.

$$R_B = N_1 = 417{,}114 \text{ кН}$$

$$R_C = N_2 = -544{,}504 \text{ кН}$$

3. Из условия прочности по допускаемым напряжениям вычислить требуемые площади поперечного сечения стержней 1 и 2.

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

где *A* – площадь поперечного сечения, *м*^{2}.

Из условия прочности определяем площади поперечных сечений:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} \geq \frac{417{,}114 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 26{,}069 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 26{,}069\ \text{см}^2$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} \geq \frac{544{,}504 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 34{,}031 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 34{,}031\ \text{см}^2$$

4. Подобрать номер двутавра для стержня 1 (по ГОСТ 8239-72) и диаметр стержня 2 (по ГОСТ 2590-71).

Для первого стержня площадь поперечного сечения $A_1^{\text{ГОСТ}} = 26{,}8\ \text{см}^2$ – двутавр № 20.

У второго стержня круглое поперечное сечение. Зная площадь поперечного сечения $A_2 = 34{,}031$ см^2 можно определить диаметр:

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}0034031\ \text{м}^2, \qquad d^2 = \frac{4 \cdot A_2}{\pi} = \frac{4 \cdot 0{,}0034031}{3{,}14} = 0{,}004333\ \text{м}^2$$

$$d = \sqrt{0{,}004333} = 0{,}066\ \text{м} = 66\ \text{мм}.$$

По ГОСТ 2590-71 $d_{\text{ГОСТ}} = 66$ мм=0,066 м.

Определим площадь поперечного сечения с учетом значения диаметра по ГОСТу:

$$A_2^{\text{ГОСТ}} = \frac{\pi d_{\text{ГОСТ}}^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}066^2}{4} = 0{,}00342\ \text{м}^2$$

5. Провести расчет на недогруз или перегруз для каждого из стержней. При необходимости переназначить номер двутавра для стержня 1, диаметр стержня 2, при изменении площади поперечного сечения стержней.

Недогруз разрешен в пределах до 10%, перегруз – до 5%.

Определим действительные напряжения:

$$\sigma_1^{\text{действ.}} = \frac{N_1}{A_1^{\text{ГОСТ}}} = \frac{417{,}114 \cdot 10^3}{26{,}8 \cdot 10^{-4}} = 155{,}639\ \text{МПа}$$

$$\sigma_2^{\text{действ.}} = \frac{N_2}{A_2^{\text{ГОСТ}}} = \frac{544{,}504 \cdot 10^3}{35{,}2 \cdot 10^{-4}} = 154{,}688\ \text{МПа}$$

Определим недогруз или перегруз стержней:

$\Delta\sigma_1 = \frac{\sigma_1^{\text{действ.}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{155{,}639 - 160}{160} 100\% = -2{,}725\%$ (недогруз), в пределах допустимого значения до 10%.

$\Delta\sigma_2 = \frac{\sigma_2^{\text{действ.}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{154{,}688 - 160}{160} 100\% = -3{,}32\%$ (недогруз), в пределах допустимого значения до 10%.

6. Определить абсолютную и относительную деформации подобранных стержней под действием заданной нагрузки.

Закон Гука σ = E ·ε , где E – модуль упругости материала, ε – относительная линейная деформация, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, где Δl – абсолютная линейная деформация, l – длина стержня.

Определим относительную линейную деформацию:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^{\text{действ.}}}{E} = \frac{155{,}639}{2{,}1 \cdot 10^5} = 7{,}411 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2^{\text{действ.}}}{E} = \frac{154{,}688}{2{,}1 \cdot 10^5} = 7{,}366 \cdot 10^{-4}$$

Для определения абсолютной линейной деформации необходимо сначала определить длину каждого из стержней (Рис.1.3):

$$l_1 = \frac{l}{cos\beta_1} = \frac{1{,}7}{0{,}9397} = 1{,}809 \text{ м}$$

$$l_2 = \frac{l}{cos\beta_2} = \frac{l}{\cos(\beta + \beta_1)} = \frac{1{,}7}{\cos(60°)} = \frac{1{,}7}{0{,}5} = 3{,}4 \text{ м}$$

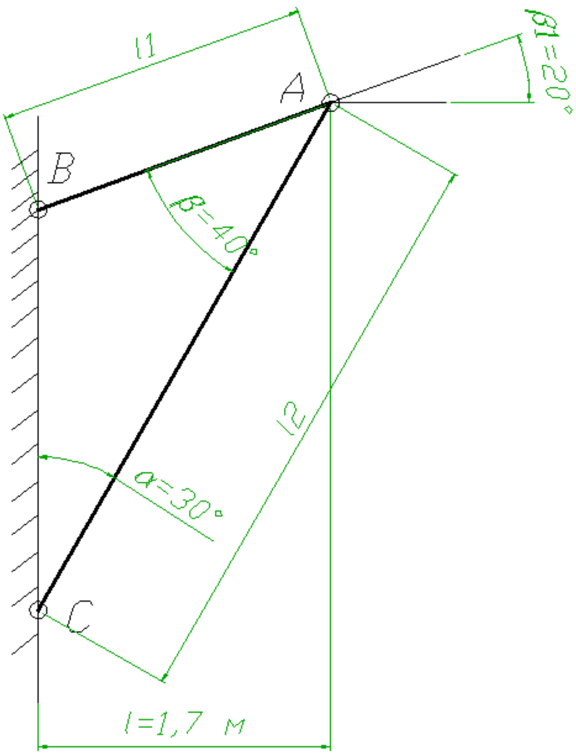


Рисунок 1.3. Определение длин стержней

Определим абсолютную линейную деформацию:

$\Delta l_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 7{,}411 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}809 = 0{,}00134 \text{ м} = 1{,}34 \text{ мм}$ – удлинение стержня, так как деформация растяжения.

$\Delta l_2 = \varepsilon_2 \cdot l_2 = 7{,}366 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}4 = 0{,}0025 \text{ м} = 2{,}5 \text{ мм}$ – укорочение стержня, так как деформация сжатия.

7. Графически определить перемещение узла А.

Под действием внешней силы стержень *А* переместился на некоторое расстояние (Рис.1.4). Определим его перемещение с помощью графоаналитического метода. Для этого необходимо задаться масштабом построения μ_l . Масштаб построения – это отношение истинного значения параметра к отрезку длины на чертеже, тогда $\mu_l = \frac{\text{Истина}}{\text{Отрезок}}$. Пусть отрезок $\Delta l_{1\text{черт}}$ на чертеже изображает удлинение стержня *1* и равен 30мм. Тогда $\mu_l = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_{1\text{черч}}} = \frac{\Delta l_1}{30 \text{ мм}} = \frac{0{,}00134}{30} = 4{,}467 \cdot 10^{-5} \text{ м/мм}$. Откладываем вдоль оси стержня *1* отрезок $\Delta l_{1\text{черч}}$ (в сторону растяжения).

Соответственно, можно определить длину отрезка $\Delta l_{2\text{черч}} = \frac{\Delta l_2}{\mu_l} = \frac{0{,}0025}{4{,}467 \cdot 10^{-5}} = 55{,}966 \text{ мм}$. Откладываем вдоль оси стержня 2 отрезок $\Delta l_{2\text{черч}}$ (в сторону сжатия).

Восстанавливаем перпендикуляры к концам отрезков и на пересечении получаем точку *А'*. Соединив точки *А* и *А'* получаем отрезок $\Delta l_{A_\text{черт}} = 126{,}482$ мм.Зная масштаб и длину отрезку можно определить истинное значение перемещения узла *А*.

$\Delta l_\text{А} = \Delta l_{A_\text{черт}} \cdot \mu_l = 126{,}482 \cdot 4{,}467 \cdot 10^{-5} = 0{,}00565 \text{ м} = 5{,}65 \text{ мм}$

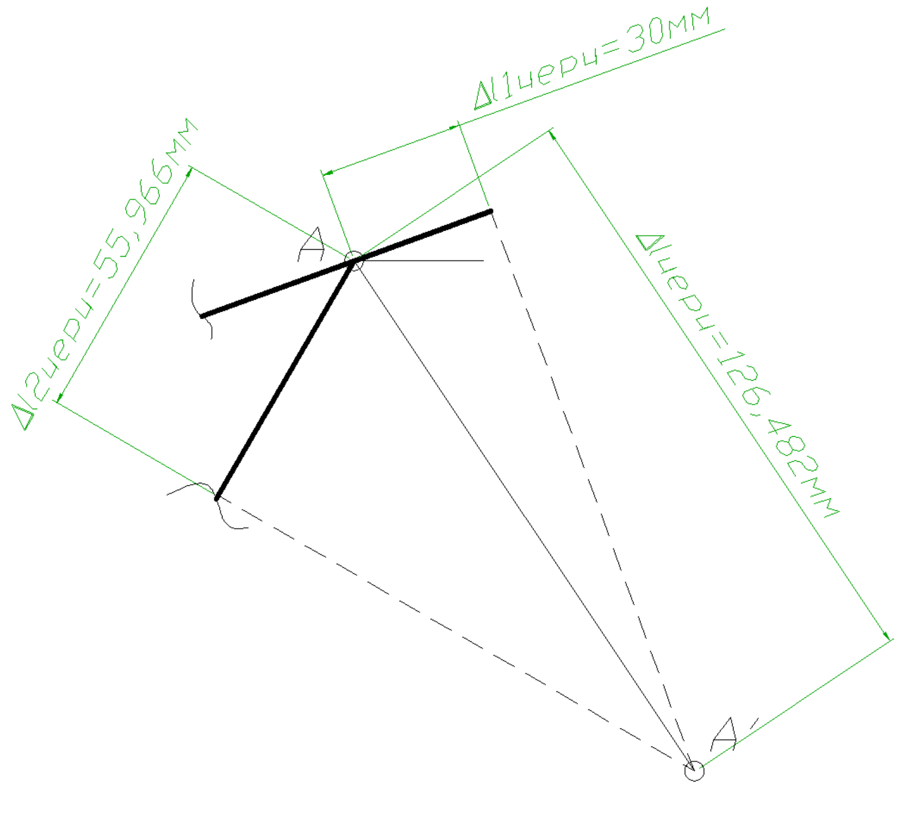


Рисунок 1.4. Определение перемещения узла *А*

Расчетно-графическая работа №2
«Центральное сжатие (растяжение) ступенчатого стержня»

Определить размеры поперечного сечения (квадратного) каждой ступени стержня с учетом нагрузок и собственного веса. Определить внутренние усилия, напряжения и деформации на каждом участке стержня. Материал бетон, Е = 1,5·10^4 МПа, $[\sigma]_\text{р} =$ 0,5 МПа, $[\sigma]_\text{с} = 5$ МПа, P_1 =250 кН, P_2 = 480 кН, P_3 = 900 кН, l_1=11 м, l_1: l_2: l_3 = 2:2:1, γ = 20 кН/м^3 = 2000 кг/м^3.

1. Вычертить в масштабе заданный стержень с указанием численных значений P_i и длин участков l_i на чертеже.

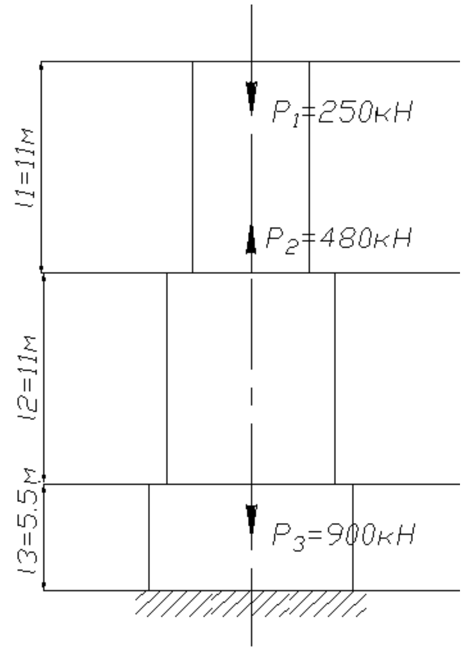


Рисунок 2.1

2. Составить уравнение продольных внутренних усилий для всех участков стержня без учета и с учетом собственного веса. Построить эпюры продольных сил на каждом участке.

Определение количества участков.

Нормальная сила N_z зависит от величин внешних сил, в данном случае включающих в себя и собственный вес колонны, а последний, в свою очередь, от размеров поперечного сечения A_i и объемного веса γ.

Границами участков следует назначать те сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные силы, и где происходит скачкообразное изменение площади поперечного сечения или объемного веса материалов конструкций.

Исходя из вышесказанного, учитывая γ = *const*, брус будет иметь три участка.

Эпюра продольных усилий без учета веса N (кН) (рис.2.2)

участок I $0 \le z_1 \le 11$ *м*

$N_1 = -P_1 = -250$ кН

участок II $11 \le z_2 \le 22$*м*

$N_2 = -P_1 + P_2 = -250 + 480 = 230$ кН

участок III $22 \le z_3 \le 27{,}5$ *м*

$N_3 = -P_1 + P_2 - P_3 = -250 + 480 - 900 = -670$ кН

Эпюра продольных усилий с учетом веса N_g (кН) (рис.2.2)

участок I $0 \le z_1 \le 11$ *м*

$N_{g1} = -P_1 - G_{z1} = -P_1 - \gamma \cdot A \cdot z_1 = -250 - 20 \cdot A \cdot z_1$(кН)

где G_{z1}- вес первого участка

при $z_1 = 0$ $N_{g1} = -250$ кН

при $z_2 = 11$ м $N_{g1} = -250 - 220A$ кН

участок II $11 \le z_2 \le 22$ *м*

$N_{g2} = -G_{z1} - P_1 + P_2 - P_{z2} = -20 \cdot A \cdot 11 - 250 + 480 - 2 \cdot A \cdot (z_2 - 11)$ (кН)

где G_{z2} - вес второго участка

при $z_2 = 11$ м $N_{g2} = -20 \cdot A \cdot 11 + 230$ (кН)

при $z_2 = 22$ м $N_{g2} = 230 - 440A$ (кН)

участок III $22 \le z_3 \le 27{,}5$ *м*

$N_3 = -G_{z1} - G_{z2} - P_1 + P_2 - P_3 - G_{z3} = -250 - 220A + 480 - 220A - 900 -$

$- 20 \cdot A \cdot (z_3 - 22)$ (кН)

где G_{z3} - вес третьего участка

при $z_3 = 22$ м $N_3 = -670 - 440A$ (кН)

при $z_2 = 27{,}5$ м $N_3 = -670 - 550A$ (кН)

3. Подобрать площадь поперечного сечения на каждом участке из условия прочности по допускаемым напряжениям.

участок I Опасное сечение $N_{g1} = 250 + 220A$ (кН)

Из условия прочности:

$$\sigma_1 = \frac{N_{g1}}{A} = \frac{(250 + 220A) \cdot 10^3}{A} \le [\sigma]_c = 5 \text{ МПа}$$

$$A_1 \geq \frac{250 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 - 220 \cdot 10^3} \geq 0{,}0523 \text{ м}^2$$

$$A_1 = b_1^2 \geq 0{,}0523 \text{ м}^2$$

где b_1 – сторона квадрата, тогда

$$b_1 \geq \sqrt{0{,}0523} = 0{,}229 \text{ м} = 229 \text{ мм}$$

Полученный результат округлим по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40:

$$b_1^{\text{ГОСТ}} = 240 \text{ мм}$$

$$A_1 = (b_1^{\text{ГОСТ}})^2 = 0{,}24^2 = 0{,}0576 \text{ м}^2$$

участок II Опасное сечение $N_{g2} = 230 + 440A$ (кН)

Из условия прочности:

$$\sigma_2 = \frac{N_{g2}}{A} = \frac{(230 + 440A) \cdot 10^3}{A} \leq [\sigma]_p = 0{,}5 \text{ МПа}$$

$$A_2 \geq \frac{230 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 10^6 - 440 \cdot 10^3} \geq 3{,}833 \text{ м}^2$$

$$A_2 = b_2^2 \geq 3{,}833 \text{ м}^2$$

где b_2 – сторона квадрата, тогда

$$b_2 \geq \sqrt{3{,}833} = 1{,}958 \text{ м} = 1958 \text{ мм}$$

Полученный результат округлим по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40:

$$b_2^{\text{ГОСТ}} = 2000 \text{ мм}$$

$$A_2 = (b_2^{\text{ГОСТ}})^2 = 2^2 = 4 \text{ м}^2$$

участок III Опасное сечение $N_{g3} = 670 + 550A$ (кН)

Из условия прочности:

$$\sigma_3 = \frac{N_{g3}}{A} = \frac{(670+550A) \cdot 10^3}{A} \leq [\sigma]_c = 5 \text{ МПа}$$

$$A_3 \geq \frac{670 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 - 550 \cdot 10^3} \geq 0{,}151 \text{ м}^2$$

$$A_3 = b_3^2 \geq 0{,}151 \text{ м}^2$$

где b_3 – сторона квадрата, тогда

$$b_3 \geq \sqrt{0{,}151} = 0{,}389 \text{ м} = 389 \text{ мм}$$

Полученный результат округлим по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40:

$b_3^{ГОСТ} = 400$ мм

$A_3 = (b_3^{ГОСТ})^2 = 0{,}4^2 = 0{,}160$ м^2

4. Рассчитать и построить эпюры нормальных напряжений по длине каждого участка. (рис.2.2)

$$\sigma_{1(z=0)} = \frac{N_{g1}}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0{,}0576} = -4{,}34 \text{ МПа} \leq [\sigma]_c = 5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{1(z=11м)} = \frac{N_{g1}}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3 - 220A_1 \cdot 10^3}{0{,}0576} =$$

$$= \frac{-250 \cdot 10^3 - 220 \cdot 0{,}0576 \cdot 10^3}{0{,}0576} = -4{,}56 \text{ МПа} \leq [\sigma]_c = 5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{2(z=11м)} = \frac{N_{g2}}{A_2} = \frac{(230 + 220 \cdot A_2) \cdot 10^3}{A_2} = \frac{(230 + 220 \cdot 4) \cdot 10^3}{4} =$$

$$= 0{,}2775 \text{ МПа} \leq [\sigma]_р = 0{,}5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{2(z=22м)} = \frac{N_{g2}}{A_2} = \frac{(230 + 440 \cdot A_2) \cdot 10^3}{A_2} = \frac{(230 + 440 \cdot 4) \cdot 10^3}{4} =$$

$$= 0{,}44 \text{ МПа} \leq [\sigma]_р = 0{,}5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{3(z=22м)} = \frac{N_{g3}}{A_3} = \frac{-(670 + 440 \cdot A_3) \cdot 10^3}{A_3} = \frac{-(670 + 440 \cdot 0{,}16) \cdot 10^3}{0{,}16} =$$

$$= 4{,}628 \text{ МПа} \leq [\sigma]_c = 5 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{3(z=27{,}5м)} = \frac{N_{g3}}{A_3} = \frac{-(670 + 550 \cdot A_3) \cdot 10^3}{A_3} = \frac{-(670 + 550 \cdot 0{,}16) \cdot 10^3}{0{,}16} =$$

$$= 4{,}738 \text{ МПа} \leq [\sigma]_c = 5 \text{ МПа}$$

5. Определить перемещение концевых сечений каждой ступени стержня с учетом собственного веса и построить эпюру перемещений по длине стержня.

Эпюра перемещений:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{g1} \cdot l_I}{EA_1} - \frac{\gamma \cdot A_1 \cdot z_I}{EA_1} = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 11}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0576} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0576 \cdot z_I}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0576} =$$

$$= -0{,}00318 - \int_0^{11} \frac{1152 \cdot z_I dz}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0576} = -0{,}00318 - 0{,}807 \cdot 10^{-4} = -3{,}261 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -3{,}261 \text{мм}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{g2} \cdot l_2}{EA_2} - \frac{\gamma \cdot A_2 \cdot z_2}{EA_2} = \frac{230 \cdot 10^3 \cdot 11}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 4} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot z_2}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 4} =$$

$$= 0{,}422 \cdot 10^{-4} - \int_0^{11} \frac{80000 \cdot z_2 dz}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 4} = 0{,}422 \cdot 10^{-4} - 0{,}807 \cdot 10^{-4} = -0{,}385 \cdot 10^{-4} \ м = -0{,}385 мм$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{g3} \cdot l_3}{EA_3} - \frac{\gamma \cdot A_3 \cdot z_3}{EA_3} = -\frac{670 \cdot 10^3 \cdot 5{,}5}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}16} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}16 \cdot z_3}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}16} =$$

$$= -15{,}354 \cdot 10^{-4} - \int_0^{5{,}5} \frac{3200 \cdot z_3 dz}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}16} = -15{,}354 \cdot 10^{-4} - 0{,}202 \cdot 10^{-4} = -15{,}556 \cdot 10^{-4} \ м = -1{,}556 мм$$

Значения в серединах участков:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{g1} \cdot 0{,}5 l_I}{EA_1} - \frac{\gamma \cdot A_1 \cdot z_I}{EA_1} = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 5{,}5}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0576} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0576 \cdot z_I}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0576} =$$

$$= -0{,}00159 - \int_0^{5{,}5} \frac{1152 \cdot z_I dz}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0576} = -0{,}00159 - 0{,}2017 \cdot 10^{-4} = -1{,}61 \cdot 10^{-3} \ м = -1{,}61 мм$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{g2} \cdot 0{,}5 l_2}{EA_2} - \frac{\gamma \cdot A_2 \cdot z_2}{EA_2} = \frac{230 \cdot 10^3 \cdot 5{,}5}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 4} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot z_2}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 4} =$$

$$= 0{,}211 \cdot 10^{-4} - \int_0^{5{,}5} \frac{80000 \cdot z_2 dz}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 4} = 0{,}211 \cdot 10^{-4} - 0{,}2016 \cdot 10^{-4} = -0{,}0094 \cdot 10^{-4} \ м = -0{,}094 мм$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{g3} \cdot 0{,}5 l_3}{EA_3} - \frac{\gamma \cdot A_3 \cdot z_3}{EA_3} = -\frac{670 \cdot 10^3 \cdot 2{,}75}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}16} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0{,}16 \cdot z_3}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}16} =$$

$$= -7{,}677 \cdot 10^{-4} - \int_0^{2{,}75} \frac{3200 \cdot z_3 dz}{1{,}5 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}16} = -7{,}677 \cdot 10^{-4} - 0{,}0504 \cdot 10^{-4} = -7{,}727 \cdot 10^{-4} \ м = -0{,}727 мм$$

Строим эпюру перемещений (рис.2.2).

Перемещение в жесткой заделке (точке А) равно нулю.

$$\Delta l_{\text{А}} = 0$$

$$\Delta l_{\text{середина AB}} = 0 - 0{,}727 = -0{,}727 мм$$

$$\Delta l_B = \Delta l_3 = -1{,}556 мм$$

$$\Delta l_{\text{середина BC}} = -1{,}556 - 0{,}094 = -1{,}65 мм$$

$$\Delta l_C = \Delta l_B + \Delta l_2 = -1{,}556 - 0{,}385 = -1{,}941 мм$$

$$\Delta l_{\text{середина CD}} = -1{,}941 - 1{,}61 = -3{,}551 мм$$

$$\Delta l_D = \Delta l_C + \Delta l_1 = -1{,}941 - 3{,}261 = -5{,}202 мм$$

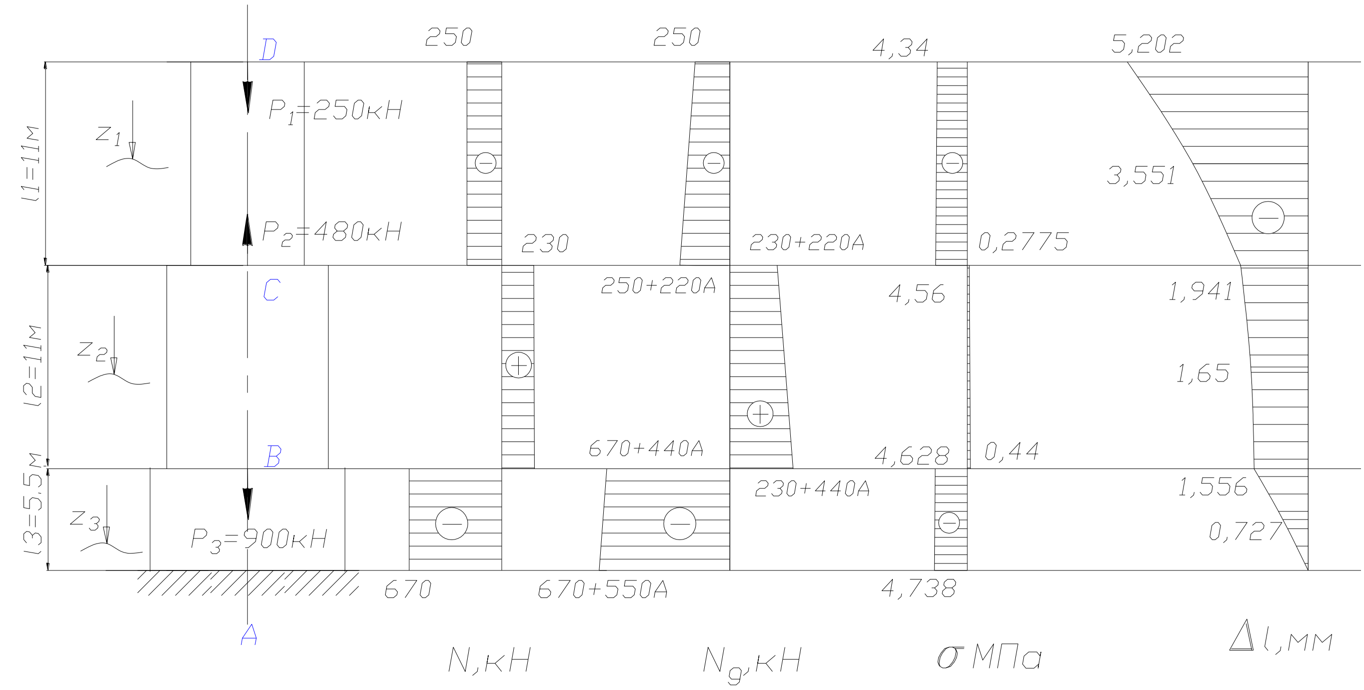

D
C
B
A
l1=11м
l2=11м
l3=5.5м
z_1
z_2
z_3
P_1=250кН
P_2=480кН
P_3=900кН
250
230
670
250
230+220A
250+220A
670+440A
230+440A
670+550A
4,34
0,2775
4,56
4,628
0,44
4,738
5,202
3,551
1,941
1,65
1,556
0,727
N,кН
N_g,кН
σ МПа
Δl,мм

Рисунок 2.2.

Расчетно-графическая работа №3
«Расчет вала на прочность и жёсткость при кручении»

Вал круглого поперечного сечения нагружен, как показано на рис. 3.1. Из условия прочности и жесткости определить диаметры поперечных сечений ступенчатого вала при условии, что мощности, передаваемые, соответственно 1, 2 и 3 шкивами: P_1 = 9660 Вт, P_2 = 7560 Вт, P_3 = 2898 Вт, частота вращения вала n = 80 об/мин, допускаемый угол закручивания на единицу длины $[\theta]=1{,}75\cdot10^{-2}$ рад/м, допускаемое касательное напряжение $[\tau]$=70 МПа, модуль сдвига $0{,}8\cdot10^5$ МПа, l =2 м.

1. Вычертить схему с указанием числовых данных (рис. 3.1.).
2. По заданной мощности P и частоте вращения вала n определить значения

внешних моментов T, передаваемых шкивами вала по формуле:

$$T\cdot\omega = P$$

где угловая скорость вращения вала ω может быть выражена через известную частоту вращения $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$

Таким образом, можно определить значения для внешних скручивающих моментов, передаваемых на вал:

$$T_1 = \frac{P_1\cdot 30}{\pi n} = \frac{9660\cdot 30}{3{,}14\cdot 80} = 1153{,}662\ \text{Нм} = 1{,}154\ \text{кНм}$$

$$T_2 = \frac{P_2\cdot 30}{\pi n} = \frac{7560\cdot 30}{3{,}14\cdot 80} = 902{,}866\ \text{Нм} = 0{,}903\ \text{кНм}$$

$$T_3 = \frac{P_3\cdot 30}{\pi n} = \frac{2898\cdot 30}{3{,}14\cdot 80} = 346{,}099\ \text{Нм} = 0{,}346\ \text{кНм}$$

Неизвестный скручивающий момент T_4 найдем из уравнения равновесия для всего вала. Условно примем направление момента T_4 совпадающим с направлением момента T_3, которое принято за положительное. Тогда уравнение равновесия принимает вид:

$$-T_1 - T_2 + T_3 + T_4 = 0$$

Из решения этого уравнения получим:

$$T_4 = T_1 + T_2 - T_3 = 1{,}154 + 0{,}903 - 0{,}346 = 1{,}711\ \text{кНм}$$

Знак плюс означает, что первоначальное направление скручивающего момента выбрано верно.

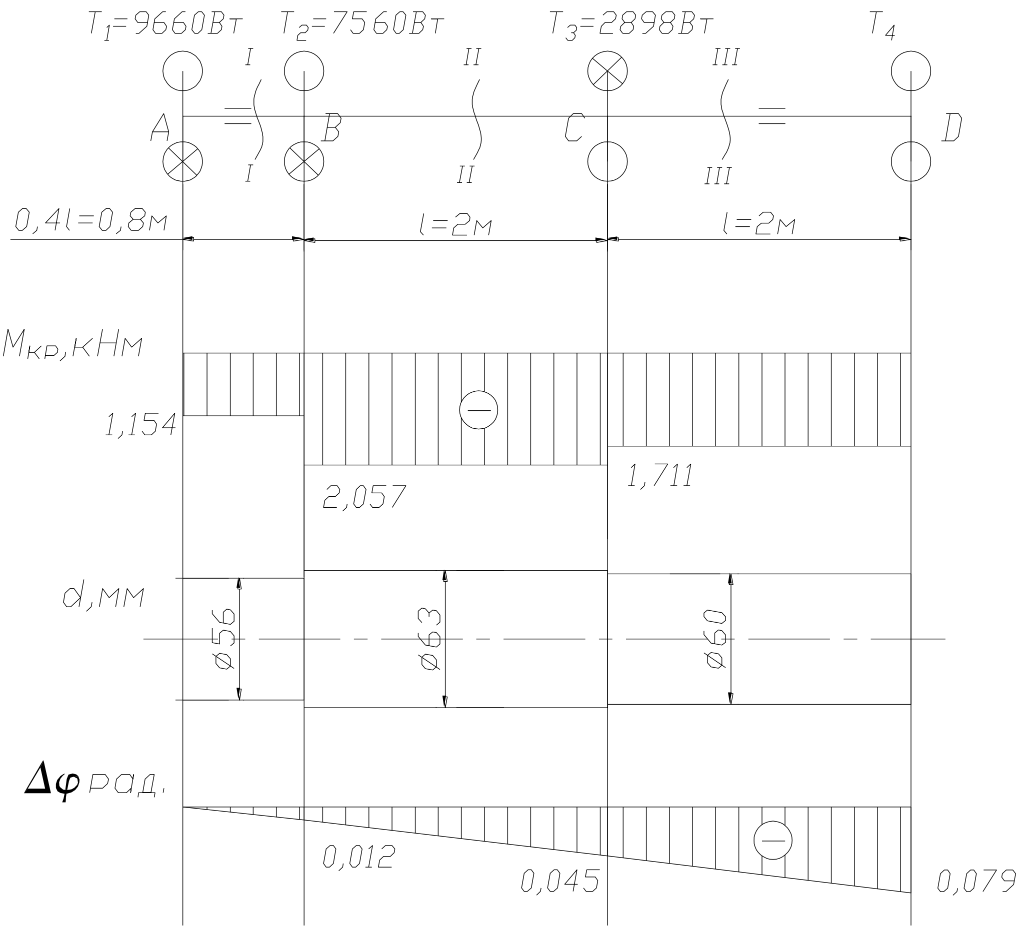


Рисунок 3.1 Схема нагружения вала, эпюры $M_{кр}$, φ, и схема вала.

3. Составить уравнения внутренних крутящих моментов по участкам.

Внутренние крутящие моменты $M_{кр}$ на каждом участке определяются по методу сечений с учетом правила знаков: если смотреть на отсеченную часть бруса со стороны внешней нормали к сечению, то момент будет положителен в том случае, когда сумма внешних скручивающих моментов поворачивает отсеченную часть по часовой стрелке, и отрицателен при повороте бруса в противоположном направлении.

Для этого слева направо проведем последовательно сечения на трех участках вала и рассмотрим равновесие соответствующих оставшихся левых частей.

В сечении I-I $\quad \text{М}_{\text{кр}_1} = -\text{Т}_1 = -1{,}154 \text{ кНм}$

В сечении II-II $\quad \text{М}_{\text{кр}_2} = -\text{Т}_1 - \text{Т}_2 = -1{,}154 - 0{,}903 = -2{,}057 \text{ кНм}$

В сечении III-III $\quad \text{М}_{\text{кр}_3} = -\text{Т}_1 - \text{Т}_2 + \text{Т}_3 = -1{,}154 - 0{,}903 + 0{,}346 = -1{,}711 \text{ кНм}$

4. Построить эпюру внутренних крутящих моментов.

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов $\text{М}_{\text{кр}}$, откладывая по вертикальной оси значения моментов. Положительные моменты откладываем вверх по осевой лини, отрицательные – вниз (рис. 3.1).

5. Из условия прочности определить диаметр вала на каждом участке.

Расчет на прочность ведется по допускаемому касательному напряжению при кручении [τ].

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \le [\tau] = 70\ МПа$$

где $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ - полярный момент сопротивления для круглого сечения, d - диаметр вала. Диаметр вала можно определить: $d \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}}$

Для каждого из участков диаметр вала равен:

$$d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр_1}}{\pi \cdot [\tau]}} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}154 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^6}} \ge 0{,}0438 \text{ м}$$

$$d_2 \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр_2}}{\pi \cdot [\tau]}} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2{,}057 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^6}} \ge 0{,}0531 \text{ м}$$

$$d_3 \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр_3}}{\pi \cdot [\tau]}} \ge \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1{,}711 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^6}} \ge 0{,}0499 \text{ м}$$

Полученный результат округлим по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40: $d_1^{ГОСТ} = 45$ мм, $d_2^{ГОСТ} = 56$ мм, $d_3^{ГОСТ} = 50$ мм.

6. Из условия жесткости определить диаметр вала на каждом участке.

Известны допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]=1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад/м и модуль сдвига $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа. Расчет на жесткость ведется по относительному углу закручивания [θ].

$$\Theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \le [\Theta]$$

где $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ - полярный момент инерции для круглого сечения, d – диаметр вала.

Диаметр вала можно определить $d \ge \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}}$

Для каждого из участков диаметр вала равен:

$$d_1 \ge \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр_1}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1{,}154 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-2}}} \ge 0{,}0538 \text{ м}$$

$$d_2 \ge \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр_2}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2{,}057 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-2}}} \ge 0{,}062 \text{ м}$$

$$d_3 \ge \sqrt[4]{\frac{32 M_{кр_3}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \ge \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1{,}711 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-2}}} \ge 0{,}0594 \text{ м}$$

Полученный результат округлим по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40: $d_1^{ГОСТ} = 56$ мм, $d_2^{ГОСТ} = 63$ мм, $d_3^{ГОСТ} = 60$ мм.

7. Окончательно принять диаметр вала на каждом участке по наибольшему значению, полученному из условий прочности и жесткости.

В соответствии с расчетом на прочность и жесткость выбираем наибольшее значение диаметров для каждого участка и полученный результат округляем до ближайшего значения из ряда по ГОСТ 6636-69. В результате получим окончательные значения диаметров: $d_1^{ГОСТ} = 56$ мм, $d_2^{ГОСТ} = 63$ мм, $d_3^{ГОСТ} = 60$ мм . Построим схему вала в масштабе по полученным размерам (см. рис. 3.1)

8. Определить угол закручивания по длине вала. Определить взаимный угол закручивания концевых сечений.

Абсолютные углы закручивания для каждого участка можно определить по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p}$$

Полярные моменты инерции сечения для каждого из участков равны:

$$J_{p_1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}056^4}{32} = 9{,}64 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$$

$$J_{p_2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}063^4}{32} = 15{,}45 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$$

$$J_{p_3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}06^4}{32} = 12{,}71 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$$

Далее определим углы закручивания на каждом участке:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{кр_1} \cdot l_1}{G \cdot J_{p_1}} = \frac{-1{,}154 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}64 \cdot 10^{-7}} = -0{,}012 \text{ рад}$$ – угол поворота сечения

В относительно А (или угол закручивания участка АВ).

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_{кр_2} \cdot l_2}{G \cdot J_{p_2}} = \frac{-2{,}057 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 15{,}45 \cdot 10^{-7}} = -0{,}033 \text{ рад}$$ – угол поворота сечения

С относительно сечения В (или угол закручивания участка ВС).

$$\Delta\varphi_3 = \frac{M_{кр_3} \cdot l_3}{G \cdot J_{p_3}} = \frac{-1{,}711 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 12{,}71 \cdot 10^{-7}} = -0{,}034 \text{ рад}$$ – угол поворота сечения

D относительно сечения С (или угол закручивания участка DC).

Построим эпюру углов закручивания для всего вала. За начало координат выберем крайний левый конец вала (сечение *A*). В пределах каждого участка вала эпюра линейна, поэтому достаточно знать углы поворота только для граничных сечений участков.

В сечении A полный угол закручивания равен нулю $\Delta\varphi_A = 0$.

В сечении B полный угол закручивания вала относительно сечения A равен $\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_1 = -0{,}012$ рад.

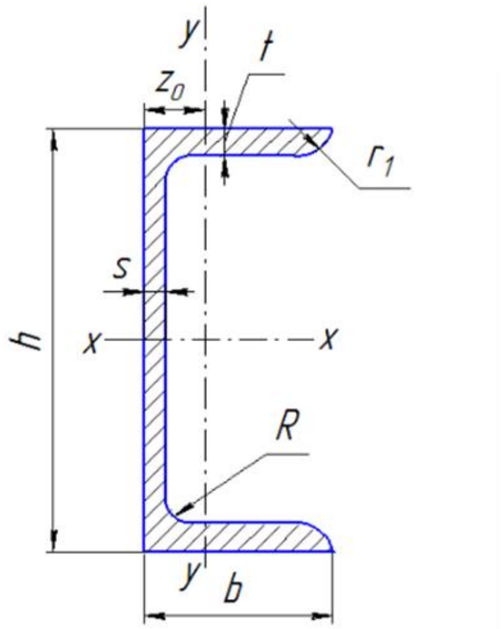
В сечении *C* полный угол закручивания вала относительно сечения *B* равен $\Delta\varphi_C = \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_2 = -0{,}012 - 0{,}033 = -0{,}045$ рад.

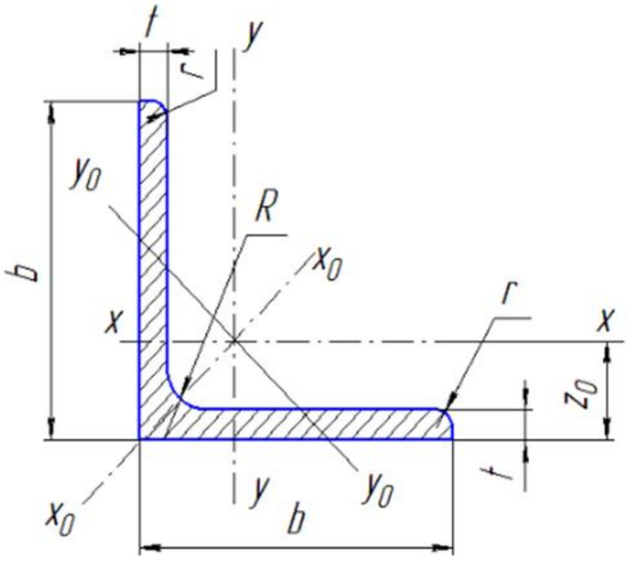
В сечении *D* полный угол закручивания вала относительно сечения *C* равен $\Delta\varphi_D = \Delta\varphi_C + \Delta\varphi_3 = -0{,}045 - 0{,}034 = -0{,}079$ рад.

Эпюра полных углов закручивания ступенчатого вала показана на рис. 3.1

Расчетно-графическая работа № 4.
«Геометрические характеристики плоских сечений»

Исходные данные из сортамента:





Для швеллера № 22

h = 220 мм; b = 82 мм; s = 5,4 мм; t = 9,5 мм;
R = 10 мм; r_1 = 4 мм;
A = 26,7 см^2; J_x = 2110 см^4; J_y = 151 см^4;

z_0 =2,21 см

Для уголка 75×75×7

b = 75 мм; t= 7 мм; R = 9 мм;
r = 3 мм; A = 10,15 см^2;
J_x = J_y =53,34 см^4; J_{xy} = –31,2см^4

z_0=2,1 см

1. Вычертить сечение в масштабе.
2. Определить положение центра тяжести сечения.

В качестве расчетных осей для определения центра тяжести выбираем оси швеллера.

$$x_c = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{26{,}7 \cdot 0 + 10{,}15 \cdot (-4{,}31)}{26{,}7 + 10{,}15} = -\frac{43{,}7465}{36{,}85} = -1{,}187\,см$$

где x_1 – расстояние от расчетной оси y до оси y_1, $x_1 = 0$,
x_2 – расстояние от расчетной оси y до оси y_2, $x_2 = -2{,}21 - 2{,}1 = -4{,}31$ см

$$y_c = \frac{\Sigma S_i}{\Sigma A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{26{,}7 \cdot 0 + 10{,}15 \cdot 8{,}9}{26{,}7 + 10{,}1} = \frac{90{,}335}{36{,}85} = 2{,}451\,см$$

где y_1 – расстояние от расчетной оси x до оси x_1, $y_1 = 0$,
y_2 – расстояние от расчетной оси x до оси x_2, $y_2 = \frac{22}{2} - 2{,}1 = 8{,}9$ см

По данным x_c и y_c провести центральные оси составного сечения.

3. Вычислить моменты инерции относительно центральных осей:

$$J_{x_C} = J_{x_1} + A_1 \cdot a_1^2 + J_{x_2} + A_2 \cdot a_2^2$$

где a_1 – расстояние от центральной оси x_c до оси x_1, a_1=-2,451 см

a_2 – расстояние от центральной оси x_c до оси x_2, a_2=11-2,451-2,1=6,449 см

$$J_{x_C} = 2110 + 26{,}7 \cdot (-2,451)^2 + 53{,}34 + 10{,}15 \cdot 6,449^2 = 2745{,}872 \text{ см}^4$$

$$J_{y_C} = J_{y_1} + A_1 \cdot b_1^2 + J_{x_2} + A_2 \cdot b_2^2$$

где b_1 – расстояние от центральной оси y_c до оси y_1, b_1=1,187 см

b_2 – расстояние от центральной оси y_c до оси y_2, $b_2=x_2-x_c$= -4,31+1,187=-3,123 см

$$J_{y_C} = 151 + 26{,}7 \cdot 1{,}187^2 + 53{,}34 + 10{,}15 \cdot (-3{,}123)^2 = 340{,}954 \text{ см}^4$$

4. Вычислить центробежный момент инерции относительно центральных осей:

$$\mathrm{J}_{x_c y_c} = \mathrm{J}_{x_1 y_1} + \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{b}_1 + \mathrm{J}_{x_2 y_2} + \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{b}_2 =$$

$$= 0 + 26{,}7(-2{,}451) \cdot 1{,}187 - 31{,}2 + 10{,}15 \cdot 6{,}449 \cdot (-3{,}123) = -313{,}303 \text{ см}^4$$

5. Вычислить моменты сопротивления относительно центральных осей:

$$\mathrm{W}_{x_C} = \frac{\mathrm{J}_{x_C}}{y_{max}} = \frac{2745{,}872}{13{,}451} = 204{,}139 \text{ см}^3$$

$$\mathrm{W}_{y_C} = \frac{\mathrm{J}_{y_C}}{x_{max}} = \frac{340{,}954}{8{,}523} = 40{,}004 \text{ см}^3$$

6. Определить положение главных центральных осей:

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = \frac{2\mathrm{J}_{x_c y_c}}{\mathrm{J}_{x_c} - \mathrm{J}_{y_c}} = -\frac{2 \cdot 313{,}303}{2745{,}872 - 340{,}954} = -\frac{626{,}606}{2404{,}918} = -0{,}261$$

$$2\alpha_0 = 14{,}63^\circ \qquad \alpha_0 = 7{,}315^\circ$$

Положительный угол α_0 откладывается от центральных осей x_c, y_c против часовой стрелки. Так как $J_{x_C} > J_{y_C}$, то поворот оси x_c производится до совмещения с главной осью *U* (ось max). Перпендикулярно оси максимум в этом же направлении проводится ось наименьшего главного момента инерции –*V* (ось min).

7. Определить величину главных центральных моментов инерции:

$$J_{\frac{max}{min}} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2}$$

$$J_U = J_{max} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \frac{2745{,}872 + 340{,}954}{2} +$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{2745{,}872 - 340{,}954}{2}\right)^2 + (-313{,}303)^2} = 2786{,}018 \text{ см}^4$$

$$J_V = J_{min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \frac{2745{,}872 + 340{,}954}{2} -$$

$$- \sqrt{\left(\frac{2745{,}872 - 340{,}954}{2}\right)^2 + (-313{,}303)^2} = 300{,}808\ \text{см}^4$$

Выполнить проверку, используя свойство моментов инерции:

$$\mathrm{J_V} + \mathrm{J_U} = \mathrm{J_{x_c}} + \mathrm{J_{y_c}}$$

подставив соответствующие значения:

$$2786{,}018 + 300{,}808 = 2745{,}872 + 340{,}954$$

3086,826=3086,826

8. Вычислить главные радиусы инерции:

$\mathrm{i_{max}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J_{max}}}{\mathrm{A_1 + A_2}}} = \sqrt{\frac{2786{,}018}{26{,}7+10{,}15}} = 8{,}695$ см значение откладывается на оси минимум V;

$\mathrm{i_{min}} = \sqrt{\frac{\mathrm{J_{min}}}{\mathrm{A_1 + A_2}}} = \sqrt{\frac{300{,}808}{26{,}7+10{,}15}} = 2{,}857$ см значение откладывается на оси максимум *U*.

Построить эллипс инерции.

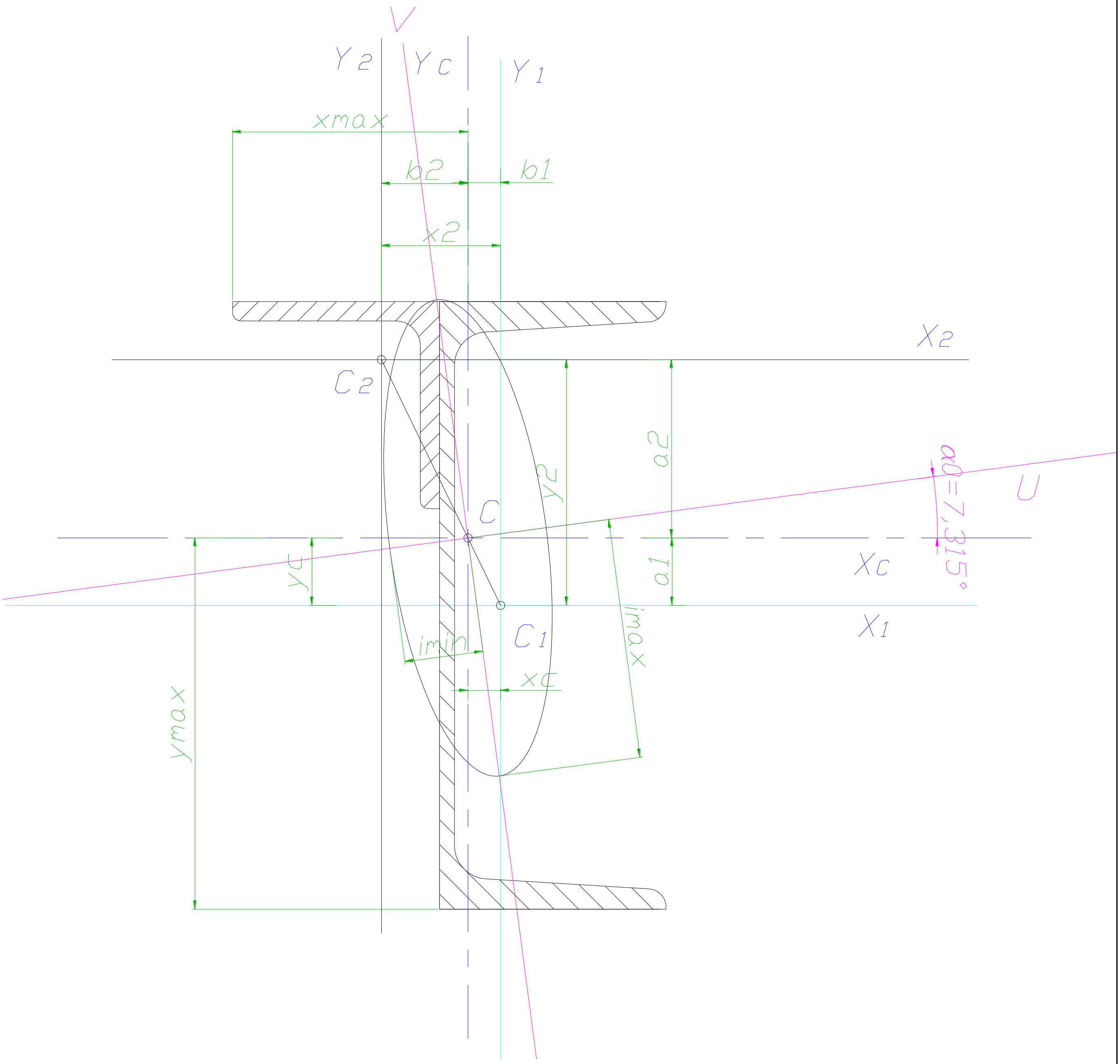

V
Y 2
Y c
Y 1
xmax
b2
b1
x2
X2
C 2
a2
a0=7,315°
U
y2
C
yc
a1
Xc
X1
imin
C 1
imax
xc
ymax

Рисунок 4.2