

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»

Кафедра механики материалов

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине "Сопротивление материалов"**

Направление подготовки: 270100 "Строительство"
Специальность: 270102 "Промышленное и гражданское строительство "
270112 "Производство строительных материалов, изделий и конструкций"

Форма обучения – заочная

Тула 2011

Конспект составлен д.т.н., проф. Саммалем А.С. и обсужден на заседании кафедры механики материалов механико-математического факультета.

Протокол № 9 от "27" июня 2011 г.

Зав.кафедрой _____ Н.Н.Фотиева

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	9
1. Введение	12
1.1. Задачи и методы сопротивления материалов	12
1.2. Реальный объект и его расчетная схема.....	13
1.3. Внешние и внутренние силы. Силы объемные и поверхностные.	14
1.4. Нагрузки статические и динамические, постоянные и переменные. Типы опор и опорные реакции.....	15
1.5. Внутренние усилия. Метод сечений.....	16
1.6. Понятие напряжения, перемещения и деформации. Интегральная связь между внутренними усилиями и напряжениями в поперечном сечении	20
1.7. Основные гипотезы и принципы, используемые в курсе сопротивления материалов.	23
2. Центральное растяжение-сжатие.....	27
2.1. Внутренние силы. Эпюры продольных сил.....	27
2.2. Напряжения в поперечных сечениях прямого стержня.....	27
2.3. Продольная и поперечная деформации стержня.....	29
2.4. Закон Гука при растяжении. Модуль упругости и коэффициент Пуассона.....	30
2.5. Перемещения поперечных сечений стержня.....	31
2.6. Учет собственного веса при расчете массивных колонн.....	32
2.7. Потенциальная энергия деформации.....	34
2.8. Опытное изучение механических свойств материалов.....	37
2.9. Условия прочности и жесткости. Типы задач, решаемых на их основе.....	50
2.10. Понятие о расчете статически неопределимых стержневых систем, элементы которых работают в условиях осевого растяжения (сжатия).....	56

2.11. Напряженное и деформированное состояние при растяжении и сжатии.....	57
3. Сдвиг.....	61
3.1. Чистый сдвиг.....	61
3.2. Закон Гука при сдвиге.....	62
4. Геометрические характеристики поперечных сечений бруса.....	64
4.1. Статические моменты сечения.....	64
4.2. Осевые, центробежный и полярный моменты инерции сечения.....	65
4.3 Моменты инерции элементарных сечений и прокатных профилей.....	67
4.4. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.....	70
4.5. Изменение моментов инерции при повороте осей.....	71
4.6. Главные моменты инерции.....	71
4.7. Моменты инерции сложных и составных сечений с одной и двумя осями симметрии.....	72
5. Прямой поперечный изгиб.....	75
5.1. Понятие прямого поперечного изгиба.....	76
5.2. Основные типы балок и принципы определения опорных реакций...76	
5.3. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях балок при изгибе.....	77
5.4. Дифференциальные зависимости, связывающие внутренние и внешние усилия при изгибе.....	80
5.6. Построение и анализ эпюр внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях балок при изгибе.....	81
5.7. Понятие чистого изгиба. Нормальные напряжения при чистом изгибе.....	82
5.8. Понятие момента сопротивления балки изгибу.....	86
5.9. Нормальные и касательные напряжения при поперечном изгибе. Формула Журавского.....	86
5.10. Рациональные формы поперечных сечений балки.....	90

5.11. Условие прочности при чистом изгибе и типы задач, решаемых на его основе.....	91
5.12. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки и его интегрирование.....	92
5.13. Метод начальных параметров.....	94
5.14. Расчет балки на жесткость.....	96
6. Кручение: расчеты на жесткость и прочность.....	99
6.1. Понятие кручения и крутящего момента.....	99
6.2. Построение эпюр крутящих моментов.....	100
6.3. Напряжения и деформации, возникающие при кручении прямого стержня круглого поперечного сечения.....	100
6.4. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением.....	102
6.5. Условия прочности и жесткости при кручении и типы задач, решаемых на их основе.....	104
6.6. Расчет винтовых цилиндрических пружин.....	106
7. Косой изгиб, внецентренное растяжение-сжатие.....	109
7.1. Косой и пространственный изгиб.....	109
7.2. Определение напряжений и положения нулевой линии.....	109
7.3. Опасные точки сечения.....	111
7.4. Условия прочности и типы задач, решаемых на его основе.....	112
7.5. Величина и направление прогибов при косом изгибе.....	113
7.6. Условие жесткости и типы задач, решаемых на его основе.....	113
7.7. Внецентренное растяжение (сжатие) стержней большой жесткости.....	119
7.8. Определение напряжений, положения нейтральной линии и опасных точек.....	119
7.9. Условие прочности и типы задач, решаемых на его основе.....	122
8. Расчет статически определимых стержневых систем.....	123
8.1. Типы стержневых систем.....	123
8.2. Особенности определения перемещений в плоских стержневых системах (рамах, фермах, комбинированных.....)	124

системах).....	124
8.3. Потенциальная энергия упругой деформации в брус малой кривизны.....	124
8.4. Потенциальная энергия упругой деформации и интегралы Мора.....	132
9. Метод сил, расчет статически неопределимых стержневых систем.....	136
9.1. Статически неопределимые системы. Необходимые и лишние связи.....	136
9.2. Эквивалентная и основная система метода сил.....	137
9.3. Канонические уравнения метода сил.....	138
9.4. Принципы расчета простых статически неопределимых балок..	139
9.5. Контроль правильности решения статически неопределимых систем.....	142
10. Анализ напряженного и деформированного состояния в точке тела.....	143
10.1. Понятие о напряженном состоянии в точке упругого тела и его виды. Тензор напряжений.	143
10.2. Напряжения на наклонных площадках.....	145
10.3. Закон парности касательных напряжений.....	147
10.6. Главные напряжения и площадки.....	147
10.7. Круговая диаграмма напряженного состояния Мора. Экстремальные касательные напряжения.....	149
10.8. Октаэдрические напряжения.....	152
10.9. Основы теории деформированного состояния тела в точке. Понятие о главных деформациях.....	153
10.10. Обобщенный закон Гука.....	157
10.11. Объемная деформация.....	160
10.12. Удельная потенциальная энергия упругой деформации.....	162
10.13. Частные случаи напряженного состояния тела в точке.....	163

11. Сложное сопротивление, расчет по теориям прочности.....	165
11.1. Содержание теорий предельных напряженных состояний.....	165
11.2. Понятие об эквивалентном напряжении.....	166
11.3. Классические теории прочности.....	167
11.4. Гипотеза прочности О.Мора.....	170
11.5. Новые теории прочности.....	173
12. Расчет безмоментных оболочек вращения.....	175
12.1. Понятие оболочки вращения. Меридианальные и окружные сечения.....	175
12.2. Напряжения в осесимметричной оболочке.....	176
12.3. Уравнение Лапласа и уравнение равновесия части оболочки, отсеченной окружным сечением.....	176
12.4. Расчеты на прочность цилиндрических, конических и сферических оболочек.....	178
12.5. Распорные кольца в оболочках.....	182
13. Устойчивость сжатых стержней.....	183
13.1. Понятие устойчивости упругого тела.....	183
13.2. Критической силы, нагрузки и напряжения.....	184
13.4. Зависимость критической силы от условий закрепления стойки, деформационных и геометрических характеристик ее сечения.....	187
13.5. Пределы применимости формулы Эйлера.....	189
13.6. Формула Тетмайера-Ясинского.....	190
13.7. Расчет сжатых стержней на устойчивость по методике СНиП.....	191
14. Продольно-поперечный изгиб.....	194
14.1. Особенности задачи продольно-поперечного изгиба.....	194
14.2. Различные формы дифференциальных уравнений, описывающих продольно-поперечный изгиб и их интегрирование.....	194
14.3. Приближенная формула для определения прогиба при продольно-поперечном изгибе.....	196

15. Расчет движущихся с ускорением элементов конструкции.....	199
15.1. Силы инерции, возникающие в поступательно перемещающемся теле.....	199
15.2. Движение тела с постоянным ускорением.....	199
15.3. Коэффициент динамичности.....	200
16. Удар.....	202
16.1. Расчет на удар при осевом действии нагрузки.....	202
16.2. Расчет на удар при изгибе.....	204
16.3. Механические свойства материалов при ударе.....	205
17. Усталость.....	207
17.1. Понятие об усталости материалов.....	207
17.2. Методы определения предела выносливости.....	209
17.3. Влияние конструктивно-технологических факторов на предел выносливости.....	210
17.4. Расчет на прочность при повторно-переменных напряжениях.....	211
17.5. Понятие о малоцикловой усталости.....	211

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель и задачи изучения дисциплины

Сопротивление материалов является дисциплиной, в которой изучаются основные понятия и принципы, используемые в расчетах различных типов конструкций и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость и несущую способность. В основу курса сопротивления материалов положены результаты обобщения экспериментально-теоретических исследований на основе применения инженерных методов теоретической механики (в первую очередь статики), математического анализа и основных разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов.

Целью преподавания курса является ознакомление студентов с физической сущностью процесса деформирования элементов конструкций при простых видах нагружения, таких, как растяжение, сжатие, кручение, изгиб и при некоторых случаях сложного сопротивления.

В состав курса входит комплекс виртуальных лабораторных работ, имеющий целью обучить студента методам экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния и механических свойств конструкционных материалов.

Знания студентов оцениваются по 100-балльной системе со следующими диапазонами баллов, соответствующими традиционным оценкам:

Академическая оценка (по 4-балльной системе)	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Балльная оценка (по 100-балльной системе)	От 0 до 39 включительно	От 40 до 60 включительно	Свыше 60 до 80 включительно	Свыше 80 до 100 включительно

Балльная оценка определяется как сумма баллов, набранных студентом в семестре (текущая успеваемость) и на экзамене (промежуточная аттестация).

Максимальное количество баллов, которое может набрать студент по текущей успеваемости – 60 баллов, а на промежуточной аттестации – 40 баллов.

Допуском к экзамену является безусловное выполнение всех контрольных и других работ, предусмотренных учебным планом.

Экзамен производится по двухступенчатой схеме, при этом каждая ступень оценивается в 20 баллов. Первая ступень – тестирование по основным положениям и понятийного аппарата курса, при этом тест содержит 20 вопросов, каждый из которых оценивается в 1 балл. Тест считается успешно выполненным, если студент наберет не менее 50 %, отведенных на тестирование баллов, т.е. не менее 10 правильных ответов. При меньшем числе правильных ответов экзамен считается не сданным, и студенту в зачетную ведомость проставляются баллы, набранные в течение семестра, если их достаточно для положительной оценки (не менее 40), в ином случае - ничего не проставляется, а в экзаменационную ведомость проставляется фактическая сумма баллов, набранная студентом в течение семестра. При успешном написании теста студент допускается ко второй ступени экзамена – к решению комплексной экзаменационной задачи, которая позволяет получить дополнительно еще 20 баллов. Если задача не будет решена, то оценка знаний студента, набранных на предыдущих этапах, остается без изменений и проставляется в зачетную книжку и экзаменационную ведомость. Если задача будет успешно решена, то к баллам, набранным на предыдущих этапах, добавляются соответствующие баллы. Студент также может получить дополнительные баллы в результате собеседования по вопросам, связанным с задачей или изучаемой темой. Эти баллы складываются с полученными ранее и в зачетную книжку (экзаменационную ведомость) проставляется суммарная оценка, которая не может превышать 100 баллов.

В течение семестра студент может набрать не более 60 баллов, из расчета 15 -20 баллов за решение каждого самостоятельного задания. При несвоевременной сдаче контрольных работ число баллов снижается до нуля.

Рекомендуемая литература

1. Сопротивление материалов. – Под ред. А.Ф.Смирнова – М.: Высшая школа, 1975. – 480 с.
2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Вища школа, 1988. – 736 с.
3. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов/Под ред. Качурина В.К. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
5. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учеб. пособие/ Н.Н. Фотиева, А.К. Петренко, А.С. Саммаль, В.М. Логунов; Тул. Гос. ун-т. Тула, 2004, 186 с.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Задачи и методы сопротивления материалов

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций. Методами сопротивления материалов выполняются расчеты, на основании которых определяются необходимые размеры деталей машин и конструкций инженерных сооружений.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, в которых наиболее существенными являются свойства твердых деформируемых тел, а законами движения тела как жесткого целого здесь пренебрегают. В то же время, вследствие общности основных положений, сопротивление материалов рассматривается как раздел механики твердых деформируемых тел.

В состав механики деформируемых тел входят также такие дисциплины, как: теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, теория разрушения и др., рассматривающие, по существу, те же вопросы, что и сопротивление материалов. Различие между сопротивлением материалов и другими теориями механики твердого деформируемого тела заключается в подходах к решению задач.

Строгие теории механики деформируемого тела базируются на более точной постановке проблем, в связи с чем, для решения задач приходится применять более сложный математический аппарат и проводить громоздкие вычислительные операции. Вследствие этого возможности применения таких методов в практических задачах ограничены.

В свою очередь, методы сопротивления материалов базируются на упрощенных гипотезах, которые, с одной стороны, позволяют решать широкий круг инженерных задач, а с другой, получать приемлемые по точности результаты расчетов.

При этом главной задачей курса является формирование знаний для применения математического аппарата при решении прикладных задач, осмысления полученных численных результатов и поиска выбора наиболее оптимальных конструктивных решений. То есть данный предмет является базовым для формирования инженерного мышления и подготовки кадров высшей квалификации по техническим специализациям.

1.2. Реальный объект и его расчетная схема

В сопротивлении материалов, как и во всякой отрасли естествознания, исследование вопроса о прочности или жесткости реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Расчетная схема конструкции – его упрощенная схема, освобожденная от несущественных в данной задаче особенностей. Выбор расчетной схемы начинается со схематизации свойств материалов сооружения. В сопротивлении материалов принято рассматривать все материалы как *однородную сплошную среду*, независимо от их микроструктуры. Под однородностью материала понимают независимость его свойств от величины выделенного из тела объема. И хотя в действительности реальный материал, как правило, неоднороден (уже в силу его молекулярного строения), тем не менее указанная особенность не является существенной, поскольку в сопротивлении материалов рассматриваются конструкции, размеры которых существенно превышают не только межатомные расстояния, но и размеры кристаллических зерен.

С понятием однородности тесно связано понятие *сплошности среды*, под которым подразумевают тот факт, что материал конструкции полностью заполняет весь отведенный ему объем, а значит в теле конструкции нет пустот.

Под действием внешних сил реальное тело меняет свои геометрические размеры. После снятия нагрузки геометрические размеры тела полностью или частично восстанавливаются. Свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после разгрузки называется *упругостью*. При решении большинства задач в сопротивлении материалов принимается, что материал конструкций *абсолютно упругий*.

Обычно сплошная среда принимается *изотропной*, т.е. предполагается, что свойства тела, выделенного из нее, не зависят от его ориентации в пределах этой среды. Отдельно взятый кристалл материала анизотропен, но т.к. в объеме реального тела содержится бесконечно большое количество хаотично расположенных кристаллов, принимается, что материал изотропен.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения и в геометрию реального объекта. Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схемам бруса (стержня) или оболочки. Как известно, любое тело в пространстве характеризуется тремя измерениями.

Брусом называется геометрический объект, одно из измерений которого (длина) много больше двух других. Геометрически брус может быть образован путем

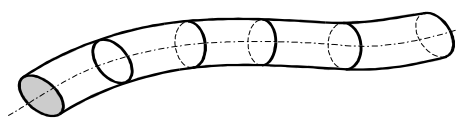


Рис. 1.1

перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой, как это показано на рис. 1.1.

Эта кривая называется *осью бруса*, а плоская замкнутая фигура, располагающая свой центр тяжести на оси бруса и нормальная к ней, называется его *поперечным сечением*. Брус может иметь как постоянное, так и переменное поперечное сечение. Многие сложные конструкции на практике рассматриваются как комбинации элементов, имеющих форму бруса, поэтому в настоящей книге преимущественно рассматриваются методы расчета бруса как основного геометрического объекта изучения науки сопротивления материалов. Второй основной геометрической формой, рассматриваемой в сопротивлении материалов, является *оболочка*, под которой подразумевается тело, у которого одно из измерений (толщина) намного меньше, чем два других.

Для соединения отдельных частей конструкции между собой и передачи внешней нагрузки на основание на нее накладываются *связи*, ограничивающие перемещения тех точек сооружения, к которым они приложены. Связи могут ограничивать либо повороты точек сооружения, либо их линейные смещения, либо и то и другое.

1.3. Внешние и внутренние силы. Силы объемные и поверхностные.

Силы являются мерилем механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, то действие последних на нее заменяется силами, которые называются *внешними*. Внешние силы, действующие на тело, можно разделить на *активные* (независимые) и *реактивные*. Реактивные усилия возникают в связях, наложенных на тело, и определяются действующими на тело активными усилиями.

По способу приложения внешние силы делятся на *объемные* и *поверхностные*.

Объемные силы распределены по всему объему рассматриваемого тела и приложены к каждой его частице. В частности, к объемным силам относятся собственный вес сооружения, магнитное притяжение или силы инерции. Единицей измерения объемных сил является сила, отнесенная к единице объема – кН/м^3 .

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и являются результатом непосредственного контактного взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающими телами. В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные нагрузки подразделяются на сосредоточенные и распределенные. К первым относятся нагрузки, реальная площадь приложения которых несоизмеримо меньше полной площади поверхности тела (например, воздействие колонн на фундаментную плиту достаточно больших размеров можно рассматривать как действие на нее сосредоточенных усилий). Если же площадь приложения нагрузки сопоставима с площадью поверхности тела, то такая нагрузка рассматривается как распределенная. Сосредоточенные усилия измеряются в кН, а распределенные – кН/м^2 .

1.4. Нагрузки статические и динамические, постоянные и переменные. Типы опор и опорные реакции

По характеру изменения во времени различают:

- *статические нагрузки*, нарастающие медленно и плавно от нуля до своего конечного значения; достигнув его, в дальнейшем не изменяются. Примером могут служить центробежные силы в период разгона и при последующем равномерном вращении какого-либо ротора;

- *повторные нагрузки*, многократно изменяющиеся во времени по тому или иному закону. Примером такой нагрузки служат силы, действующие на зубья зубчатых колес;

- *нагрузки малой продолжительности*, прикладываемые к конструкции сразу или даже с начальной скоростью в момент контакта (эти нагрузки часто называют динамическими или ударными). Примером ударной является, например, нагрузка, воспринимаемая деталями сваебойной установки во время забивки свай.

Вопрос о связях и их реакциях достаточно подробно рассмотрен в курсе теоретической механики. В нашем курсе ограничимся лишь напоминанием о наиболее распространенных типах связей.

Шарнирно-подвижная опора (односвязная опора) схематически изображается, как показано на рис. 1.2 а. Реакция такой опоры всегда перпендикулярна опорной поверхности.



Рис. 1.2. Типы шарнирных опор

Шарнирно-неподвижная опора (двухсвязная опора) схематически изображена на рис. 1.2,б. Реакция шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира, а ее направление зависит от действующих активных сил. Вместо отыскания числового значения и направления этой реакции удобнее искать отдельно две ее составляющие.

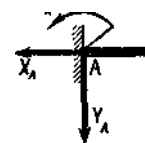


Рис. 1.3. Жесткая заделка

В жесткой заделке (трехсвязная опора) возникают реактивная пара сил (момент) и реактивная сила; последнюю удобнее представлять в виде двух ее составляющих (рис. 1.3).

1.5. Внутренние усилия. Метод сечений.

Взаимодействие между частями рассматриваемого тела характеризуется *внутренними силами*, которые возникают внутри тела под действием внешних нагрузок и определяются силами межмолекулярного воздействия.

Величины внутренних усилий определяются с применением *метода сечений*, суть которого заключается в следующем. Если при действии внешних сил тело находится в состоянии равновесия, то любая отсеченная часть тела вместе с приходящимися на нее внешними и внутренними усилиями также находится в равновесии, следовательно, к ней применимы уравнения равновесия.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис. 1.4, а).

Пусть к нему приложена некоторая система внешних сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, удовлетворяющая условиям равновесия, т.е. при действии указанных внешних сил тело находится в состоянии равновесия.

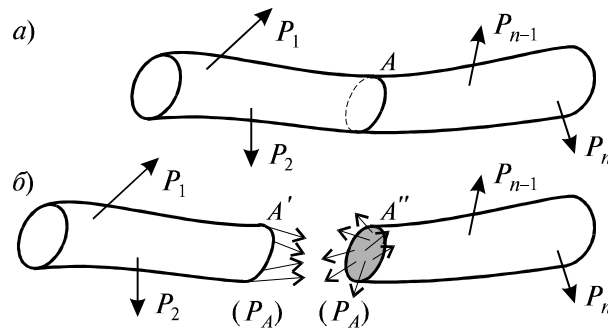


Рис. 1.4

Если расечь брус сечением A на две части и правую отбросить, то, т.к. связи между частями тела устранены, необходимо действие правой (отброшенной) части на левую заменить некоей системой внутренних сил (P_A), действующей в сечении A (рис. 1.2, б).

Обозначая через $P_{лев}$ и $P_{прав}$ суммы внешних сил, приложенных соответственно, к левой и правой частям бруса (относительно сечения A), и учитывая, что

$$P_{лев} + P_{прав} = 0 \quad (1.1)$$

для отсеченных частей бруса получим следующие очевидные соотношения:

$$P_{лев} + P_A = 0; \quad P_{прав} - P_A = 0. \quad (1.2)$$

Последние соотношения показывают, что равнодействующая внутренних сил P_A в сечении A может определяться с равным успехом из условий равновесия либо левой, либо правой частей рассеченного тела. В этом суть *метода сечений*.

Внутренние усилия должны быть так распределены по сечению, чтобы деформированные поверхности сечения A при совмещении правой и левой частей тела в точности совпадали. Это требование в механике твердого деформируемого тела носит название *условия неразрывности деформаций*.

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил P_A к центру тяжести сечения A в соответствии с правилами теоретической механики. В результате получим главный вектор сил \vec{R} и главный вектор момента \vec{M} (рис. 1.5). Далее выбираем декартову систему координат x, y, z с началом координат, совпадающим с центром тяжести сечения A . Ось z направим по нормали к сечению, а оси x и y расположим в плоскости сечения. Спроектировав главный вектор сил \vec{R} и главный момент \vec{M} на координатные оси x, y, z , получаем шесть составляющих: три

силы N_z , Q_x , Q_y и три момента M_z , M_x , M_y , называемых внутренними силовыми факторами в сечении бруса.

Составляющая N_z называется нормальной, или продольной силой в сечении. Силы Q_x и Q_y называются поперечными усилиями. Момент M_z называется крутящим моментом, а моменты M_x и M_y – изгибающими моментами относительно осей x и y , соответственно.

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части.

Пусть R^* , M^* – результирующая сила и результирующий момент действующие на отсеченной части тела. Если тело при действии полной системы внешних сил находится в равновесном состоянии, то условия равновесия отсеченной части тела имеет вид:

$$R^* = 0; \quad M^* = 0. \quad (1.3)$$

Последние два векторные уравнения равновесия дают шесть скалярных уравнений в проекциях на декартовых осях координат:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum m_x &= 0; \quad \sum m_y = 0; \quad \sum m_z = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

которые в общем случае составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно шести неизвестных внутренних усилий: Q_x , Q_y , N_z , M_x , M_y , M_z .

Следовательно, если полная система внешних сил известна, то по методу сечений, всегда можно определить все внутренние усилия действующих в произвольно взятом сечении тела. Данное положение является основополагающим обстоятельством в механике твердого деформируемого тела.

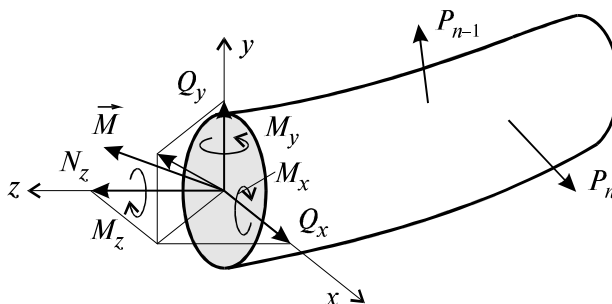


Рис. 1.5 Внутренние силовые факторы в сечении бруса

В общем случае в сечении могут иметь место все шесть силовых факторов. Однако достаточно часто на практике встречаются случаи, когда некоторые внутренние усилия отсутствуют – такие виды нагружения бруса получили специальные названия:

- осевое растяжение (сжатие) – когда в поперечном сечении действуют только продольные силы N_z , а остальные силовые факторы отсутствуют;
- кручение – когда в поперечном сечении действуют только крутящие моменты M_z , а остальные силовые факторы отсутствуют;
- Чистый изгиб относительно оси x - когда в поперечном сечении действуют только изгибающие моменты M_x , а остальные силовые факторы отсутствуют;
- Чистый изгиб относительно оси y - когда в поперечном сечении действуют только изгибающие моменты M_y , а остальные силовые факторы отсутствуют;
- Поперечный изгиб относительно оси x - когда в поперечном сечении действуют только изгибающие моменты M_x и поперечные силы Q_y , а остальные силовые факторы отсутствуют;
- Поперечный изгиб относительно оси y - когда в поперечном сечении действуют только изгибающие моменты M_y и поперечные силы Q_x , а остальные силовые факторы отсутствуют.

При этом брус, работающий в условиях осевого растяжения (сжатия) обычно называют стойкой или колонной. Брус, работающий в условиях изгиба, называют балкой, а в условиях кручения – валом.

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует одно внутреннее усилие, условно называются *простыми*. При одновременном действии в сечении бруса двух и более усилий сопротивление бруса называется *сложным*.

В заключение заметим, что при выполнении практических расчетов, для наглядности, как правило, определяются графики функций внутренних силовых факторов относительно координатной оси, направленной вдоль продольной оси стержня. Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются *эпюрами*.

1.6. Понятие напряжения, перемещения и деформации.

Интегральная связь между внутренними усилиями и напряжениями в поперечном сечении

В окрестности произвольной точки K , принадлежащей сечению A некоторого нагруженного тела, выделим элементарную площадку ΔA , в пределах которой действует внутреннее усилие $\Delta \vec{R}$ (рис. 1.6, *a*). Векторная величина

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} \right) = \vec{P} \quad (1.5)$$

называется полным напряжением в точке K . Проекция вектора полного напряжения \vec{P} на нормаль к данной площадке обозначается через σ и называется *нормальным напряжением*.

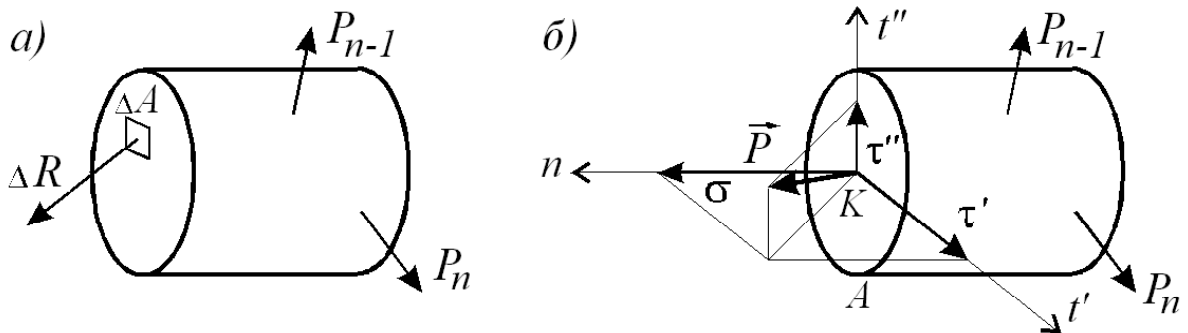


Рис. 1.6.

Проекции вектора \vec{P} на перпендикулярные оси в плоскости площадки (рис. 1.6, *б*) называются *касательными напряжениями* по направлению соответствующих осей и обозначаются τ' и τ'' . Если через ту же самую точку K провести другую площадку, то, в общем случае будем иметь другое полное напряжение. Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через данную точку, образует напряженное состояние в этой точке.

Под действием внешних сил твердые тела изменяют свою геометрическую форму, а точки тела неодинаково перемещаются в пространстве (рис. 1.7). Вектор \vec{T} , имеющий свое начало в точке A недеформированного состояния, а конец в т. A' деформированного состояния, называется вектором полного перемещения т. A (рис. 1.7, а). Его проекции на оси xuz называются осевыми перемещениями и обозначаются u , v и w , соответственно.

Для того, чтобы охарактеризовать интенсивность изменения формы и размеров тела, рассмотрим точки A и B его недеформированного состояния, расположенные на расстоянии S друг от друга (рис. 1.7, б).

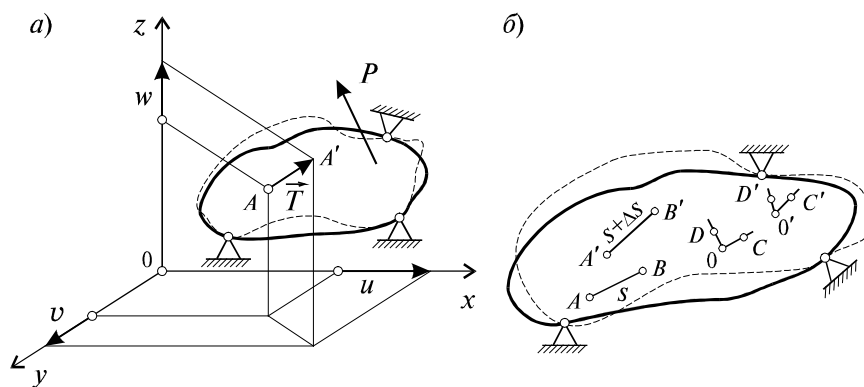


Рис. 1.7.

Пусть в результате изменения формы тела эти точки переместились в положение A' и B' , соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину ΔS и составило $S + \Delta S$. Величина

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{S}}{S} \right) = \vec{\epsilon} \quad (1.6)$$

называется линейной деформацией в точке A по направлению AB . Если рассматривать деформации по направлениям координатных осей xuz , то в обозначения соответствующих проекций линейной деформации вводятся индексы ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z .

Линейные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z характеризуют изменения объема тела в процессе деформирования, а формоизменения тела – угловыми деформациями. Для их определения рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном со-

стоянии двумя отрезками OD и OC (рис. 1.9, б). При действии внешних сил указанный угол DOC изменится и примет новое значение $D'O'C'$. Величина

$$\lim_{OC \rightarrow 0, OD \rightarrow 0} (\angle DOC - \angle D'O'C') = \gamma \quad (1.7)$$

называется угловой деформацией, или сдвигом в точке O в плоскости COD . Относительно координатных осей деформации сдвига обозначаются γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} .

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям в данной точке образует деформированное состояние в точке.

Установим связь между напряжениями и внутренними силами, возникающими в поперечном сечении стержня. Для этой цели выделим на сечении бесконечно малую площадку dA и приложим к ней элементарные силы σdA , $\tau_y dA$, $\tau_x dA$ (рис. 1.8)

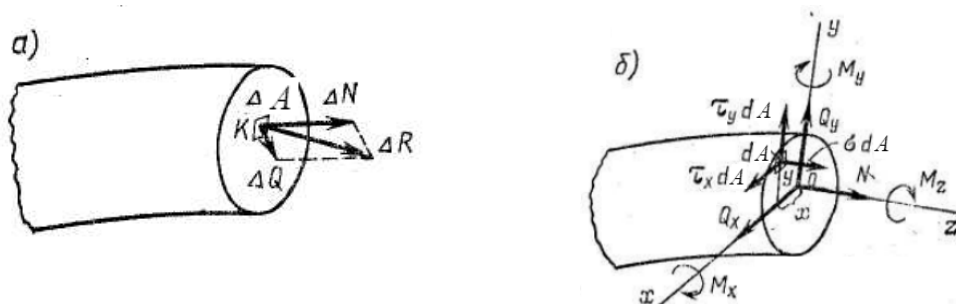


Рис. 1.8.

Суммируя проекции этих элементарных сил, а также их моменты относительно осей Ox , Oy , Oz , найдем;

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA; & M_x &= \int_A y \sigma dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y dA; & M_y &= \int_A x \sigma dA; \\ Q_x &= \int_A \tau_x dA; & M_z &= \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA; \end{aligned} \quad (1.8)$$

Значок « A » у интеграла показывает, что интегрирование проводится по всей площади поперечного сечения. Приведенные интегральные зависимости позволяют определить равнодействующие внутренних сил через напряжения, если известен закон распределения последних по сечению. Заметим, что обратную задачу с помо-

щью только одних указанных уравнений решить нельзя, так как одной и той же величине внутреннего усилия, например N , могут соответствовать различные законы, распределения нормальных напряжений по сечению. Одной из основных задач сопротивления материалов является задача об определении напряжений через равнодействующие внутренних сил. При этом оказывается, что решить эту задачу можно только, рассматривая параллельно с условиями равновесия и условия деформаций бруса.

1.7. Основные гипотезы и принципы, используемые в курсе сопротивления материалов

Наука о сопротивлении материалов, отказываясь от принятого в теоретической механике допущения об абсолютной жесткости тел, все же не может при построении теории расчетов на прочность и жесткость отразить все многообразие свойств реальных материалов. Поэтому в сопротивление материалов приходится вводить ряд допущений относительно свойств материалов, позволяющих построить достаточно простую и удобную для инженерной практики теорию расчетов элементов конструкций. Конечно, эти допущения таковы, что полученные на их основе выводы достаточно точно совпадают с результатами соответствующих экспериментальных исследований.

Рассмотрим эти допущения.

1. Материал *однороден*, т. е. свойства любых сколь угодно малых его частиц совершенно тождественны. Это допущение достаточно обосновано для металлокристаллических материалов, например для стали, и менее обосновано для материалов типа чугуна.

2. Материал полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот, т. е. тело рассматривается как сплошная среда. Допущение *о сплошности* тела можно рассматривать как следствие допущения однородности материала. Представление о теле как о сплошной среде дает возможность применять при исследованиях, выполняемых в сопротивлении материалов, методы анализа бесконечно малых величин (дифференциальное и интегральное исчисления).

3. Материал *изотропен*, т. е. физико-механические свойства его по всем направлениям одинаковы. Материалы, не обладающие указанным свойством, называют анизотропными.

В известных пределах нагружения материал обладает идеальной (совершенной) упругостью, т. е. после снятия нагрузки деформации полностью исчезают.

Перейдем к рассмотрению допущений, связанных с характером деформаций элементов конструкций, которые существенно упрощают вывод формул и построение методов его расчета на прочность, жесткость и устойчивость.

Подобные предположения называются *гипотезами*. В данном разделе упомянем только одну из них – *гипотезу плоских сечений*, сформулированную Бернулли: *поперечные сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и после его деформации*.

При анализе расчетной схемы и решении подавляющего большинства задач в сопротивлении материалов, кроме соответствующих гипотез, используют некоторые *предпосылки*, называемые *принципами*. Их три: принцип *относительной жесткости систем* (принцип *неизменности начальных размеров*), принцип *независимости действия сил* (принцип *суперпозиции*), принцип Сен-Венана.

Примечание: Баре де Сен-Венан – французский ученый, один из создателей теории упругости.

Первый из вышеперечисленных принципов основан на том, что в большинстве случаев форма тела под действием внешних сил изменяется несущественно, что позволяет при составлении уравнений равновесия считать тело недеформированным, имеющим те же геометрические размеры, какие оно имело до нагружения.

Пример 1. На рис.1.9,*а* показана стержневая система, состоящая из двух одинаковых стержней и нагруженная в узле *A* силой *P*. Под действием этой силы стержни деформируются, и узел *A* смещается вниз (рис.1.9,*б*).

Используя методы теоретической механики можно показать, что внутренние усилия (рис.1.9,*в*), действующие в стержнях, равны и могут быть найде-

ны из выражения

$$N = \frac{P}{2\sin(\alpha + \Delta\alpha)}.$$

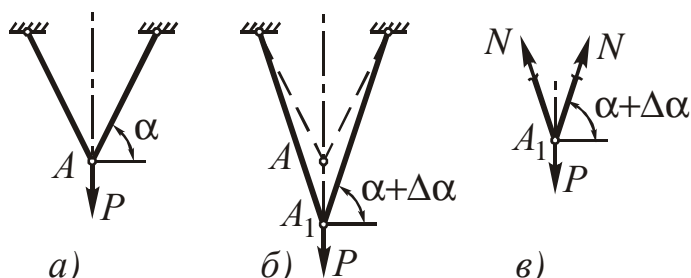


Рис.1.9. Применение принципа неизменности начальных размеров к расчету стержневой системы.

Приращением $\Delta\alpha$ угла α можно пренебречь в силу малости деформаций стержней и, как следствие этого, *при составлении уравнений статики можно считать элементы конструкции абсолютно жесткими*, т.е.

$$N = \frac{P}{2\sin\alpha}.$$

Принцип *независимости действия сил* может быть сформулирован следующим образом: *результат действия на конструкцию нескольких внешних сил, равносильен сумме результатов действия каждой из этих сил в отдельности*.

Пример 2. Принцип независимости действия сил можно проиллюстрировать, рассмотрев перемещение точки A бруса под действием внешних сил P_1 и P_2 (рис.1.10,а).

Перемещение f_A точки A от действия этих сил может быть представлено в виде суммы перемещений

$$f_A = f_1 + f_2,$$

где f_1 и f_2 - перемещения от сил P_1 и P_2 (рис.1.10,б,в)

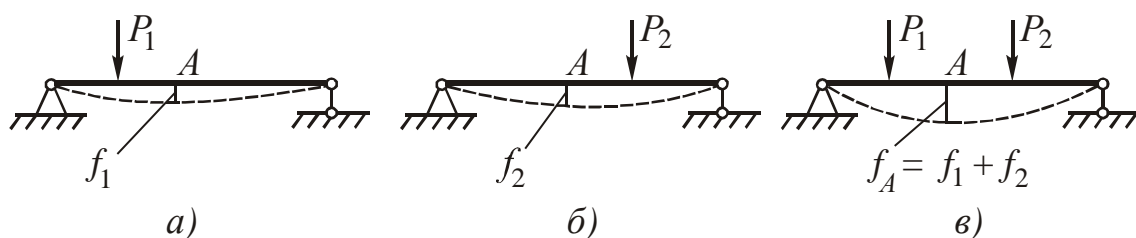


Рис.1.10. Иллюстрация принципа независимости действия сил:

а) f_1 - прогиб в сечении A от действия силы P_1 ; б) f_2 - прогиб в том же сечении от действия силы P_2 ; в) f_A - полный прогиб от совместного действия сил P_1 и P_2

Примечание: первые два принципа справедливы только при соблюдении пропорциональности между перемещениями и внешними силами.

Принцип Сен-Венана утверждает, что замена нагрузки, приложенной к малой части объема тела, статически ей эквивалентной, т.е. имеющей тот же главный вектор и главный момент, вызывает лишь местные деформации.

Применение принципа Сен-Венана позволяет расширить общность основных расчетных формул сопротивления материалов, так как освобождает проектировщика от необходимости учитывать конкретные особенности местного приложения нагрузки.

Сформулированное положение называют также принципом сложения действия сил или принципом суперпозиции.

Под результатом действия сил в зависимости от конкретной задачи могут пониматься перемещение той или иной точки тела, значение внутренней силы упругости и т. п. Подчеркиваем, что, говоря о действии какой-либо силы, всегда имеют в виду эту силу вместе с соответствующими ей реакциями связей.

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

2.1. Внутренние силы. Эпюры продольных сил.

Под растяжением (сжатием) понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы, а прочие силовые факторы равны нулю.

Рассмотрим однородный прямолинейный стержень длиной l и площадью поперечного сечения A , на двух концах которого приложены две равные по величине и противоположно направленные центральные продольные силы P (рис. 2.1, *a*). Поместим начало плоской системы координат yz в центре тяжести левого сечения, а ось z направим вдоль продольной оси стержня.

Для определения величин внутренних усилий воспользуемся методом сечений. Задавая некоторое сечение на расстоянии z ($0 \leq z \leq l$) от начала системы координат и рассматривая равновесие левой относительно заданного сечения части стержня (рис. 2.1, *б*), приходим к следующему уравнению:

$$\sum z=0 \rightarrow P + N_z = 0,$$

откуда следует, что $N_z = P = \text{const}$.

Примем для N_z следующее правило знаков. Если N_z направлена от сечения, т.е. вызывает положительную деформацию (растяжение), то она считается положительной. В обратном случае – отрицательной.

В тех случаях, когда продольные силы в различных поперечных сечениях бруса неодинаковы, закон их измене-

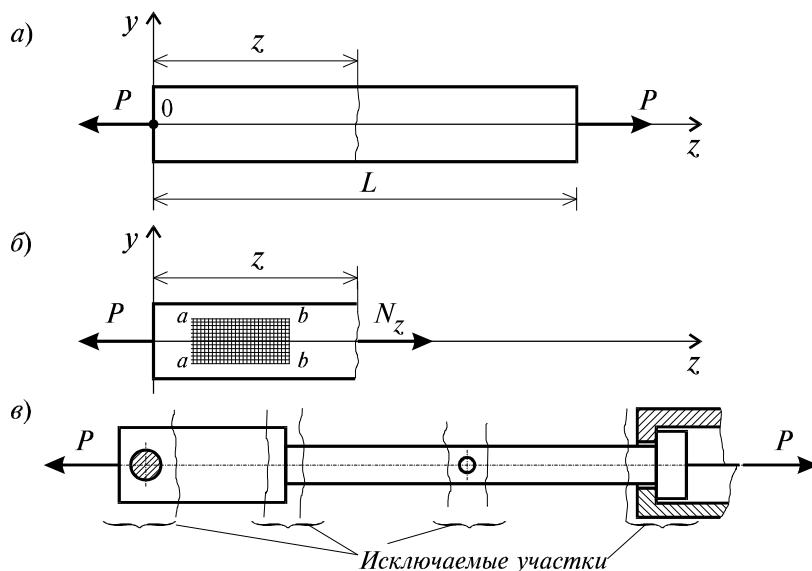


Рис. 2.1

ния по длине бруса удобно представить в виде графика, называемого эпюрой продольных сил. Аргументом при построении этого графика является координата поперечного сечения бруса (z), а функцией — продольная сила (N).

Таким образом, *эюра продольных сил* — это график функции $N = f(z)$. Далеко не всегда можно составить выражение указанной функции, справедливое при всех значениях координаты z (для всего бруса). Приходится разбивать брус на участки, для каждого из которых будет свое выражение функции $N = f(z)$.

Эпюру продольных сил строят в первую очередь для того, чтобы использовать ее при расчете бруса на прочность; она дает возможность найти наибольшие значения продольных сил и положение сечений, в которых они возникают.

Подробно вопросы построения эпюр рассматриваются на практических занятиях.

2.2. Напряжения в поперечных сечениях прямого стержня.

Нормальная сила N_z приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении и, в соответствии с этим, определяется следующим образом:

$$N_z = \int_A \sigma dA.$$

Но из этой формулы нельзя найти закон распределения нормальных σ напряжений в поперечных сечениях стержня. Для этого обратимся к анализу характера его деформирования.

Если на боковую поверхность этого стержня нанести прямоугольную сетку (рис. 2.1, б), то после нагружения поперечные линии $a-a$, $b-b$ и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует *гипотезе плоских сечений*, введенной швейцарским ученым Д. Бернулли, гласящей, что *плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации*.

Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N_z}{A},$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

Высказанное предположение о равномерном распределении внутренних сил в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 2.1, в); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций. Основанием для такого утверждения служит *принцип Сен-Венана*, справедливый для любого типа напряженного состояния и формулируемый следующим образом: *особенности приложения внешних нагрузок проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня.*

2.3. Продольная и поперечная деформации стержня

Рассмотрим однородный стержень с одним концом, жестко заделанным, и другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 2.2). До нагружения стержня его длина равнялась l – после нагружения она стала равной $l + \Delta l$ (рис. 2.2). Величину Δl называют абсолютным удлинением стержня.

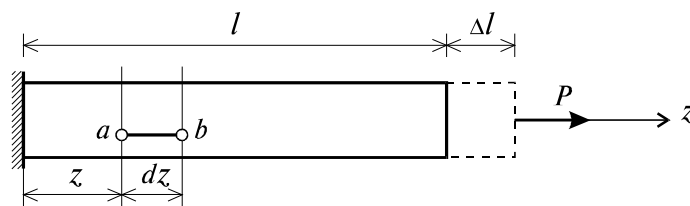


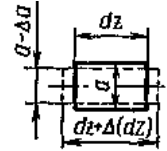
Рис. 2.2

Если в нагруженном стержне напряженное состояние является однородным, т.е. все участки стержня находятся в одинаковых условиях, деформация ϵ остается одной и той же по длине стержня и равной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.1)$$

Если же по длине стержня возникает неоднородное напряженное состояние, то для определения его абсолютного удлинения необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент длиной dz (рис. 2.2).

При растяжении он увеличит свою длину на величину Δdz и его деформация составит:



$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}. \quad (2.2)$$

Отношение изменения Δa размера поперечного сечения к его первоначальному значению называют относительным поперечным сужением (расширением) или поперечной деформацией:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}.$$

2.4. Закон Гука при растяжении. Модуль упругости и коэффициент Пуассона

Для подавляющего большинства конструкционных материалов с достаточной для практики точностью можно считать, что в известных пределах нагружения между продольной деформацией и соответствующим (действующим в ее направлении) нормальным напряжением существует прямо пропорциональная (линейная) зависимость.

Это положение носит название закона Гука и записывается в виде

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (2.3)$$

Коэффициент пропорциональности E называют модулем продольной упругости (другие названия: модуль нормальной упругости; модуль упругости; модуль упругости 1-го рода; *модуль Юнга*). Очевидно, E имеет ту же размерность, что и напряжение, т. е. выражается в Па или МПа.

Следует запомнить, что модуль продольной упругости — физическая постоянная данного материала, характеризующая его жесткость. Чем жестче материал, тем меньше он деформируется при данном напряжении. Для каждого материала модуль продольной упругости колеблется в узких пределах. Например, для стали $E = (1,9...2,15) \times 10^5$ МПа. При этом весьма важно иметь в виду, что значение E для стали практически не зависит от ее химического состава и термической обработки.

Опытным путем установлено, что при осевом растяжении или сжатии отношение поперечной деформации к продольной — величина постоянная для данного материала. Это отношение, взятое по абсолютному значению, называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Значения *коэффициента Пуассона* для различных материалов находятся в пределах от 0 до 0,5. Минимальное значение *коэффициент Пуассона* имеет для пробки ($\mu = 0$); максимальное — для каучука ($\mu \approx 0,5$). Для большинства металлов и сплавов значение коэффициента Пуассона колеблется в сравнительно узких пределах: от 0,23 до 0,35 (в среднем примерно 0,3).

2.5. Перемещения поперечных сечений стержня

Перейдем к вопросу об определении изменения длины (удлинения или укорочения) бруса.

Из совместного рассмотрения уравнений (2.2) и (2.3) получим:

$$\Delta d z = \sigma \frac{d z}{E},$$

откуда с учетом того, что

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \text{ и } \Delta l = \int_0^l \Delta d z,$$

окончательно получим:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA}. \quad (2.4)$$

Если стержень изготовлен из однородного изотропного материала с $E = \text{const}$, имеет постоянное поперечное сечение $F = \text{const}$ и нагружен по концам силой P , то из (2.4) получим

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}. \quad (2.5)$$

При практических расчетах иногда удобно ввести понятие *жесткости бруса* (участка бруса):

$$C = \frac{EA}{l}$$

Жесткость бруса численно равна силе, вызывающей удлинение (или укорочение) бруса, равное единице длины: 1 м или 1 см и т. п.

При расчетах в единицах СИ коэффициент жесткости выражают в ньютонах на метр (Н/м).

Величину, обратную коэффициенту жесткости, называют *коэффициентом податливости*:

$$\beta = \frac{1}{C} = \frac{l}{EA}.$$

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом независимости действия сил, и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t,$$

где α – коэффициент температурного расширения материала; t – перепад температуры тела. Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} + l\alpha t.$$

2.6. Учет собственного веса при расчете массивных колонн

Различают силы: сосредоточенные, представляющие собой взаимодействие двух

тел, соприкасающихся в точке; поверхностные, когда два взаимодействующих тела соприкасаются по некоторой поверхности, и объемные (или массовые), распределенные по всему объему (или массе) тела. К последним относятся силы веса, силы инерции и пр.

Объемная сила веса, называемая объемным весом тела, обозначается γ .

Если тело однородно и представляет собой брус постоянного сечения, то вводят понятие о *погонной равномерной нагрузке* q — весе, отнесенном к единице длины бруса, т. е.

$$q = \frac{Q}{l}$$

где Q — полный вес бруса, а l — его длина.

Обозначим: объемный вес тела — γ [Н/м³], длину бруса — l [м], площадь его поперечного сечения — A [м²], модуль упругости материала бруса — E [Па].

Реакция в заделке равна весу бруса, т. е.

$$R = \gamma Al.$$

Далее используем метод сечений:

1. Разрезаем тело поперечным сечением 1—1.
2. Отбрасываем, нижнюю часть.
3. Заменяем отброшенную часть упругими силами по сечению; их равнодействующая — продольная сила N ; направляем ее в сторону внешней нормали к сечению
4. Уравновешиваем оставшуюся часть бруса.

Для этого пишем условие упругого равновесия $\Sigma Z = 0$. В левую часть этого равенства, кроме сил R и N , войдут и силы веса оставшейся части бруса (направлены вниз). Уравнение упругого равновесия запишется так (ось z направлена вниз):

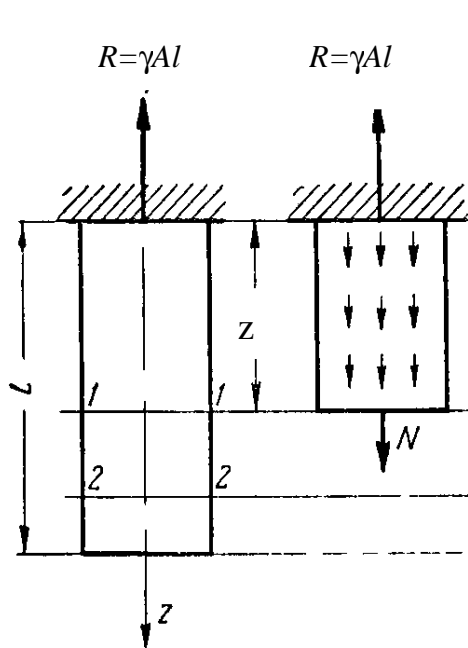


Рис. 2.3.

$$N + \gamma A z - \gamma A l = 0$$

откуда

$$N = \gamma A (l - z) \quad 0 \leq z \leq l$$

В то же время, в любой точке произвольного поперечного сечения напряжение

$$\sigma = \frac{N}{A} = \gamma (l - z)$$

Относительное удлинение бруса тоже величина переменная:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{E} (l - z).$$

Перемещение сечения 1—1 относительно неподвижного (в заделке) не может быть вычислено непосредственно из формулы закона Гука в развернутой форме, так как она получено в предположении, что $\varepsilon = \text{const}$. Необходимо вернуться к рассмотрению элемента бесконечно малой длины dz , деформацию которого можно представить, как

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$$

откуда можно записать

$$\Delta z = \int_0^z \varepsilon dz$$

Тогда

$$\Delta z = \frac{\gamma}{E} \int_0^z (l - z) dz = \frac{\gamma}{E} \left(\int_0^z l dz - \int_0^z z dz \right) = \frac{\gamma}{E} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right).$$

Полное удлинение бруса (при $z = l$)

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E} \tag{2.6}$$

Это выражение можно записать иначе (умножив числитель и знаменатель (2.6) на A), а так как $Q = \gamma A l$, то

$$\Delta l = \frac{Ql}{2EA}$$

Полученная формула показывает, что для вычисления полного удлинения можно воспользоваться формулой закона Гука в развернутой форме, где сила P соответствует в нашем случае весу бруса Q , но при этом результат уменьшается вдвое.

Это равносильно тому, что сила веса рассматривается как сосредоточенная в центре тяжести бруса и вычисляется удлинение от этой силы (на длине $l/2$)

2.7. Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к упругому телу и вызывающие изменение геометрии тела, совершают работу A на соответствующих перемещениях. Одновременно с этим в упругом теле накапливается потенциальная энергия его деформирования U . При действии динамических внешних нагрузок часть работы внешних сил превращается в кинетическую энергию движения частиц тела K . Приняв энергетическое состояние системы до момента действия данных сил равным нулю, и в условиях отсутствия рассеивания энергии, уравнение баланса энергии можно записать в следующем виде:

$$A = U + K.$$

При действии статических нагрузок $K = 0$, следовательно,

$$A = U.$$

Это означает, что при статическом нагружении работа внешних сил полностью преобразуется в потенциальную энергию деформации. При разгрузке тела производится работа за счет потенциальной энергии деформации, накопленной телом. Таким образом, упругое тело является аккумулятором энергии. Это свойство упругого тела широко используется в технике, например, в заводных пружинах часовых механизмов, в амортизирующих рессорах и др. В случае простого растяжения (сжатия) для вывода необходимых расчетных зависимостей потенциальной энергии деформации рассмотрим решение следующей задачи.

На рис. 2.4, а изображен растягиваемый силой P стержень, удлинение которого соответствует отрезку Δl , ниже показан график изменения величины удлинения

стержня Δl в зависимости от силы P (рис. 2.4, б). В соответствии с законом Гука этот график носит линейный характер.

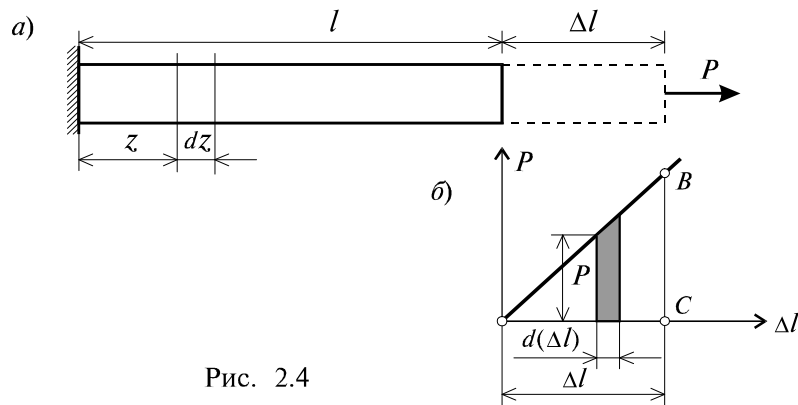


Рис. 2.4

Пусть некоторому значению силы P соответствует удлинение стержня Δl . Дадим некоторое приращение силе ΔP – соответствующее приращение удлинения составит $d(\Delta l)$. Тогда элементарная работа на этом приращении удлинения составит:

$$dA = (P + dP) \cdot d(\Delta l) = P \cdot d(\Delta l) + dP \cdot d(\Delta l),$$

вторым слагаемым, в силу его малости, можно пренебречь, и тогда

$$dA = P \cdot d(\Delta l).$$

Полная работа равна сумме элементарных работ, тогда, при линейной зависимости “нагрузка – перемещение”, работа внешней силы P на перемещении Δl будет равна площади треугольника OCB (рис. 2.4), т.е.

$$A = 0,5 P \cdot \Delta l. \quad (2.7)$$

В свою очередь, когда напряжения σ и деформации ε распределены по объему тела V равномерно (как в рассматриваемом случае) потенциальную энергию деформирования стержня можно записать в виде:

$$U = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon.$$

Поскольку, в данном случае имеем, что $V = Al$, $P = \sigma A$ и $\sigma = E\varepsilon$, то

$$U = Al \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = 0,5AlE\varepsilon^2 = 0,5E\varepsilon A\varepsilon l = 0,5\sigma A\Delta l = 0,5P\Delta l, \quad (2.8)$$

т.е. подтверждена справедливость (2.7).

С учетом (2.5) для однородного стержня с постоянным поперечным сечением и при $P = \text{const}$ из (2.8) получим:

$$U = \frac{P^2 l}{2EA}. \quad (2.9)$$

2.8. Опытное изучение механических свойств материалов

Конструктор, выбирая материал для проектируемой детали, а затем рассчитывая ее на прочность (жесткость, устойчивость), должен располагать данными о механических свойствах материала, т. е. его прочности, пластичности и т. п., а также знать значения упругих постоянных — модуля продольной упругости E и коэффициента Пуассона μ .

Основные механические характеристики, определяемые при испытаниях материалов:

- *Прочность* — способность материала, не разрушаясь, воспринимать внешние механические воздействия.
- *Пластичность* — способность материала давать значительные остаточные деформации, не разрушаясь.
- *Упругость* — способность материала восстанавливать после снятия нагрузок свои первоначальные формы и размеры.
- *Твердость* - способность материала сопротивляться проникновению в него другого тела, практически не получающего остаточных деформаций.

Характер нагружения (статическое, динамическое, повторно-переменное) и условия работы деталей машин и инженерных сооружений весьма разнообразны. Располагая сведениями о свойствах материала при определенном виде деформации (например, растяжении) и характере нагружения (например, статическом), судить о его свойствах при других условиях можно лишь весьма приближенно, что в ряде случаев недопустимо. Поэтому механические испытания материалов отличаются большим разнообразием.

По характеру нагружения различают испытания статические, динамические и испытания на усталость (при переменных напряжениях).

По виду деформации различают испытания на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб. Реже проводят испытания при сложном нагружении, например, на совместное действие изгиба и кручения.

Большинство испытаний проводится при нормальной (комнатной) температуре, но для деталей паровых котлов, турбин, реактивных двигателей и т. п. необходимо знать их свойства при высоких температурах.

В некоторых случаях возникает необходимость в испытаниях конструкционных материалов при низких температурах.

Механические испытания проводят на образцах, формы и размеры которых установлены ГОСТами или техническими условиями.

За последние годы широкое распространение получили натурные испытания отдельных деталей и узлов машин. В зависимости от целей испытания деталь (узел) либо доводится до разрушения, либо исследуется напряженное состояние в отдельных ее точках при заданных нагрузках. В этом случае для измерения деформаций широко применяется электротензометрия.

В случаях, когда теоретическое определение напряжений недостаточно надежно или вообще невозможно, изготавливают модель рассчитываемого объекта из специального оптически активного материала, нагружают ее и освещают поляризованным светом. Изображение модели с помощью специальной оптической установки проецируется на экран. Это изображение оказывается покрытым системой полос, анализируя расположение и окраску которых можно определить напряжения в модели.

Механические испытания имеют большое значение не только для расчета на прочность, но и для контроля качества материала или выпускаемых изделий. При этом испытаниям могут подвергаться как специально изготовленные образцы, так и сами изделия (детали или узлы).

Широко применяют механические испытания и в процессе создания новых конструкционных материалов, которые должны обладать определенными механическими свойствами.

Помимо испытаний, при которых определяют механические характеристики, важное значение имеют различные технологические испытания (пробы), выявляющие соответствие свойств металла тому или иному технологическому процес-

су, например испытание листовой латуни на выдавливание с целью определения ее пригодности для изготовления деталей холодной штамповкой.

Наиболее распространенным является испытание на растяжение статической нагрузкой. Его достоинства — сравнительная простота оборудования и методики эксперимента по сравнению

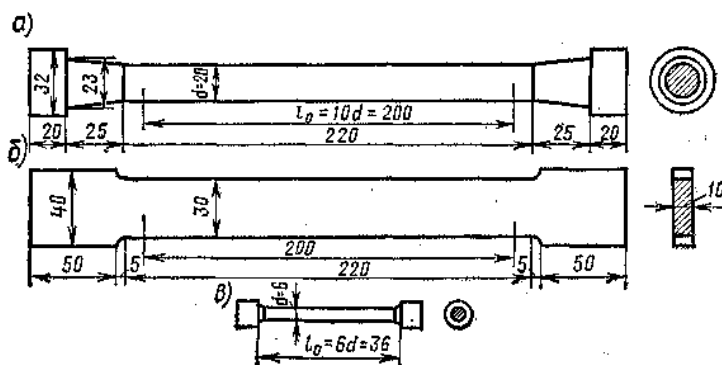


Рис. 2.5

с большинством других испытаний, а также однородность напряженного состояния образца в области, достаточно удаленной от головок (формы и размеры стандартных цилиндрических образцов показаны на рис. 2.5, а; призматических – на рис 2.5, б.) ГОСТ допускает также проводить испытания укороченных образцов (рис. 2.5, в). Однородность (т. е. тождественность для всех точек тела) напряженного состояния позволяет легче обнаружить начало общей пластической деформации образца, что очень важно для определения соответствующих механических характеристик.

Испытания проводят на разрывных или универсальных машинах с механическим или гидравлическим силообразованием. На рис. 2.6 показан схематичный вид одной из машин с гидравлическим приводом.

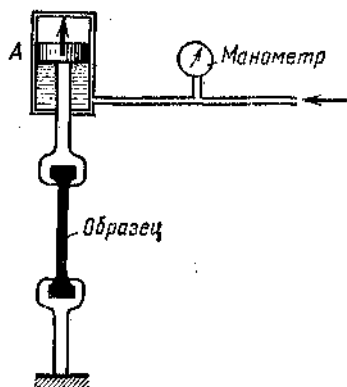


Рис. 2.6.

В цилиндр *А* нагнетается масло, которое поднимает поршень и растягивает образец. Величину растягивающей силы можно определить по давлению, измеренному манометром.

Для количественной оценки основных свойств материалов, как правило, экспериментально определяют диаграмму растяжения в координатах σ и ϵ (рис. 2.7). На диаграмме отмечены характерные точки. Дадим их определение.

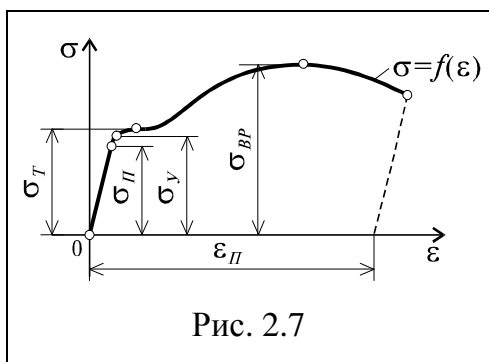


Рис. 2.7

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется *пределом пропорциональности* σ_{Π} . В пределах закона Гука тангенс угла наклона прямой $\sigma = f(\epsilon)$ к оси ϵ определяется величиной E .

Упругие свойства материала сохраняются до напряжения $\sigma_{у}$, называемого *пределом упругости*. Под пределом упругости $\sigma_{у}$ понимается такое наибольшее напряжение, до которого материал не получает остаточных деформаций, т.е. после полной разгрузки последняя точка диаграммы совпадает с начальной точкой 0.

Величина σ_T называется *пределом текучести* материала. Под пределом текучести понимается то напряжение, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки. Если необходимо различать предел текучести при растяжении и сжатии σ_T соответственно заменяется на σ_{TR} и $\sigma_{ТС}$. При напряжениях больших σ_T в теле конструкции развиваются пластические деформации ϵ_{Π} , которые не исчезают при снятии нагрузки.

Отношение максимальной силы, которую способен выдержать образец, к его начальной площади поперечного сечения носит название предела прочности, или временного сопротивления, и обозначается через, σ_{BP} (при сжатии σ_{BC}).

В табл. 2 приводятся значения указанных характеристик (в кН/м^2) наиболее распространенных конструкционных материалов.

Таблица 2

Материал	σ_{TR}	$\sigma_{ТС}$	σ_{BP}	σ_{BC}	$E \cdot 10^{-8}$
Сталь	250000	250000	390000	–	2
Чугун	140000	310000	150000	640000	0.7
Медь	250000	250000	320000	–	1.1
Алюминий	50000	50000	840000	–	0.75

При выполнении практических расчетов реальную диаграмму (рис. 2.7) упрощают, и с этой целью применяются различные аппроксимирующие диаграммы. Для решения задач с учетом *упруго-пластических* свойств материалов кон-

струкций чаще всего применяется *диаграмма Прандтля*. По этой диаграмме напряжение изменяется от нуля до предела текучести по закону Гука $\sigma = E \epsilon$, а далее при росте ϵ , $\sigma = \sigma_T$ (рис. 2.8).

Способность материалов получать остаточные деформации носит название *пластичности*. На рис. 2.7 была представлена характерная диаграмма для пластических материалов.

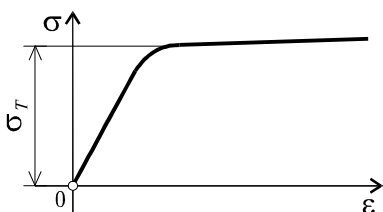


Рис. 2.7

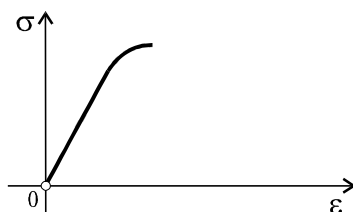


Рис. 2.8

Противоположным свойству пластичности является свойство *хрупкости*, т.е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Материал, обладающий этим свойством, называется *хрупким*. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая сталь, стекло, кирпич, бетон, природные камни.

Повышение условного предела текучести при повторных нагружениях (наклеп)

Если при нагружении образца не был превышен предел упругости, то при разгрузке все деформации полностью исчезнут и при повторном нагружении этот образец будет себя вести так же, как и при первом нагружении.

Если же образец был нагружен до напряжения, большего предела упругости, например до напряжения, соответствующего точке *K* диаграммы на рис. 2.9, то разгрузка пойдет по прямой *KL*, параллельной линии *OA*. Упругая часть деформации (отрезок *LM*) исчезнет, пластическая же часть деформации (отрезок *OL*) останется.

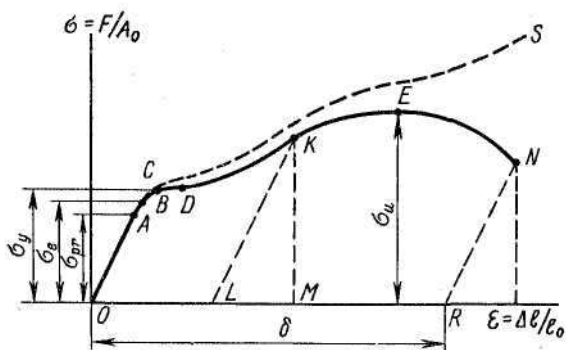


Рис.2.9.

Если материал нагружать снова, то диаграмма пойдет по прямой *LK* до самой точки *K*. Остаточное удлинение при разрыве бу-

дет измеряться величиной отрезка LR , т. е. иметь меньшую величину, чем при первичном однократном нагружении до разрыва. Следовательно, при повторных нагружениях образца, предварительно растянутого до возникновения в нем напряжений, больших предела текучести, предел пропорциональности повышается до того уровня, которого достигли напряжения при предшествующей нагрузке. Если между разгрузкой и повторным нагружением был перерыв, то предел пропорциональности повышается еще больше. Следует отметить, что диаграмма $LKEN$, получаемая при повторном нагружении, не имеет площадки текучести, поэтому для образца, претерпевшего разгрузку и повторное нагружение, определяется условный предел текучести, который, очевидно, выше предела текучести при первичном нагружении. В указанном смысле можно говорить о повышении предела текучести при повторном нагружении.

*Явление повышения предела пропорциональности и снижения пластичности материала при повторных нагружениях называется **наклепом**.*

Наклеп во многих случаях является нежелательным явлением, так как наклепанный металл становится более хрупким. Однако в целом ряде других случаев наклеп полезен и его создают искусственно, например, в деталях, подвергающихся воздействию переменных нагрузок.

Влияние различных факторов на механические свойства материалов

Влияние времени на деформацию. Последействие. Ползучесть. Релаксация

Опыты показывают, что деформация под нагрузкой проявляется не сразу, а в течение определенного периода времени.

Если при напряжениях, соответствующих точке S (рис. 2.10), прекратить нагружение и оставить образец на некоторое время под нагрузкой, то деформация будет расти (отрезок ST), причем вначале быстрее, а затем медленнее. При разгрузке часть деформации, соответствующая отрезку GI , исчезнет почти мгновенно, другая часть деформации, изображаемая отрезком OG , исчезнет не сразу, а спустя некоторое время.

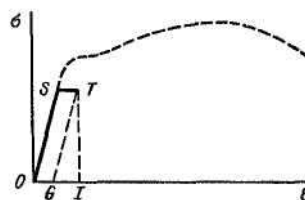


Рис. 2.10

Это явление изменения упругих деформаций во времени называют **упругим последействием**. Чем однороднее материал, тем меньше упругое последействие. Для тугоплавких материалов при обычных температурах оно настолько невелико, что его можно не учитывать. Наоборот, в материалах органического происхождения упругое последействие велико и с ним нельзя не считаться.

Влияние температуры.

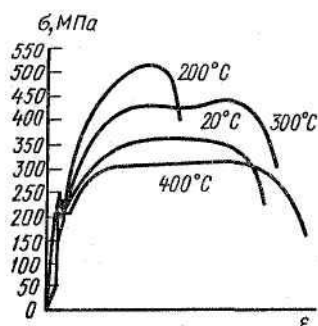


Рис. 2.11

Опыты показывают, что свойства материалов зависят от температуры. На рис. 2.11 представлено несколько диаграмм растяжения малоуглеродистой стали при разных температурах.

Из представленных графиков видно, что до температуры 300°C временное сопротивление стали повышается (на 20—30%), а при дальнейшем повышении температуры резко снижается.

Сравнение диаграмм растяжения для различных материалов

Рассмотрим диаграммы растяжения некоторых других материалов. На рис. 2.12 для сравнения показаны диаграммы для сталей Ст. 3,

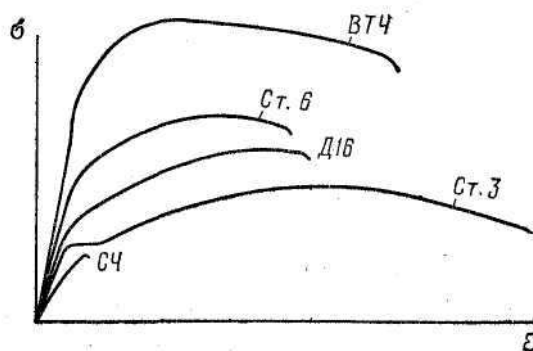


Рис.2.12

Ст. 6, серого чугуна (СЧ), алюминиевых (Д16) и титановых (VT4) сплавов. Сталь Ст. 6 по сравнению со сталью Ст. 3 обладает значительно более высокими характеристиками прочности. Площадка текучести у высокопрочных сталей, как правило, отсутствует или имеет очень малую протяженность. У образцов из стали Ст. 6 при

разрыве шейки не столь ярко выражена, как у стали Ст. 3. Остаточная деформация при разрыве стали Ст. 6 (§» 13—15%) значительно меньше, чем у стали Ст. 3.

Диаграмма растяжения чугуна вообще не имеет прямого участка, она искривляется уже в самом начале. Чугун, строго говоря, вообще не подчиняется закону Гука. Для определения условного модуля упругости чугуна эту диаграмму спрямляют, заменяя кривую на участке применяемых на практике напряжений хордой. Диаграмма растяжения чугуна обрывается сразу после достижения предела прочности. Разрыв чугунного образца происходит без образования шейки при малых остаточных деформациях.

В зависимости от характеристик прочности и пластичности, а также характера разрушения все материалы делятся на две группы: пластичные и хрупкие.

П л а с т и ч н ы е материалы (некоторые стали, медь, алюминиевые и титановые сплавы) имеют диаграммы растяжения, подобные диаграмме мягкой стали (но без площадки текучести), и аналогичную форму разрушения образцов.

Х р у п к и е материалы (бетон, кирпич) имеют диаграммы растяжения, подобные диаграмме чугуна, и сходную форму разрушения.

Деление материалов на пластичные и хрупкие носит условный характер, так как при некоторых условиях хрупкие материалы получают пластические свойства (например, стекло при большом всестороннем сжатии приобретает свойства пластичного материала и разрушается как пластичный материал) и, наоборот, пластичные материалы приобретают хрупкие свойства (например, образец из пластичной стали при низкой температуре разрушается без образования шейки как хрупкий материал).

Поэтому правильнее говорить не о пластичных и хрупких материалах, а об их пластическом и хрупком разрушении.

Истинная диаграмма растяжения

Все рассмотренные выше диаграммы растяжения являются условными, так как при их построении на осях координат откладывают, условные нормальные напряжения $\sigma = N / A_0$ и условные деформации $\varepsilon = \Delta l / l_0$, где A_0 и l_0 — первоначальная площадь и расчетная длина образца.

В действительности площадь поперечного сечения в процессе деформации изменяется. Особенно сильные изменения происходят при образовании шейки.

Истинное напряжение представляет собой отношение нагрузки к истинной площади поперечного сечения, оно определяется по формуле

$$\sigma_u = N / A_u$$

Естественно, что в процессе образования шейки истинные напряжения по длине образца различны, так как поперечное сечение в шейке отличается от поперечных сечений в других местах.

Точно так же деформация ε образца после начала образования шейки не распределяется равномерно по расчетной длине образца, а концентрируется около шейки.

Истинная деформация в наиболее узкой части шейки, измеренная на бесконечно малом отрезке длины dl , равна

$$\varepsilon_u = \frac{\Delta dl}{dl}.$$

Но непосредственно измерять удлинение Δdl бесконечно малого отрезка образца невозможно. Покажем, что для определения истинной относительной деформации достаточно определить относительное сужение площади поперечного сечения:

$$\psi = \frac{A_0 - A_u}{A_0} = 1 - \frac{A_u}{A_0},$$

отсюда

$$A_u = A_0(1 - \psi)$$

Объем бесконечно малого элемента образца в этом месте равен:

до деформации - $dV_0 = A_0 dl$,

после деформации - $dV_1 = A_u (dl + \Delta dl)$

Тогда, Подставляя значения A_u и Δdl , получим

$$dV_1 = A_0(1 - \psi)dl(1 + \varepsilon_u).$$

Экспериментально и теоретически доказано, что при пластических деформациях (в пределах площадки текучести) объем образца не изменяется. Поэтому, пренебрегая упругими деформациями в шейке, величину ε_u можно найти из условия постоянства объема до и после деформаций. Имеем $dV_0 = dV_1$. Тогда,

подставляя значения dV_0 и dV_1 получим

$$A_0 dl = A_0(1 - \psi) dl(1 + \epsilon_u),$$

или

$$1 = 1 + \epsilon_u - \psi - \psi \epsilon_u$$

откуда

$$\epsilon_u = \frac{\psi}{1 - \psi}.$$

Истинная относительная деформация при разрыве значительно больше условной. Например, для малоуглеродистой стали условная деформация составляет 21—23%, а истинная — 100—200% ($\psi = 50—65\%$). На рис. 2.13 для сравнения изображены условная и истинная диаграммы растяжения малоуглеродистой стали.

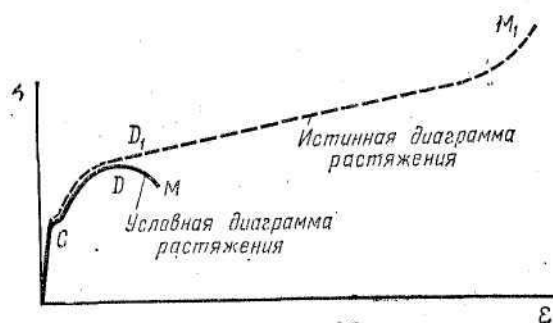


Рис. 2.13

Истинная диаграмма на всем протяжении проходит выше условной диаграммы.

В начальной стадии истинная и условная диаграммы практически совпадают. Заметное расхождение в диаграммах появляется после предела прочности.

В заключение отметим, что при решении практических задач, как правило, приходится иметь дело с напряжениями, не превышающими предела текучести. Поэтому истинная диаграмма имеет в основном теоретический интерес и в строительной инженерной практике обычно не применяется.

Диаграмма сжатия; особенности разрушения при сжатии

Для изучения «поведения» материалов при сжатии строятся диаграммы сжатия.

Испытания металлов на сжатие производят на образцах в виде цилиндров, высота которых равна их диаметру (обычной — $h = 20$ мм, а для автоматических испытательных машин $d = h = 6$ мм). Для других материалов применяют образцы в виде кубиков (стороны кубиков принимаются равными:

$a = 50$ мм для дерева, 70 мм для цемента и 200 или 300 мм для бетона).

Рассмотрим диаграммы сжатия стали и чугуна. Для наглядности изобразим их на одном рисунке с диаграммами растяжения этих материалов (рис. 2.14). В первой четверти изображены диаграммы растяжения, а в третьей — сжатия.

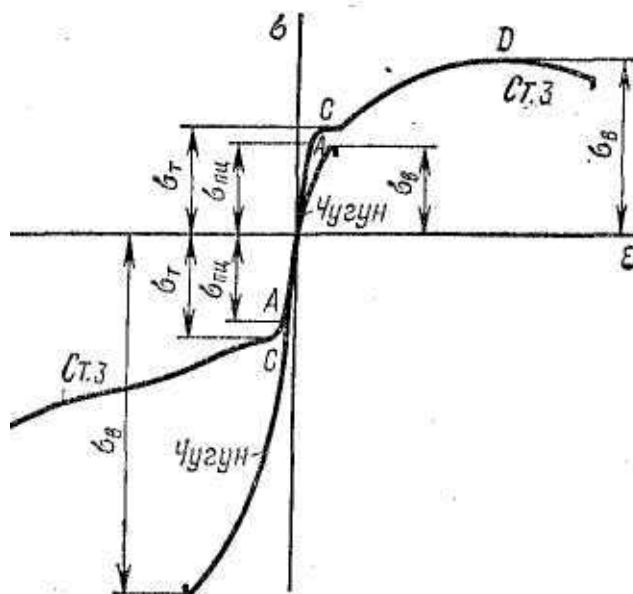


Рис. 2.14.

В начале загрузки диаграмма напряжений при сжатии малоуглеродистой пластической стали Ст. 3, так же как и диаграмма растяжения, представляет собой наклонную прямую, потом диаграмма закругляется и переходит в участок с небольшим наклоном к горизонтали — участок текучести. При сжатии площадка текучести не получается столь ярко выраженной, как при растяжении.

Пределы пропорциональности, упругости и текучести для стали при сжатии приблизительно такие же, как и при растяжении. Углы наклона прямолинейных участков диаграммы при растяжении и при сжатии одинаковы, значит, равны и модули упругости.

Стальной образец (рис. 2.15, а) при сжатии укорачивается, а поперечные размеры его увеличиваются, особенно в средней части.

По концам образца поперечные деформации затруднены наличием трения в местах соприкосновения с плоскостями

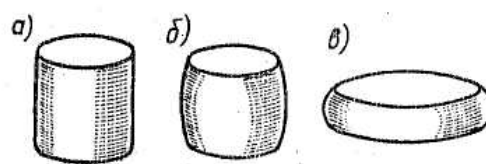


Рис. 2.15

испытательной машины, поэтому при сжатии цилиндр приобретает форму бочонка (рис. 2.15, б). При дальнейшем нагружении образец постепенно расплющивается (рис. 2.15, в), но разрушить его не удастся, поэтому предел прочности установить нельзя.

Условно принимают при сжатии такой же предел прочности, как при растяжении.

Образцы из других пластических металлов (медь, алюминий) при сжатии деформируются так же, как стальные образцы, и имеют аналогичную диаграмму напряжений при сжатии.

Диаграмма сжатия чугуна по форме похожа на диаграмму растяжения чугуна. Эти диаграммы искривляются уже с самого начала и по достижении наибольшей нагрузки резко обрываются (рис.

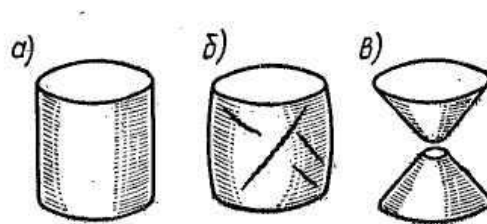


Рис. 2.16

2.16). Однако ординаты диаграммы напряжений при сжатии в несколько раз больше, чем при растяжении. Предел прочности на сжатие чугуна $\sigma_c = 500—1500$ МПа, т. е. в 4—5 раз больше, чем при растяжении. Таким образом, чугун работает на сжатие значительно лучше, чем на растяжение. При сжатии чугунного образца (рис. 2.16, а) продольные деформации его незначительны. Образец несколько выпучивается в средней части, принимая слегка бочкообразную форму, после чего в нем появляются трещины под углом примерно 45° к оси по площадкам с наибольшими касательными напряжениями (рис. 2.16, б). В это время нагрузка резко падает и диаграмма обрывается. В момент разрушения боковые части образца отделяются и он принимает вид двух усеченных конусов (рис. 2.16, в).

Большинство хрупких материалов (бетон, камень) разрушается при сжатии так же, как чугун, и имеет аналогичную диаграмму сжатия. Предел прочности этих материалов на сжатие значительно больше, чем на растяжение (для бетона примерно в 20 раз). Все хрупкие материалы плохо работают на растяжение (поэтому в растянутых зонах бетонных конструкций закладывают стальные прутья – арматуру, воспринимающую растягивающие усилия).

При раздавливании бетонных или цементных кубиков они принимают вид

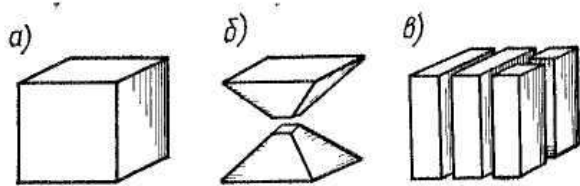


Рис. 2.17

двух усеченных пирамид; на рис. 2.17, а, б показан бетонный кубик до и после разрушения. Если исключить влияние трения между сжимаемым бетонным кубиком и плоскостями машины,

например, смазать эти плоскости парафином, то бетонный кубик разрушается по плоскостям, параллельным действующему усилию (рис. 2.17, в). Так как в горизонтальном направлении напряжения отсутствуют, то объяснить такой характер разрушения можно только в результате специального изучения этого вопроса.

При испытании дерева на сжатие приходится учитывать, что дерево — материал анизотропный и по-разному работает вдоль и поперек волокон. Диаграммы напряжений при сжатии дерева вдоль (кривая 1) и поперек (кривая 2) волокон показаны на рис. 2.18.

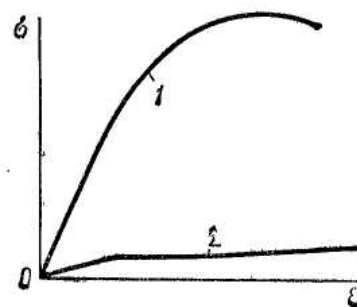


Рис.2.18.

Многие породы дерева при сжатии вдоль волокон выдерживают значительные напряжения, например, предел прочности сосны достигает 40—80 МПа. В этом случае разрушение древесины происходит при сдвиге одной части кубика по другой (рис. 2.19, а). При сжатии дерева поперек волокон древесина не разрушается, а сильно прессуется (рис. 2.19, б).

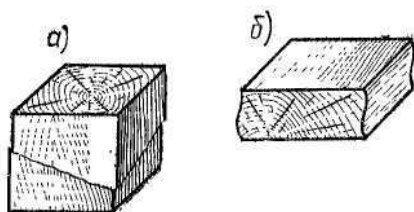


Рис. 2.19

Эффект Баушингера.

Большой интерес представляет поведение образца, достигшего пластических деформаций при растяжении, который подвергается разгрузке и затем, сжатию (или

наоборот). Рассмотрим диаграмму напряжений при растяжении и сжатии стали (рис. 2.20). Если начиная от некоторой точки K диаграммы растяжения разгружать образец, то диаграмма пойдет по прямой KK_1 и материал образца приобретет наклеп. При последующем сжатии диаграмма пойдет по кривой $A_2C_2D_2$, которая располагается выше диаграммы сжатия образца, не подвергавшегося наклепу $OA_1C_1D_1$, и почти параллельно последней.

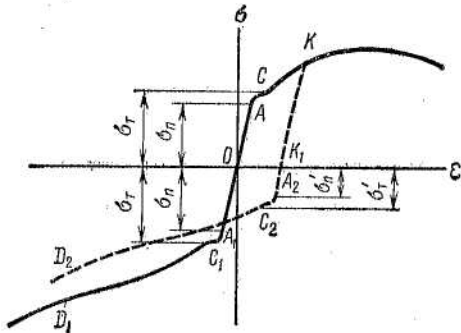


Рис. 2.20

До наклепа пределы пропорциональности и пределы текучести при растяжении и сжатии были примерно одинаковы. После наклепа растяжением пределы пропорциональности и текучести при сжатии уменьшились, т. е. если после наклепа подвергнуть материал деформации противоположного знака, то пределы пропорциональности и текучести уменьшатся. Это явление называется *эффектом Баушингера* по имени ученого, впервые его описавшего.

До наклепа пределы пропорциональности и пределы текучести при растяжении и сжатии были примерно одинаковы. После наклепа растяжением пределы пропорциональности и текучести при сжатии уменьшились, т. е. если после наклепа подвергнуть материал деформации противоположного знака, то пределы пропорциональности и текучести уменьшатся. Это явление называется *эффектом Баушингера* по имени ученого, впервые его описавшего.

эти пределы пропорциональности и текучести при сжатии уменьшились, т. е. если после наклепа подвергнуть материал деформации противоположного знака, то пределы пропорциональности и текучести уменьшатся. Это явление называется *эффектом Баушингера* по имени ученого, впервые его описавшего.

2.10. Условия прочности и жесткости. Типы задач, решаемых на их основе.

Вопрос о том, как назначить размеры стержня, чтобы он мог надежно и долговечно сопротивляться заданной нагрузке является одним из главных вопросов сопротивления материалов. Сложность его решения объясняется необходимостью экономии строительного материала при полной гарантии прочности конструкции.

В практике приходится решать три типа задач:

1. **Проектировочный расчет**, когда заданы внешние силы, известны свойства материалов стержней и в результате необходимо установить поперечные размеры стержней;
2. В тех случаях, когда размеры стержня заданы, возникает задача об определении **грузоподъемности стержня**, т. е. определении силы, которую стержень может выдержать;

3. Когда заданы и внешние силы и размеры стержней встает вопрос об оценке степени прочности, т.е. вопрос **определения коэффициента запаса прочности** конструкции

Существует три метода решения этих задач:

- 1) расчет по допускаемым напряжениям, согласно которому расчетные напряжения во всех сечениях напряжения, вызываемые нагрузкой, не превышали некоторой допускаемой величины (этот метод до недавнего времени широко применялся в строительном деле и до сих пор применяется в машиностроении);
- 2) расчет по разрушающим нагрузкам, предусматривает определение минимальной нагрузки, которая разрушает сооружение, с тем чтобы сравнить эту нагрузку с предполагаемой для строящегося сооружения;
- 3) расчет по предельным состояниям с использованием нормативных коэффициентов в соответствии со СНиП (строительными нормами и правилами)

1. Метод допускаемых напряжений

По методу допускаемых напряжений требуется, чтобы наибольшее напряжение в стержне не превосходило так называемого допускаемого напряжения, которое обозначается $[\sigma]$. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A_{\text{netto}}} \right| \leq [\sigma]$$

Предполагая, что действующее напряжение равно допускаемому, получим

$$\left| \frac{N}{A_{\text{netto}}} \right| = [\sigma]$$

Из этого уравнения можно решить все три типа задач:

1. определить требуемую площадь при заданной силе (проектировочный расчет)

$$A_{\text{netto}} = \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]}$$

2. допускаемую силу при заданных размерах сечения

$$|N_{\max}| = A_{\text{netto}} [\sigma]$$

3. проверить запас прочности

$$\frac{[\sigma]}{|\sigma_{\max}|} \geq 1.$$

Допускаемые напряжения равны опасным напряжением $\sigma_{\text{оп}}$, деленным на коэффициент запаса прочности n .

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{n}$$

для **хрупких материалов** в качестве опасных принимают напряжения, равные пределу прочности, поэтому

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n_u}$$

для **пластических материалов** — пределу текучести, следовательно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n_y}$$

Очевидно, что обычно принимается, что $n_u > n_y$, так как после появления пластических деформаций стержень еще не разрушается.

Необходимость введения коэффициентов запаса прочности объясняется следующими обстоятельствами:

- а) разбросом в определяемых из опыта величинах σ_y или σ_u для данного материала;
- б) невозможностью точно установить действующие нагрузки;
- в) неточностью принятых методов расчета (например, неучетом местных напряжений);
- г) неточностью изготовления деталей,

Допускаемые напряжения устанавливаются руководящими органами и публикуются в технических условиях и нормах проектирования, которые имеют силу закона и обязательны для всех инженерно-технических работников.

При назначении коэффициентов запаса, а значит и допускаемых, напряжений, кроме перечисленных выше соображений необходимо также учитывать и другие факторы:

1) качество и степень однородности материала. Например, для стали коэффициент запаса принимается $\sim 1,5$, для бетона- ~ 3 , для естественного камня, материала весьма неоднородного, коэффициент запаса принимается ~ 10 ;

2) долговечность и значимость сооружения или машины. Если, например, из одинаковой стали изготавливается постоянный мост со сроком службы 50—70 лет и временный мост со сроком службы 3—5 лет, то, естественно, в последнем случае коэффициент запаса может быть меньше;

С развитием техники повышаются качество изготовления материала и точность обработки деталей, точность расчета. Поэтому со временем коэффициенты запаса уменьшаются, а допускаемые напряжения увеличиваются.

2 . Метод разрушающих нагрузок

Условие прочности при этом методе имеет вид

$$P_{\max} \leq [P] = \frac{P_u}{n}$$

здесь обозначено

$[P]$ – допускаемая нагрузка которая равна разрушающей (предельной) нагрузке, деленной на некоторый коэффициент $n > 1$, который называется *коэффициентом запаса прочности*. **Коэффициент запаса n** принимается на основе целого ряда соображений, главные из которых степень ответственности и долговечность сооружения.

Для определения разрушающей нагрузки в конструкциях из материалов, обладающих пластичностью принимается упрощенная диаграмма растяжения (сжатия), показанная на рис. 2.8 , в которой площадка текучести распространяется безгранично (диаграмма Прандтля).

В этом случае при центральном растяжении или сжатии разрушающая сила определяется равенством

$$P_u = \int_F \sigma_y dA$$

Для хрупких материалов вместо предела текучести надо взять предел прочности

$$P_u = \sigma_u A$$

В статически неопределимых системах из пластичных материалов появление текучести только в одном наиболее нагруженном элементе еще не приводит систему к разрушению. Для полного разрушения конструкции необходимо, чтобы текучесть появилась во всех стержнях.

В случае расчета конструкции на жесткость необходимо удовлетворять условию

$$u \leq [u],$$

где u и $[u]$ – расчетное и предельно допустимое значения перемещения.

Метод предельных состояний.

Одним коэффициентом запаса трудно учесть многочисленные факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в разных сочетаниях.

Для более полного учета влияния различных факторов строительные конструкции в настоящее время рассчитываются по более прогрессивному методу предельных состояний.

Предельным состоянием называется такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять заданным эксплуатационным требованиям.

Метод расчета по предельным состояниям имеет целью не допускать наступления предельных состояний эксплуатации и возведения конструкций.

Строительные нормы и правила (СНиП) разделяют предельные состояния на две группы.

Первая группа — по потере несущей способности (вследствие разрушения) или непригодности к эксплуатации (вследствие текучести материала, сдвигов в соединениях и других факторов).

Вторая группа — по непригодности к нормальной (без ограничений) **эксплуатации** (вследствие недопустимых перемещений, колебаний и трещин).

Классификация предельных состояний принята по признаку их ответственности по степени потери эксплуатационной способности.

Как правило, расчет конструкций проводится по первой группе предельных состояний вследствие потери несущей способности. При этом проверка прочности производится по формуле расчетного напряжения

$$\sigma_{\text{рас}} = \frac{|N|}{A} \leq R$$

Здесь R — расчетное сопротивление материала — сопротивление, принимаемое как

$$R = \frac{R_n}{k}$$

где R_n — нормативное сопротивление материала, устанавливаемое Нормами проектирования с учетом условий контроля и статистической изменчивости. Величина нормативного сопротивления обычно равна пределу текучести или пределу прочности, устанавливаемым государственным стандартом;

k — коэффициент безопасности по материалу (принимаемый не менее 1,1), учитывающий возможные отклонения сопротивления материала от нормативного.

N — расчетное усилие, принимаемое при расчете элементов конструкции следующим образом

$$N = N_{1n} n_1 + N_{2n} n_2 + \dots$$

где $N_{1n}, N_{2n}, N_{3n}, \dots$ — усилия, возникающие в элементах конструкции от различных видов нормативных нагрузок, устанавливаемых нормами проектирования;

n_1, n_2, \dots — коэффициенты перегрузки, учитывающие случайные отклонения нагрузок от нормативных значений вследствие изменчивости нагрузок или отступлений от условий нормальной эксплуатации. Значения коэффициентов перегрузки устанавливаются нормами проектирования для каждого вида предельного состояния с учетом значимости сооружений и условий их эксплуатации;

A — геометрическая характеристика сечения (при растяжении и сжатии — площадь сечения).

При необходимости расчетные сопротивления еще уменьшаются путем введения коэффициентов условий работы m , учитывающих особенности работы материала и конструкции, не отраженные в расчете прямым путем (например, приближенность расчетной схемы и предпосылок расчета, температура, влажность и агрессивность среды и пр.) и коэффициентов надежности k , учитывающих степень

ответственности и капитальности конструкции и значимости наступления данного предельного состояния.

2.10. Понятие о расчете статически неопределимых стержневых систем, элементы которых работают в условиях осевого растяжения (сжатия).

Если при рассмотрении заданной системы, находящейся в равновесном состоянии от действия заданных внешних нагрузок, все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в ее элементах, можно определить только по методу сечений, без использования дополнительных условий, то такая система называется *статически определимой*.

В реальной практике встречаются такие конструкции при расчете которых одних лишь уравнений равновесия оказывается недостаточно, в связи с чем требуется формулирование дополнительных уравнений, связанных с условиями деформирования конструкции.

Системы, в которых количество наложенных связей больше, нежели число независимых уравнений равновесия, называются *статически неопределимыми*.

По сравнению со статически определимыми системами, в статически неопределимых системах имеются дополнительные связи, которые называются *лишними*.

Термин “лишние связи” является условным. Эти связи являются лишними с точки зрения расчетных предпосылок. В действительности эти связи создают дополнительные резервы для конструкций, как в плане обеспечения её жесткости, так и прочности.

На рис. 2.21, а изображен кронштейн, состоящий из двух стержней, шарнирно скрепленных между собой. В связи с тем, что на конструкцию действует лишь вертикальное усилие P , а система является плоской (т.е. все элементы конструкции и вектор внешних сил лежат в одной плоскости), получается, что усилия в стержнях легко определяются из условий равновесия узла A , т.е.

$$\sum x = 0, \quad \sum y = 0.$$

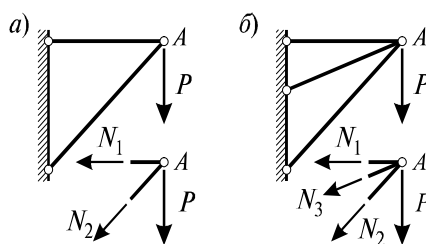


Рис. 2.21

Раскрывая эти уравнения, получаем замкнутую систему линейных уравнений относительно неизвестных усилий N_1 и N_2 , в которой количество уравнений равно количеству неизвестных:

$$-N_1 - N_2 \sin \alpha = 0; \quad -N_2 \cos \alpha - P = 0.$$

Если конструкцию кронштейна усложнить, добавив еще один стержень (рис. 2.10, б), то усилия в стержнях N_1 , N_2 и N_3 прежним способом определить уже не удастся, т.к. при тех же двух уравнениях равновесия имеются уже три неизвестных усилия в стержнях. В таких случаях говорят, что система один раз статически неопределима. Разность между числом неизвестных усилий и количеством независимых (значащих) уравнений равновесия, связывающих эти усилия, называется *степенью статической неопределимости* рассматриваемой системы.

В общем случае под n -раз статически неопределимой системой понимается система, в которой число неизвестных внешних опорных реакций и внутренних усилий превышает число независимых и значащих уравнений равновесия на n единиц.

2.11. Напряженное и деформированное состояние при растяжении и сжатии

Рассмотрим более подробно особенности напряженного состояния, возникающего в однородном растянутом стержне. Определим напряжения, возникающие на некоторой наклонной площадке, составляющей угол α с плоскостью нормального сечения (рис. 2.22, а).

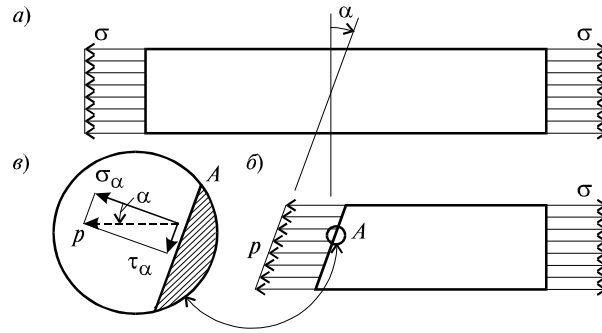


Рис. 2.12

Из условия $\sum Z = 0$, записанного для отсеченной части стержня (рис. 2.12, б), получим:

$$p F_{\alpha} = \sigma A,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня, $A_{\alpha} = A/\cos \alpha$ – площадь наклонного сечения. Тогда легко установить:

$$p = \sigma \cos \alpha.$$

Раскладывая напряжение p по нормали и касательной к наклонной площадке (рис. 2.12, в), получим:

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = p \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2 \alpha. \quad (2.10)$$

Полученные выражения показывают, что для одной и той же точки тела величины напряжений, возникающих в сечениях, проходящих через эту точку, зависят от ориентации этой площадки, т.е. от угла α . При $\alpha = 0$ из (2.10) следует, что $\sigma_{\alpha} = \sigma$, $\tau_{\alpha} = 0$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. на продольных площадках, $\sigma_{\alpha} = \tau_{\alpha} = 0$. Это означает, что продольные слои растянутого стержня не взаимодействуют друг с другом. Касательные напряжения τ_{α} принимают наибольшие значения при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и их величина составляет $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$. Важно отметить, как это следует из (2.10), что $|\tau_{\alpha}| = |\tau_{(\alpha+\pi/2)}|$. Следовательно, в любой точке тела на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны между собой по абсолютной величине. Это условие является общей закономерностью любого напряженного состояния и носит название *закона парности касательных напряжений*.

Теперь перейдем к анализу деформаций в растянутом стержне.

При растяжении стержня возникают не только линейные, но и угловые деформации.

Рассмотрим прямой угол ABC (рис. 2.23, *a*), образованный отрезками AB и AC , в недеформированном состоянии.

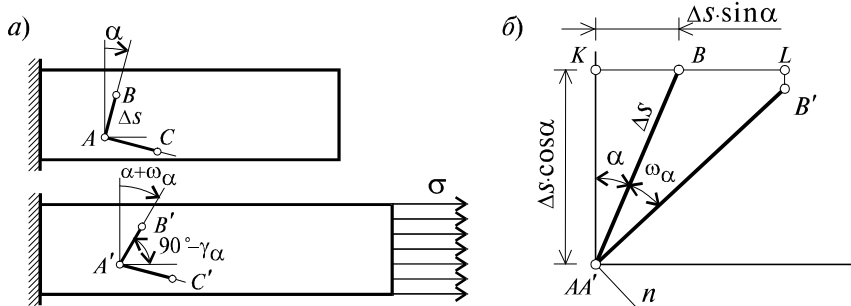


Рис. 2.23

При растяжении стержня точки A , B и C займут положение A' , B' , C' соответственно. Величина

$$\gamma_\alpha = \angle BAC - \angle A'B'C'$$

называется угловой деформацией или угловым сдвигом в точке A .

Совместим точки A и A' и рассмотрим взаимное расположение отрезков AB и $A'B'$ (рис. 2.23, *б*). На этом рисунке отметим вспомогательные точки K и L и прямую n , перпендикулярную отрезку $A'B'$. Из рис. 2.23, *б* имеем:

$$\epsilon_{\text{прод}} = \frac{BL}{KB}; \quad \epsilon_{\text{попер}} = \frac{LB'}{AK},$$

откуда с учетом $\epsilon_{\text{прод}} = \frac{\sigma}{E}$ получим:

$$BL = \frac{\sigma}{E} \Delta S \sin \alpha; LB' = \mu \frac{\sigma}{E} \Delta S \cos \alpha.$$

Для определения ω_α спроектируем ломаную $BLB'A'$ на ось n $\Delta S \cdot \sin \omega_\alpha = BL \cos(\alpha + \omega_\alpha) + LB' \sin(\alpha + \omega_\alpha)$, откуда, учитывая малость угла ω_α , т.е. $\sin \omega_\alpha \approx \omega_\alpha$, $\cos \omega_\alpha \approx 1$, получим:

$$\omega_\alpha = \frac{BL \cos \alpha + LB' \sin \alpha}{\Delta S}.$$

В результате получим:

$$\omega_\alpha = \frac{\sigma}{2E} (1 + \mu) \sin 2\alpha.$$

Откуда

$$\omega_{\alpha+\pi/2} = -\frac{\sigma}{2E}(1 + \mu)\sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$\gamma_{\alpha} = \omega_{\alpha} - \omega_{\alpha+\pi/2} = \frac{\sigma}{E}(1 + \mu)\sin 2\alpha$$

Сопоставляя выражение γ_{α} с выражением τ_{α} окончательно получим закон Гука для сдвига:

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

где величина $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ называется модулем сдвига или модулем упругости материала второго рода.

3. СДВИГ

Нагружение тела сопровождается не только изменением расстояний между точками, но и изменениями углов между различными направлениями внутри этого тела. Изменение линейных размеров, как известно, характеризуется величинами линейных деформаций ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z . Угловая деформация определяется величиной угла γ , на который изменяется первоначально прямой угол. Угол γ называется углом сдвига. Угловые деформации в точке тела, как и линейные, зависят от направления, исходящего из этой точки. Поэтому углам сдвига приписываются индексы, определяющие положение плоскости сдвига. Углы сдвига в координатных плоскостях обозначаются через γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} .

В существовании угловых деформаций легко убедиться, рассмотрев изменение во взаимном расположении двух наклонных площадок при одноосном растяжении бруса. На рис. 3.1 сплошными линиями показано положение площадок до деформации, а пунктирными — их положение после деформации.

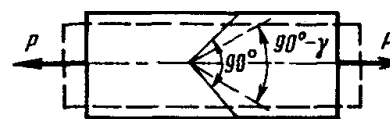


Рис. 3.1.

Линейная деформация связана, в основном, с действием нормальных внутренних сил, а деформация сдвига определяется, главным образом, касательными силами. Так, при одноосном растяжении бруса изменяется угол между площадками, где действуют касательные напряжения.

Углы между поперечными и продольными площадками, где действуют только нормальные напряжения, остаются прямыми.

Если по граням элемента будут действовать только касательные напряжения, то такой элемент тела будет испытывать только деформацию сдвига. Подобный элемент показан на рис. 3.2.

3.1. Чистый сдвиг

Деформация прямоугольного элемента тела, по граням которого действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Деформацию сдвига наглядно можно представить так, как показано на рис. 3.2, если условно закрепить одну из граней элемента.

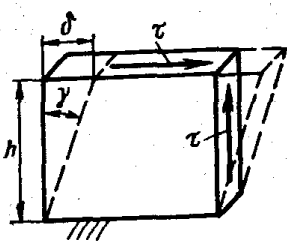


Рис. 3.2

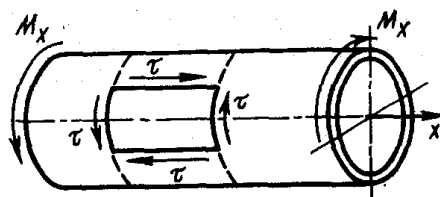


Рис. 3.3.

Верхняя грань элемента под влиянием касательных сил сместится относительно закрепленной нижней, а элемент перекосится. Линейное смещение δ одной грани относительно противоположной называется абсолютным сдвигом, а отношение δ к расстоянию между этими гранями h — относительным сдвигом. Отношение δ / h равно тангенсу угла сдвига γ . Вследствие малости угла γ можно принять $\text{tg } \gamma \approx \gamma$. Следовательно, угол сдвига $\gamma = \delta / h$ можно рассматривать как относительный сдвиг.

3.2. Закон Гука при сдвиге

Опыты показывают, что для многих материалов до известных пределов нагружения между напряжениями и деформациями при сдвиге имеет место линейная зависимость которая выражает закон Гука при сдвиге

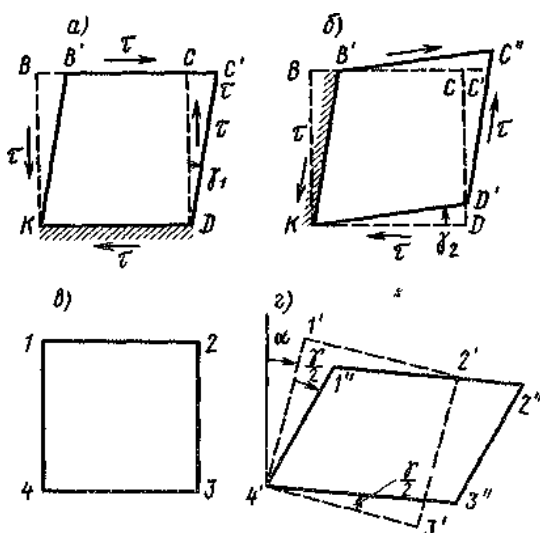


Рис. 2.15.

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Постоянную G называют модулем сдвига (модулем упругости второго рода); он характеризует способность материала сопротивляться деформации сдвига.

Линейная зависимость между τ и γ справедлива до тех пор, пока касатель-

ные напряжения не превзойдут предела пропорциональности при сдвиге.

Из свойства взаимности касательных напряжений легко установить свойство взаимности угловых деформаций. Действительно, если закрепить грань KD (рис. 2.15, a), то получим для угла сдвига

$$\gamma_1 = \frac{\tau}{G}$$

Закрепив теперь грань KB' (рис. 2.15, b), угла γ_2

$$\gamma_2 = \frac{\tau}{G}.$$

Так как равны правые части, то равны и левые, т. е.

$$|\gamma_1| = |\gamma_2|$$

Следовательно, угловые деформации двух взаимно перпендикулярных площадок равны по значению и противоположны по знаку (свойство взаимности угловых деформаций).

Таким образом, картина перемещений элемента 1234 в результате линейных и угловых деформаций представлена на рис. 2.15, c .

Можно представить, что сначала элемент 1234 , как абсолютно жесткий, перемещается в положение $1'2'3'4'$, поворачиваясь на угол α . Затем в результате линейных деформаций происходит удлинение сторон 12 и 43 и укорочение сторон 14 и 23 . В результате угловых деформаций происходит поворот сторон $1'4'$ и $4'3'$ на равные по величине и противоположные по знаку углы γ , так что окончательно элемент 1234 будет занимать положение $4'1''2''3''$ (рис. 2.15, c).

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСА

4.1. Статические моменты и центр тяжести сечения

При решении практических задач возникает необходимость в использовании различных геометрических характеристик поперечных сечений бруса. Настоящий раздел посвящен методам их определения. Рассмотрим некоторое поперечное сечение в системе координат x, y (рис. 4.1) и рассмотрим два следующих интегральных выражения:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA, \quad (4.1)$$

где нижний индекс y знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения A . Каждый из этих интегралов представляет собой сумму произведений элементарных площадок dA на расстояние до соответствующей оси (x или y). Первый интеграл называется статическим моментом сечения относительно оси x , а второй – относительно оси y .

При выполнении практических расчетов важно знать, как меняются статические моменты сечения при параллельном переносе координатных осей (рис 4.2).

Очевидно, что

$$x = x_1 + a; \quad y = y_1 + b. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1) получим:

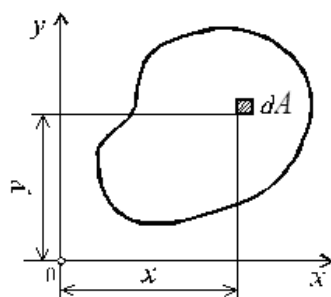


Рис. 4.1

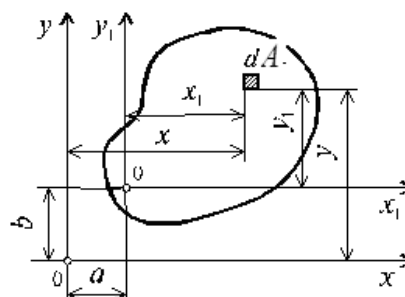


Рис. 4.2

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A (y_1 + b) dA = \int_A y_1 dA + bA; \\ S_y &= \int_A (x_1 + a) dA = \int_A x_1 dA + aA. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Величины a и b можно подобрать (причем, единственным образом) так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$b \cdot A = S_x; \quad a \cdot A = S_y, \quad (4.4)$$

тогда статические моменты $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Точка $C(x_c, y_c)$ пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения* в системе координат (x, y) и определяется из (4.4):

$$x_c = a = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = b = \frac{S_x}{A}. \quad (4.5)$$

Далее предположим, что брус имеет составное сечение (рис. 4.3) с общей площадью A . Обозначим через A_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) площадь k -ой области, принадлежащей к составному сечению бруса. Тогда выражение (4.1) можно преобразовать в следующем виде:

$$S_x = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} y dA = \sum_{k=1}^n S_x^{(k)}; \quad S_y = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} x dA = \sum_{k=1}^n S_y^{(k)}, \quad (4.6)$$

где $S_x^{(k)}$, $S_y^{(k)}$ – статические моменты k -той области относительно осей x и y . Следовательно, статический момент составного сечения равен сумме статических моментов составляющих областей.

4.2. Осевые, центробежный и полярный моменты инерции сечения.

В дополнение к статическим моментам в системе координат xOy (рис. 4.1) рассмотрим три интегральных выражения:

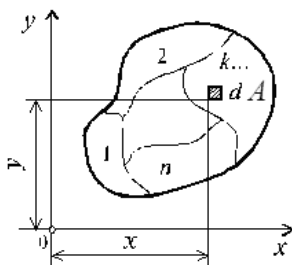


Рис. 4.3

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad (4.7)$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Первые два интегральных выражения называются осевыми моментами инерции относительно осей x и y , а третье – центробежным моментом инерции сечения относительно осей x, y .

Для сечений, состоящих из n -числа областей (рис. 4.3), формулы (4.7) по аналогии с (4.6) будут иметь вид:

$$I_x = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} y^2 dA = \sum_{k=1}^n I_x^{(k)}; \quad I_y = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} x^2 dA = \sum_{k=1}^n I_y^{(k)};$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} xy dA = \sum_{k=1}^n I_{xy}^{(k)}.$$

Для систем, рассматриваемых в полярной системе координат (рис. 4.5, а), вводится также полярный момент инерции:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

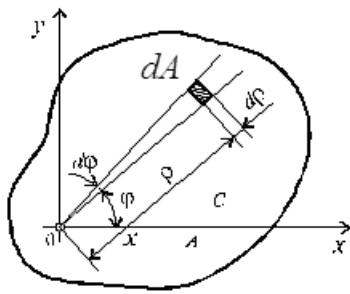


Рис. 4.4.

где ρ – радиус–вектор точки тела в заданной полярной системе координат.

Принимая во внимание очевидное равенство

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

из формул (4.7) получим

$$I_\rho = I_x + I_y,$$

полярный момент инерции всегда равен сумме осевых моментов инерции.

4.3. Моменты инерции элементарных сечений и прокатных профилей

4.3.1. Определим осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей x и y , проходящих через его центр тяжести (рис. 4.5). В качестве элементарной площадки dA возьмем полоску шириной b и высотой dy (рис. 4.5). Тогда будем иметь:

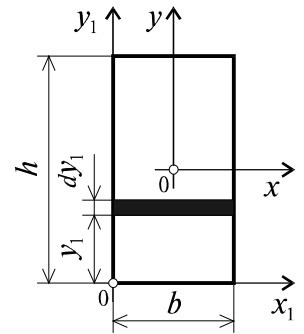


Рис. 4.5

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dA b dy =$$

$$= \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичным образом можно установить, что $I_y = \frac{hb^3}{12}$.

4.3.2. Вычислим полярный момент инерции круга радиуса R . На рис. 4.4 показана элементарная площадка, очерченная двумя радиусами и двумя концентрическими поверхностями, площадью

$$dA = \rho d\rho d\varphi.$$

Интегрирование по площади заменим двойным интегрированием:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Учтем, что

$$I_\rho = I_x + I_y.$$

Тогда, поскольку оси x и y для круга равнозначны, то $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$.

Полярный момент инерции кольца может быть найден как разность моментов инерции двух кругов: наружного (радиусом R) и внутреннего (радиусом r):

$$I_{\rho}^k = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4).$$

4.3.3. Рассмотрим далее треугольник с основанием b и высотой h . Разобьем его на элементарные полоски, параллельные его основанию. Площадь такой полоски

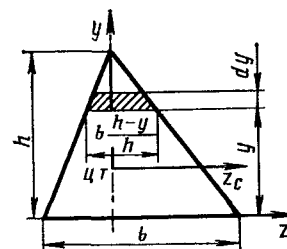


Рис.4.7.

$$dA = b \frac{h-y}{h} \cdot dy$$

Тогда момент инерции треугольника относительно оси z , проходящей через основание,

$$I_z = \int_0^h y^2 \left(b \frac{h-y}{h} \cdot dy \right) = b \left(\int_0^h y^2 dy - \int_0^h \frac{y^3}{h} dy \right) = b \left(\frac{y^3}{3} \Big|_0^h - \frac{y^4}{4h} \Big|_0^h \right) = \frac{bh^3}{12}$$

Аналогично подсчитывается момент инерции треугольника относительно центральной оси. При этом, принимая во внимание, что ось z_c проходит на расстоянии $h/3$ от оси z , интегрирование производится в пределах от $-h/3$ до $-2h/3$.

Отсюда относительно центральной z_c оси момент инерции треугольника

$$I_z = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \left(b \frac{h-y}{h} \cdot dy \right) = b \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} - \frac{y^4}{4h} \Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \right) = \frac{bh^3}{36}$$

Если сечение представляет собой стандартный прокатный профиль, его геометрические характеристики приводятся в таблицах нормального сортамента.

При определении геометрических характеристик составных сечений, включающих в себя прокатные профили, необходимо пользоваться этими таблицами, в которых имеются размеры профилей, координаты их центров тяжести и числовые значения моментов инерции относительно характерных координатных осей.

При работе с таблицами сортамента следует иметь в виду следующее:

- геометрические характеристики (размеры, площади сечений, координаты центров тяжести, моменты инерции и т.) швеллерных и двутавровых сечений опре-

деляются их номерами. Например, швеллер № 10 имеет высоту 100 мм, площадь сечения 10,9 см² и т.д.

Геометрические характеристики уголковых профилей (уголки равнобокие, уголки неравнобокие) определяются не только номерами их профиля, но и толщиной полки.

Равнобокий уголок №2 при толщине полки $d = 3$ мм имеет площадь сечения 1,3 см², а равнобокий уголок того же номера при толщине полки $d = 4$ мм имеет площадь сечения 1,46 см²;

- центры тяжести швеллеров и уголковых профилей лежат *вне контура сечения*;

- пользуясь сортаментом, следует обращать внимание на направление координатных осей, индексы которых могут не совпадать для профиля в составе рассматриваемого сечения и приведенного в сортаменте. В последнем случае данные из таблицы берутся с учетом изменения направления этих осей;

- для уголковых профилей центральные оси, параллельные полкам, не являются главными центральными, и при расчетах приходится вычислять их центробежные моменты инерции относительно этих осей. Для подобных вычислений удобно использовать формулу

$$I_{xy} = \pm(I_{\max} - I_{\min}) \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Для неравнобоких уголков в таблицах сортамента приводятся величины минимального момента инерции $I_u = I_{\min}$ относительно главной центральной оси U и угла α , образованного вертикальной осью y и осью U . Величина момента инерции I_{\max} относительно второй главной центральной оси (оси V) может быть найдена из формулы

$$I_{\max} = I_x + I_y - I_{\min} .$$

Отсюда следует

$$I_{xy} = \pm(I_x + I_y - 2I_{\min}) \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

где I_x, I_y - моменты инерции уголка относительно центральных осей, параллельных полкам (приводятся в таблицах сортамента).

Величина $tg\alpha$ в последних формулах берется из сортамента со знаком плюс, а знак I_{xy} выбирается в соответствии с рис.4.6.

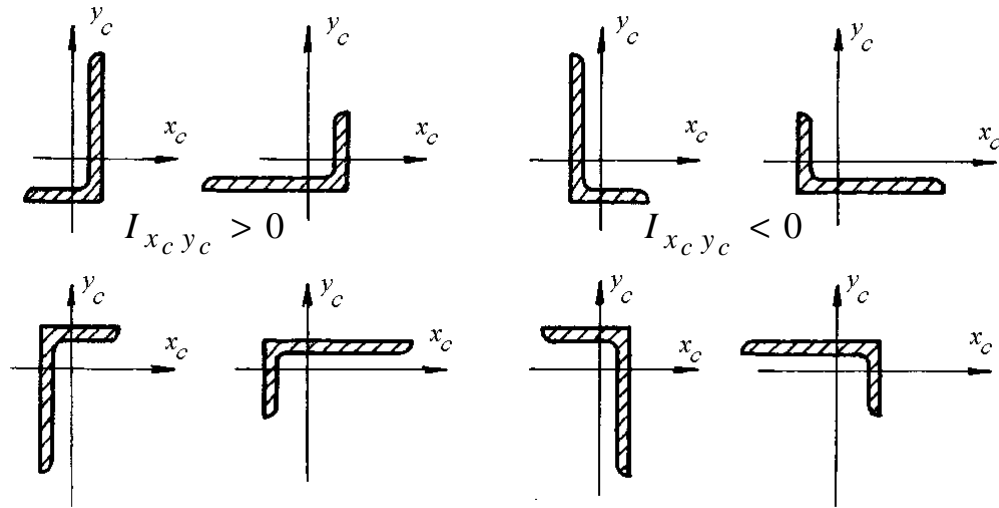


Рис. 4.6.

Для равнобокого уголка $\alpha = 45^\circ$, $tg\alpha = tg45^\circ = 1$ и, следовательно,

$$I_{xy} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}$$

Знак I_{xy} выбирается так же, как и для неравнобокого уголка (см. рис. 4.6.).

4.4. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

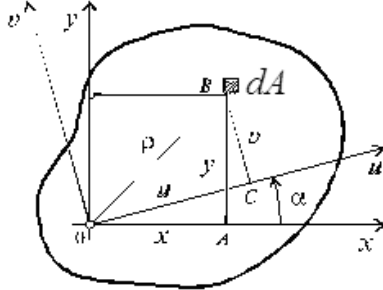
Рассмотрим, как изменяются моменты инерции сечения при параллельном переносе координатных осей x и y (см. рис. 4.2). Преобразуя формулы (4.7) с учетом выражения (4.2), получим:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_1} + 2bs_{x_1} + b^2A; \\ I_y &= I_{y_1} + 2as_{y_1} + a^2A; \\ I_{xy} &= I_{x_1y_1} + as_{x_1} + bs_{y_1} + aba. \end{aligned}$$

Если предположить, что оси x_1 и y_1 (см. рис. 4.2) являются центральными, тогда $S_{x_1} = S_{y_1} = 0$ и полученные выражения упрощаются, принимая вид:

$$I_x = I_{x_1} + b^2 A; \quad I_y = I_{y_1} + a^2 A; \quad I_{xy} = I_{x_1 y_1} + abA.$$

4.5. Изменение моментов инерции при повороте осей



Рассмотрим, как изменяются моменты инерции плоского сечения при повороте осей координат из положения x и y к положению u и v . Из рис. 4.6 легко установить, что

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (4.8)$$

Из выражений:

$$I_u = \int_A v^2 dA; \quad I_v = \int_A u^2 dA; \quad I_{uv} = \int_A uv dA$$

с учетом (4.8) после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{uv} &= 0,5(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Складывая первые два уравнения, получим:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_\rho, \quad (4.10)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$; I_ρ – полярный момент инерции сечения, величина которого, как видно, не зависит от угла поворота координатных осей.

4.6. Главные моменты инерции

Дифференцируя в (4.9) выражение I_u по α и приравнявая его нулю, находим значение $\alpha = \alpha_0$, при котором функция I_u принимает экстремальное значение:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.11)$$

С учетом (4.10) можно утверждать, что при $\alpha = \alpha_0$ один из осевых моментов I_u или I_v будет наибольшим, а другой наименьшим. Одновременно при $\alpha = \alpha_0$ I_{uv} обращается в нуль, что легко установить из третьей формулы (4.9).

Декартовы оси координат, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются *главными осями инерции*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными и определяются из (4.9) с учетом (4.11) и имеют вид:

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (4.12)$$

В заключение введем понятие *радиуса инерции* сечения относительно координатных осей x и y — i_x и i_y , соответственно, которые определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (4.13)$$

4.7. Моменты инерции сложных и составных сечений с одной и двумя осями симметрии

Кроме определения геометрических характеристик простых фигур и прокатных профилей, в расчетах на прочность, жесткость и устойчивость часто приходится вычислять эти величины для так называемых *сложных* или *составных* сечений.

Метод вычисления моментов инерции сложных сечений основан на том, что момент инерции *любого* сечения равен сумме моментов инерции отдельных его частей.

Расчет начинается с разбиения составного сечения на простые геометрические фигуры с таким расчетом, чтобы для каждой составляющей фигуры можно было бы найти геометрические характеристики по известным формулам или по справочным таблицам сортамента. Например, составное сечение,

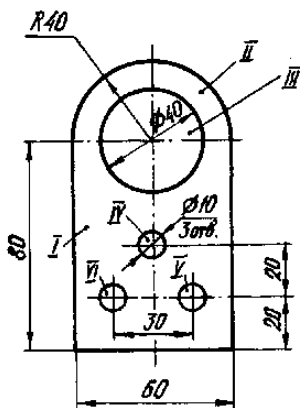


Рис. 4.7.

показанное на рис. 4.7 можно разбить на шесть простых: *I* — прямоугольник, *2*

- полуокруг, 3 - круг, 4, 5, 6 - три круга радиуса $r = 0,5 \text{ см}$. Напоминаем, что площади и моменты инерции отверстий считаются отрицательными величинами.

После разбиения сечения на составляющие элементы, выбирается начальная система координат. Если сечение не имеет осей симметрии, ось абсцисс совмещается с основанием фигуры, а ось ординат проводится через крайнюю левую границу сечения (рис. 4.7).

При таком выборе системы координат вся фигура находится в первом квадранте, что упрощает дальнейшие вычисления. Для сечений с одной осью симметрии рекомендуется в качестве одной из исходных осей принимать эту ось. Вторая ось совмещается либо с основанием сечения (рис. 4.8, ось x), либо проводится через его крайнюю левую границу (фигура находится при этом в первом квадранте, как показано на рис. 4.9 - ось y). Если сечение имеет две оси симметрии, то именно они принимаются за исходные. Как указывалось ранее, эти оси являются главными центральными осями для составного сечения.

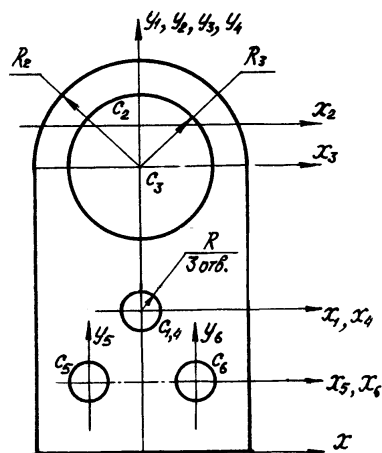


Рис. 4.8.

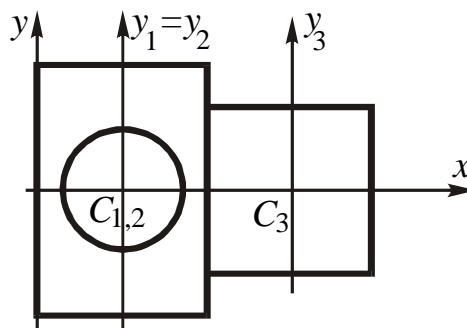


Рис. 4.9.

Далее для каждой составляющей фигуры проводятся центральные оси, параллельные исходным, и вычисляются (для прокатных профилей берутся из таблиц) их площади и моменты инерции относительно этих осей. Определив геометрические характеристики составляющих фигур и координаты их центров тяжести, по формулам (4.5) для несимметричных фигур и фигур с одной осью симметрии вычисляются координаты центра тяжести сложной фигуры (для сечений с одной осью

симметрии вычисляется только одна координата) и проводятся ее центральные оси.

Используя формулы, устанавливающие зависимости между моментами инерции для параллельных осей, определяются моменты инерции каждой составляющей фигуры относительно центральных осей всего сечения. Суммируя результаты вычислений, получают центральные моменты инерции составной фигуры. Для сечений симметричных эти моменты инерции будут являться *главными центральными*. Для сечений несимметричных следует сначала определить положение главных центральных осей, провести на чертеже эти оси, а затем по формулам (4.9) вычислить главные центральные моменты инерции всей фигуры. Для проверки вычислений полезно использовать формулу (4.12).

5. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

5.1. Понятие прямого поперечного изгиба

Изгибом называется деформация бруса, сопровождающаяся искривлением его оси или изменением кривизны оси, если до деформации она была кривой линией. Прямой брус, воспринимающий главным образом изгибающую нагрузку, называется балкой.

Изгиб прямого бруса может быть вызван поперечными внешними силами и при некоторых условиях — продольными.

Изгиб, вызванный поперечной нагрузкой (рис. 5.1, *а*), называется поперечным, а изгиб, вызванный продольными силами (рис. 5.1, *б*) - продольным изгибом. Встречаются также случаи совместного действия продольной и поперечной нагрузки (рис. 5.1, *в*). Изгиб, вызванный такими нагрузками, называется продольно-поперечным. Продольный и продольно-поперечный изгибы связаны с изучением устойчивости сжатого стержня и будут рассмотрены в соответствующих разделах курса.

Поперечный изгиб в свою очередь подразделяется на прямой изгиб, когда брус изгибается в плоскости действия нагрузки, и кривой изгиб, при котором плоскость изгиба бруса т. е. совпадает с плоскостью действия нагрузки.

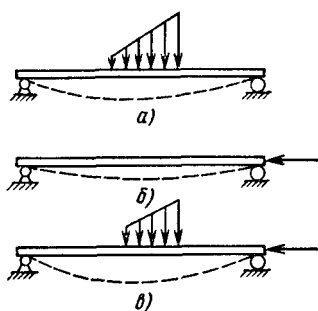


Рис. 5.1

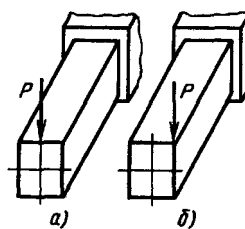


Рис. 5.2

При некоторых условиях поперечный изгиб может сопровождаться явлением закручивания бруса. Например, при приложении силы P в плоскости симметрии консольного бруса (рис. 5.2, *а*) он будет испытывать только изгиб, а если силу P

сдвинуть в угловую точку торцевого сечения (рис. 5.2, б), то изгиб будет сопровождаться закручиванием бруса.

Остановимся на рассмотрении теории прямого поперечного изгиба бруса, не осложненного явлением закручивания. Рассматриваются преимущественно брусья симметричного сечения с нагрузками, действующими в плоскости симметрии.

5.2. Основные типы балок и принципы определения опорных реакций.

Этот материал подробно разобран в курсе теоретической механики, поэтому здесь лишь напомним, что существуют следующие типы статически определимых балок, которые будут разбираться в дальнейшем.

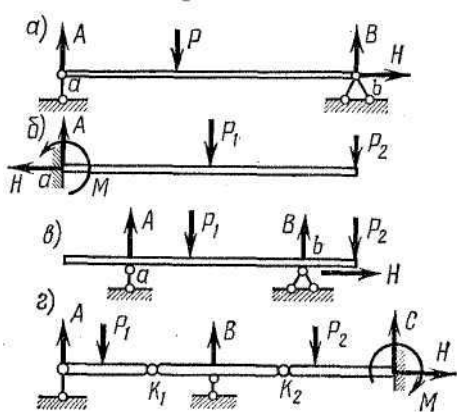


Рис. 5.3

1) простая двухопорная балка (рис. 5.3, а), у которой одна опора подвижная, а другая неподвижная;

- 2) балка, заделанная одним концом (рис. 5.3, б);
- 3) балка с консолями (рис. 5.3, в).

Встречаются также более сложные типы балок, представляющие собой систему брусьев, соединенных между собой связями. Так, на рис. 5.3, г показана сложная система, состоящая из трех брусьев, соединенных шарнирами в точках K_1 и K_2 . В этой системе число опорных связей равно пяти.

Для расчета балок на изгиб необходимо знать все действующие на нее силы. Поскольку внешняя нагрузка обычно бывает задана, то для вычисления всех действующих на балку сил приходится определять неизвестные опорные реакции. Эта задача подробно изучалась в курсе теоретической механики.

Напомним вкратце методы определения реакций. Уравнения равновесия тела, нагруженного плоской системой сил, могут быть записаны в различных формах, однако принято, наиболее удобная форма имеет вид:

$$\sum M_a = 0; \sum M_b = 0; \sum Y = 0; \text{ (ось } Y \text{ перпендикулярна оси балки).}$$

Первые два уравнения позволяют определить опорные реакции, а третье – используется для проверки (сумма вертикальных реакций должна равняться сумме всех вертикальных внешних сил).

Системы, в которых число уравнений равновесия достаточно для определения всех опорных реакций, называют *статически определенными*.

Часто встречаются *статически неопределимые балки*, имеющие число реакций больше числа независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их определения.

5.3. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях балок при изгибе.

Рассмотрим брус, нагруженный сосредоточенными парами с моментами M , поперечными сосредоточенными силами P и распределенными нагрузками, интенсивность которых q изменяется вдоль оси бруса $q = q(x)$.

Предположим, что поперечные сечения бруса имеют ось симметрии и все внешние силы и пары действуют в плоскости, содержащей эти оси, т. е. в плоскости симметрии бруса. В дальнейшем от условия симметричности сечения освободимся.

Применив метод сечений, разделим брус поперечным сечением на две части и отбросим одну из них, например, левую. Совместим начало координат с центром тяжести проведенного сечения, направим ось y по оси симметрии сечения и составим уравнения равновесия оставшейся части бруса (рис. 5.4).

Составим сначала уравнения $\Sigma y = 0$ и $\Sigma m_z = 0$. Обозначая через Q_y и M_z соответственно равнодействующую силу и пару всех внутренних касательных и нормальных сил упругости в проведенном сечении и суммируя элементарные внешние поперечные силы $q(x) dx$ и моменты этих сил $xq(x) dx$ относительно оси x рассматриваемого сечения, получаем

$$Q_y = P + \int_{x_0}^x q(x) dx; \tag{5.1}$$

$$M_z = M + Px + \int_{x_0}^x xq(x) dx.$$

Равнодействующая внутренних касательных сил Q_y называется поперечной (перерезывающей) силой, а равнодействующая пара внутренних нормальных сил M_z — изгибающим моментом.

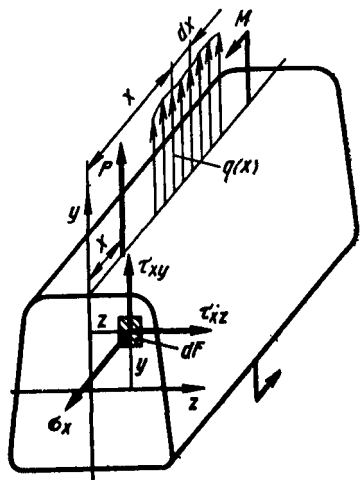


Рис. 5.4.

Обобщая уравнения равновесия отсеченной части на случай действия на эту часть k сосредоточенных пар, m сосредоточенных сил и n распределенных нагрузок, получаем

$$Q_y(x) = \sum_1^m P + \sum_1^n \int_l q(x) dx; \quad (5.2)$$

$$M_z(x) = \sum_1^k M + \sum_1^m Px + \sum_1^n \int_l xq(x) dx.$$

Записанные уравнения, позволяющие определять численные значения поперечной силы и изгибающего момента в сечении бруса, можно сформулировать в виде правил:

- поперечная сила Q_y в сечении балки численно равна алгебраической (с учетом знака) сумме всех внешних активных и реактивных поперечных сил, расположенных по одну (любую) сторону от сечения.

- изгибающий момент M_z в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центральной оси z этого сечения всех внешних активных и реактивных пар и сил, расположенных по одну (любую) сторону от сечения.

При этом для изгибающих моментов и поперечных сил в балках принято следующее правило знаков. Сила Q_y считается положительной, когда сила P направлена вверх, если рассматривается левая часть балки, и вниз, если рассматривается

правая часть балки. Указанное правило знаков иллюстрируется схемой, представленной на рис. 5.5.

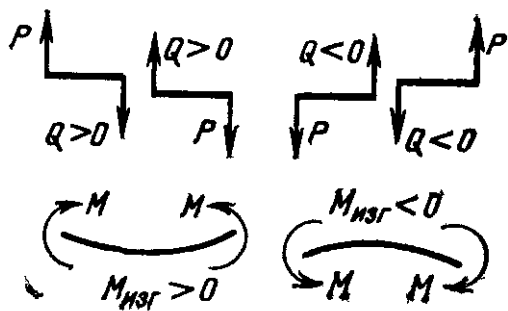


Рис. 5.5.

Знак момента определяется по направлению выпуклости изогнутой оси балки. Момент от внешней силы (пары) будет положительным, если нагрузка изгибает бал-

ку выпуклостью вниз, и отрицательным, если изогнутая ось обращена выпуклостью вверх. Заметим, что такое же правило знаков принято для кривизны плоской кривой в курсе математического анализа.

Рассмотрим остальные четыре уравнения равновесия отсеченной части балки.

Внешние силы нормальны к оси бруса. Поэтому согласно уравнению $\Sigma x = 0$ нормальная сила N в сечении балки должна быть равна нулю:

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (5.3)$$

Это равенство говорит о том, что при изгибе в сечении бруса должны действовать нормальные внутренние силы разных знаков.

Внешние силы на ось z не проектируются. Следовательно, сумма проекций внутренних сил в сечении на эту ось также должна быть равна нулю, т. е. при прямом поперечном изгибе перерезывающая сила

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0. \quad (5.4)$$

Для симметричного сечения это уравнение удовлетворяется тождественно, так как из-за нагружения бруса в плоскости симметрии внутренние касательные силы $\tau_{xy}dA$ в симметричных точках сечения должны быть равны по величине и противоположны по направлению.

Внешние силы параллельны оси y и моментов относительно этой оси не создают. Следовательно, и сумма моментов внутренних нормальных сил в сечении относительно оси y должна быть равна нулю:

$$M_y = \int_A \sigma z dA = 0. \quad (5.5)$$

Это уравнение для симметричных сечений также удовлетворяется тождественно. В дальнейшем будет установлено, при каких условиях это уравнение удовлетворяется и для несимметричных сечений.

Шестое уравнение равновесия $\Sigma m_x = 0$, которое в данном случае принимает вид

$$M_x = M_k = \int_A (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dA = 0. \quad (5.6)$$

удовлетворяется тождественно для симметричных сечений.

Итак, при поперечном изгибе бруса в его сечениях возникают изгибающий момент M_z и поперечная (перерезывающая) сила Q_y . Иногда изгибающий момент обозначают символом $M_{изг}$.

5.4. Дифференциальные зависимости, связывающие внутренние и внешние усилия при изгибе

Вырежем из балки (рис. 5.6) двумя поперечными сечениями элемент длиной dx

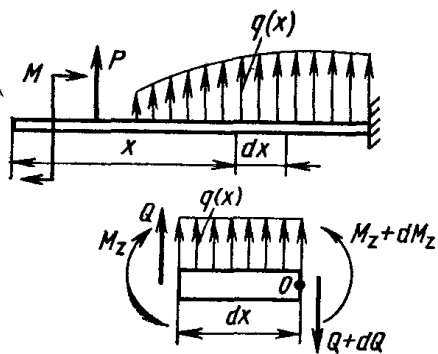


Рис. 5.6.

(для общности вывода в зоне действия распределенной нагрузки) и заменим действие на него правой и левой отброшенных частей балки силами Q и $Q + dQ$ и парами $M_{изг}$ и $M_{изг} + dM_{изг}$

Запишем уравнение $\sum y=0$ равновесия элемента, пренебрегая изменениям q на участке dx :

$$Q - (Q + dQ) + qdx = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad (5.7)$$

т. е. производная от перерезывающей силы Q по длине балки x равна интенсивности q распределенной нагрузки.

Из второго уравнения равновесия $\sum m_0 = 0$ найдем зависимость между Q и $M_{изг}$.
Имеем

$$M_{изг} - (M_{изг} + dM_{изг}) + Qdx - \frac{q(dx)^2}{2} = 0. \quad (5.8)$$

Последним слагаемым как величиной высшего порядка малости пренебрегаем. В результате

$$\frac{dM_{изг}(x)}{dx} = Q(x) \quad (5.9)$$

т. е. производная от изгибающего момента $M_{изг}$ по длине балки x равна перерезывающей силе Q .

$$\frac{dM_{изг}(x)}{dx} = Q(x) \quad (5.10)$$

Полученные равенства (5.7), (5.9)-(5.10) называются дифференциальными зависимостями при изгибе.

5.6. Построение и анализ эпюр внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях балок при изгибе

В расчетах балок на прочность и жесткость широко используются эпюры изгибающих моментов $M_{изг}$ и перерезывающих сил Q , представляющие собой графические изображения законов изменения этих внутренних силовых факторов по длине балки.

Общие правила построения эпюр уже известны из теории растяжения бруса и полностью справедливы в данном случае. Установленные в предыдущем разделе дифференциальные зависимости значительно облегчают построение и исследование эпюр сил Q и моментов $M_{изг}$.

Из соотношений $dQ/dx = q$, $dM/dx = Q$ и соответствующих им интегральных зависимостей можно сделать следующие выводы.

1. Тангенсы углов наклона к оси эпюры касательных к эпюрам Q и $M_{изг}$ по величине равны соответственно значениям ординат эпюр q и Q в тех же сечениях.

2. На участках, где закон изменения интенсивности распределенной нагрузки q выражается целой алгебраической функцией, очертанием эпюры Q является кривая, степень которой на единицу выше степени кривой очертания эпюры q , а эпюра $M_{изг}$ ограничена кривой, степень которой на единицу выше степени кривой эпюры Q . Или на две единицы выше степени кривой очертания эпюры q . Следовательно, на тех участках, где нет распределенной нагрузки ($q = 0$) перерезывающая сила Q постоянна, а $M_{изг}$ меняется по линейному закону; при равномерно распределенной нагрузке ($q = const$) сила Q изменяется по наклонной прямой, а $M_{изг}$ — по квадратной параболе и т. д.

3. В местах, где к балке приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q будет скачок, равный по величине и знаку этой силе, а на эпюре $M_{изг}$ — перелом.

4. Внешний сосредоточенный момент на характере эпюры Q не отразится, а ордината эпюры $M_{изг}$ в этом месте изменится скачком, равным по величине и знаку этому моменту.

5. Эпюра $M_{изг}$ всегда обращена выпуклостью навстречу распределенной нагрузке, что следует из соотношения $d^2M/dx^2 = q$ и совпадения правил знаков для изгибающих моментов и кривизны линии очертания эпюры.

5.7. Понятие чистого изгиба.

Нормальные напряжения при чистом изгибе

Изгиб балки, при котором в сечении возникает только изгибающий момент $M_{изг}$ а поперечная сила Q равна нулю, называется чистым изгибом. Чистый изгиб можно осуществить, нагружая брус в концевых сечениях равными по величине и противоположно направленными парами сил, действующими в плоскости симметрии бруса или так, как показано на рис. 5.7.

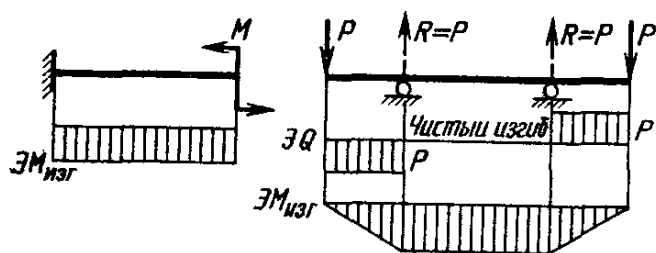


Рис. 5.7.

Равенство нулю поперечной силы говорит о том, что при чистом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные внутренние силы. Изгибающий момент $M_{изг} = M_z$ представляет собой сумму моментов $y\sigma dA$ всех элементарных

нормальных внутренних сил σdA относительно оси z сечения:

$$M_z = \int_A y\sigma dA \quad (5.11)$$

Чтобы с помощью этого равенства определить величину напряжений σ в точках сечения, необходимо, как и в случаях растяжения и кручения, определить закон распределения σ по плоскости сечения.

Опыт показывает, что при чистом изгибе продольные линии, нанесенные на поверхности бруса, искривляются, а поперечные поворачиваются, но остаются прямыми и перпендикулярными к изогнутым продольным линиям (рис. 5.8). Следовательно, и в данном случае можно применить гипотезу плоских сечений, т. е.

считать, что сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации.

Опытным путем также установлено, что волокна на выпуклой стороне бруса испытывают растяжение, а на вогнутой — сжатие. Поэтому в силу сплошности строения материала бруса должен существовать некоторый слой, волокна которого, искривляясь, сохраняют свою первоначальную длину. Такой слой называется нейтральным, а линия пересечения этого слоя с плоскостью сечения — нейтральной линией сечения.

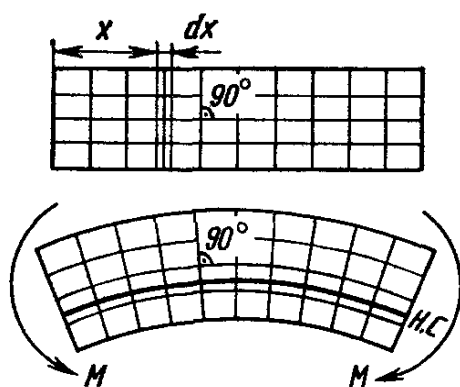


Рис. 5.8.

Нейтральная линия делит сечение на две части, в одной из которых действуют растягивающие внутренние силы, а в другой — сжимающие. Вокруг нейтральной линии поворачивается сечение при изгибе. При изгибе в плоскости симметрии бруса нейтральная линия перпендикулярна оси симметрии сечения.

Выделим двумя поперечными сечениями элемент бруса длиной dx (см. рис. 5.9.). При нагружении бруса торцевые сечения этого элемента, оставаясь плоскими, повернутся друг относительно друга вокруг своих нейтральных линий на угол $d\varphi$ а нейтральный слой искривится, и его радиус кривизны станет равным ρ (рис. 5.9). Сечение может поворачиваться вокруг нейтральной линии и оставаться при этом плоским только при одинаковых удлинениях продольных волокон, расположенных в слоях, параллельных нейтральному.

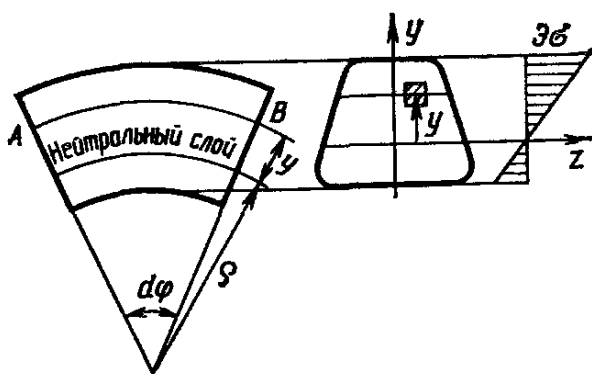


Рис. 5.9.

Тогда

Определим относительное удлинение волокна AB , находящегося на расстоянии y от нейтрального слоя. Длина этого волокна до деформации была равна длине нейтрального слоя $dx = \rho d\varphi$ (нейтральный слой искривляется, но длины не меняет), а после деформации станет равной $(\rho + y) d\varphi$.

$$\varepsilon(y) = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}, \quad (5.12)$$

т. е. по высоте сечения удлинения продольных волокон изменяются по линейному закону. Полученный линейный закон распределения деформаций по ширине и высоте сечения является прямым следствием гипотезы плоских сечений.

Введем второе допущение, весьма упрощающее решение задачи о напряжениях при изгибе. Предположим, что продольные волокна при изгибе друг на друга не давят и находятся, таким образом, в состоянии одноосного растяжения или сжатия (при чистом изгибе бруса постоянного сечения давление между волокнами действительно отсутствует, а поперечные сечения остаются плоскими, что подтверждается строгими решениями теории упругости). Согласно этому допущению связь между удлинениями волокон ε и напряжениями σ в поперечных сечениях бруса описывается законом Гука для одноосного нагружения: $\sigma = E\varepsilon$.

Подставляя формулу (5.12) в равенство $\sigma = E\varepsilon$, получаем

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}. \quad (5.13)$$

Итак, напряжения σ , как и деформации ε , по ширине сечения постоянны, а по высоте сечения изменяются пропорционально расстоянию точки от нейтральной линии. Эпюра σ приведена на рис. 5.10.

Положение нейтральной линии определим из условия (5.3), отражающего равенство нулю нормальной силы N в сечениях бруса при поперечном изгибе:

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0, \text{ отсюда } \int_A y dA = 0.$$

Этот последний интеграл представляет собой статический момент всего сечения относительно нейтральной линии. Он может быть равен нулю только относительно центральной оси. Следовательно, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения и поэтому является его нейтральной осью. Кроме того, она перпендикулярна оси симметрии сечения и является, поэтому главной осью инерции сечения. Таким образом, при прямом поперечном изгибе нейтральная линия совпадает

с главной центральной осью инерции сечения, перпендикулярной плоскости действия нагрузки.

Подставляя закон распределения напряжений (5.13) в уравнение (5.11), получаем

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z. \quad (5.14)$$

Отсюда находим формулу для определения кривизны нейтрального слоя балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (5.15)$$

Последнее уравнение является, в сущности, уравнением деформаций при изгибе.

Исключая из уравнений (5.13) и (5.14) радиус кривизны, находим расчетное уравнение для нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y. \quad (5.16)$$

Здесь I_z — момент инерции сечения относительно его нейтральной оси, а y — расстояние от этой оси до точки, в которой определяется напряжение.

Максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}.$$

Частное от деления главного момента инерции сечения на расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной от нее точки сечения называется моментом сопротивления изгибу и обозначается W_z или $W_{\text{изг}}$:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}. \quad (5.16)$$

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \quad (5.17)$$

5.8. Понятие момента сопротивления балки изгибу

Понятие момента сопротивления вводится обычно лишь для сечений, симметричных относительно нейтральной оси. Момент сопротивления изгибу прямоугольника $W_z = bh^2/6$, а кольца с внутренним диаметром d и внешним D :

$$W_z = \frac{J_z}{(D/2)} = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

Для сечения, представленного на рис. 5.10, момент сопротивления вычисляется так:

$$W_z = \left(\frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right) : \frac{h}{2}.$$

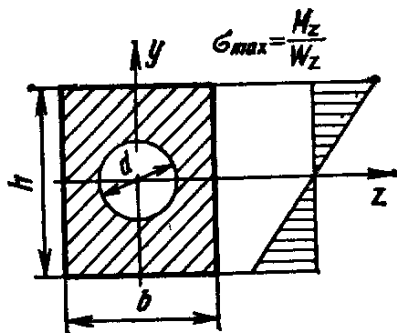


Рис. 5.10

Следует иметь в виду, что W_z сложной фигуры не равен сумме моментов сопротивления изгибу ее частей.

В предыдущих выводах предполагалось, что брус имеет продольную плоскость симметрии и в этой плоскости действует внешняя нагрузка. Однако, как несложно показать, расчетная формула (5.16) справедлива при любой форме сечения, если только внешняя нагрузка действует в плоскости, содержащей по одной из главных центральных осей инерции всех поперечных сечений. Эта плоскость называется главной плоскостью балки. Таких плоскостей минимум две и они ортогональны. Очевидно, что только при этих же самых условиях будет справедливо и уравнение (5.15) для деформаций при изгибе.

5.9. Нормальные и касательные напряжения при поперечном изгибе. Формула Журавского

При поперечном изгибе в сечениях бруса одновременно действуют внутренние нормальные и касательные силы. Нормальные силы вызывают линейные ϵ_x , а касательные — угловые γ деформации продольных волокон бруса. В результате дефор-

маций сдвига сечения бруса при поперечном изгибе депланируют (искривляются). Опыт показывает, что наибольшее искривление сечения имеет место вблизи нейтрального слоя (рис. 5.11). Это означает, что касательные напряжения при изгибе

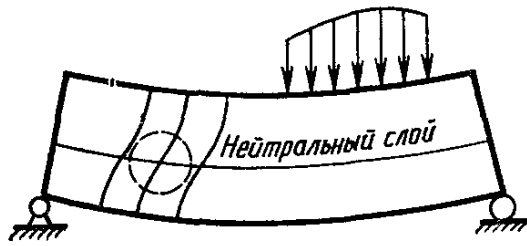


Рис. 5.11.

достигают наибольшей величины вблизи нейтральной оси сечения, где нормальные напряжения минимальны.

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y \text{ и } \sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}.$$

При поперечном изгибе имеет место также давление между волокнами бруса. Однако

искривление плоскости сечения и давление между волокнами не сказывается сколько-нибудь заметно на распределении и величине нормальных напряжений в поперечных сечениях балок, у которых высота сечения h мала ($l/h > 5$) по сравнению с длиной балки l . А именно такие балки наиболее распространены в технике. Поэтому нормальные напряжения и при поперечном изгибе балок вычисляют по формулам, выведенным для случая чистого изгиба.

Перейдем к определению касательных напряжений τ_{xy} , векторы которых параллельны плоскости действия нагрузки. Кроме этих напряжений в сечении могут

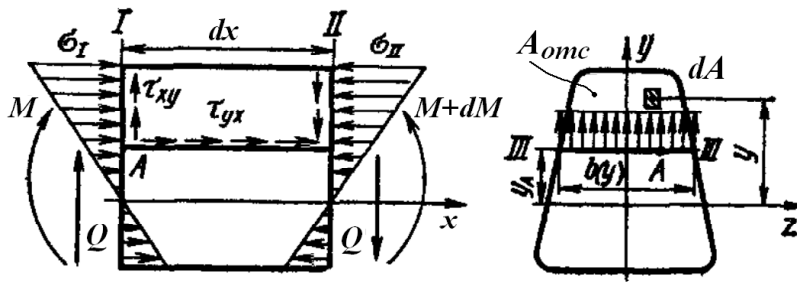


Рис. 5.11.

существовать также направленные параллельно нейтральной оси напряжения τ_{xz} . Однако напряжения τ_{xz} в сплошных сечениях, как доказано в теории упругости, существенно меньше напряжений τ_{xy} , и поэтому ими в расчетах обычно пренебрегают.

Непосредственное определение напряжений τ_{xy} затруднительно. Проще определить парные им касательные напряжения τ_{yz} , возникающие в продольных сечениях бруса (рис. 5.11).

Предположим, что по ширине сечения $b(y)$ касательные напряжения τ_{xy} распределены равномерно. Более точная теория показывает, что это допущение выполняется тем точнее, чем меньше ширина сечения по сравнению с его высотой.

Определим напряжение τ_{xy} в точке A сечения I , находящейся на расстоянии y_A от нейтральной оси. Для этого продольным горизонтальным сечением, проходящим через точку A , и еще одним поперечным сечением II выделим элемент бруса длиной dx (см. рис. 5.12).

При переходе от одного поперечного сечения к другому, находящемуся на расстоянии dx , изгибающий момент M_z изменится на величину dM_z . Следовательно, по торцевым граням выделенного элемента будут действовать различные по величине напряжения

$$\sigma_I = \frac{M_z}{J_z} y \quad \text{и} \quad \sigma_{II} = \frac{M_z + dM_z}{J_z} y$$

но тогда и равнодействующая нормальных сил $\sigma_1 dA$ на площади $A_{отс}$ (ее называют площадью отсеченной части сечения) левого торца рассматриваемого элемента

$$N_I^{омс} = \frac{M_z}{J_z} \int_{A_{отс}} y dA$$

не будет равна соответствующей равнодействующей нормальных сил на правом его торце

$$N_{II}^{омс} = \frac{M_z + dM_z}{J_z} \int_{A_{отс}} y dA$$

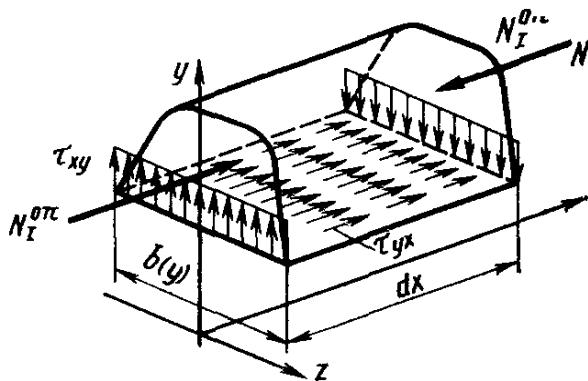


Рис. 5.12.

Равнодействующие $N_I^{омс}$ и $N_{II}^{омс}$ (рис. 5.12) противоположно направлены, и их разность должна уравновешиваться касательными силами $\tau_{yx} dA$, действующими на продольном сечении элемента (для данного вывода весьма существенно, что все остальные части

поверхности элемента совпадают с внешней поверхностью балки, свободной при поперечном изгибе от продольных сил). Вследствие малой длины элемента и допущения о равномерном распределении напряжений τ_{yx} по ширине поперечного сечения напряжения τ_{yx} можно считать распределенными равномерно по всей про-

дольной грани элемента. Следовательно, уравнение равновесия $\Sigma x = 0$ выделенного элемента будет иметь вид

$$\frac{M_z}{J_z} \int_{A_{отс}} y dA - \frac{M_z + dM_z}{J_z} \int_{A_{отс}} y dA + \tau_{yx} b(y) dx = 0.$$

Отсюда

$$\tau_{yx} = \frac{dM_z}{dx} \frac{1}{J_z b(y)} \int_{A_{отс}} y dA.$$

Учитывая, что $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ и интеграл $\int_{A_{отс}} y dA$ представляет собой статический момент

площади отсеченной части относительно нейтральной оси z сечения - $S_z^{отс}$, получаем расчетное уравнение для касательных напряжений при поперечном изгибе

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{J_z b(y)}, \quad (5.18)$$

здесь J_z — момент инерции всего сечения; а $b(y)$ — ширина сечения на уровне той точки, где определяется напряжение.

Формула (5.18) называется формулой Журавского по имени русского инженера-мостостроителя, впервые применившего ее к балкам прямоугольного сечения.

Для прямоугольного сечения статический момент отсеченной части на уровне y от нейтральной линии (рис. 5.13)

$$S_z^{отс} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \text{а } J_z = \frac{bh^3}{12}.$$

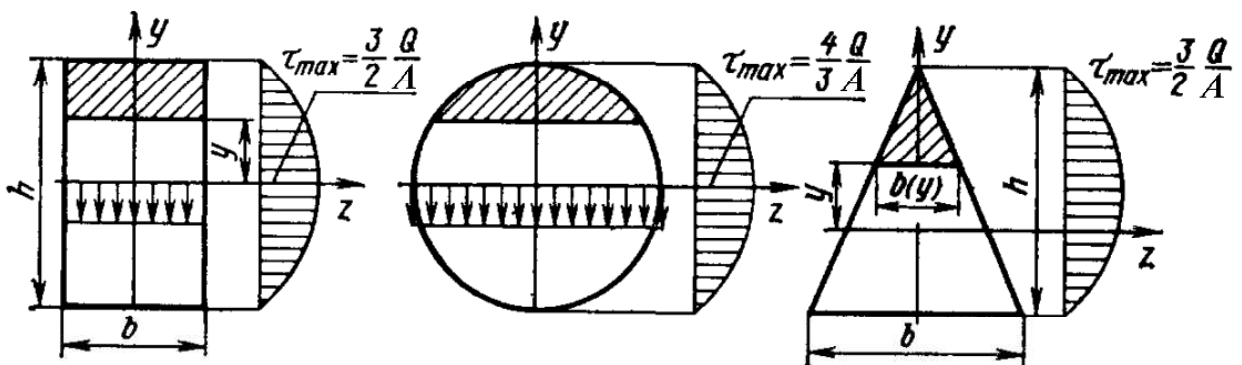


Рис. 5.13.

Следовательно, распределение напряжений по высоте прямоугольного сечения изображается параболой

$$\tau_{xy} = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Максимальные касательные напряжения действуют в точках нейтральной линии

$$(\text{при } y = 0): \tau_{xy}^{(\max)} = \frac{3Q}{2bh} = 1.5 \frac{Q}{A}$$

Соответствующие эпюры касательных напряжений в круглом и треугольных сечениях показаны на рис. 5.13.

Нужно всегда иметь в виду, что формула Журавского определяет не полное касательное напряжение τ в точке сечения, а лишь составляющую τ_{xy} этого напряжения, параллельную плоскости действия нагрузки.

5.10. Рациональные формы поперечных сечений балок

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие ($\sigma_{т.р} = \sigma_{т.сж}$) целесообразно выбирать сечения, симметричные относительно их нейтральных осей; при этом условии обеспечивается одинаковый запас прочности сечения по растянутым и сжатым волокнам.

Если кроме условия прочности исходить еще и из требования минимальной массы балки, то наиболее рациональным будет сечение, которое при заданном моменте сопротивления W_z имеет наименьшую площадь сечения A , а при заданной площади A — наибольший момент сопротивления W_z .

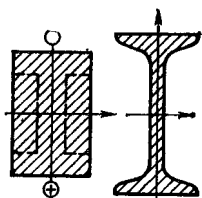


Рис. 5.14.

Сравнивая с этих позиций, например, прямоугольное сечение с двутавровым (рис. 5.14), не трудно убедиться в преимуществе последнего.

Действительно, у балки прямоугольного сечения материал вблизи нейтральной оси полностью не используется, так как находится в наименее напряженной зоне сечения; у двутавровой балки большая часть материала расположена в наиболее напряженной зоне. Поэтому при одинаковой прочности двутавровая прокатная балка оказывается в 2 ... 3 раза легче прямоугольной.

Для материалов хрупких, обладающих различной прочностью при растяжении и сжатии, рациональным будет сечение, несимметричное относительно нейтральной оси, например тавровое, несимметричное двутавровое и т. п.

5.11. Условие прочности при чистом изгибе и типы задач, решаемых на его основе

При поперечном изгибе, как известно, наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения, а на

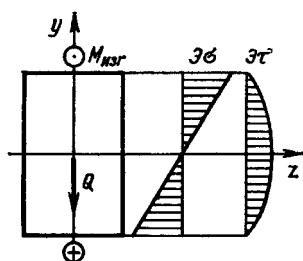


Рис. 5.15

самой этой оси $\sigma = 0$, тогда как зона действия наибольших касательных напряжений расположена, наоборот, вблизи нейтральной оси (рис. 5.15). Кроме того, и величина τ_{\max} как показывают расчеты, мала по сравнению σ_{\max} , если длина балки l существенно больше высоты сечения h . Все это позволяет не принимать во внимание касательные напряжения и проводить расчет на прочность только по нормальным напряжениям.

Условие прочности балки требует, чтобы максимальные нормальные напряжения не превышали расчетного сопротивления материала балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} \leq R,$$

где R – расчетное сопротивление материала.

Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то опасной будет та точка сечения, где действует наибольшее по абсолютной величине напряжение независимо от его знака.

Для хрупких материалов, имеющих существенно различные пределы прочности при растяжении $\sigma_{в.р}$ и сжатии $\sigma_{в.сж}$, требуется проверка прочности по наибольшим растягивающим σ_p и наибольшим сжимающим напряжениям $\sigma_{сж}$.

$$\sigma_p \frac{M_{\max}}{J_z} y_p \leq R_p, \quad \sigma_{сж} \frac{M_{\max}}{J_z} y_{сж} \leq R_{сж},$$

где R_p – расчетное сопротивление материала растяжению; $R_{сж}$ – расчетное сопротивление материала сжатию.

5.12. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки и его интегрирование

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При поперечном изгибе ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия поперечных нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения, а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений принимаются равными углам наклона φ , касательной к изогнутой оси балки (рис. 5.16).

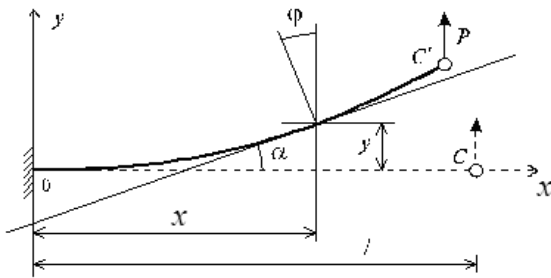


Рис. 5.16

Прогибы и углы поворотов в балках являются функциями координаты x и их определение необходимо для расчета жесткости. Рассмотрим изгиб стержня в одной из главных плоскостей, например, в плоскости ux . Как показывает практика, в составе реальных сооружений стержни испытывают весьма малые искривления

($y_{\max}/l = 10^{-2} - 10^{-3}$, где y_{\max} – максимальный прогиб; l – пролет балки).

В этом случае неизвестными функциями, определяющими положение точек поперечных сечений балки являются $y(x)$ и $\varphi(x) = \alpha(x)$ (рис.5.16). Совокупность значений этих параметров по длине балки образуют две функции от координаты x – функцию перемещений $y(x)$ и функцию углов поворота $\varphi(x)$. Из геометрических построений (рис. 5.16) наглядно видно, что угол наклона касательной к оси x и угол поворота поперечных сечений при произвольном x равны между собой. В силу малости углов поворота можно записать:

$$\varphi(x) \approx \operatorname{tg}\varphi(x) = y'(x). \quad (5.19)$$

Из курса математического анализа известно, что кривизна плоской кривой $y(z)$ выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Если рассмотреть совместно соотношение (5.19) и последнее выражение, то получим нелинейное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, точное ре-

шение которого, как правило, затруднительно. В связи с малостью величины y'^2 по сравнению с единицей последнее выражение можно существенно упростить, и тогда

$$\frac{1}{\rho} = y'' \quad (5.20)$$

Учитывая (5.15), из (5.20) получим следующее важное дифференциальное соотношение

$$EI_z y''(x) = M_z(x), \quad (5.21)$$

где I_z – момент инерции поперечного сечения балки, относительно ее нейтральной оси; E – модуль упругости материала; EI_z – изгибная жесткость балки.

Уравнение (5.21), строго говоря, справедливо для случая чистого изгиба балки, т.е. когда изгибающий момент $M_z(x)$ имеет постоянное значение, а поперечная сила равна нулю. Однако это уравнение используется и в случае поперечного изгиба, что равносильно пренебрежению искривлений поперечных сечений за счет сдвигов, на основании гипотезы плоских сечений.

Введем еще одно упрощение, связанное с углом поворота поперечного сечения. Если изогнутая ось балки является достаточно пологой кривой, то углы поворота сечений с высокой степенью точности можно принимать равными первой производной от прогибов. Отсюда следует, что прогиб балки принимает экстремальные значения в тех сечениях, где поворот равен нулю.

В общем случае, для того, чтобы найти функции прогибов $y(x)$ и углов поворота $\varphi(x)$, необходимо решить уравнение (5.21), с учетом граничных условий между смежными участками.

Для балки, имеющей несколько участков, определение формы упругой линии является достаточно сложной задачей. Уравнение (5.21), записанное для каждого участка, после интегрирования, содержит две произвольные постоянные.

На границах соседних участков прогибы и углы поворота являются непрерывными функциями. Данное обстоятельство позволяет определить необходимое число граничных условий для вычисления произвольных постоянных интегрирования.

Если балка имеет n – конечное число участков, из $2n$ числа граничных условий получим $2n$ алгебраических уравнений относительно $2n$ постоянных интегрирования.

Если момент и жесткость являются непрерывными по всей длине балки функциями $M_z(x)$ и $EJ_z(x)$, то решение может быть получено, как результат последовательного интегрирования уравнения (5.21) по всей длине балки: интегрируя один раз, получаем закон изменения углов поворота

$$\varphi(x) = y'(x) = \int_0^x \frac{M_z(x) dz}{EJ_z(x)} + C_1,$$

интегрируя еще раз, получаем функцию прогибов

$$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{M_z(x) dx}{EJ_z(x)} \right) dx + C_1 x + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 произвольные постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий.

5.13. Метод начальных параметров

Если балка имеет постоянное поперечное сечение по длине, то для определения функций прогибов и углов поворота удобно применить *метод начальных параметров*, суть которого в следующем.

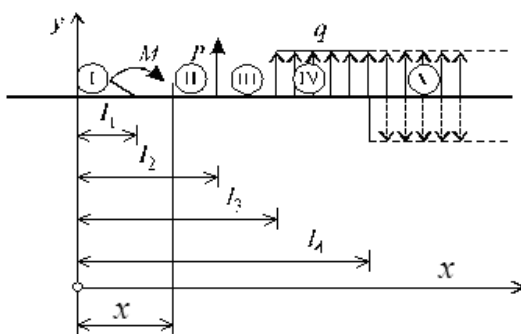


Рис. 5.17

На балку действуют: момент M , сосредоточенная сила P и равномерно распределенная на участке бруса нагрузка интенсивностью q (рис. 5.17).

Рассмотрим балку (рис. 5.17) с постоянным поперечным сечением, нагруженную взаимноуравновешенной системой положительных силовых факторов (т.е., вызывающих вертикальные перемещения сечений балки в положительном направлении оси y). Начало системы координат поместим на левом конце балки так, чтобы ось x проходила вдоль оси балки, а ось y была бы направлена вверх.

Задача заключается в том, чтобы выявить особенности, вносимые в уравнение упругой линии, различными типами внешних силовых факторов. Для этого составим выражение изгибающих моментов для каждого из пяти участков заданной системы.

$$\text{Участок I } (0 \leq x \leq l_1) \quad M_{z(x)} = 0.$$

$$\text{Участок II } (l_1 \leq x \leq l_2) \quad M_{z(x)} = M.$$

$$\text{Участок III } (l_2 \leq x \leq l_3) \quad M_{z(x)} = M + P(x - l_2).$$

$$\text{Участок IV } (l_3 \leq x \leq l_4) \quad M_{z(x)} = M + P(x - l_2) + \frac{q(x - l_3)^2}{2}.$$

$$\text{Участок V } (l_4 \leq x \leq l_5) \quad M_{z(x)} = M + P(x - l_2) + \frac{q(x - l_3)^2}{2} - \frac{q(x - l_4)^2}{2}.$$

На участке V, где распределенная нагрузка отсутствует, при выводе выражения для изгибающего момента, с целью сохранения рекуррентности формул для разных участков была приложена взаимоуравновешенная распределенная нагрузка.

Для вывода *обобщенного* выражения изгибающего момента введем следующий оператор $\left|_{x>l_i}$, означающий, что члены выражения, стоящее перед ним следует учитывать при $x > l_i$ и игнорировать при $x \leq l_i$. На основании этого, обобщенное выражение момента $M_z(x)$ для произвольного сечения x может быть записано единой формулой:

$$M_z(x) = M \left|_{x>l_1} + P(x - l_2) \left|_{x>l_2} + \frac{q(x - l_3)^2}{2} \left|_{x>l_3} - \frac{q(x - l_4)^2}{2} \right|_{x>l_4} \right. . \quad (5.22)$$

Подставляя (5.22) в (5.21) и дважды интегрируя, получим выражение для прогибов:

$$EI_z y(x) = C_0 + C_1 x + \frac{M}{2} (x - l_1)^2 \left|_{x>l_1} + \frac{P}{6} (x - l_2)^3 \left|_{x>l_2} +$$

$$+\frac{q(x-l_3)^4}{24} \Big|_{x>l_3} - \frac{q(x-l_4)^4}{24} \Big|_{x>l_4} . \quad (5.23)$$

Постоянные интегрирования C_0 и C_1 по своей сути означают:

$$C_0 = EI_z y(0), C_1 = EI_z y'(0) = EI_z \varphi(0) \quad (5.24)$$

и определяются из граничных условий на левом конце балки. Тогда формула для прогибов примет следующий окончательный вид:

$$EI_z y(x) = EI_z y_0 + EI_z \varphi_0 z + \frac{M}{2} (x-l_1)^2 \Big|_{x>l_1} + \frac{P}{6} (x-l_2)^3 \Big|_{x>l_2} + \\ + \frac{q(x-l_3)^4}{24} \Big|_{x>l_3} - \frac{q(x-l_4)^4}{24} \Big|_{x>l_4} . \quad (5.25)$$

Соответственно, формула для углов поворотов сечений балки определяется из (5.25) простым дифференцированием:

$$EI_z \varphi(x) = EI_z \varphi_0 + M(x-l_1) \Big|_{x>l_1} + \frac{P}{2} (x-l_2)^2 \Big|_{x>l_2} + \\ + \frac{q(x-l_3)^3}{6} \Big|_{x>l_3} - \frac{q(x-l_4)^3}{6} \Big|_{x>l_4} . \quad (5.26)$$

Как видно, для определения прогибов и углов поворота балок данным методом начальных параметров достаточно знание лишь значений прогиба y_0 , угла поворота φ_0 в начале системы координат, т.е. так называемых *начальных параметров*. Поэтому данный метод и называется методом начальных параметров.

5.14. Расчет балки на жесткость

Для схем стальной балки, изображенной на рис. 5.18, определить методом начальных параметров углы поворота сечения и прогиб в точке D . Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м². Поперечное сечение балки – круглое диаметром $d = 0,24$ м.

Решение

Схема I.

1. *Определение опорных реакций балки:*

$$\Sigma y = 0, R_0 + q \cdot c - P = 0, R_0 = -q \cdot c + P = -10 \cdot 1,4 + 12 = -2 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_0 = 0, M_0 - q c (b + 0,5 c) + M + P (b + c + e) = 0,$$

$$M_0 = q c (b + 0,5 c) - M - P (b + c + e) = 10 \cdot 1,4 \cdot (1,8 + 0,5 \cdot 1,4) - 20 - 12 \cdot (1,8 + 1,4 + 1,2) = -37,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

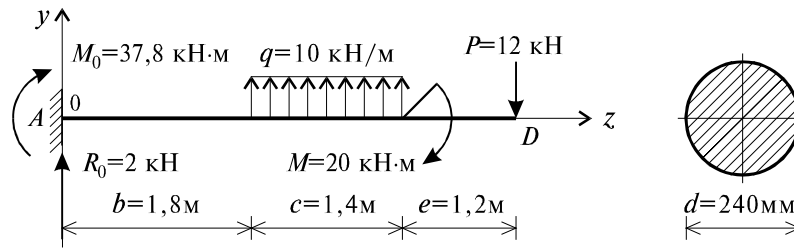


Рис. 5.18

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$$\Sigma M_D = 0, M_0 + R_0 \cdot 4,4 + q \cdot c \cdot (0,5 \cdot c + e) + M = -37,8 - 2 \cdot 4,4 + 10 \cdot 1,44 \cdot (0,5 \cdot 1,4 + 1,2) + 20 = 46,6 - 46,6 = 0.$$

Реакции найдены верно.

2. *Применение метода начальных параметров.* Используя уравнение (5.23), для нашего случая запишем (здесь продольную ось, для разнообразия, обозначим z):

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{R_0 z^3}{3!} + \frac{q(z-b)^4}{4!} \Big|_{z>b} - \frac{q(z-b-c)^4}{4!} \Big|_{z>b+c} + \frac{M(z-b-c)^2}{2!} \Big|_{z>b+c}.$$

Здесь M_0 и Q_0 – момент и реакция в заделке (т.е. в начале координат). Знак $\Big|_{z>a}$ означает, что слагаемое, после которого он стоит, нужно учитывать при $z > a$ и не надо – при $z \leq a$. Начальные параметры имеют значения: $y_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 = -37,8$ кН·м, $R_0 = -2$ кН (знак реакций определяется по знаку перемещения вызванного этими усилиями). Тогда выражение для определения прогибов будет иметь вид:

$$EIy(z) = -\frac{37,8z^2}{2} - \frac{2z^3}{6} + \frac{10 \cdot (z-1,8)^4}{24} \Big|_{z>1,8} - \frac{10 \cdot (z-3,2)^4}{24} \Big|_{z>3,2} +$$

$$+ \frac{20(z-3,2)^2}{2} \Big|_{z>3,2}.$$

Соответственно выражение для определения углов поворота будет:

$$EI\varphi(z) = -37,8 \cdot z - z^2 + \frac{10 \cdot (z-1,8)^3}{6} \Big|_{z>1,8} - \frac{10 \cdot (z-3,2)^3}{6} \Big|_{z>3,2} +$$

$$+ 20 \cdot (z-3,2) \Big|_{z>3,2}.$$

С помощью этих выражений определяем y_D и φ_D :

$$EI y_D = -\frac{37,8 \cdot 4,4^2}{2} - \frac{2 \cdot 4,4^3}{6} + \frac{10 \cdot (4,4-1,8)^4}{24} - \frac{10 \cdot (4,4-3,2)^4}{24} +$$

$$+ \frac{20 \cdot (4,4-3,2)^2}{2} = -361,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$EI\varphi_D = -37,8 \cdot 4,4 - 4,4^2 + \frac{10 \cdot 2,6^3}{6} - \frac{10 \cdot 1,2^3}{6} + 20 \cdot 1,2 = -135,27 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Жесткость сечения при $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ равна:

$$EI = E \frac{\pi d^4}{64} = 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{3,14 \cdot 2,4^4 \cdot 10^{-4}}{64} = 326 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда, окончательно:

$$y_D = -\frac{361,7}{326 \cdot 10^2} = -0,011 \text{ м}, \varphi_D = -\frac{135,27}{326 \cdot 10^2} = -0,004 \text{ рад.}$$

Прогиб точки D происходит вниз, а сечение поворачивается по часовой стрелке.

6. КРУЧЕНИЕ

6.1. Понятие кручения и крутящего момента

Здесь под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы, т.е. N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y равны нулю.

Для крутящего момента, независимо от формы поперечного сечения бруса, принято следующее правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент M_z направленным по часовой стрелке, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается отрицательный знак.

При расчете бруса на кручение (вала) требуется решить две основные задачи. Во-первых, необходимо определить напряжения, возникающие в брусе, и, во-вторых, надо найти угловые перемещения сечений бруса в зависимости от величин внешних моментов.

Наиболее просто можно получить решение для вала с круглым поперечным сечением (рис. 6.1 а). Механизм деформирования бруса с круглым поперечным сечением можно представить в виде. Предполагая, что каждое поперечное сечение бруса в результате действия внешних моментов поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое. Данное предположение, заложенное в основу теории кручения, носит название гипотезы *плоских сечений*.

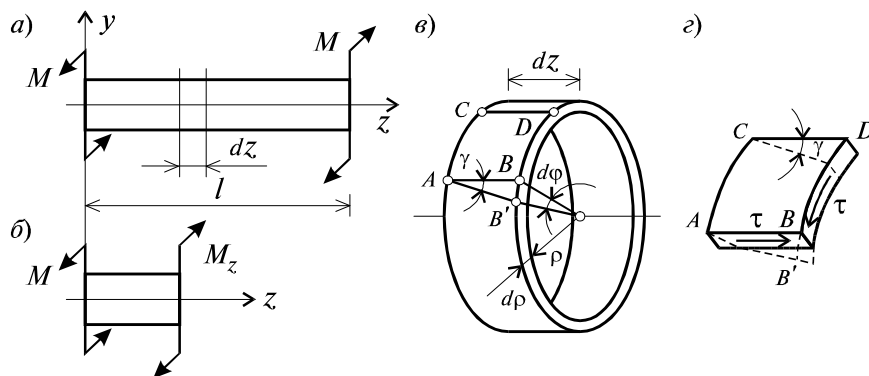


Рис. 6.1

6.2. Построение эпюр крутящих моментов

Для построения эпюры крутящих моментов M_z применим традиционный метод сечений – на расстоянии z от начала координат рассечем брус на две части и правую отбросим (рис. 6.1, б). Для оставшейся части бруса, изображенной на рис. 6.1, б, составляя уравнение равенства нулю суммы крутящих моментов $\Sigma M_z = 0$, получим:

$$M_z = M. \quad (6.1)$$

Поскольку сечение было выбрано произвольно, то можно сделать вывод, что уравнение (6.1) верно для любого сечения вала –крутящий момент M_z в данном случае постоянен по всей длине бруса.

Подробно этот материал разбирается на практических занятиях.

6.3. Напряжения и деформации, возникающие при кручении прямого стержня круглого поперечного сечения

Далее двумя поперечными сечениями, как это показано на рис. 6.1, а, из состава бруса выделим элемент длиной dz , а из него свою очередь двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим элементарное кольцо, показанное на рис. 6.1, в. В результате кручения правое торцевое сечение кольца повернется на угол $d\varphi$. При этом образующая цилиндра AB повернется на угол γ и займет положение AB' . Дуга BB' равна с одной стороны, $\rho d\varphi$, а с другой стороны – γdz . Следовательно,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (6.2)$$

Если разрезать образовавшуюся фигуру по образующей и развернуть (рис. 6.1, г), то можно видеть, что угол γ представляет собой не что иное, как угол сдвига данной цилиндрической поверхности под действием касательных напряжений τ , вызванных действием крутящего момента. Обозначая

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (6.3)$$

где Θ – относительный угол закручивания. Этот угол представляет собой угол вза-

имного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними. Величина Θ аналогична относительному удлинению при простом растяжении или сжатии стержня.

Из совместного рассмотрения (6.2) и (6.3) и после некоторых преобразований, получим:

$$\gamma = \rho \Theta. \quad (6.4)$$

Подставляя выражение (6.4) в выражение закона Гука для сдвига $\tau = \gamma G$, в данном случае выражение касательных напряжений принимает следующий вид:

$$\tau = G \Theta \rho, \quad (6.5)$$

где τ – касательные напряжения в поперечном сечении бруса. Парные им напряжения возникают в продольных плоскостях – в осевых сечениях. Величину крутящего момента M_z можно определить через τ с помощью следующих рассуждений. Момент относительно оси z от действия касательных напряжений τ на элементарной площадке dA равен (рис. 6.2):

$$dM = \tau \rho dA.$$

Проинтегрировав это выражение по площади поперечного сечения вала, получим:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA. \quad (6.6)$$

Из совместного рассмотрения (6.5) и (6.6) получим:

$$M_z = G \Theta \int_F \rho^2 dF = G \Theta I_\rho. \quad (6.7)$$

Откуда

$$\Theta = \frac{M_z}{G I_\rho}. \quad (6.8)$$

Величина $G I_\rho$ называется жесткостью бруса при кручении.

Из (6.8), с учетом (6.3), интегрируя полученное выражение по параметру z , получим:

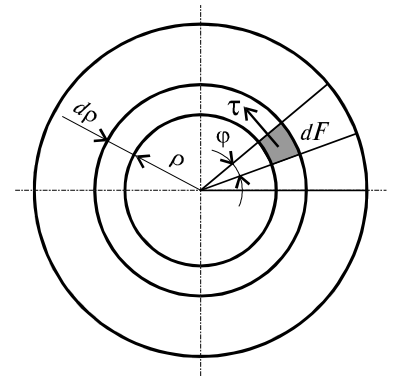


Рис. 6.2

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_z dz}{GI_\rho}. \quad (6.9)$$

Если крутящий момент M_z и жесткость GI_ρ по длине бруса постоянны, то из (6.9) получим:

$$\varphi(z) = \frac{M_z dz}{GI_\rho} + \varphi(0), \quad (6.10)$$

где $\varphi(0)$ – угол закручивания сечения в начале системы отсчета.

Для определения выражения напряжений, возвращаясь к формуле (6.5) и исключая из него θ , согласно (6.8), получим:

$$\tau(\rho) = \frac{M_z dz}{GI_\rho}. \quad (6.11)$$

Величина $W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}}$ называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения бруса в форме сплошного круга радиусом R . Определяется эта величина из следующих соображений:

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2}; \quad \rho_{\max} = R \rightarrow W_\rho = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (6.12)$$

Если же в брусе имеется внутренняя центральная полость радиусом $r = \frac{d}{2}$, то для кольца

$$W_\rho^k = \frac{\pi}{2}(R^3 - r^3) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4), \quad (6.13)$$

где $c = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}$.

6.4. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением

Определение напряжений в брусе с некруглым поперечным сечением представляет собой сложную задачу, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Причина заключается в том, что для некруглого поперечного сечения упрощающая гипотеза плоских сечений, оказывается неприемлемой. В дан-

ном случае поперечные сечения существенно искривляются, в результате чего заметно меняется картина распределения напряжений.

Таким образом, при определении углов сдвига, в данном случае, необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но и деформации сечений в своей плоскости, связанная с искривлением сечений.

Задача резко усложняется тем, что для некруглого сечения, напряжения должны определяться как функции уже не одного независимого переменного ρ , а двух – x и y .

Отметим некоторые особенности законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруглой формы. Если поперечное сечение имеет внешние углы, то в них касательные напряжения должны обращаться в нуль. Если наружная поверхность бруса при кручении свободна, то касательные напряжения в поперечном сечении, направленные по нормали к контуру также будут равны нулю.

На рис. 6.3 показана, полученная методом теории упругости, эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения. В углах, как видно, напряжения равны нулю, а наибольшие их значения возникают по серединам больших сторон:

в точке А
$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_K}, \quad (6.14)$$

где $W_K = \beta b^3$ – аналог полярного момента сопротивления поперечного сечения прямоугольного бруса;

в точке В
$$\tau_B = \eta \tau_{\max}, \quad (6.15)$$

здесь необходимо учесть, что b – малая сторона прямоугольника.

Значения угла закручивания определяется по формуле:

$$\varphi(z) = \frac{M_z z}{GI_K}, \quad (6.16)$$

где $I_K = \alpha b^4$ – аналог полярного момента инерции поперечного сечения бруса.

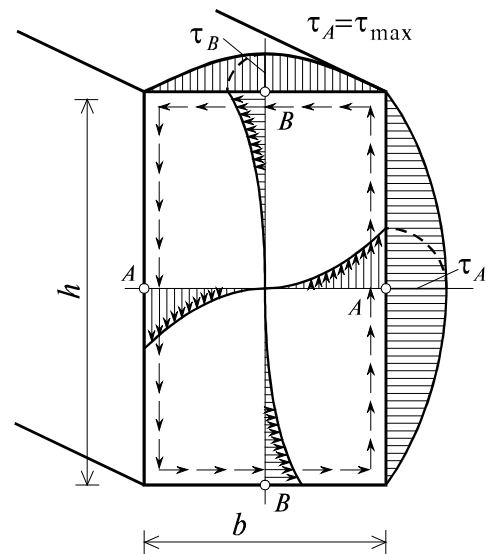


Рис. 6.3

Коэффициенты α , β и η зависят от отношения сторон $m = h/b$, и их значения приведены в табл.6.1.

Таблица 6.1

m	1	1,5	2,0	3,0	6,0	10
α	0,141	0,294	0,457	0,790	1,789	3,123
β	0,208	0,346	0,493	0,801	1,789	3,123
η	1,000	0,859	0,795	0,753	0,743	0,742

6.5. Условия прочности и жесткости при кручении и типы задач, решаемых на их основе

На рис. 6.4 изображен тонкостенный трубчатый образец, который при кручении будет испытывать чистый однородный сдвиг, так как распределение напряжений по толщине его сечений в силу тонкостенности можно считать равномерным. По результатам испытаний такого образца строится диаграмма кручения - график зависимости $M_k = M_k(\varphi)$ (рис. 6.5,а).

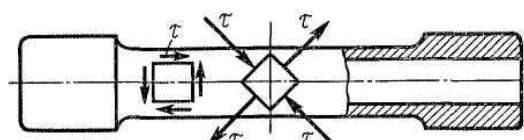


Рис. 6.4

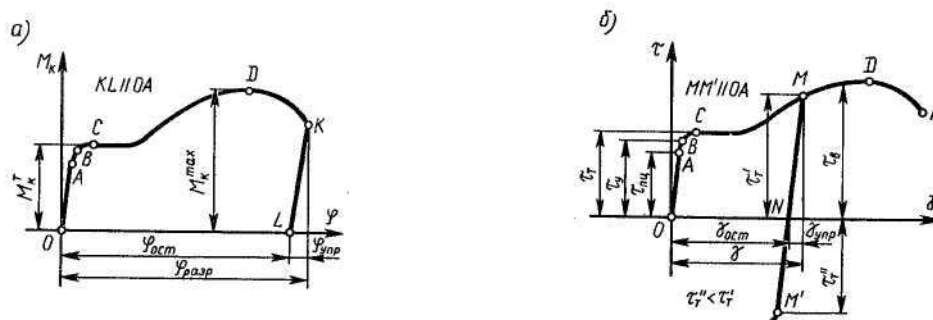


Рис. 6.5

По диаграмме кручения, в свою очередь, строится диаграмма напряжений при чистом сдвиге (характеристика материала при чистом сдвиге, диаграмма сдвига) —

график зависимости $\tau = \tau(\gamma)$ (рис. 6.5,б), в котором $\tau = \frac{M_k}{2\pi d^2 l}$, а $\gamma = \frac{\varphi d}{2l}$. Все, что

говорилось о диаграмме растяжения, а также о диаграмме напряжений и расчете на прочность при растяжении, можно перенести на кручение, если заменить символы P , Δl , A , σ , ε , E , EA соответственно на M_K , φ , W_K , τ , γ , G , GI_K , за исключением явлений уменьшения площади сечения и образования шейки, которые при кручении отсутствуют.

Условие прочности проектировочного расчета при кручении

$$|\tau_{\max}| = \frac{M_k}{W_k} \leq R_\tau$$

Величина R_τ - расчетное сопротивление при сдвиге находится таким же образом, как и осевом растяжении, для пластичного материала, через τ_T — предел текучести при сдвиге, а для хрупкого τ_B — предел прочности при сдвиге; $|\tau_{\max}|$ — наибольшее по длине бруса касательное напряжение.

Если для материала известны значения предельных характеристик при растяжении и сжатии, то экспериментальное определение τ_T и τ_B не является необходимым, так как τ_T и τ_B для него могут быть найдены расчетным путем (эти формулы будут выведены далее). Так, для пластичного материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие, будет получено

$$\tau_T \cong 0,6 \sigma_T.$$

Изготовление тонкостенных образцов трудоемко и дорогостояще, поэтому они, как правило, используются в экспериментальных научно-исследовательских работах, а обычные механические испытания проводятся на сплошных образцах круглого поперечного сечения.

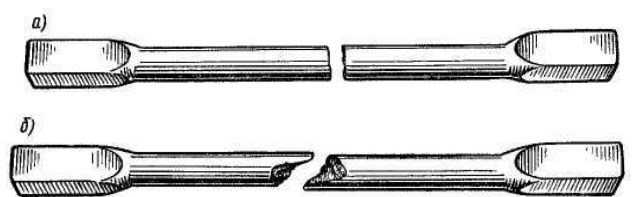


Рис. 6.б.

Построение диаграммы сдвига по диаграмме кручения, полученной по результатам испытания такого образца, процедура более сложная, чем по диаграмме кручения, полученной на тонкостенном образце, вследствие неоднородности напряженного состояния в нем.

Образец из пластичного материала разрушается по поперечному сечению

(рис. 6.6, а) — сечению, в котором действует τ_{\max} . Образец из хрупкого материала разрушается по винтовой поверхности, след которой составляет с образующей образца угол 45° (рис. 6.6,б) — по поверхности, в которой действуют наибольшие растягивающие напряжения.

Помимо расчета на прочность длинные брусья, работающие на кручение (валы), следует рассчитывать на жесткость по формуле

$$|\theta| = \left| \frac{180^\circ M_k}{\pi G I_k} \right| \leq [\theta]$$

Здесь $[\theta]$ — допускаемый погонный угол закручивания, равный: $[\theta] = 2^\circ \frac{1}{m}$ -

при статической нагрузке, $[\theta] = 0,25^\circ \frac{1}{m}$ - переменной нагрузке,

$[\theta] = 0,15^\circ \frac{1}{m}$ - при ударной нагрузке.

6.6. Расчет винтовых цилиндрических пружин

Пружины имеют широкое применение в машиностроении. Рассмотрим теорию расчета винтовых цилиндрических пружин с малым шагом витка (рис. 6.7, а), т. е. таких, у которых угол наклона витка к плоскости, перпендикулярной оси пружины, мал и поэтому можно принять, что витки лежат в этой плоскости.

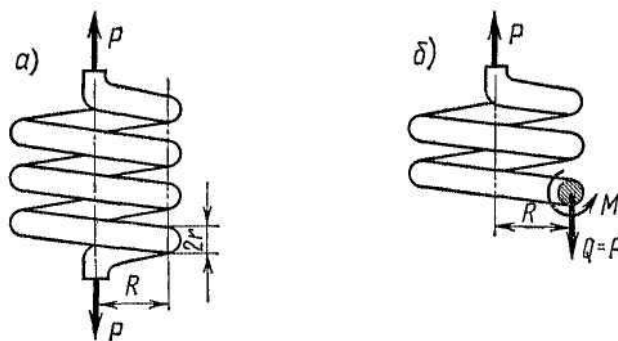


Рис. 6.7.

Обозначим D, R — средний диаметр и радиус витка пружины, d, r — диаметр и радиус проволоки, из которых свита пружина, и n — число витков пружины. Разрежем пружину на две части (рис. 6.7, б). Отбрасывая нижнюю часть, заменим ее воздействие на верхнюю поперечной силой Q и крутящим мо-

ментом M . Легко установить, что $Q = P$, а $M = PR$.

Таким образом, пружина с малым шагом витков работает на срез и кручение. Касательные напряжения от среза (рис. 168, а) считаем равномерно распределенными по сечению витка пружин:

$$\tau_1 = \frac{P}{A_{\text{среза}}} = \frac{P}{\pi r^2}$$

Наибольшие касательные напряжения от кручения (рис. 6.8, б) возникают в наиболее удаленных точках от центра сечения и равны

$$\tau_2 = \frac{M}{W_\rho} = \frac{2M}{\pi r^3} = \frac{2PR}{\pi r^3}.$$

В точке K напряжения от среза и кручения направлены в одну сторону, ПОЭТОМУ их можно сложить:

$$\tau_{\text{max}} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{P}{\pi r^2} + \frac{2PR}{\pi r^3} = \frac{2PR}{\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{2R} \right).$$

Обычно второе слагаемое в скобках мало по сравнению с единицей, поэтому им пренебрегают и учитывают только напряжения от кручения:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{2PR}{\pi r^3}.$$

Определим деформацию пружины, имея в виду, что витки пружины при ее деформации испытывают только кручение (срез не учитываем).

Обозначим через λ величину осадки пружины от действия силы P и найдем работу A этой силы на перемещении λ . Учитывая линейную зависимость λ от силы P , можно написать

$$A = \frac{1}{2} \lambda P.$$

Потенциальная энергия в пружине от кручения равна

$$U = \frac{M^2 l}{2GI_\rho}.$$

Длину проволоки, из которой свита пружина при n витках, определяют по

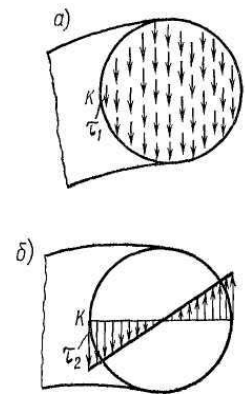


Рис. 6.8.

формуле $l = 2\pi Rn$, поэтому

$$U = \frac{M^2 \pi R n}{GI_\rho} = \frac{\pi R^3 n P^2}{GI_\rho}.$$

Приравнявая работу A и потенциальную энергию U и учитывая при этом, что

$I_\rho = \frac{\pi r^4}{2}$, получим:

$$\lambda = \frac{4PR^3 n}{Gr^4}$$

7. КОСОЙ ИЗГИБ, ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

7.1. Косой и пространственный изгиб.

Изгиб называют *косым*, если плоскость действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей.

Различают плоский косой изгиб и пространственный косой изгиб.

При *плоском косом изгибе* все нагрузки расположены в одной плоскости, т. е. существует общая для всего бруса силовая плоскость. Следовательно, углы, составляемые силовыми линиями с главными центральными осями, во всех поперечных сечениях бруса одинаковы. В рассматриваемом случае упругая линия бруса — *плоская кривая*, но, в отличие от прямого изгиба плоскость, в которой она расположена, не совпадает с силовой плоскостью. Именно эта особенность характера деформации обуславливает наименование *косой изгиб*.

При *пространственном косом изгибе* нагрузки, вызывающие изгиб, расположены в разных продольных плоскостях бруса. Соответственно углы между главными центральными осями поперечных сечений и силовыми линиями не постоянны по длине бруса.

Упругая линия бруса в этом случае — *пространственная кривая*.

Силы, перпендикулярные продольной оси бруса, но не совпадающие по направлению ни с одной из главных центральных осей его поперечного сечения, всегда могут быть разложены на составляющие по этим осям. Точно так же и моменты, действующие в произвольных продольных плоскостях, могут быть разложены на составляющие относительно главных центральных осей.

7.2. Определение напряжений и положения нулевой линии

Таким образом, далее под *косым изгибом* понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения (рис. 7.1, а). Косой изгиб удобнее всего рассмотреть как одновременный изгиб бруса относительно главных осей x и y поперечного сечения бруса. Для этого общий вектор изгибающего момента M , действующего в поперечном сечении бруса, раскладывается на составляющие момента от-

носительно этих осей (рис. 7.1, б):

$$M_x = M \cdot \sin \alpha; \quad M_y = M \cdot \cos \alpha. \quad (7.1)$$

Введем следующее правило знаков для моментов M_x и M_y – момент считается положительным, если в первой четверти координатной плоскости (там, где координаты x и y обе положительны) он вызывает сжимающие напряжения.

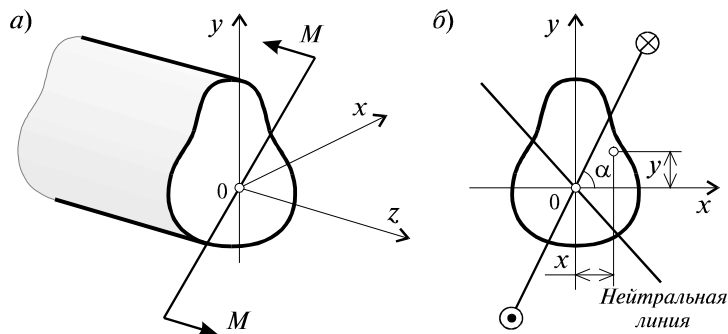


Рис. 7.1

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение в произвольной точке, принадлежащей к поперечному сечению бруса и имеющей координаты x, y , определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_x и M_y , т.е.

$$\sigma(x, y) = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}. \quad (7.2)$$

Подставляя выражения M_x и M_y из (7.1) в (7.2), получим:

$$\sigma(x, y) = M \left(\frac{y}{I_x} \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cos \alpha \right).$$

Из курса аналитической геометрии известно, что последнее выражение представляет собой уравнение плоскости. Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали вектор напряжения σ , то концы векторов образуют геометрическое место точек, принадлежащих одной плоскости, как и при поперечном изгибе.

Уравнение *нейтральной линии*, т.е. геометрического места точек, где нормальное напряжение принимает нулевые значения, найдем, полагая в (5.26) $\sigma = 0$:

$$\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0.$$

Откуда определяется:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x. \quad (7.3)$$

7.3. Опасные точки сечения

Поскольку свободный член в (7.3) равен нулю, нейтральная линия всегда проходит через начало координат. Как видно из выражения (7.3), эпюра напряжений в поперечных сечениях бруса линейна, следовательно, максимальные напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии. В том случае, когда сечение имеет простую форму (прямоугольник, круг), положение наиболее опасных точек легко определяется визуально. Для сечений, имеющих сложную форму, необходимо применить графический подход.

Далее покажем, что при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости действия изгибающего момента, как это всегда выполнялось при поперечном изгибе. Действительно угловой коэффициент K_1 следа момента (рис. 7.1, б) равен:

$$K_1 = \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.4)$$

Угловой же коэффициент нейтральной линии, как это следует из (5.27), определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi = K_2 = \frac{I_x M_y}{I_y M_x} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (7.5)$$

Так как в общем случае $I_x \neq I_y$, то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается, поскольку $K_1 \neq -\frac{1}{K_2}$. Брус, obviously выражаясь, предпочитает изгибаться не в плоскости изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб будет минимальной.

7.4. Условия прочности и типы задач, решаемых на его основе

Расчеты на прочность при косом изгибе будем производить только по нормальным напряжениям. Будем считать, что положение опасных точек известно. Примем, что в точке 1 действуют максимальные растягивающие напряжения, а в точке 2 – максимальные сжимающие напряжения. Координаты этих точек обозначим соответственно x_i, y_i ($i=1, 2$). Составим условие прочности проективно-го расчета, воспользовавшись уравнением (7.2)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{M_x}{I_x} y_1 + \frac{M_y}{I_y} x_1 \leq R_t, \\ |\sigma_2| &= \frac{M_x}{I_x} |y_2| + \frac{M_y}{I_y} |x_2| \leq R_c\end{aligned}\quad (7.3)$$

здесь R_t, R_c – расчетные сопротивления материала соответственно на растяжение и сжатие.

Для балок, материалы которых одинаково работают на растяжение и сжатие

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \right| \leq R. \quad (7.4)$$

При проверочном расчете определяются

$$n_1 = \frac{R_t}{\sigma_1}, \quad n_2 = \frac{R_c}{\sigma_2},$$

и в качестве запаса прочности балки принимается меньшее из полученных значений.

При известных размерах поперечного сечения бруса из условий прочности (7.3) или (7.4) нетрудно определить опускаемое значение нагрузки.

Сложнее выполнить проектный расчет, поскольку в формулы входят две геометрические характеристики I_x, I_y . В этом случае приходится задаваться размерами сечения и проверять их расчетом на прочность. При неудовлетворительных результатах следует корректировать размеры и вновь производить проверку. Задача существенно упрощается для сечений простой формы, например, прямоугольной, особенно если заданы отношения сторон сечения.

7.5. Величина и направление прогибов при косом изгибе

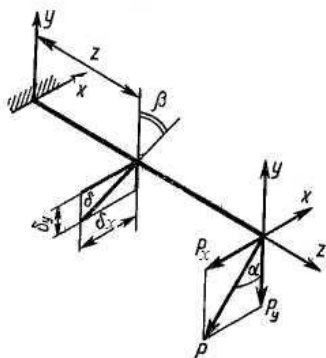


Рис. 7.2.

Внешние силы, приложенные к балке, разлагаются по главным центральным осям сечений, в которых они действуют (рис. 7.2). Если на балку действуют только силы, лежащие в плоскости, перпендикулярной главной центральной оси x , то изгиб будет прямым. Тогда нейтральной линией сечения будет ось x , и воспользовавшись универсальными уравнениями углов поворота и прогибов, найдем прогиб δ_y текущего сечения балки в направлении оси y . Аналогично, при действии на балку сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси y , определим δ_x — прогиб в текущем сечении по направлению оси x . По принципу независимости действия сил прогиб δ текущего сечения балки и его направление найдем по формулам

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta_y}{\delta_x}.$$

7.6. Условие жесткости и типы задач, решаемых на его основе

Для балок, имеющих большой пролет, актуальным является вопрос проверки жесткости. Задача сводится к определению положения сечения, в котором прогиб достигает наибольшего значения по абсолютной величине. Далее используются те же приемы, которые рассмотрены ранее при решении задачи о плоском поперечном изгибе.

Рассмотрим пример.

Стальная балка AB , расчетная схема и поперечное сечение которой показаны на рис. 7.3, a , ($c = 0,03$ м) нагружена силами P_1 и P_2 .

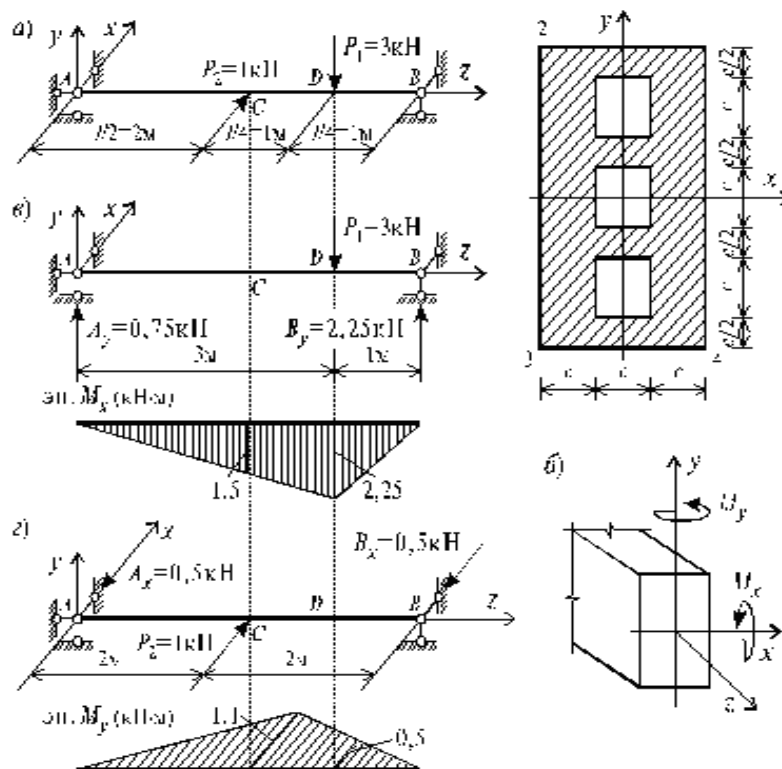


Рис. 7.3.

Требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях инерции;
2. Установить по эпюрам изгибающих моментов опасное сечение балки. Найти для опасного сечения положение нулевой линии;
3. Вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения;
4. Определить значение полного прогиба в середине пролета балки и указать его направление.

Решение

1. *Построить эпюры изгибающих моментов в главных плоскостях инерции.* Ввиду симметричности сечения балки относительно осей x и y (рис. 7.3, а), можно сделать вывод, что эти оси – главные. Для построения эпюр изгибающих моментов, используя принцип независимости действия сил, представим кривой изгиб как изгиб в двух главных плоскостях инерции бруса (рис. 7.3, б, з). Определив опорные реакции, составим аналитические выражения изгибающих моментов и вычислим их значения в характерных сечениях. Построим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 7.3, в, з), откладывая ординаты со стороны растя-

нутых волокон. В соответствии с принятым правилом знаков, $M_x < 0, M_y > 0$.

2. Установить по эпюрам изгибающих моментов опасное сечение балки. Найти для опасного сечения положение нулевой линии. Сравнивая ординаты эпюр M_x и M_y , делаем вывод, что опасными могут быть сечения D или C , т.к. в них предположительно возникают наибольшие по величине изгибающие моменты. Для того, чтобы установить, какое из них является наиболее опасным, нужно вычислить возникающие в сечениях C и D наибольшие нормальные напряжения и сравнить их. Теоретически доказано, что если контур поперечного сечения так вписывается в прямоугольник, что четыре крайние точки сечения совпадают с углами прямоугольника, то максимальное нормальное напряжение будет в одном из углов прямоугольника и определится по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y},$$

где все величины берутся по абсолютной величине. У нас именно такой случай.

Осевые моменты инерции сечения вычислим по следующим зависимостям:

$$I_x = \frac{3c \cdot (5c)^3}{12} - \left[\frac{c \cdot c^3}{12} + 2 \left(\frac{c \cdot c^3}{12} + c^2 \cdot (2,5 - c)^2 \right) \right] = \frac{106}{4} c^4 =$$

$$= 0,25 \cdot 106 \cdot (0,03)^4 = 2147 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_y = \frac{5c \cdot (3c)^3}{12} - 3 \frac{c \cdot c^3}{12} = \frac{132}{12} c^4 = 11 \cdot c^4 = 11 \cdot (0,03)^4 = 891 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Моменты сопротивления сечения W_x и W_y определяются следующим образом:

$$W_x = \frac{I_x}{2,5 \cdot c} = \frac{2147 \cdot 10^{-8}}{2,5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 286,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{1,5 \cdot c} = \frac{891 \cdot 10^{-8}}{1,5 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 198 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Таким образом, наибольшие напряжения в сечениях C и D равны:

сечение C

$$\sigma_{\max}^C = \frac{1,5}{286,3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{198 \cdot 10^{-6}} \approx 10290 \text{ кПа} = 10,29 \text{ МПа};$$

сечение D

$$\sigma_{\max}^D = \frac{2,25}{286,3 \cdot 10^{-6}} + \frac{0,5}{198 \cdot 10^{-6}} \approx 10385 \text{ кПа} = 10,38 \text{ МПа.}$$

Сравнивая эти значения, заключаем – опасным является сечение D . Подставив

значения I_x, I_y, M_x, M_y в формулу (7.5) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{2147 \cdot 10^{-8} \cdot 0,5}{891 \cdot 10^{-8} \cdot (-2,25)} = \\ &= 0,535, \text{ откуда } \varphi \approx 28,17^\circ. \end{aligned}$$

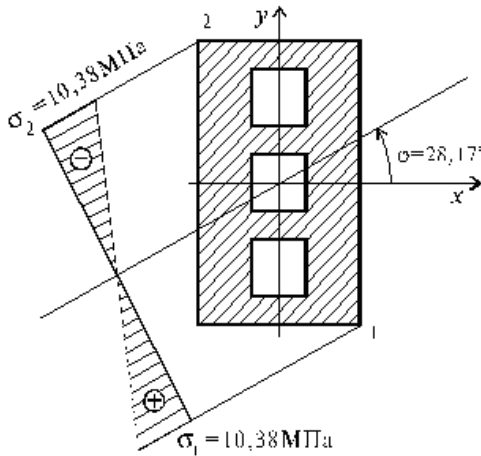


Рис. 7.4

Нулевая линия пройдет в тех четвертях поперечного сечения, в которых изгибающие моменты будут вызывать нормальные напряжения разных знаков. В нашем случае это будут первая и третья четверти. Поэтому, отложив угол $\varphi \approx 28,17^\circ$ от оси x против хода часовой стрелки,

проведем нулевую линию (рис. 7.4).

3. *Вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения.* Вершины стрелок нормальных напряжений, определяемых по формуле (7.3) будут лежать на плоскости, пересекающей плоскость поперечного сечения по нулевой линии. При взгляде на плоскость напряжений вдоль нулевой линии мы увидим ее в виде прямой, ординаты которой показаны в виде эпюры σ на рис. 7.4. Наибольшие нормальные напряжения будут иметь место в точках 1 и 2 и различаться только знаком. Действительно, подставляя в формулу (7.3) координаты точек 1 и 2, получаем:

точка 1

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-2,25}{2147 \cdot 10^{-8}} (0,075) + \frac{0,5}{891 \cdot 10^{-8}} (-0,045) \approx -10385 \text{ кН/м}^2 \approx \\ &\approx -10,38 \text{ МПа;} \end{aligned}$$

точка 2

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-2,25}{2147 \cdot 10^{-8}} (-0,075) + \frac{0,5}{891 \cdot 10^{-8}} (0,045) \approx -10385 \text{ кН/м}^2 \approx \\ &\approx 10,38 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Отложив в удобном масштабе полученные величины напряжений, построим

эпюру напряжений σ (рис. 7.4).

4. *Определить значение полного прогиба в середине пролета балки и указать его направление.* Полный прогиб (перемещение центра тяжести сечения S) вычисляем по формуле:

$$f_C = \sqrt{f_{x_c}^2 + f_{y_c}^2},$$

где f_{x_c} , f_{y_c} – проекции полного прогиба на главные оси. Эти величины можно определить методом начальных параметров. Начало координат поместим на левом конце балки в точке A .

Прогиб в плоскости xOz . Начальные параметры:

$$f_{x_0} = 0; \quad \Phi_0 \neq 0; \quad Q_0 = A_x = -0,5 \text{ кН.}$$

Составим выражение прогибов $f_x(z)$ с помощью универсального уравнения упругой линии балки:

$$EI_y f_x(z) = EI_y \Phi_0 z + \frac{Q_0 z^3}{6} + \frac{P_2 \cdot (z - 0,5 \cdot l)^3}{6} \Big|_{z > 0,5l}. \quad (7.5)$$

Величину Φ_0 определим из условия, что при $f_x(l) = 0$. Подставляя в выражение (7.5) $z = l = 4$ м, получим:

$$0 = EI_y \Phi_0 \cdot 4 - \frac{0,5 \cdot 4^3}{6} + \frac{1 \cdot (4 - 2)^3}{6};$$
$$\Phi_0 = \frac{32}{6 \cdot 4 \cdot EI_y} - \frac{8}{6 \cdot 4 \cdot EI_y} = \frac{1}{EI_y}.$$

Окончательно выражение прогибов $f_x(z)$ будет иметь вид:

$$EI_y f_x(z) = z + \frac{Q_0 \cdot z^3}{6} + \frac{P_2 \cdot (z - 0,5 \cdot l)^3}{6} \Big|_{z > 0,5l}. \quad (7.6)$$

Для определения прогиба в середине пролета подставим $z = 0,5 \cdot l = 2$ м в выражение (7.6):

$$EI_y f_{x_c} = 2 - \frac{0,5 \cdot 2^3}{6} = 1,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Учитывая, что $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м² и $I_y = 891 \cdot 10^{-8}$ м⁴, получаем:

$$f_{x_c} = \frac{1,33}{EI_y} = \frac{1,33}{2 \cdot 10^8 \cdot 891 \cdot 10^{-8}} \approx 0,000745 \text{ м} = 7,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Прогиб в плоскости $y0z$. Начальные параметры:

$$f_{y_0} = 0; \quad \Phi_0 \neq 0; \quad Q_0 = A_y = 0,75 \text{ кН}.$$

Выражение для прогибов $f_y(z)$ получаем с помощью метода начальных параметров:

$$EI_x f_y(z) = EI_x \Phi_0 z + \frac{Q_0 z^3}{6} - \frac{P_1 \cdot (z - 0,75 \cdot l)^3}{6} \Big|_{z > 0,75l}. \quad (7.7)$$

Подставляя $z = l = 4$ м в выражение (7.7) и учитывая, что в т. В прогиб равен нулю, получаем уравнение для определения Φ_0 :

$$EI_x \Phi_0 \cdot 4 + \frac{0,75 \cdot 4^3}{6} - \frac{3 \cdot (4 - 3)^3}{6} = 0,$$

откуда

$$\Phi_0 = -\frac{48}{6 \cdot 4 \cdot EI_x} + \frac{3}{6 \cdot 4 \cdot EI_x} = -\frac{15}{8EI_x} = -\frac{1,875}{EI_x}.$$

Окончательно выражение для прогибов $f_y(z)$ будет иметь вид:

$$EI_x f_y(z) = 1,875 \cdot z + \frac{0,75 \cdot z^3}{6} - \frac{3(z - 3)^3}{6} \Big|_{z > 3\text{ м}}. \quad (7.8)$$

Для определения прогиба в середине пролета подставим $z = 0,5l = 2$ м в выражение (7.8):

$$EI_x f_{y_c} = -1,875 \cdot 2 + \frac{0,75 \cdot 2^3}{6} = -3,75 + 1 = 2,75 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$f_{y_c} = \frac{2,75}{2 \cdot 10^8 \cdot 2147 \cdot 10^{-8}} = -0,0064 \text{ м} = -0,64 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определим величину модуля вектора полного прогиба

$$f_c = \sqrt{(7,45 \cdot 10^{-4})^2 + (-6,4 \cdot 10^{-4})^2} \approx 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Направление вектора полного прогиба показано на рис. 7.5. При этом, угол β определим по формуле:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f_{y_c}}{f_{x_c}} = \frac{-6,4 \cdot 10^{-4}}{7,45 \cdot 10^{-4}} \approx -0,853; \quad \beta = -40,5^\circ.$$

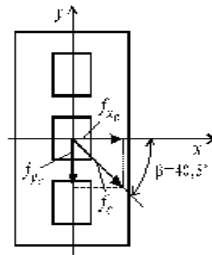


Рис. 7.5

7.7. Внецентренное растяжение (сжатие) стержней большой жесткости

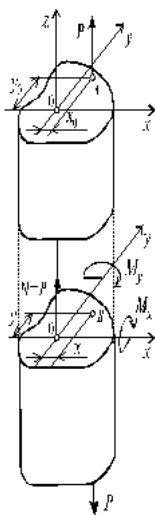


Рис. 7.6

Внецентренное сжатие и растяжение как и кривой изгиб относится к сложному виду сопротивления бруса. При внецентренном растяжении (сжатии) равнодействующая внешних сил не совпадает с осью бруса, как при простом растяжении, а смещена относительно оси z и параллельна ей (рис. 7.6).

Пусть в точке $A(x_A, y_A)$ приложена равнодействующая внешних сил P . Тогда относительно главных осей x и y равнодействующая сила P вызывает моменты:

$$M_x = P \cdot y_A; \quad M_y = P \cdot x_A. \quad (7.9)$$

Таким образом, при внецентренном растяжении (сжатии) в поперечном сечении бруса возникает нормальная сила $N_z = P$ и изгибающие моменты M_x и M_y .

7.8. Определение напряжений, положения нейтральной линии и опасных точек

На основании принципа независимости действия сил в произвольной точке B с координатами x, y нормальное напряжение σ определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P y_A}{I_x} y + \frac{P x_A}{I_y} x. \quad (7.10)$$

Используя выражения для квадратов радиусов инерции сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A},$$

можно (5.35) преобразовать к следующему виду:

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2} \right).$$

Уравнение нейтральной линии получим, приравнявая нулю выражение для нормальных напряжений σ :

$$\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2} \right) = 0. \quad (7.11)$$

Из (7.11) можно легко определить отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях. Если приравнять $x = 0$, то получим:

$$1 + \frac{y_A \cdot a_y}{i_x^2} = 0.$$

где a_y – координата точки пересечения нейтральной линии и оси y .

Решая это уравнение, получим:

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_A}.$$

Аналогичным образом можно определить координату пересечения нейтральной линии и оси x :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_A}.$$

Можно решить и обратную задачу – определить координаты приложения силы P при заданных отрезках a_x и a_y . Опуская простейшие выкладки, приведем окончательные выражения:

$$x_A = -\frac{i_y^2}{a_x}; \quad y_A = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$

Наибольшее напряжения, как и при косом изгибе, имеют место в точке наиболее удаленной от нейтральной линии. При внецентренном растяжении (сжатии) в отличие от косоугольного изгиба нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. Расстояние от начала координат xOy до прямой $ay + bx + c = 0$, как известно из курса аналитической геометрии, определяется по формуле:

$$OC = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Следовательно, в данном случае (рис. 7.7):

$$OC = \frac{1}{A \sqrt{\left(\frac{y_A}{I_x}\right)^2 + \left(\frac{x_A}{I_y}\right)^2}}. \quad (7.12)$$

Тогда, как это следует из (7.12), по мере того, как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

При $x_A \rightarrow 0, y_A \rightarrow 0$, получаем $OC \rightarrow \infty$. Сила в данном случае становится центральной, а напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно. В тех случаях, когда нейтральная линия пересекает сечение, в нем возникают напряжения разного знака. В противном случае в сечении во всех точках возникают напряжения одного знака. Следовательно, в окрестности центра тяжести всегда существует некая область, называемая *ядром сечения*, такая, что если точка приложения силы P расположена в пределах указанной области, то в поперечном сечении возникают напряжения лишь одного знака. При этом если сила приложена по границе ядра сечения, то нейтральная линия касается контура сечения.

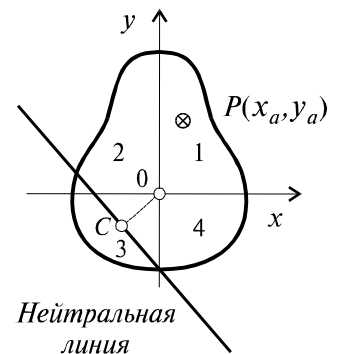


Рис. 7.7.

Данный факт имеет большое значение при проектировании колонн из хрупких материалов, (например, бетона, кирпича и т.д.), которые, как правило, имеют существенно меньшую прочность на растяжение, нежели на сжатие. Поэтому при проектировании таких конструкций необходимо предусмотреть, чтобы равнодейст-

вующая сжимающая сила была расположена в пределах ядра сечения.

7.9. Условие прочности и типы задач, решаемых на его основе

По тем же соображениям, что и при косом изгибе, опасными точками в сечении будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

Пусть в точке 1 действуют максимальные растягивающие, а в точке 2 – максимальные сжимающие напряжения. Тогда условие прочности проектировочного расчета для стержня, материал которого неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, имеет вид:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_p x_1}{i_y^2} + \frac{y_p y_1}{i_x^2} \right) \leq R_t,$$
$$\sigma_2 = \left| \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_p x_2}{i_y^2} + \frac{y_p y_2}{i_x^2} \right) \right| \leq R_c.$$

Для стержня, материал которого одинаково работает на растяжение и сжатие, запишем

$$|\sigma|_{\max} = \left| \frac{P}{A} \left(1 + \frac{x_p x}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_x^2} \right) \right|_{\max} \leq R.$$

Раскрывая условие прочности, можно решать, как и раньше, 3 типа задач. При этом самой простой остается задача определения коэффициента запаса конструкции. Сравнительно просто решается задача, связанная с определением максимальной силы $[P]$. Наиболее сложной является задача проектировочного расчета, которая решается тем же путем, как и при косом изгибе.

8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

8.1. Типы стержневых систем.

Под *стержневой системой* понимается всякая конструкция, состоящая из элементов, имеющих форму бруса. Если элементы конструкции работают только на растяжение или сжатие система называется *фермой* (рис. 8.1, а). Ферма состоит из шарнирно опертых между собой прямых стержней, образующих треугольники и для нее характерно приложение внешних сил в узлах заданной системы.

Если элементы стержневой системы работают в основном на изгиб или кручение, то такая система называется *рамой* (рис. 8.1, б).

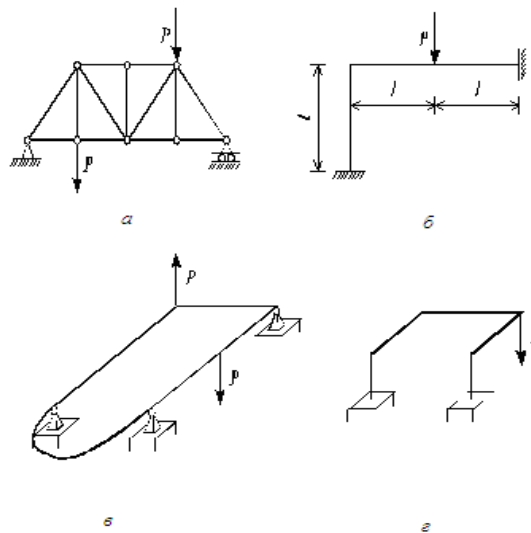


Рис. 8.1.

Если все элементы стержневой системы расположены в одной плоскости, в которой также действуют все внешние силы, включая реакции опор, то система называется *плоской* (рис. 8.1, а, б).

Если все элементы заданной системы расположены в одной плоскости, а внешние силы действуют в перпендикулярной плоскости, то система называется *плоскопространственной* (рис. 8.1, в). Стержневые системы, не относящиеся к двум указанным категориям, называются *пространственными* (рис. 8.1, г).

Все стержневые системы принято разделять на статически определимые и статически неопределимые. Под *статически определимой* понимается такая

система, для которой усилия во всех ее элементах могут быть определены по методу сечений с применением лишь уравнений равновесия. Если этого сделать нельзя, то такая система называется *статически неопределимой*.

Разность между числом неизвестных усилий (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений равновесия, которые могут быть составлены для рассматриваемой системы, называется *степенью статической неопределимости* системы.

8.2. Особенности определения перемещений в плоских стержневых системах (рамах, фермах, комбинированных системах)

Выше мы рассматривали метод начальных параметров для вычисления перемещений в балках. При всех достоинствах этого метода он обладает одним существенным недостатком – при большом количестве участков вычислительные формулы становятся весьма громоздкими. Особенно это существенно в случае криволинейной оси стержневой системы.

В связи с этим, рассмотрим более универсальный метод определения перемещений – *метод Мора*, названный так по имени немецкого ученого, предложившего его.

8.3. Потенциальная энергия упругой деформации в бруске малой кривизны

Изменение потенциальной энергии частиц вещества системы при ее деформации, создаваемой внешними силами, называется потенциальной энергией деформации.

В процессе нагружения система может прийти в колебательное движение. Потенциальная энергия деформации на основании теорем механики в любой момент времени t равна работе внешних сил, сил инерции и сил сопротивления, действующих на точки системы:

$$u(t) = A(t) - \iiint_m \left[\int \left(\frac{d^2\delta}{dt^2} \cos \alpha + \psi \frac{d\delta}{dt} \cos \beta \right) d\delta \right] dm$$

где $u(t)$ — потенциальная энергия деформации; $A(t)$ — работа внешних сил; S — текущее перемещение точки; m — масса системы; $\frac{d^2\delta}{dt^2}dm$ — элементарная сила инерции; $-\frac{d\delta}{dt}dm$ — элементарная сила внутреннего трения, которую считаем пропорциональной скорости точки и направленной в сторону, ей противоположную; ψ — коэффициент пропорциональности, зависящий от материала тела; α — угол между направлением ускорения точки и ее перемещением; β — угол между направлением скорости точки и ее перемещением.

Если величины приложенных к телу сил, достигнув в конце процесса нагружения значений $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, в дальнейшем остаются постоянными, то колебательное движение точек тела будет затухающим. Поэтому в положении статического равновесия, при котором ускорения и скорости всех точек системы равны нулю,

$$u = A,$$

где u — потенциальная энергия деформации в положении статического равновесия; A — работа внешних сил, соответствующая этому состоянию. Следовательно,

$$du = dA.$$

В дальнейшем под Q_i будем понимать как величину сосредоточенной силы, так и величину момента пары и называть Q_i обобщенной силой. Под δ_i будем понимать: для сосредоточенной силы — перемещение точки ее приложения по направлению силы, для пары сил — поворот плоскости ее действия. Назовем δ_i обобщенным перемещением, соответствующим Q_i .

Из закона Гука в силах и перемещениях, который гласит, что до определенных пределов между внешними силовыми факторами и перемещением любой точки тела по любому направлению существует линейная зависимость, для n обобщенных сил, действующих на механическую систему (рис. 9.2, а), получим систему и линейных уравнений, в которых δ_j выражены через Q_i :

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ji} Q_i ; (j=1, 2, \dots, n) \quad (8.1)$$

здесь коэффициенты δ_{ji} при Q_i называются единичными перемещениями или податливостями. Таким образом, δ_{ji} — перемещение сечения, в котором приложена j -я

обобщенная сила по ее направлению, при действии на систему только единичной безразмерной обобщенной силы, приложенной вместо и по направлению Q_i . Или короче: δ_{ij} — перемещение сечения по направлению j от обобщенной единичной силы, приложенной по направлению i . Единичные перемещения показаны на рис. 9.2, б.

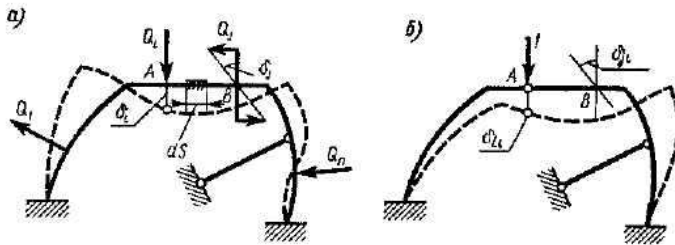


Рис. 8.2.

Выразив из системы (8.1) обобщенные силы через обобщенные перемещения, получим систему и уравнений

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \delta_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Здесь C_{ij} — жесткость по направлению j от единичного перемещения по направлению i , причем $C_{ji} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, где Δ — определитель системы уравнений (9.1), A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента δ_{ji} этого определителя. Если каждая обобщенная сила получит бесконечно малое приращение ΔQ_i , то каждое обобщенное перемещение получит бесконечно малое приращение $\Delta \delta_i$. Тогда приращение работы

$$\Delta A = \sum_{i=1}^n (Q_i + \Delta Q_i) \Delta \delta_i \quad (8.2)$$

а дифференциал работы есть дифференциал потенциальной энергии деформации

$$du = \sum_{i=1}^n Q_i d\delta_i, \quad (8.3)$$

Работа, а следовательно, и потенциальная энергия деформации являются функцией обобщенных перемещений

$$u = u(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

Поэтому, как известно из математического анализа,

$$du = \sum_{i=1}^n d\delta_i.$$

Сопоставляя это выражение с (8.3) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \delta_i} = Q_i. \quad (8.4)$$

Формула (8.4) выражает **теорему Лагранжа**: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенному перемещению равняется соответствующей обобщенной силе.

Несложно доказать, что матрицы $\|C_{ij}\|$ и $\|\delta_{ji}\|$ симметричны, и, следовательно $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Это равенство выражает **теорему взаимности перемещений**, которая гласит: *единичные перемещения с одинаковыми, но переставленными индексами, равны.*

Как следует из (8.1), дифференциалы перемещений можно представить в виде:

$$d\delta_j = \sum_{i=1}^n \delta_{ji} dQ_i; \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Подставим полученное выражение в (9.3) и учтем полученное выше равенство $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Получим

$$du = (\delta_{11}Q_1 + \dots + \delta_{1n}Q_n)dQ_1 + \dots + (\delta_{n1}Q_1 + \dots + \delta_{nn}Q_n)dQ_n.$$

Следовательно, принимая во внимание (8.1), имеем

$$du = \sum_{i=1}^n \delta_i dQ_i. \quad (8.5)$$

Работа является функцией обобщенных сил $u = u(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$, поэтому

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial Q_i} dQ_i. \quad (8.6)$$

Сопоставив полученное выражение с (8.5), получим

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_i.$$

Полученная формула выражает **теорему Кастилиано**: частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равняется соответствующему этой силе обобщенному перемещению.

Чтобы получить $u = u(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ следует проинтегрировать (8.6) по правилу интегрирования полного дифференциала. Так, для двух обобщенных сил, действующих на систему, запишем

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i} = \delta_{ii}Q_i + \delta_{ij}Q_j, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ji}Q_i + \delta_{jj}Q_j \quad (8.8)$$

Тогда из первого равенства (8.7) можно представить

$$u = \delta_{ii} \frac{Q_i^2}{2} + \delta_{ij}Q_jQ_i + f(Q_j), \quad (8.7)$$

где $f(Q_j)$ – неизвестная функция только от Q_j . Для определения этой функции продифференцируем выражение (9.7) по Q_j . Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial Q_j} = \delta_{ij}Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j}.$$

Далее воспользуемся представлением (8.8). Получим

$$\delta_{ji}Q_i + \delta_{jj}Q_j = \delta_{ij}Q_i + \frac{df(Q_j)}{dQ_j}$$

откуда, учитывая, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, получим

$$f(Q_j) = \delta_{jj} \frac{Q_j^2}{2} + u_0,$$

где u_0 – произвольная постоянная.

Подставив полученное выражение в формулу (8.7) будем иметь

$$u = \frac{1}{2} \delta_{ii}Q_i^2 + \delta_{ij}Q_iQ_j + \frac{1}{2} \delta_{jj}Q_j^2 + u_0. \quad (8.8)$$

Принимая во внимание, что при $Q_i = Q_j = 0$ должно следовать равенство $u = 0$, тогда $u_0 = 0$.

Обобщая (8.8) для n обобщенных сил, действующих на систему, получим

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ji}Q_jQ_i.$$

Это выражение можно записать в виде

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j \sum_{i=1}^n \delta_{ji} Q_i, \text{ а, учитывая (8.1), - в форме}$$

$$u = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n Q_j \delta_j \quad (8.9)$$

Эта формула выражает **теорему Клапейрона**: *в положении статического равновесия потенциальная энергия деформации равна сумме половин произведений обобщенных сил на соответствующие им обобщенные перемещения.*

Далее выразим потенциальную энергию деформации системы через внутренние силовые факторы.

С этой целью двумя поперечными сечениями, расстояние между которыми

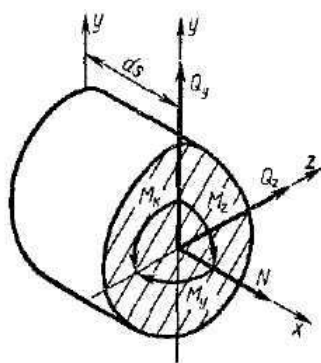


Рис. 9.2

по оси участка dS — бесконечно мало, вырежем на 1-м участке системы (рис. 8.1, а) элемент. Силы упругости в поперечных сечениях элемента могут привести к шести внутренним силовым факторам (рис. 8.2), которые для него должны рассматриваться как обобщенные силы. Под действием этих обобщенных сил правое сечение элемента переместится относительно левого, которое считаем неподвижным.

Перемещения сечения в направлениях осей x, y, z от N, Q_y, Q_z и повороты его около осей x, y, z от M_x, M_y, M_z будут взаимно ортогональны, поэтому обобщенное перемещение, соответствующее каждому внутреннему силовому фактору, будет перемещение, вызванное им самим. Или по-другому: *каждый внутренний силовой фактор будет совершать работу только на созданном им (на собственном) перемещении.* На этом основании du — потенциальная энергия деформации элемента может быть найдена, как сумма потенциальных энергий деформации, определенных при действии на элемент каждого внутреннего силового фактора отдельно:

$$du = du_{M_z} + du_{M_y} + du_{M_x} + du_N + du_{Q_y} + du_{Q_z}$$

При вычислении соответствующих слагаемых, входящих в эту формулу, воспользуемся теоремой Клапейрона (8.9). Так, рассматривая изгиб моментом M_z (рис. 8.3, а), запишем:

$$du_{M_z} = \frac{M_z d\theta_z}{2}, \text{ где } d\theta_z - \text{ поворот правого сечения элемента, остающегося плоским}$$

при чистом изгибе относительно оси z . Принимая во внимание выведенное ранее при рассмотрении плоского изгиба соотношение

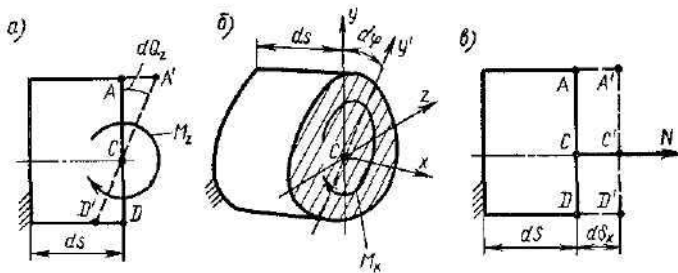


Рис. 8.3

$$\frac{d\theta_z}{ds} = \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{M_z}{EI_z},$$

запишем

$$d\theta_z = \frac{M_z}{EI_z} ds.$$

Тогда

$$du_{M_z} = \frac{M_z d\theta_z}{2} = \frac{M_z^2}{2EI_z} ds.$$

По аналогии запишем $du_{M_y} = \frac{M_y d\theta_y}{2} = \frac{M_y^2}{2EI_y} ds$.

Аналогичным образом рассматривая действие крутящего момента M_k (рис. 8.3,б) и осевую растягивающую силу N , получим:

$$du_{M_k} = \frac{M_k d\phi}{2} = \frac{M_k^2}{2EI_k} ds, \quad du_N = \frac{N d\delta_x}{2} = \frac{N^2}{2EA} ds.$$

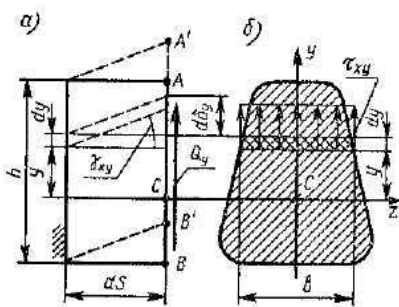


Рис. 8.4.

Угол сдвига γ_{xy} элемента (рис. 8.4,а) с размерами b , ds , dy (рис. 8.4,б) перемещается по высоте сечения h , поэтому для определения du_{Q_y} придется сначала вычислить $d(du_{Q_y})$ — потенциальную энергию деформации этого элемента. Касательные силы упругости, действующие по граням элемента, параллельным нейтральному слою, нормальны к перемещению, и, следовательно, их работа равна нулю. Для

элемента; $\tau_{xy} b dy$ — сила, действующая по грани, совпадающей с поперечным сечением; $d\delta_y = \gamma_{xy} ds$ — перемещение этой грани. Тогда

$$d(du_{Q_y}) = \frac{1}{2} \tau_{xy} b dy \gamma_{xy} ds.$$

Вспользуемся формулой Журавского $\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{onc}}{I_z b}$ и вспомним закон Гука

при чистом сдвиге $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{Q_y S_z^{onc}}{GI_z b}$. Тогда, $d(du_{Q_y}) = \frac{Q_y^2 (S_z^{onc})^2}{2GI_z^2 b} ds dy$.

Откуда следует $du_{Q_y} = \eta_y \frac{Q_y^2}{2GA} ds$. Здесь введена характеристика





$$\eta_y = \frac{A}{I_z^2} \int \frac{(S_z^{onc})^2}{b} dy - \text{зависящая только от формы сечения.}$$

Совершенно аналогично получим формулу:

$$du_{Q_z} = \eta_z \frac{Q_z^2}{2GA} ds.$$

Значения коэффициентов для некоторых форм сечений приведены в Табл. 8.1.

Таблица 8.1.

Форма сечения				
$\eta_x = \eta_y$	10/9	6/5	2,00	3,14

Таким образом, мы получили:

$$\begin{aligned} du &= du_{M_z} + du_{M_y} + du_{M_k} + du_N + du_{Q_y} + du_{Q_z} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_k^2}{EI_k} + \frac{N^2}{EA} + \eta_y \frac{Q_y^2}{EA} + \eta_z \frac{Q_z^2}{EA} \right) ds. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Вводя обозначения: n — число участков системы, s_i — длину i -того участка, получим для системы:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \left(\frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_k^2}{EI_k} + \frac{N^2}{EA} + \eta_y \frac{Q_y^2}{EA} + \eta_z \frac{Q_z^2}{EA} \right) ds. \quad (8.11)$$

8.4. Определение перемещений методом Мора

Суть метод Мора в следующем. Если необходимо определить перемещение в заданной точке по заданному направлению, то наряду с заданной системой внешних сил в этой точке прикладывается внешнее усилие $F = 1$ в интересующем нас направлении.

Далее составляется выражение потенциальной энергии системы, состоящей из n участков с учетом одновременного действия заданной системы внешних сил и силы F :

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{(M_z + \bar{M}_z F)^2}{2GI_z} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{(M_x + \bar{M}_x F)^2}{2EI_x} dz + \\
 & + \sum_{i=1}^n \int \frac{(M_y + \bar{M}_y F)^2}{2EI_y} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{(N_z + \bar{N}_z F)^2}{2EA} dz + \\
 & + \sum_{i=1}^n \int \frac{K_x (Q_x + \bar{Q}_x F)^2}{2GA} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{K_y (Q_y + \bar{Q}_y F)^2}{2GA} dz,
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

где K_x, K_y – безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения и учитывают неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при поперечном изгибе. Так, например, для прямоугольника $K_x = K_y = 1,2$, а для двутавра при изгибе в плоскости его стенки $K = A/A_{CT}$, где A – площадь всего сечения двутавра, A_{CT} – площадь стенки; $N_z, Q_x, Q_y, M_z, M_x, M_y$ – внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях заданной стержневой системы; $\bar{N}_z, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{M}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ – внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях заданной системы, от действия усилия $F = 1$.

Дифференцируя выражение (8.12) по F , и полагая после этого $F = 0$, находим искомое перемещение в искомой точке в нужном направлении.

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{dF} \Big|_{F=0} = & \sum_{i=1}^n \int \frac{M_z \bar{M}_z}{GI_z} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{M_x \bar{M}_x}{EI_x} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} dz + \\
 & + \sum_{i=1}^n \int \frac{N_z \bar{N}_z}{EA} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{K_x Q_x \bar{Q}_x}{GA} dz + \sum_{i=1}^n \int \frac{K_y Q_y \bar{Q}_y}{GA} dz.
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Полученные интегралы называются интегралами Мора и широко применяются при вычислении перемещений стержневых систем.

Для систем, элементы которых работают на растяжение или сжатие (например, шарнирно–стержневые системы – фермы), в формуле Мора (8.13) отличен от нуля будет только слагаемое, содержащее продольные силы. При расчете балок или рамных систем, работающих в основном на изгиб, влияние поперечной и продольной силы на перемещение несущественно и в большинстве случаев их влияние не учитывается. В случае пространственной работы стержня или стержневой системы, элементы которой работают, в основном, на изгиб и кручение, в формуле Мора обычно ограничиваются рассмотрением слагаемых, содержащих изгибающие и крутящие моменты.

Подробно рассмотрим случай, когда брус работает только на изгиб ($M_x \neq 0$, $N_z = M_z = M_y = Q_x = Q_y = 0$). В этой ситуации выражение (8.13) принимает вид:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_x \bar{M}_x}{EI} dz. \quad (8.14)$$

Согласно (8.14) для определения перемещения произвольной точки в произвольном направлении, последовательно необходимо выполнять следующее:

1. Построить эпюру моментов M_x от заданной системы внешних сил;
2. Исключая внешние силы и в точке, где необходимо определить перемещение по заданному направлению, прикладывается единичное усилие (сила – если требуется определить линейное перемещение; момент – если требуется определить угловое перемещение), и от действия единичного усилия строится эпюра моментов \bar{M}_x ;

3. По формуле Мора (8.14) вычисляется искомое перемещение.

Если принять $EI = \text{const}$, то перемещение в некоторой точке стержня определяется как интеграл от произведения двух функций моментов – M_x и \bar{M}_x . В общем виде интеграл Мора можно выразить следующей формулой:

$$I = \frac{1}{EI} \int_0^l f_1(z) f_2(z) dz. \quad (8.15)$$

Часто встречаются случаи, когда на участке стержня длиной l необходимо вычислить интеграл Мора при условии, что по крайней мере одна из функций – линейная (рис. 8.2). Пусть $f_2 = b + kz$, тогда из (8.4) получим :

$$I = b \int_0^l f_1(z) dz + \int_0^l z f_1(z) dz = b\Omega_1 + \int_0^l z d\Omega_1 = b\Omega_1 + k\Omega_1 z_c = \Omega_1 (b + k z_c) = \Omega_1 f_2(z_c), \quad (8.16)$$

где Ω_1 – площадь эпюры f_1 ; $f_2(z_c)$ – ордината линейной эпюры под центром тяжести криволинейной эпюры (рис. 8.5).

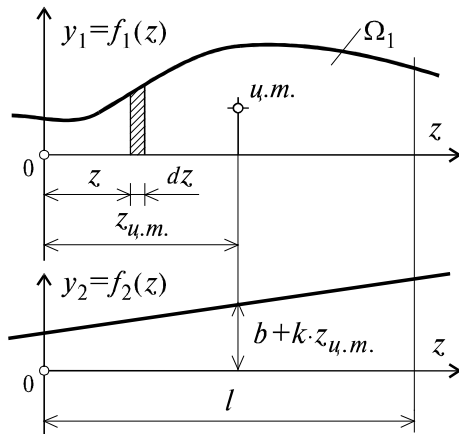


Рис. 8.5.

Приведенное решение носит имя русского ученого Верещагина, впервые его получившего. Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования выражения (8.4) в случае линейности хотя бы одной из подынтегральных функций существенно упрощается и сводится к перемножению площади криволинейной эпюры на ординату второй (линейной) функции под центром тяжести криволинейной.

Используя способ Верещагина, приведем результаты вычисления интегралов Мора для двух наиболее часто встречающихся случаев:

1. Обе функции f_1 и f_2 – линейные (рис. 8.5), тогда

$$I = \frac{l}{6} (2ab + 2cd + ad + bc); \quad (8.17)$$

2. Функция f_1 – квадратная парабола, f_2 – линейная функция (рис. 8.7). Такая ситуация встречается, когда на участке длиной l приложена равномерно распределенная нагрузка q , тогда

$$I = \frac{2}{3} f \cdot l \cdot \frac{a+c}{2}, \quad (8.18)$$

где f – “стрелка” квадратной параболы (рис. 8.7), $f = \frac{ql^2}{8}$.

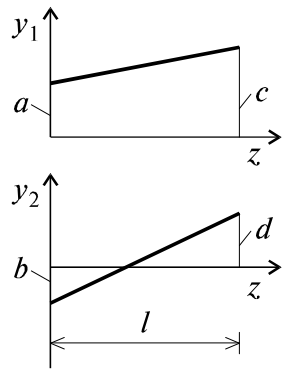


Рис. 8.6.

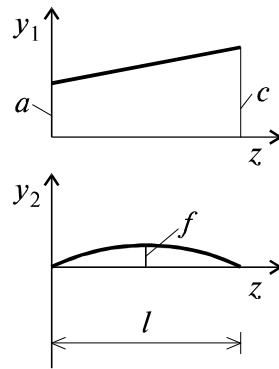


Рис. 8.7.

В общем случае, если площадь Ω эпюры моментов имеет сложную геометрию и представляется возможным ее разбить на площади Ω_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), имеющие элементарную геометрию, то интеграл Мора I от произведения эпюры Ω на эпюру моментов M , может быть представлен в виде:

$$I(\Omega, M) = I(\Omega_1, M) + I(\Omega_2, M) + I(\Omega_3, M) + \dots \quad (8.19)$$

9. МЕТОД СИЛ, РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Для расчета усилий в статически неопределимых стержневых системах существуют различные методы. Здесь рассмотрим *метод сил*.

9.1. Статически неопределимые системы. Необходимые и лишние связи

Если рассматривать внешние связи, то можно отметить, что положение жесткого тела на плоскости x, y характеризуется тремя независимыми параметрами – координатами x, y и углом поворота рассматриваемой плоскости. Таким образом, необходимое для равновесия число наложенных внешних связей должно быть равно трем (по количеству уравнений равновесия – $\sum x = 0, \sum y = 0, \sum m = 0$). Если плоская система состоит из D частей, каждую из которых можно рассматривать как жесткое тело, то количество параметров, определяющих положение этой системы будет равно $3D$. Каждый шарнир, соединяющий две части системы, разрешает лишь их взаимный поворот, устраняя возможность их взаимных смещений – следовательно он уменьшает количество возможных перемещений системы на две единицы. Кроме этого, каждый опорный стержень устраняет возможность перемещения системы в соответствующем направлении. Таким образом, подсчитать степень статической неопределимости системы, определяемую внешними связями, можно по следующей формуле:

$$W = 3D - 2Ш - C,$$

где D – число частей (“дисков”) системы, каждая из которых может рассматриваться как абсолютно жесткое тело, $Ш$ – количество шарниров в системе, соединяющих “диски”, C – число опорных стержней. Для статически определимых систем $W = 0$. При $W < 0$ система является статически неопределимой.

Наиболее характерные типы внешних связей и их схематичные изображения рассмотрены при изучении теории плоского изгиба.

На рис. 9.1 показана плоская рама, имеющая в первом (*а*) случае три внешние связи, а во втором случае (*б*) – пять. Значит, в первом случае рама имеет необходи-

мое для статической определимости количество внешних связей, а во втором же – две дополнительные внешние связи. Однако в обеих ситуациях рама статически неопределима, т.к. конфигурация ее такова, что не позволяет определить усилия во всех ее элементах, используя только уравнения равновесия. Следовательно, для окончательного ответа на вопрос о статической определимости системы необходимо проведение совместного анализа наложенных на систему внешних и внутренних связей (более подробно этот вопрос рассматривается в курсе строительной механики).

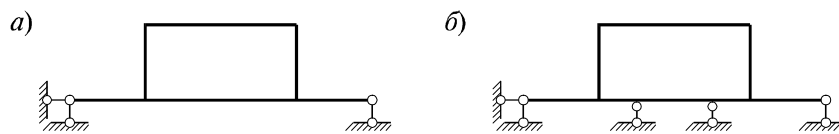


Рис. 9.1.

9.2. Эквивалентная и основная система метода сил

Суть метода сил заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется соответствующими силами и моментами. Их величины, в дальнейшем, подбираются так, чтобы перемещения системы соответствовали тем бы ограничениям, которые на нее накладываются отброшенными связями.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определенной. Она носит название *основной системы*. Для каждой статически неопределимой заданной системы (рис. 9.2, а) можно подобрать, как правило, различные основные системы (рис. 9.2, б, в), однако их должно объединять следующее условие – основная система должна быть статически определенной и геометрически неизменяемой (т.е. не должна менять свою геометрию без деформаций элементов).

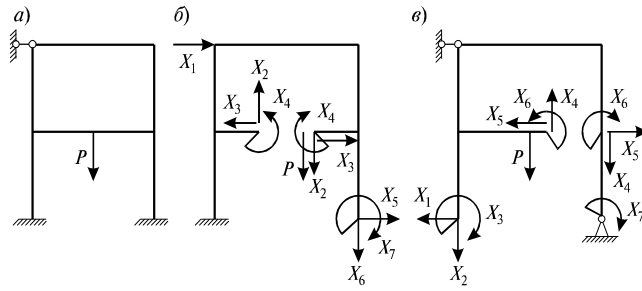


Рис. 9.2.

Рассмотрим систему, которая дважды статически неопределима (рис. 9.3, а). Заменяем в основной системе действие отброшенных связей неизвестными усилиями X_1 и X_2 (рис. 9.3, б). Принятая основная система будет работать также, как и заданная, если на нее наложить условие отсутствия вертикальных перемещений в точках A и B (т.е. в тех местах, где в заданной системе стоят опоры):

$$y_A(P, x_1, X_2) = 0; \quad y_B(P, X_1, X_2) = 0. \quad (9.1)$$

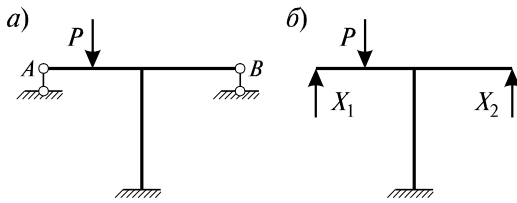


Рис. 9.3

Уравнения (9.1) называются *уравнениями совместности деформаций* и при их выполнении фактически устанавливается условие эквивалентности между заданной и основной системой при действии внешней силы P и неизвестных усилий X_1 и X_2 . На основании

принципа независимости действия сил (9.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_A(P) + y_A(X_1) + y_A(X_2) &= 0, \\ y_B(P) + y_B(X_1) + y_B(X_2) &= 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где $y_A(P)$, $y_B(P)$, $y_A(X_1)$, $y_B(X_1)$, $y_A(X_2)$, $y_B(X_2)$ – вертикальные перемещения точек A и B основной системы соответственно от действия сил P , X_1 , X_2 .

9.3. Канонические уравнения метода сил

Вводя обозначения δ_{11} , δ_{12} , Δ_{1P} – вертикальные перемещения точки A основной системы, соответственно, от последовательного действия сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, от внешней силы P ; δ_{21} , δ_{22} , Δ_{2P} – вертикальные перемещения точки B основной системы, соответственно, от последовательного действия сил $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, от внешней

силы P , и учитывая существование линейности связи между силой и перемещением, систему уравнений (9.2) можно преобразовать в канонической форме:

$$\begin{aligned}\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} &= 0.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Последние уравнения носят названия *канонических уравнений метода сил*.

Для вычисления коэффициентов при неизвестных X_1 и X_2 используют формулу Мора:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dz, \quad (i, j = 1, 2).\tag{9.4}$$

Легко видеть, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, это свойство называется законом *парности коэффициентов* при неизвестных. Свободные же коэффициенты определяются по формуле:

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{M_i M_P}{EI} dz.\tag{9.5}$$

После решения системы (9.3) определяются величины неизвестных усилий X_1 и X_2 . Если их значения получились отрицательными, это означает, что реально они действуют в направлении противоположном принятому. Окончательная эпюра моментов определяется по зависимости

$$M_{мж} = M_m + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2.\tag{9.5}$$

Эпюра поперечных сил Q_{OK} может быть построена по эпюре моментов M_{OK} с использованием зависимости $Q = \frac{dM}{dz}$ и величин приложенных к системе усилий.

9.4. Принципы расчета простых статически неопределимых балок

Расчет статически неопределимых балок с использованием метода сил производится в определенном порядке, который разберем на конкретном примере.

Для балки (рис. 9.4) задано: $l_1 = 2 l_2$, $P = q l_1$, $m = q l_1^2$.

Требуется:

1. Определить степень статической неопределимости системы и составить уравнение совместности деформаций;

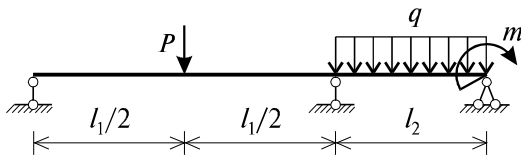


Рис. 9.4

2. Определить коэффициенты и решить каноническое уравнение метода сил;

3. Построить эпюры моментов M и поперечных сил Q .

Решение проводится в следующей последовательности:

1. *Определяется степень статической неопределимости системы и составляется уравнение совместности деформаций.*

Используя формулу для определения W , подсчитаем степень статической неопределимости системы.

Имеем: $D = 1$, $Ш = 0$, $C = 4 \rightarrow W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = -1$, следовательно система один раз статически неопределима.

Основную систему получим путем отбрасывания опоры в точке A и замены ее действия неизвестным усилием X_1 (рис. 9.5). Каноническое уравнение метода сил в данном случае запишется в следующем виде:

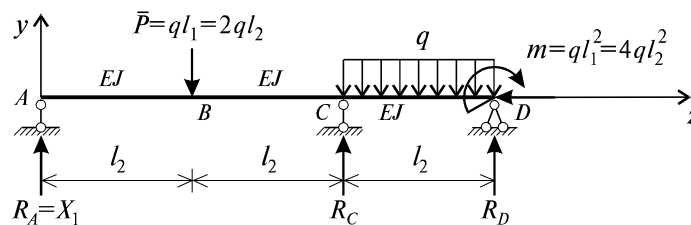


Рис. 9.5

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

2. *Определяются коэффициенты и решается каноническое уравнение метода сил.*

От силы X_1 строим эпюру M_1 (рис. 9.6). Для определения величины δ_{11} воспользуемся выражением (9.4). Фактически эпюру M_1 нужно умножить саму на себя и проинтегрировать это произведение:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_1 dz = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2l_2}{6} \left[2 \cdot (2l_2)^2 \right] + \frac{l_2}{6} \left[2 \cdot (2l_2)^2 \right] \right) = \frac{4l_2^3}{EI}.$$

Для определения свободного коэффициента в каноническом уравнении строим в основной системе эпюру моментов M_P от внешней нагрузки (рис. 9.7) и в соответствии с (9.5) получаем:

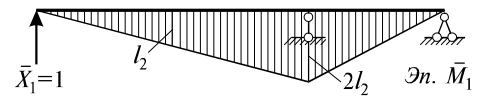


Рис .9.6

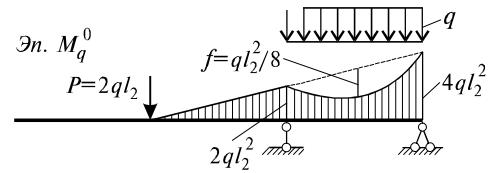


Рис .9.7

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M_1 M_P dz = \\ &= -\frac{l_2}{6EI} \cdot (2 \cdot 2l_2 \cdot 2ql_2^2 + 2ql_2^2 \cdot l_2) - \frac{l_2}{6EI} \cdot (2 \cdot 2ql_2^2 \cdot 2l_2 + 2l_2 \cdot 4ql_2^2) + \\ &\quad + \frac{2}{3EI} \cdot \frac{ql_2^2}{8} \cdot l_2 \cdot \frac{2l_2}{2} = -\frac{51}{12EI} ql_2^4. \end{aligned}$$

При вычислении Δ_{1P} было учтено, что эпюры M_1 и M_P имеют разный знак, т.к. вызывают растяжение разных волокон – об этом говорит отрицательный знак при Δ_{1P} . Кроме этого, криволинейный участок в эпюре M_P был представлен как разность трапеции и параболического сегмента.

Напишем уравнение совместности деформаций в виде

$$EI\delta_{11} \cdot X_1 + EI\Delta_{1P} = 0,$$

и, подставляя найденные величины перемещений, получим:

$$4l_2^3 \cdot X_1 = \frac{51}{12} ql_2^4, \text{ откуда } X_1 = \frac{17}{16} ql_2.$$

3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Окончательную эпюру изгибающих моментов получим по формуле:

$$M_{ок} = M_P + M_1 \cdot \frac{17}{16} ql_2.$$

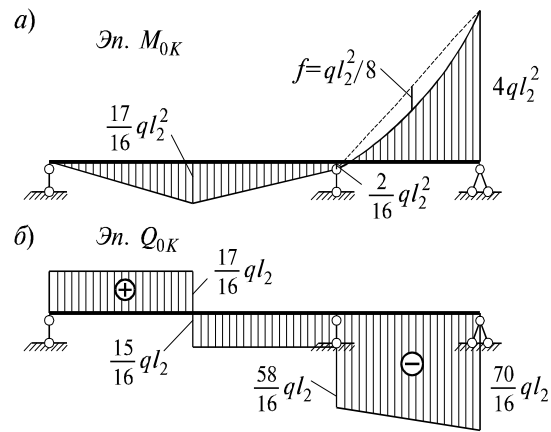


Рис. 6.15

9.5. Контроль правильности решения статически неопределимых систем

В какой бы эквивалентной системе не решалась задача, эпюра M_{0K} , при правильном решении должна быть одной и той же. Поэтому произведение M_{0K} на любую единичную эпюру в любой эквивалентной системе должно равняться нулю, так как оно является перемещением сечения, в котором находилась лишняя связь, по направлению этой связи в данной эквивалентной системе. Для полной проверки правильности решения следует взять единичную эпюру, отличную от тех, которые использовались при определении лишних неизвестных.

10. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА

10.1. Понятие о напряженном состоянии в точке упругого тела и его виды. Тензор напряжений

Напряжения являются результатом взаимодействия частиц тела, появляющегося при нагружении его внешними силами. Действию внешних сил, стремящихся изменить расположение частиц тела или вызвать их смещение, препятствуют возникающие при этом в теле напряжения.

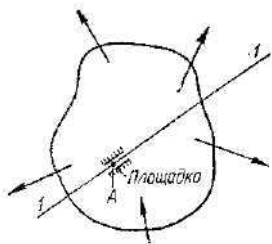


Рис. 10.1.

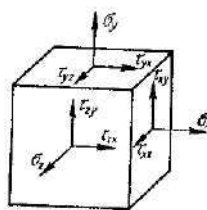


Рис. 10.2.

Эти напряжения ограничивают смещение некоторой малой величиной. В одной и той же точке напряжения в разных направлениях, как правило, будут различными и только в отдельных случаях нагружения они могут быть одинаковыми.

Рассматривая напряжение в точке A нагруженного тела, отнесенные к малым площадкам (рис. 10.1), принадлежащим двум разным частям тела, разделенного течением $I - I$, проведенным через эту точку, легко убедиться, что если под действием внешних нагрузок площадки стремятся отойти одна от другой или сблизиться, то между ними возникают соответственно растягивающие или сжимающие *нормальные напряжения* σ ; если площадки стремятся сдвинуться одна относительно другой, то в них возникают *касательные напряжения* τ ; если же одна площадка стремится отойти от другой, оставаясь ей параллельной в каком-нибудь произвольном направлении, то в такой площадке одновременно возникают и нормальные σ и касательные τ напряжения, а их результирующей является *полное напряжение* p , вектор которого совпадает с этим направлением. Перемещение площадки в этом случае может быть геометрически разложено на два перемещения: взаимное удаление и сдвиг.

В общем случае, выделим в окрестности рассматриваемой в нагруженном теле точки элементарный объем материала в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 10.2). На его гранях влияние удаленной части тела должно быть заменено соответствующими напряжениями или их составляющими (нормальными и касательными напряжениями), как показано на рисунке. При произвольном выборе положения координатных плоскостей, в каждой из них, вообще говоря, имеются и нормальные, и касательные напряжения. Для них вводятся соответствующие обозначения в плоскости $xу$: $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$; в плоскости xz : $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$; в плоскости yz : $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$. Здесь первый индекс показывает ориентацию площадки, в которой действует напряжение, т.е. какой из координатных осей она перпендикулярна. Второй индекс указывает направление напряжения по координатной оси

При изменении ориентации граней выделенного *элементарного* параллелепипеда напряжения на его гранях также будут изменяться. Всегда можно найти такую ориентацию элемента, при которой в его гранях касательные составляющие напряжений будут отсутствовать.

Те площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения на этих площадках — *главными напряжениями*. Можно доказать, что в каждой точке любым образом нагруженного тела всегда имеется по крайней мере три главные взаимно перпендикулярные площадки, т. е. площадки, в которых отсутствуют касательные напряжения. Направления, параллельные главным напряжениям, называются *главными направлениями* в данной точке. Главные напряжения принято обозначать $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при этом полагают $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, что между указанными напряжениями существует следующее соотношение (понимая его в алгебраическом смысле): $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Напряженное состояние, в котором только одно из главных напряжений (любое из трех) не равно нулю, а два других равны нулю, называется *одноосным* или *линейным* (рис. 10.3, а). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то такое напряженное состояние называется *двухосным* или *плоским* (рис. 10.3, б). Случай напряженного состояния, при котором все три главные напряжения отличны от нуля, называется *трехосным* или *объемным* (рис. 10.3, в).

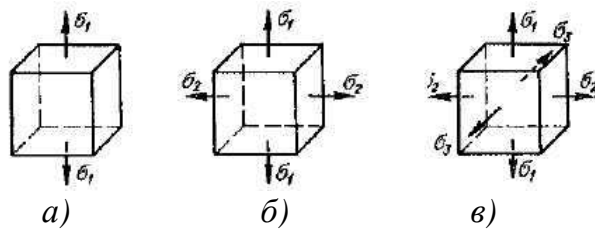


Рис. 10.3.

Кроме того, различают *однородное* напряженное состояние тела, при котором в каждой точке какого-либо сечения и всех параллельных ему сечений напряжения одинаковы, и *неоднородное* напряженное состояние, при котором в разных точках любого сечения рассматриваемого тела или других параллельных ему сечений напряжения различны.

В общем случае объемное напряженное состояние в точке описывается матрицей третьего порядка

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Эта матрица носит название тензора напряжений, а ее элементы (напряжения) называются компонентами тензора напряжений.

10.2. Напряжения на наклонных площадках

Пусть требуется найти нормальное и касательное напряжения в точке A проведенного в нагруженном теле сечения (рис. 10. 1). Помещаем в точке A начало системы координат и проводим сечение, параллельное данному, отсекающее на координатных осях бесконечно малые отрезки dx , dy , dz . Вырезаем образованный тетраэдр и рассматриваем его равновесие. Напряжения по граням тетраэдра для большей ясности изображены на двух рисунках. Считаем компоненты напряженного состояния (рис. 10.4,а) и направляющие косинусы l_i, m_i, n_i внешней нормали i к наклонной грани тетраэдра заданными. Напряжение p по этой грани разлагаем на нормальную и касательную составляющие - соответственно σ_i и τ_i , а также на координатные направления p_x, p_y, p_z (рис. 10.4, б). Если площадь наклонной

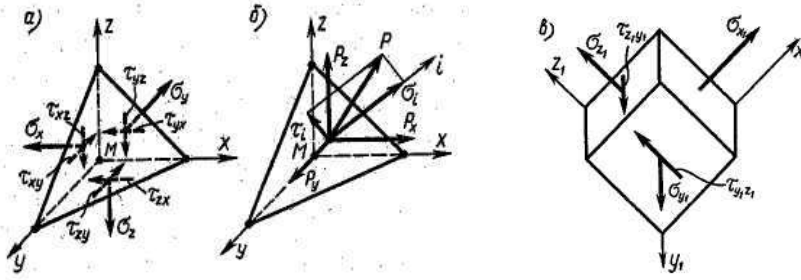


Рис. 10.4.

границы тетраэдра равна dA , то площади его граней, нормальных к осям x , y , z , соответственно равны:

$$dA_x = dA \cdot l_i, dA_y = dA \cdot m_i, dA_z = dA \cdot n_i$$

Составим уравнения равновесия рассматриваемого элемента. При этом рис. 10.4,а и б рассматриваем совместно. Для тетраэдра:

$$\sum X = p_x dA - \sigma_x l_i dA - \tau_{xy} m_i dA - \tau_{zx} n_i dA = 0,$$

$$\sum Y = p_y dA - \tau_{xy} l_i dA - \sigma_y m_i dA - \tau_{zy} n_i dA = 0,$$

$$\sum Z = p_z dA - \tau_{zx} l_i dA - \tau_{yz} m_i dA - \sigma_z n_i dA = 0.$$

Сокращая эти уравнения на dA , получим:

$$p_x = \sigma_x l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{zx} n_i$$

$$p_y = \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i \quad (10.2)$$

$$p_z = \tau_{zx} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i$$

Проекция вектора на любое направление равна сумме проекций его составляющих на это направление, поэтому

$$\sigma_i = p_x l_i + p_y m_i + p_z n_i$$

или

$$\sigma_i = \sigma_x l_i^2 + \sigma_y m_i^2 + \sigma_z n_i^2 + 2\tau_{xy} l_i m_i + 2\tau_{yz} m_i n_i + 2\tau_{zx} n_i l_i, \quad (10.3)$$

$$\tau_i = \sqrt{p^2 - \sigma_i^2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_i^2}.$$

Далее можно осуществить подстановку выражений p_x , p_y , p_z и σ_i через компоненты напряженного состояния и направляющие косинусы нормали i .

В силу бесконечной малости dx , dy , dz напряжения σ_i и τ_i по наклонной грани тетраэдра равны нормальному и касательному напряжениям в точке M данного сечения.

10.3. Закон парности касательных напряжений

Следует отметить, что показанные на рис. 10.2 напряжения принято считать положительными. Рассматривая равновесие элемента, т.е. приравнивая нулю сумму моментов всех сил относительно осей x , y и z получим следующие равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

которые отражают суть закона парности касательных напряжений (частично рассмотренного ранее при выводе формулы Журавского): на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательного напряжения, нормальные к линии пересечения площадок, равны по величине, а по направлению таковы, что стремятся повернуть элемент в противоположные стороны.

Таким образом, из его девяти компонент тензора напряжений в силу закона парности касательных напряжений могут быть заданы только шесть компонент.

10.6. Главные напряжения и площадки

Как указывалось выше, главными площадками в заданной точке тела называются площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются главными напряжениями.

Рассмотрим метод определения главных напряжений.

Если главная площадка существует, то в ней $p = \sigma_i$, и, следовательно, для этой площадки

$$p_x = \sigma_i l_i, p_y = \sigma_i m_i, p_z = \sigma_i n_i$$

Подставляя равенства в (10.2) и используя равенство суммы квадратов направляющих косинусов единице

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1,$$

получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными: главным напряжением σ_i и соответствующими направляющими косинусами l_i, m_i, n_i нормали к главной площадке, так как ее положение неизвестно:

$$\begin{aligned}\sigma_i l_i &= \sigma_x l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{zx} n_i \\ \sigma_i m_i &= \tau_{xy} l_i + \sigma_y m_i + \tau_{zy} n_i \\ \sigma_i n_i &= \tau_{zx} l_i + \tau_{yz} m_i + \sigma_z n_i\end{aligned}\quad (10.4)$$

или

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{zx} n_i = 0 \\ \tau_{xy} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{zy} n_i = 0 \\ \tau_{zx} l_i + \tau_{yz} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0 \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \end{cases}$$

Первые три уравнения представляют линейную однородную систему с неизвестными l_i, m_i, n_i которые, как следует из ее четвертого уравнения, одновременно нулю равняться не могут. Решение линейной однородной системы отлично от нуля только в том случае, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \quad (10.5)$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение с неизвестным главным напряжением σ_i :

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 + I_2 \sigma_i - I_3 = 0. \quad (10.6)$$

В этом уравнении:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned}$$

Как известно из алгебры, три корня кубического уравнения с действительными коэффициентами (10.6) могут быть либо действительными числами, либо один из корней будет действительным числом, а два другие — комплексными со-

пряженными числами. Значит, одно главное напряжение, а следовательно, и одна главная площадка существуют.

Однако, как нетрудно доказать, уравнение (10.6) в силу симметрии определителя (10.5) относительно главной диагонали, имеет все три действительных корня.

При повороте координатных осей компоненты напряженного состояния в точке тела изменяются, а главные напряжения, или корни уравнения (10.6) ($i=1, 2, 3$) остаются неизменными. Отсюда следует, что эти уравнения одинаковы или их коэффициенты и свободные члены соответственно равны.

Коэффициенты I_1 , I_2 и свободный член I_3 уравнения (10.6) **называются инвариантами** (независящими от выбора системы координатных осей) напряженного состояния в данной точке тела. Из выражения для I_1 в частности, следует, что сумма трех нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку, постоянна.

В заключение отметим, что если в качестве исходных принять главные оси I, II, III, то формулы для определения нормальных и касательных напряжений на произвольно ориентированной площадке (нормаль n к которой образует углы α_1 , α_2 и α_3 с соответствующими осями) значительно упрощаются:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 \\ p_n &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3}, \\ \tau_n &= \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2} \end{aligned} \quad (10.7)$$

10.7. Круговая диаграмма напряженного состояния Мора. Экстремальные касательные напряжения

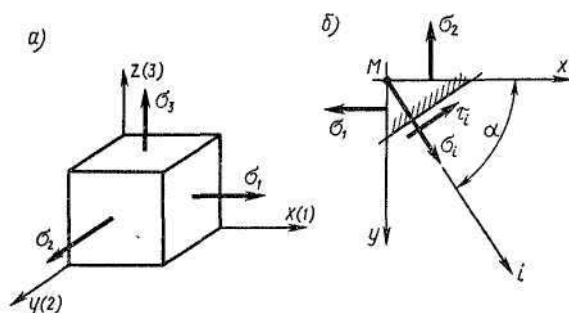


Рис.10.5.

У произвольной точки тела вырежем элемент, по бесконечно малым граням которого действуют главные напряжения (рис. 10.5, а). С целью упрощения изображения компоненты напряженного состояния здесь и в дальнейшем по-

казываем только на передних гранях вырезанного элемента (условность). Для этого элемента:

$$\sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2, \sigma_z = \sigma_3, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

Найдем σ_i и τ_i в произвольной площадке, проходящей через ось z (ось 3). Для этой площадки (рис. 10.5, б):

$$l_i = \cos \alpha, m_i = \sin \alpha, n_i = 0.$$

Обратимся к формулам для определения нормальных напряжений на наклонной площадке. Запишем

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \text{ или} \\ \sigma_i &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (10.7)$$

На основании формул (10.2) для этой площадки будем иметь:

$$p_x = \sigma_1 \cos \alpha, p_y = \sigma_2 \sin \alpha, p_z = 0,$$

а, следовательно, для касательного напряжения

$$\tau_i = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha - \sigma_1^2 \cos^4 \alpha - \sigma_2^2 \sin^4 \alpha - 2\sigma_1 \sigma_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

или

$$\tau_i = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (10.8)$$

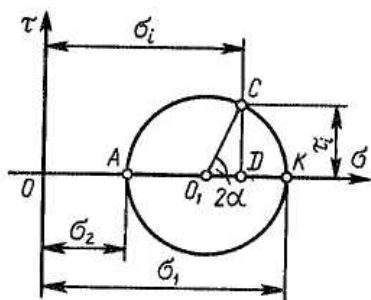


Рис. 10.6.

Взяв систему осей σ, τ (рис. 10.6) и отложив по оси σ в выбранном масштабе σ_1 и σ_2 , построим на разности $\sigma_1 - \sigma_2$, как на диаметре, окружность. Проведем из центра окружности луч, составляющий с осью σ угол 2α . Докажем, что отрезки OD и DC в масштабе диаграммы соответственно равны σ_i и τ_i . Действительно,

$$OD = OA + AO_1 + O_1D = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha,$$

или

$$OD = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (10.9)$$

$$DC = O_1C \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Соответствующие выражения (10.6), (10.7) и (10.9) совпадают, что доказывает наше утверждение.

Значит, абсциссы точек построенной окружности в выбранном масштабе равны нормальным, а ординаты — касательным напряжениям, действующим по площадкам, проходящим через ось 3 (третью главную ось). Следовательно, абсциссы и ординаты точек окружностей, построенных на разностях $\sigma_2 - \sigma_3$ и $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметрах (рис. 10.7), равны нормальным и касательным напряжениям по площадкам, проходящим соответственно через оси 1

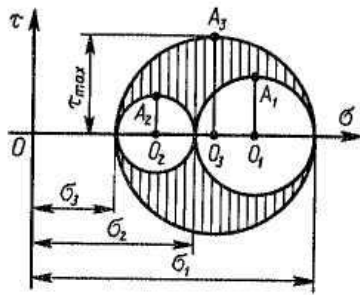


Рис. 10.7.

и 2 (первую и вторую главные оси). Можно доказать, что абсциссы и ординаты точек заштрихованной области в выбранном масштабе соответственно равны нормальным и касательным напряжениям по произвольно ориентированным площадкам, проходящим через заданную точку.

Построенная на рис. 10.7 диаграмма носит название круговой диаграммы напряженного состояния (напряжений) в данной точке тела. Окружность, построенная на разности $\sigma_1 - \sigma_3$, как на диаметре, называется определяющей.

Выводы.

1. Главные напряжения достигают экстремальных значений, т. е. σ_1 - наибольшее нормальное напряжение из всех нормальных напряжений, действующих по площадкам, проходящим через данную точку, а σ_3 — наименьшее.
2. Наибольшие ординаты окружностей III, I и II - O_3A_3 , O_1A_1 и O_2A_2 - равны их радиусам и составляют с осью σ угол $2\alpha = 90^\circ$. Значит, наибольшие касательные напряжения в площадках, проходящих через оси 3, 1 и 2, соответственно равны

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

а площадки, в которых они действуют, делят углы между первой и второй, второй и третьей, третьей и первой главными площадками пополам.

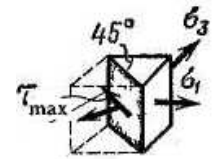


Рис. 10.8.

Максимальное касательное напряжение, действующее по площадкам, проходящим через данную точку, равно наибольшей ординате заштрихованной области - радиусу O_3A_3 . Положение этой площадки показано на рис.10.8.

Следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

10.8. Октаэдрические напряжения

Площадка, равнонаклоненная к направлениям трех главных напряжений, называется октаэдрической, а действующие на ней напряжения — октаэдрическими напряжениями. Указанные площадки отсекают на осях I, II, III равные отрезки и образуют в пространстве октаэдр (рис. 10.9). Косинусы углов α_1, α_2 и α_3 являются направляющими косинусами для нормали и поэтому связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1.$$

Для октаэдрических площадок

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{\text{окт}}$ и, следовательно,

$$\cos \alpha_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя это значение косинусов в выражения (10.7) имеем

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$p_{\text{окт}} = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}.$$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = p_{\text{окт}}^2 - \sigma_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2].$$

Отсюда окончательно имеем

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

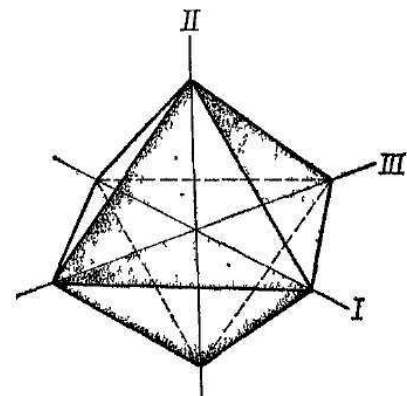


Рис. 10.9.

10.9. Основы теории деформированного состояния тела в точке.

Понятие о главных деформациях

Исследуем деформацию упругого тела. Чтобы определить ее, необходимо сравнить положения точек тела до и после приложения нагрузки. На рис. 10 показано тело и точка A , координаты

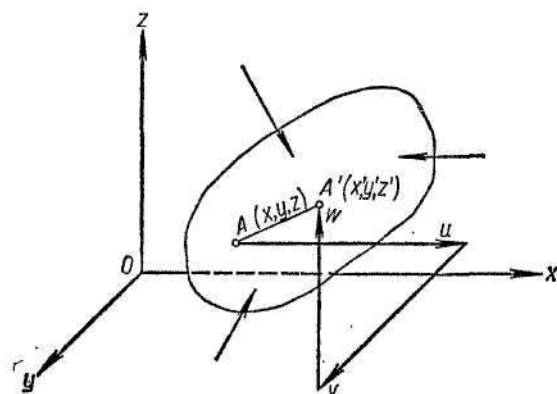


Рис. 10.10.

которой до деформации x, y, z . Под действием нагрузки точка A переместится в новое положение — в точку A' с координатами x', y', z' . Отрезок AA' называется перемещением точки A .

Различают два вида перемещений: перемещение всего тела целиком без его деформации и перемещение, связанное с деформацией тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике как перемещения абсолютно твердого тела. В сопротивлении материалов рассматриваются только перемещения, связанные с деформацией тела.

Проекции перемещения точки A на координатные оси x, y и z равны разности соответствующих координат точек A и A' :

$$u = x' - x,$$

$$v = y' - y,$$

$$w = z' - z$$

и являются функциями координат точки:

$$\begin{aligned}
 u &= u(x, y, z), \\
 v &= v(x, y, z), \\
 w &= w(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Разница в величинах перемещений в различных точках тела вызывает его деформацию.

Бесконечно малый параллелепипед $dx dy dz$, вырезанный из упругого тела около произвольной точки A , вследствие различия перемещений его точек деформируется, т. е. изменяется длина его ребер и искажаются первоначально прямые углы между гранями.

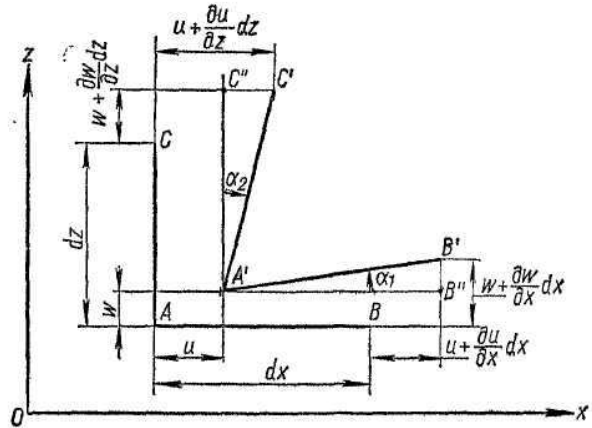


Рис.10.11.

На рис. 10.11 изображены два ребра этого параллелепипеда: ребро AB , параллельное оси x , и ребро AC , параллельное оси z . Длина ребра AB равна dx , ребра AC — dz . После деформирования точки A , B и C займут новые положения — A' , B' и C' .

При этом точка A получит перемещение, составляющие которого в плоскости чертежа u и w . Точка B , отстоящая от точки A на бесконечно малом расстоянии dx , получит перемещение, составляющие которого будут отличаться от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счет изменения координаты x :

При этом точка A получит перемещение, составляющие которого в плоскости чертежа u и w . Точка B , отстоящая от точки A на бесконечно малом расстоянии dx , получит перемещение, составляющие которого будут отличаться от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счет изменения координаты x :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

В свою очередь, составляющие перемещения точки C будут отличаться от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счет изменения координаты z :

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Длина проекции ребра AB на ось x после деформации будет:

$$A'B'' = dx - u + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Проекция абсолютного удлинения ребра AB на ось x равна:

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси x называется линейной деформацией по направлению оси x . Она равна:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично получим линейные деформации по направлениям координатных осей y и z :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Итак, *линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.*

Рассмотрим изменения углов между ребрами параллелепипеда (см. рис. 10.11). Тангенс угла поворота ребра AB в плоскости xOz равен:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) - w}{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно полагать $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ и пренебречь линейной деформацией ε_x по сравнению с единицей. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогично находим угол поворота ребра AC в этой же плоскости:

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Угол сдвига в плоскости xOz , т. е. искажение прямого угла BAC , называется угловой деформацией и определяется как сумма углов поворота ребер AB и AC :

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Аналогично найдем угловые деформации в двух других координатных плоскостях:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Итак, угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещения в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.

Таким образом, мы получили шесть основных зависимостей составляющих линейных и угловых деформаций от составляющих перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Они носят название формул Коши.

В пределе, когда ребра параллелепипеда стремятся к нулю, формулы (10.10) определяют линейные и угловые деформации в точке A .

Правило знаков для составляющих деформации:

1. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям, а отрицательным — укорочения.
2. Положительным угловым деформациям соответствует уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным — увеличение тех же углов.

Рассматривая линейную деформацию произвольно ориентированного волокна несложно вывести следующее соотношение

$$\epsilon_p = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} nl$$

Как нетрудно заметить, эта формула по виду совпадает с выражением для нормального напряжения на произвольно ориентированной площадке, в которой компоненты линейных деформаций заменены на соответствующие компоненты нормальных напряжений, а компоненты угловых деформаций — касательных напряжений. Таким же образом можно провести полную аналогию между теорией напряжений и деформаций.

Таким образом, можно сказать, что совокупность значений

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

образует симметричный тензор второго ранга, называемый тензором деформаций.

Среди всевозможных волокон, исходящих из рассматриваемой точки, всегда можно указать три взаимно перпендикулярных волокна, которые и в деформированном состоянии остаются перпендикулярными друг к другу. При этом их линейные деформации будут иметь экстремальные значения. Такие волокна называют главными, а их линейные деформации – главными деформациями. Направления главных волокон называют главными направлениями деформаций или главными осями деформаций.

Можно показать, что определение главных деформаций сводится к решению кубического уравнения

$$\lambda^3 - B_1\lambda^2 + B_2\lambda - B_3 = 0$$

где B_1, B_2, B_3 – инварианты тензора деформаций, которые определяются по формулам:

$$B_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$B_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{4}\gamma_{yx} & \frac{1}{4}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{4}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{4}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{4}\gamma_{xz} & \frac{1}{4}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix},$$

Очевидно, что рассмотренное кубическое уравнение также имеет три действительных корня $\lambda_{1,2,3}$ – которые являются величинами главных деформаций $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

10.10. Обобщенный закон Гука.

Рассмотрим экспериментально обоснованные соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций в общем случае

нагрузки. Ограничимся рассмотрением однородных изотропных тел в упругой стадии деформации, при этом скорость деформации учитывать не будем.

Следуя Гуку, запишем, что **компоненты деформаций в данной точке тела являются линейными и однородными функциями компонентов напряжений в этой точке и (наоборот).**

Математически это можно записать так:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{14}\tau_{xy} + c_{15}\tau_{yz} + c_{16}\tau_{zx} \\
 \varepsilon_y &= c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{24}\tau_{xy} + c_{25}\tau_{yz} + c_{26}\tau_{zx} \\
 \varepsilon_z &= c_{31}\sigma_x + c_{32}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{34}\tau_{xy} + c_{35}\tau_{yz} + c_{36}\tau_{zx} \\
 \gamma_{xy} &= c_{41}\sigma_x + c_{42}\sigma_y + c_{43}\sigma_z + c_{44}\tau_{xy} + c_{45}\tau_{yz} + c_{46}\tau_{zx} \\
 \gamma_{yz} &= c_{51}\sigma_x + c_{52}\sigma_y + c_{53}\sigma_z + c_{54}\tau_{xy} + c_{55}\tau_{yz} + c_{56}\tau_{zx} \\
 \gamma_{zx} &= c_{61}\sigma_x + c_{62}\sigma_y + c_{63}\sigma_z + c_{64}\tau_{xy} + c_{65}\tau_{yz} + c_{66}\tau_{zx}
 \end{aligned} \tag{10.11}$$

здесь c_{ij} – постоянные, характеризующие свойства материала.

Для определения постоянных c_{ij} воспользуемся экспериментальными данными, полученными из опытов по одноосному растяжению длинных цилиндрических или призматических образцов и опытов по кручению тонкостенных трубок, хотя, как покажем позднее, они могут быть определены только из эксперимента по растяжению длинных цилиндрических образцов.

Сначала обратимся к экспериментальным зависимостям, полученным из опыта по

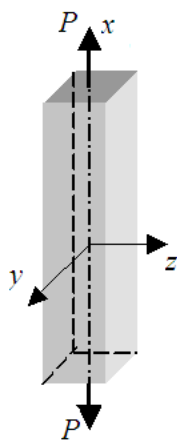


Рис. 10.12.1.

растяжению длинных призматических образцов силами P , приложенными к его торцам. Совмещая ось x с продольной осью образца, а оси y - и z с главными центральными осями некоторого поперечного сечения, между компонентами тензоров напряжений и деформаций, отличных от нуля, будем зависимости

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Сравнивая эти зависимости с (10.11), имеем:

$$c_{11} = \frac{1}{E}, \quad c_{21} = c_{31} = -\frac{\mu}{E}, \quad c_{41} = c_{51} = c_{61} = 0.$$

Проводя круговую перестановку (соответствующим образом меняя направления осей $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$) получим дополнительные соотношения:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E} \quad \text{и, следовательно, определим}$$

константы:

$$c_{22} = c_{33} = \frac{1}{E}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{32} = -\frac{\mu}{E}, \quad c_{42} = c_{52} = c_{62} = c_{43} = c_{53} = c_{63} = 0.$$

Далее обратимся к экспериментальным данным, полученным при кручении длинных тонкостенных трубок сосредоточенными моментами (рис. 10.12), приложенными по торцам. Рассмотрим произвольное сечение: ось x совместим с образующей образца, ось y – направим по касательной, ось z – по радиусу сечения.

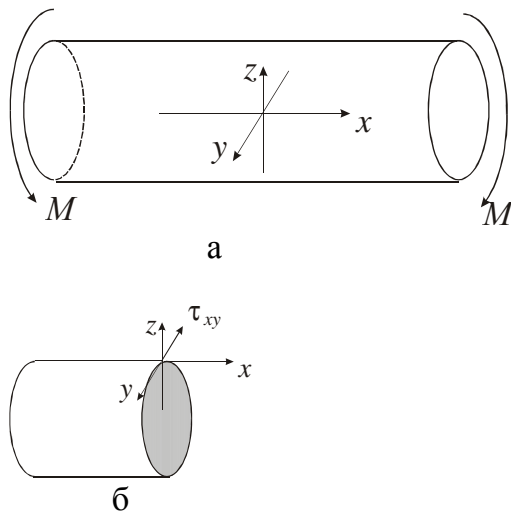


Рис. 10.12.

При чистом сдвиге, имеющем место в рассмотренном случае, действуют только касательные напряжения τ_{xy} (рис. 10.12,б). Воспользуемся законом Гука при чистом сдвиге:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Сравнивая эту запись с (10.11), запишем:

$$c_{44} = \frac{1}{G}, \quad c_{14} = c_{24} = c_{34} = c_{54} = c_{64} = 0.$$

Проводя, как и раньше перестановку осей $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$, легко определить остальные постоянные:

$$c_{55} = c_{66} = \frac{1}{G}, \quad c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = c_{65} = c_{16} = c_{26} = c_{36} = c_{46} = c_{56} = 0,$$

С учетом найденных величин c_{ij} , соотношения (10.11) перепишем в виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (10.12)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Эти соотношения носят названия обобщенного закона Гука.

Допустим, что главные оси тензора напряжений в точке тела известны. Совмещая оси координат с главными осями, напряженное состояние тела в точке будем характеризовать главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом угловые деформации, согласно обобщенному закону Гука обращаются в нуль. Следовательно, в области малых упругих деформаций главные оси тензора напряжений совпадают с главными осями деформаций. Соотношения обобщенного закона Гука в главных осях приобретают вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Суммируя полученные выражения, получим

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Аналогично получим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (10.13)$$

10.11. Объемная деформация

В процессе деформирования изменяется объем тела. Подсчитаем изменение объема бесконечно малого параллелепипеда, объем которого до деформирования $dV = dx dy dz$. С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать, что изменение объема связано только с изменением длины ребер, но не с угловыми деформациями.

Длина ребра AB (см. рис. 10.11) равная dx до деформации, после деформации, как указывалось ранее, будет равна:

$$dx_1 = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Воспользовавшись первой формулой Коши (10.10), получим:

$$dx_1 = dx (1 + \varepsilon_x).$$

Аналогично вычисляются длины двух других ребер после деформации:

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= dy (1 + \varepsilon_y), \\ dz_1 &= dz (1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \right\}$$

Объем параллелепипеда после деформирования найдем как произведение новых длин ребер:

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx (1 + \varepsilon_x) dy (1 + \varepsilon_y) dz (1 + \varepsilon_z).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$dV_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Пренебрегая в скобках величинами второго и третьего порядков малости и учитывая, что $dx dy dz = dV$, находим:

$$dV_1 = dV (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Относительная объемная деформация равна:

$$\frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Обозначая относительное изменение объема через θ , получаем:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Принимая во внимание выражение (10.13) можно отметить, что

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Рассмотрим далее случай всестороннего сжатия материала. В этом случае мы можем записать $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$. Тогда относительное изменение объема будет

$$\theta = -\frac{1 - 2\mu}{E} 3\sigma.$$

Отсюда видно, что на коэффициент Пуассона μ должно быть наложено ограничение $\mu < 0.5$, поскольку в противном случае при всестороннем сжатии объем тела увеличится в объеме, а это невозможно.

10.12. Удельная потенциальная энергия упругой деформации

Найдем удельную потенциальную энергию u , т.е. энергию, накопленную вследствие упругих деформаций единицей объема материала при объемном напряженном состоянии. Для этого рассмотрим кубик со стороной, равной 1, находящийся под действием главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При простом растяжении мы ранее получили

$$u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon.$$

Обобщая эту формулу на случай одновременного действия трех напряжений, получим

$$w = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3.$$

Подставим сюда выражения деформаций по закону Гука (10.12), в результате получим выражение потенциальной энергии деформации единицы объема (удельной)

$$w = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)]. \quad (10.14)$$

Обычно удельную потенциальную энергию деформации представляю как сумму энергий затраченных на изменение объема $w_{об}$ и изменение формы (энергия формоизменения) - w_{ϕ} :

$$w = w_{об} + w_{\phi}$$

Сохранение формы элементарного объема при его деформировании возможно лишь в случае, когда на его гранях действуют одинаковые нормальные напряжения, которые обозначим σ_0 .

Тогда, приняв во внимание, что для такого состояния $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, запишем

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} 3\sigma_0.$$

Определим величину σ_0 из равенства

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} 3\sigma_0 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

Откуда

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{окт}.$$

Таким образом, чтобы определить величину $w_{об}$ воспользуемся формулой (10.14), подставив вместо $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответствующее значение σ_0 .
Имеем

$$w_{об} = \frac{1}{2E} = [3\sigma_0^2 - 6\sigma_0^2] = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_0^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

Чтобы найти энергию формоизменения, запишем:

$$w_\phi = w - w_{об}.$$

Осуществив подстановку и сделав очевидные преобразования, получим:

$$w_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

Отметим, что эта формула легко может быть получена из формулы (10.14) с заменой σ_1 на $\sigma_1 - \sigma_0$; σ_2 на $\sigma_2 - \sigma_0$; σ_3 на $\sigma_3 - \sigma_0$.

В связи с особой важностью полученных соотношений, обычно с самого начала тензор напряжений раскладывают

$$T_n = T_0 + D_\sigma$$

где T_0 - шаровой тензор напряжений, компоненты которого обуславливают изменение объема без изменения формы; D_σ - девиатор, который обуславливает изменение формы без изменения объема:

$$T_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

10.13. Частные случаи напряженного состояния тела в точке

Исследование напряженного состояния значительно упрощается в случае, когда на одной из граней выделенного элемента отсутствуют касательные напряжения. Еще проще в случае, когда на этой грани отсутствуют также и

нормальные напряжения. В этом случае эта площадка выступает в роли главной площадки.

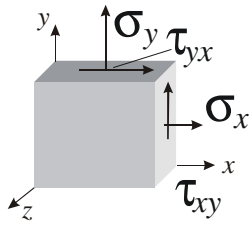


Рис. 10.14.

Свяжем с направлением главной площадки, например, ось z (рис. 10.14).

Тензор напряжений в этом случае имеет вид:

$$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Тогда кубическое уравнение для определения главных напряжений имеет вид:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)\sigma = 0$$

Нетрудно видеть, что на самом деле мы имеем дело с квадратным уравнением, поскольку один корень очевиден $\sigma_3=0$.

Следовательно, рассмотренный случай представляет собой плоское напряженное состояние. Очевидно, что главные напряжения можно определить по формуле:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (i=1, 2). \quad (10.15)$$

В ряде случаев, например, при рассмотрении случаев плоского изгиба или изгиба с кручением, мы сталкиваемся с тем, что $\sigma_y=0$. Задача определения главных напряжений еще более упрощается. В этих случаях обычно вводятся обозначения $\sigma_x=\sigma$, $\tau_{xy}=\tau$ и формула (10.15) принимает вид

$$\sigma_i = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (10.16)$$

Случай линейного напряженного состояния, который реализуется при осевом растяжении-сжатии мы рассматривать не будем, поскольку он довольно хорошо изучен в начале нашего курса.

11. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, РАСЧЕТ ПО ТЕОРИЯМ ПРОЧНОСТИ.

11.1. Содержание теорий предельных напряженных состояний. Критерии пластичности и разрушения

При расчете на прочность различных конструкций и машин необходимо учитывать, что многие их элементы и детали работают в условиях сложного нагружения.

Как было указано ранее, если напряженное состояние линейное, то оно определяется одним главным напряжением, плоское напряженное состояние характеризуется двумя, а объемное – тремя главными напряжениями.

При возрастании действующей нагрузки главные напряжения соответственно увеличиваются и при некоторых определенных их значениях наступает опасное или так называемое **предельное** состояние материала в исследуемой точке.

Для пластичных материалов предельным считается такое напряженное состояние, при котором начинают развиваться заметные остаточные деформации.

Для хрупких материалов предельным считается такое состояние, которому соответствует начало трещинообразования.

Опасное (предельное) состояние материала нельзя никогда допускать, поэтому при расчете на прочность обычно вводится понятие допускаемого состояния, которое устанавливается с учетом ряда технических и экономических факторов путем деления нагрузки, вызывающей предельное состояние, на коэффициент запаса, больший единицы.

Чтобы оценить насколько опасно то или иное напряженное состояние и определить соответствующий коэффициент запаса, необходимо было бы опытным путем установить значения главных напряжений, при которых наступает предельное напряженное состояние. Эта задача довольно просто может быть решена при одноосном растяжении или сжатии. В этом случае предельное значение единственного главного напряжения определяется непосредственно из опыта и принимается равным пределу текучести σ_T – для пластичных материалов и пределу прочности σ_B – для хрупких материалов.

Таким образом, если известна расчетная величина напряжения σ , то коэффициенты запаса будут

$n_T = \sigma_T / \sigma$ - для пластичных материалов;

$n_\sigma = \sigma_B / \sigma$ - для хрупких материалов.

Поскольку при плоском и объемном напряженных состояниях соотношения между главными напряжениями возможны самые различные, то практически осуществить такие эксперименты невозможно не только из-за их большого числа, но и из-за трудностей в их проведении.

Существующая в настоящее время техника для экспериментального исследования сложного напряженного состояния позволяет пока проводить испытания только для ограниченного числа некоторых частных случаев соотношений между главными напряжениями.

Это приводит к необходимости создания такой методики расчета, которая позволяла бы оценивать степень опасности любого напряженного состояния для того или иного материала, основываясь только на результатах опытов при простом нагружении (растяжении, сжатии или чистом сдвиге).

Решение этой важной задачи осуществляется с помощью так называемых теорий прочности или теорий предельных напряженных состояний.

11.2. Понятие об эквивалентном напряжении

Вводится понятие эквивалентности (равноопасности) напряженных состояний: Два каких-либо напряженных состояния считаются равноопасными (эквивалентными), если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся предельными. Очевидно, что в этом случае коэффициент запаса прочности для обоих напряженных состояний будет одинаковым.

Как уже отмечалось, в качестве одного из равноопасных напряженных состояний принимается одноосное растяжение, хорошо изученное экспериментально, а в качестве другого - напряженное состояние, опасность которого для данного материала необходимо оценить.

При этом нужно связать главные напряжения двух равноопасных состояний какой-либо зависимостью. Это можно сделать, если известна общая для обоих состояний причина разрушения материала при переходе в предельное состояние. Однако определение истинной причины разрушения материала остается пока нераз-

решенной задачей. Это повлекло создание различных теорий прочности, каждая из которых основывается на определенной гипотезе о причине наступления предельного напряженного состояния.

11.3. Классические теории прочности.

Первая теория прочности Галилея.

Согласно этой теории причиной наступления предельного напряженного состояния являются наибольшие нормальные напряжения. Название этой теории – теория наибольших нормальных напряжений.

Если за основу принять метод предельных состояний, то эта теория приводит к следующей записи условия прочности:

$$\sigma_{расч}^{(I)} = \sigma_1 \leq R.$$

Недостатком этой теории является неучет двух других главных напряжений σ_2, σ_3 . Эта теория подтверждается лишь в очень ограниченном диапазоне нагружения, например, при растяжении хрупких материалов. В настоящее время I теория не используется.

Вторая теория прочности Мариотта.

Эта теория основана на гипотезе, что причиной наступления предельного состояния являются удлинения волокон материала.

В качестве критерия прочности записывается условие

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{экв}}$ – предельная деформация, полученная из опыта по осевому растяжению.

Для перехода к напряжениям используются формулы закона Гука. Так, запишем

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

а для ε_0 – выражение $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ (здесь и далее σ_0 – предельное напряжение из опыта по осевому растяжению). Откуда

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_0.$$

Или, переходя к методу предельных состояний (σ_0 заменяем на R)

$$\sigma_{расч}^{(II)} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R.$$

Здесь, в отличие от первой теории используются все напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, возникающие при объемном напряженном состоянии. Следует отметить, что эта теория хорошо согласуется с некоторыми данными испытаний, например, сжатия бетонных образцов. Однако в большинстве случаев она не дает достоверных результатов и в настоящее время практически не применяется.

Третья теория прочности Кулона.

Эта теория строится на гипотезе, что причиной предельного напряженного состояния являются наибольшие касательные напряжения. В основу этой теории положено условие

$$\tau_{\max} \leq \tau_0$$

где $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}$.

В окончательном виде условие прочности согласно этой теории записывается в

форме:

$$\sigma_{\text{расч}}^{(III)} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R.$$

Обычно мы имеем с упрощенным плоским напряженным состоянием, как например, изгиб с кручением. В этом случае, воспользовавшись формулой (11.16) получим

$$\sigma_{\text{расч}}^{(III)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R. \quad (11.1)$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть мы имеем брус круглого поперечного сечения в условиях изгиба с кручением (рис. 11.1). Воспользуемся опытом, полученным нами при рассмотрении косоугольного изгиба или внецентренного растяжения бруса.

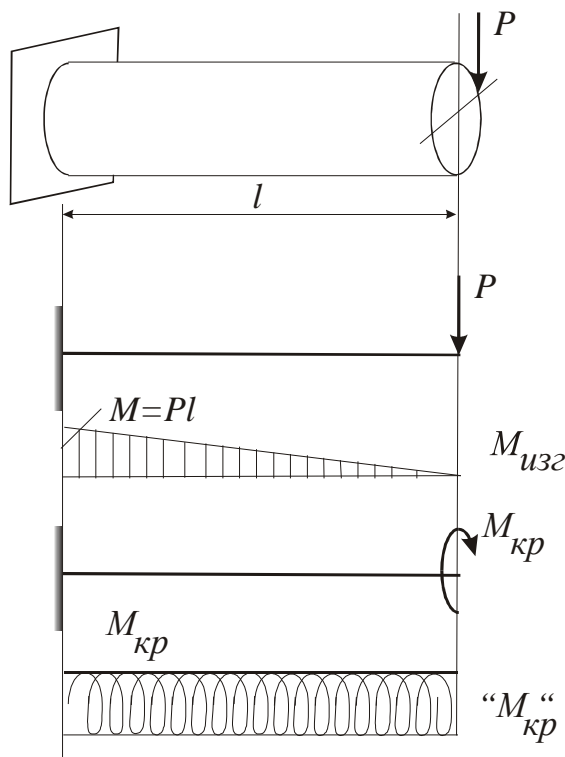


Рис. 11.1.

жения бруса.

Это условие впервые предложил в 1773 г. Кулон, который, впрочем, вопросами прочности не занимался. Как условие наступления пластических деформаций это условие было использовано в 1868 французским инженером Г.Треска и математически сформулировано Б. Сен-Венаном.

Перенесем силу к центру, и обратимся к принципу независимости действия сил. Построив и проанализировав эпюры, приведенные на рис. 11.1, отметим, что опасным является сечение в заделке. При этом изгиб приводит к появлению нормальных напряжений

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_u},$$

а кручение – касательных напряжений

$\tau_{\max} = \frac{M}{W_\rho}$. Причем, как было показано ранее, эти напряжения действуют в одних и тех же точках, лежащих на поверхности бруса в заделке. Поэтому для этих точек можно воспользоваться формулой (11.1) и записать согласно III теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{(III)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{W_\rho}\right)^2}.$$

Далее учтем, что $W_\rho = 2W_u$. Тогда

$$\sigma_{\text{экв}}^{(III)} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{кр}}{2W_u}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}}{W_u} = \frac{M_{\text{расч}}^{(III)}}{W_u}$$

где $M_{\text{расч}}^{(III)} = M_u^2 + M_{кр}^2$.

Таким образом, условие прочности в рассмотренном примере имеет вид:

$$\frac{M_{\text{расч}}^{(III)}}{W_u} \leq R,$$

который похож на вид соответствующего условия прочности при плоском поперечном изгибе.

Отметим, что III теория хорошо согласуется с данными экспериментов и поэтому она широко применяется на практике, особенно для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Четвертая теория прочности Губера – Мизеса.

Эта теория основана на энергетическом критерии. Первоначально было предложено оценивать в качестве критерия полную потенциальную энергию деформации. Однако эксперименты подтвердили лишь случаи, когда в качестве критерия при-

нималась не вся энергия, а лишь энергия изменения формы. Поэтому IV теория прочности строится на гипотезе, что причиной предельного состояния является достижение удельной потенциальной энергии формоизменения величины, соответствующей предельному значению при осевом растяжении.

Условие прочности в соответствии с этой теорией имеет вид²

$$w_{\phi} \leq w_0.$$

Подставив соответствующие выражения, полученные нами ранее,

$$w_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \text{ и } w_0 = \frac{1+\mu}{6E} [2\sigma_0^2],$$

придем к формуле

$$\sigma_{расч}^{(IV)} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq R.$$

Представляет интерес вид полученной формулы в частном случае упрощенного плоского напряженного состояния. Поступим таким же образом, как описано выше при рассмотрении III теории прочности.

Воспользуемся формулой (11.16). Опустив очевидные преобразования, запишем:

$$\sigma_{расч}^{(IV)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R \text{ или } \sigma_{расч}^{(IV)} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_u} \leq R, \text{ а вводя характеристику}$$

$$M_{расч}^{(IV)} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}, \text{ приходим к выражению: } \frac{M_{расч}^{(IV)}}{W_u} \leq R.$$

Следует отметить, что IV теория дает некоторую экономию материала по сравнению с III теорией прочности.

11.4. Теория прочности Мора (V теория).

Во всех рассмотренных выше теориях в качестве критерия принималась величина какого либо одного фактора (напряжение, деформация, энергия). О.Мор сделал попытку вывести зависимость прочностных свойств материала от вида напряженного состояния. С этой целью он предложил использовать круговые диаграммы напря-

² В таком виде условие наступления пластических деформаций было предложено в 1904 г. польским ученым М.Губеором. А раскрыл это условие в 1913 г. немецкий математик Р.Мизес, который рассматривал касательные напряжения на октаэдрической площадке как простейшую функцию экстремальных касательных напряжений. Впоследствии выяснилось, что идея энергетического критерия была выдвинута еще в 1856 г. английским физиком Д.Максвеллом. Физическое же обоснование этого критерия принадлежит советскому акад. В.В.Новожилову.

жений и использовать три вида испытаний: при осевом растяжении, сжатии и кручении. Для каждого из них он предложил строить определяющие круги радиусов

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Пусть предельные напряжения при сжатии выше, чем при растяжении, т.е. $\sigma_{0c} > \sigma_{0p}$. Для растяжения или сжатия одно из главных напряжений равно нулю, поэтому круги проходят через начало координат (рис. 11.2). При кручении действую

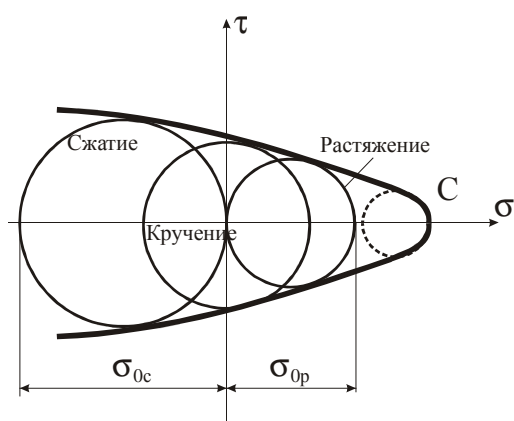


Рис. 11.2.

туют только касательные напряжения $\pm\tau$. На этой диаграмме можно отобразить результаты и других испытаний, построив соответствующие определяющие круги предельных напряжений.

Если провести огибающую для этих кругов, которую называют предельной огибающей, то в общем случае это будет кривая, которая пересечет ось σ в некоторой точке С. Эту

точку можно рассматривать как предельный круг Мора в случае всестороннего растяжения, т.е. при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{ср}$.

Таким образом, если имеется несколько предельных кругов и их огибающая, то можно считать, что напряженное состояние, главный круг которого касается огибающей, будет также предельным, т.е. мы можем изобразить пунктиром семейство предельных кругов с различными сочетаниями главных напряжений. Огибающая же определяет зависимость этих напряжений от вида напряженного состояния.³

Построение действительной огибающей предельных кругов, необходимой для оценки прочности, для всевозможных напряженных состояний, невозможно, т.к. для этого потребовалось бы опытным путем исследовать бесконечное число напряженных состояний. Поэтому Мор предложил следующую схематизацию: огибающую заменять касательной лишь к двум главным кругам, которые строятся по данным опытов на осевое растяжение и сжатие. Эти касательные (прямые) и принято считать границами прочностных состояний.

³ О.Мор – немецкий инженер в области теории сооружений предпринял первую попытку создания такой теории в 1900 г.

Пусть мы имеем напряженное состояние, главный круг которого касается этих прямых (в силу симметрии можно рассматривать только одну прямую, например, верхнюю), то из подобия треугольников $C_2 C_3 A_3$ и $C_2 A_1 C_1$, используя значения предельных напряжений при сжатии σ_{0c} и при растяжении σ_{0p} , можно получить со-

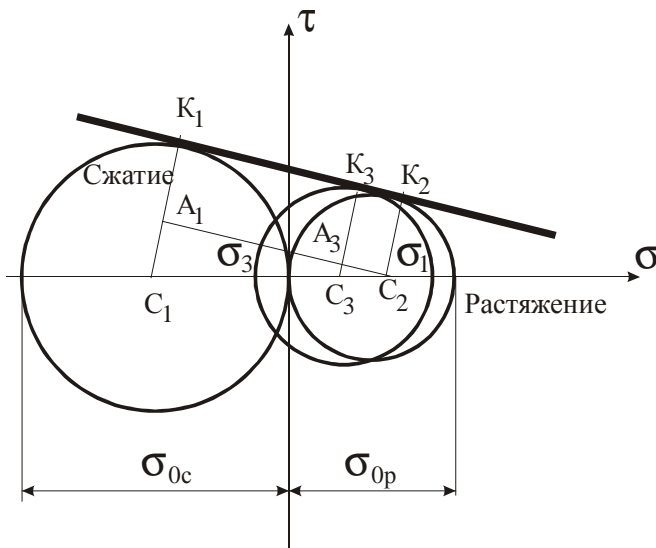


Рис. 11.3.

отношение

$$\sigma_1 = \sigma_{0p} + \frac{\sigma_{0p}}{\sigma_{0c}} \sigma_3$$

или

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{0p}}{\sigma_{0c}} \sigma_3 = \sigma_{0p}$$

и условие прочности принимает вид

$$\sigma_{расч} = \sigma_1 - K\sigma_3 \leq R.$$

Коэффициент $K = \frac{\sigma_{0p}}{\sigma_{0c}}$ по-

зволяет учитывать разное сопротивление материала растяжению и сжатию. Если они одинаковы, то $K=1$ и касательные к главным кругам параллельны оси σ . В этом случае условие прочности совпадает с условием III теории, следовательно оно применимо как для хрупких, так и для пластичных материалов. При этом для хрупких берутся вместо σ_{0p} и σ_{0c} соответствующие пределы прочности, а для пластичных – пределы текучести.

Теория прочности Мора дает наиболее достоверные результаты для напряженных состояний, круги которых занимают промежуточные положения между главными кругами растяжения и сжатия. Похожее условие прочности, называемое условием прочности Кулона – Мора, применяется для оценки прочности грунтов в строительном деле.

11.5. Новые теории прочности.

Заслуживает внимания обобщение энергетической гипотезы прочности, предложенное П.П. Б а л а н д и н ы м и позволяющее учесть различ-

ную прочность материала на растяжение и сжатие. Условие прочности, по П.П. Баландину, имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1-K}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{2}\sqrt{(1-K)^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + 4K[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]} \leq \sigma_{0p}$$

Для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, т. е. при $K=1$, гипотеза Баландина совпадает с четвертой гипотезой прочности.

Опыты показывают, что гипотеза Баландина в определенном диапазоне напряженных состояний дает удовлетворительные результаты.

Заслуживают внимания предложенные в последнее время так называемые **объединенные гипотезы прочности**, где в качестве критерия прочности принимается не один фактор, а два или даже три. Проф. Я.Б. Фридман предложил объединить вторую и третью гипотезы прочности. Акад. Н.Н. Давиденков на основании опытов с чугуном, стеклом и гипсом предложил объединить первую гипотезу и гипотезу П.П. Баландина.

Предлагались и другие гипотезы прочности.

Проф. М.М. Филоненко-Бородич предложил записывать условие прочности в виде некоторого многочлена второй или даже третьей степени относительно главных напряжений, содержащего определенное число произвольных постоянных, которые определяются из опытов, в том числе и из опытов при сложном напряженном состоянии. Однако приведенные выше диаграммы разрушения хрупких материалов ясно показывают, что условие прочности материала не может быть выражено одной замкнутой функцией во всем диапазоне напряженных состояний.

Для хрупких материалов наиболее оправданной является, по-видимому, объединенная гипотеза прочности Н.Н. Давиденкова.

Мы рассматривали гипотезы прочности, опираясь на данные опытов с двухосным напряженным состоянием. Опытных данных, относящихся к трехосным напряженным состояниям, значительно меньше. Имеющиеся опыты свидетельствуют о том, что при напряженных состояниях, близких к трехосному сжатию, материалы, даже хрупкие, способны выдерживать весьма значительные напряжения. При равностороннем сжатии таких материалов, как сталь, медь, алюминий, разрушения не происходит при громадных давлениях 5000—20 000 МПа.

На основании имеющихся опытных данных можно считать, что для пластичных материалов при трехосном напряженном состоянии удовлетворительные результаты дают энергетическая гипотеза формоизменения и третья гипотеза прочности. Что же касается хрупких материалов, то для них рекомендуется гипотеза Н.Н. Давиденкова.

12. РАСЧЕТ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

12.1. Понятие оболочки вращения. Меридианальные и окружные сечения

Будем говорить, что тело симметрично относительно оси, если любая плоскость, проходящая через эту ось (осевая плоскость), является плоскостью его силовой и геометрической симметрии.

Обычно оболочка задается своей срединной поверхностью. Оболочка, срединная поверхность которой является поверхностью вращения, называется оболочкой вращения. Рассмотрим такую оболочку (рис. 12.1,а). Назовем: осью оболочки — ось поверхности вращения; меридиональным сечением—сечение оболочки осевой плоскостью; окружным (коническим) сечением — сечение оболочки конической поверхностью, нормальной к ее срединной поверхности, вершина которой лежит на оси; меридианом — линию пересечения срединной поверхности с осевой плоскостью; параллелью — линию пересечения срединной поверхности с названной выше конической поверхностью.

Обозначим: ρ_m — радиус кривизны меридиана (рис. 12.1,б); ρ_r — отрезок нормали к срединной поверхности, заключенной между срединной поверхностью и осью оболочки; O_1 —центр кривизны меридиана; O_2 — центр кривизны окружно-

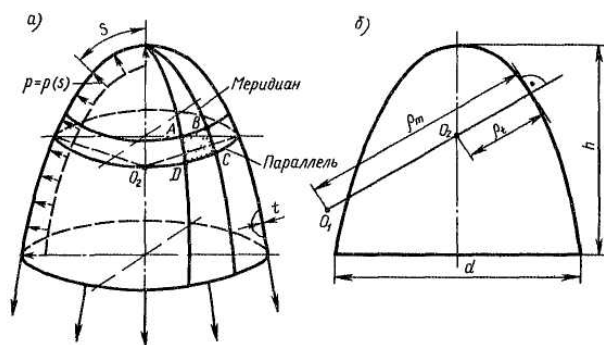


Рис. 12.1.

го сечения, лежащий на оси оболочки; t — толщину оболочки; $p = p(S)$ — давление, которое должно изменяться только в направлении меридиана, чтобы оболочка была осесимметричной; S — координата, отсчитываемая в направлении меридиана. Радиус ρ_m и отрезок ρ_r являются главными радиусами кривизны срединной поверхности в

данной точке. Предполагаем, что:

- 1) оболочка тонкостенная, т.е. $\rho_{\min}/t > 20$, где ρ_{\min} — наименьший из главных радиусов кривизны;
- 2) давление изменяется в направлении меридиана достаточно плавно, в частности к оболочке не прикладываются сосредоточенные силы;
- 3) меридиан не имеет резких изменений кривизны, в частности, изломов;
- 4) опорные устройства оболочки таковы, что реактивные силы направлены по касательной к меридиану;
- 5) оболочка непологая, т. е. (рис.12.1,б) $h/d \geq 0,15$.

12.2. Напряжения в осесимметричной оболочке

Двумя бесконечно близкими меридиональными и двумя бесконечно близкими окружными сечениями вырезаем из оболочки элемент $ABCD$ и рассматриваем его равновесие (рис. 12.2). Если принятые предположения выполняются, то нормальные напряжения, действующие по граням элемента, можно считать распределенными по толщине равномерно. Состояние оболочки, при котором напряжения распределяются по ее толщине равномерно, называется безмоментным, а теория расчета такой оболочки — безмоментной. Обозначим: σ_m — меридиональное напряжение; σ_t — окружное напряжение.

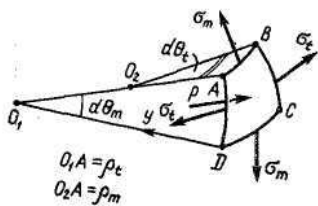


Рис. 12.2

В силу осевой симметрии касательные напряжения по граням элемента, совпадающим с меридиональными сечениями, равны нулю, следовательно, по свойству парности касательных напряжений они равны нулю и по граням, совпадающим с окружными сечениями.

12.3. Уравнение Лапласа и уравнение равновесия части оболочки, отсеченной окружным сечением.

Воспользуемся следующими равенствами для малых углов

$$\sin d\theta_m = d\theta_m, \quad \sin d\theta_t = d\theta_t.$$

Найдем проекцию сил, действующих на элемент, на ось y . Проведем эту операцию поочередно. Из рис. 12.3 проекция сил, действующих по граням AB и CD , равна

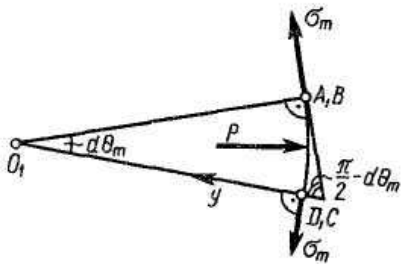


Рис. 12.3.

$$-\sigma_m t \rho_t d\theta_t \cos\left(\frac{\pi}{2} - d\theta_m\right) = \sigma_m \rho_t t d\theta_t d\theta_m.$$

По аналогии, проекция сил, действующих по граням AB и CD , равна

$$-\sigma_t \rho_m t d\theta_m d\theta_t.$$

Проекция сил давления, распределенных по поверхности элемента, равна

$$p \rho_t \rho_t d\theta_t d\theta_m.$$

Складывая выписанные выражения и приравнявая сумму к нулю, получим

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{t}.$$

Полученную формулу называют уравнением Лапласа.

В практическом расчете σ_m определяется из условия равновесия отсеченной части оболочки, а σ_t из уравнения Лапласа после подстановки в него найденного значения σ_m .

Докажем теорему о проекции сил давления, равномерно распределенных по поверхности, на ось (рис. 12.4).

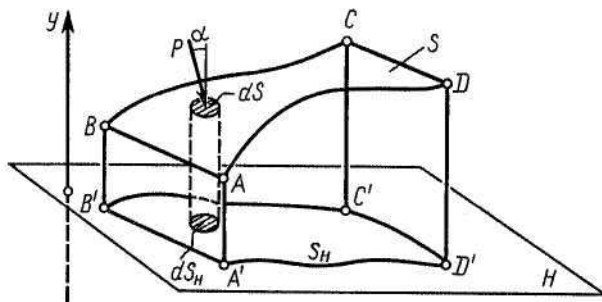


Рис. 12.4.

Обозначим:

S — данная поверхность;

dS — элемент поверхности S ;

y — ось, на которую надо найти проекцию сил давления;

H — плоскость, перпендикулярная оси y ;

S_H — проекция S на H ,

где $dS_H = dS \cos \alpha$ — проекция dS на S ; P_y — проекция сил давления на ось y .

Проекция сил давления

$$P_y = \iint_S p \cos \alpha dS = p \iint_{S_H} dS_H,$$

или

$$P_y = pS_H. \quad (12.1)$$

Проекция сил давления, равномерно распределенных по поверхности, на ось равна давлению, умноженному на проекцию этой поверхности на плоскость, перпендикулярную оси.

12.4. Расчеты на прочность сферических, конических и цилиндрических оболочек

Рассмотрим расчеты на прочность сферических оболочек.

Пусть дана сферическая оболочка, нагруженная внутренним давлением (рис.

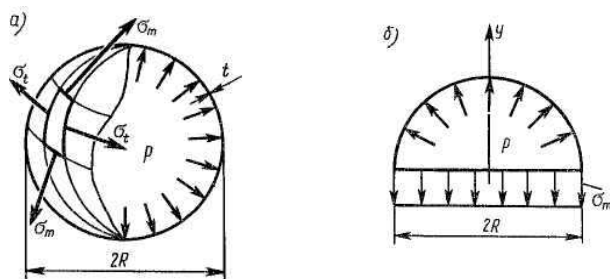


Рис.12.5

12.5,а), найти σ_m и σ_t .

Разрезав диаметрально сечением оболочку на две части, рассматриваем равновесие одной из них (рис. 12.5, б).

На основании (12.1) запишем

$$\Sigma Y = 0, \quad \sigma_m 2\pi R t - p\pi R^2 = 0$$

откуда

$$\sigma_m = \frac{pR}{2t}.$$

Для сферической оболочки $\rho_m = \rho_t = R$.

Подставив σ_m в уравнение Лапласа, получим

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{p}{2t} = \frac{p}{t},$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{pR}{t}.$$

Далее рассмотрим цилиндрические оболочки в сечениях, достаточно удаленных от днищ (рис. 12.6,а).

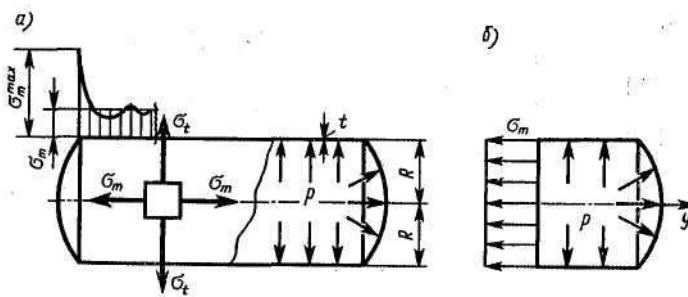


Рис. 12.6.

Рассматриваем равновесие отсеченной части (рис. 12.6, б)

$$\Sigma Y = \sigma_m 2\pi R t - p\pi R^2 = 0,$$

откуда

$$\sigma_m = \frac{pR}{2t}$$

В цилиндрической оболочке $\rho_t = R$, $\rho_m = \infty$, так как меридиан — прямая линия. Поэтому из уравнения Лапласа

$$\frac{\sigma_t}{R} = \frac{p}{t},$$

откуда

$$\sigma_t = \frac{pR}{t}.$$

В цилиндрической оболочке окружное напряжение в 2 раза больше меридионального.

Далее рассмотрим расчет цилиндрического резервуара с коническим дном заполненный жидкостью. При расчете весом стенок резервуара пренебрегаем.

Радиус кривизны меридианов (образующих) $\rho_m = \infty$. Поэтому из уравнения Лапласа найдем:

$$\sigma_t = \frac{p \rho_t}{\delta} \quad (12.2)$$

На глубине $H+h-y$ давление p составит

$$p = \gamma (H + h - y). \quad (12.3)$$

Для конической части имеем

$$R_y = \frac{y}{h} R; \quad \rho_t = \frac{R_y}{\cos \alpha} = \frac{yR}{h \cos \alpha}. \quad (12.4)$$

Подставляя выражения (12.3) и (12.4) в формулу (12.2), получим окружные напряжения для конической части:

$$\sigma_t = \frac{\gamma R}{\delta h \cos \alpha} (H + h - y) y.$$

Для цилиндрической части, где $\rho_t = R$, найдем

$$\sigma_t = \frac{\gamma R}{\delta} (H + h - y).$$

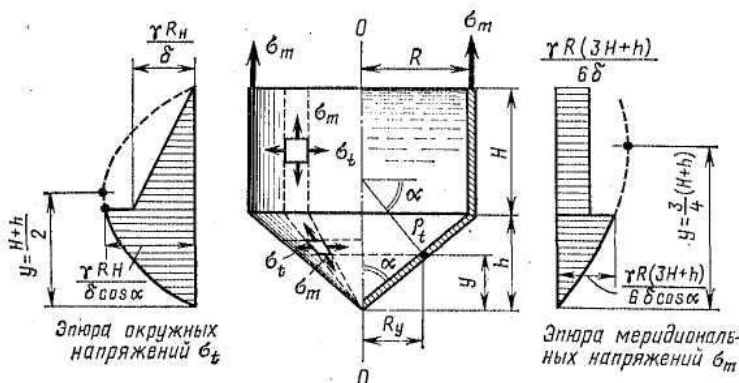


Рис. 12.7.

Эпюра σ_t показана, на рис. 12.7 слева. Для конической части эта эпюра параболическая.

Ее математический максимум имеет место в середине об-

щей высоты при $y = 0,5 (H + h)$. При $H > h$ он имеет условное значение,

при $H \leq h$ он попадает в пределы конической части и имеет реальное значение, будучи равен

$$\max \sigma_t = \frac{1}{4} \frac{\gamma R (H+h)^2}{\delta h \cos \alpha}.$$

Перейдем к определению меридиональных напряжений σ_m . Для конической части найдем вес жидкости в объеме конуса высотой y :

$$Q = \gamma \frac{1}{3} y \pi R_y^2 = \frac{\gamma}{3} \frac{\pi y^3 R^2}{h^2}.$$

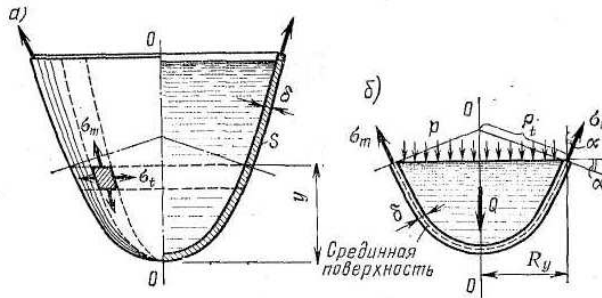


Рис. 12.8.

Рассмотрим далее равновесие части оболочки, отсеченной окружным сечением в пределах конического участка (рис. 12.8). Составляем уравнение, представляющее собой сумму проекций на ось О-О сил, действующих на отсеченный объем сосуда. Площадь

окружного сечения стенок сосуда можно подсчитать по формуле $2\pi R_y \delta$. По этой площади напряжения σ_m распределены равномерно, следовательно:

$$\sigma_m 2\pi R_y \delta \cos \alpha - p\pi R_y^2 - Q = 0.$$

Тогда

$$\sigma_m = \frac{p\pi R_y^2 + Q}{2\pi R_y \delta \cos \alpha},$$

а с учетом (12.3) и (12.4)

$$\sigma_m = \frac{\gamma R}{6\delta h \cos \alpha} [3(H+h) - 2y] y.$$

Эпюра σ_m показана на рис. 12.7 справа. Максимум эпюры σ_m очерченной для конической части также по параболе, имеет место при $y = 0,75 (H+h)$. Реальное значение он имеет только при $H \leq 1/3h$, когда он падает в пределы конической части и равен

$$\max \sigma_m = \frac{3}{16} \frac{\gamma R (H+h)^2}{\delta h \cos \alpha}.$$

В цилиндрической части напряжение σ_m по высоте постоянно и равно напряжению у верхней кромки в месте подвеса резервуара:

$$\sigma_m = \frac{\gamma R (3H + h)}{6\delta}.$$

12.5. Распорные кольца в оболочках

В местах, где поверхность сосуда имеет резкий излом, как, например, в месте соединения цилиндрической и конической (рис. 12.7) или сферической (рис. 12.6) частей, радиальная составляющая меридиональных напряжений $\sigma_m \sin\alpha$ не уравновешена, что показано на рис. 12.9. Эта составляющая по периметру кольца создает радиальную нагрузку

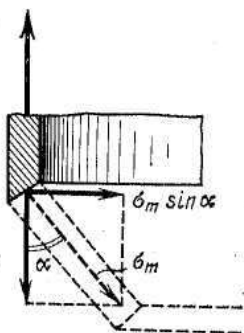


Рис. 12.9

$$q = \delta \sigma_m \sin\alpha,$$

стремящуюся согнуть кромки цилиндрической оболочки внутрь (рис. 12.10, а). Для устранения этого изгиба ставится ребро жесткости (распорное кольцо) в виде уголка или швеллера, опоясывающего сосуд в месте перелома. Это ребро помогает воспринять радиальную нагрузку q , что показано на рис. 12.10,б. Из условия равновесия полукольца, полученного путем разреза ребра жесткости по диаметру, легко установить, что в ребре возникает сжимающая сила $N = qR$, если приближенно не учитывать совместной работы ребра и оболочки.

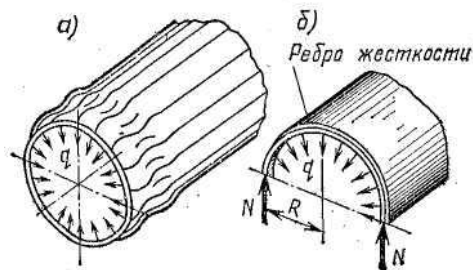


Рис.12.10.

Однако постановка ребер жесткости полностью не устраняет изгиба стенок сосуда, так как ребро жесткости стесняет расширение колец оболочки, примыкающих к ребру. В результате образующие оболочки вблизи распорного кольца искривляются. Это явление носит название *краевого эффекта*. Общая теория краевого эффекта рассматривается в специальных курсах.

13. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

13.1. Понятие устойчивости упругого тела

До сих пор мы рассматривали методы определения напряжений и перемещений, возникающих в стержнях и соответственно, занимались оценкой их прочности и жесткости. Однако оказывается, что соблюдение условий прочности и жесткости еще не гарантирует способности конструкций выполнять, предназначенные им функции в эксплуатационных режимах. Наряду с выполнением условий прочности и жесткости, необходимо обеспечить и *устойчивость конструкций*.

При неизменной схеме нагружения, под устойчивостью понимается свойство способности системы сохранять свое первоначальное равновесное состояние. Если рассматриваемая система таким свойством не обладает, то она называется *неустойчивой*, а ее равновесное состояние – *неустойчивым состоянием*.

При неизменной схеме нагружения, в процессе роста интенсивности нагрузок, явление перехода системы от одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию, называется *потерей устойчивости системы*. Значения внешних сил, при которых происходит потеря устойчивости, называются *критическими*.

В некоторых случаях при потере устойчивости, система, переходя в новое устойчивое равновесное состояние, продолжает выполнять свои функции. Однако в подавляющем большинстве случаев, потеря устойчивости системы сопровождается возникновением больших перемещений, пластических деформаций или ее полным разрушением. Поэтому сохранение исходного (расчетного) равновесного состояния системы является важной задачей и одной из основных проблем сопротивления материалов.

Основная задача теории устойчивости заключается в определении критического значения внешних сил и ограничение их величин таким образом, чтобы исключить возможность потери устойчивости заданной системы в эксплуатационных режимах.

Пусть вертикальный стержень закреплен нижним концом, а на свободном верхнем конце центрально приложена продольная си-

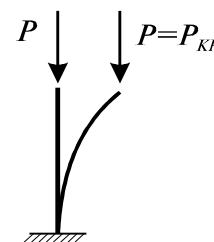


Рис. 13.1

ла P (рис. 13.1). На начальном этапе нагружения равновесное состояние системы определяется как простое продольное сжатие, так как на данном этапе нагружения в поперечных сечениях стержня, за исключением продольной силы, остальные силовые факторы равны нулю. При дальнейшем росте внешней силы P , обнаруживается, что при некотором ее значении $P = P_{кр}$, стержень изогнется. Так как явление изгиба тесно связано с действием изгибающих моментов, возникающих в поперечных сечениях стержня, можем утверждать, что при $P = P_{кр}$ происходила смена формы равновесного состояния системы. Если на начальном этапе нагружения $P < P_{кр}$, равновесное состояние вертикального стержня определялось как простое сжатие, то при $P > P_{кр}$ сжатие сопровождается изгибом. Это означает, что при $P = P_{кр}$ происходила потеря устойчивости системы.

Заметим, что в данном случае, смена формы равновесного состояния сопровождается и сменой формы деформирования: в докритическом – прямолинейная форма деформирования, в закритическом – криволинейная, а в критическом – смешанная форма.

Заметим также, что для гибких стержней потеря устойчивости может наступить при напряжениях, значительно меньших предела прочности материалов. Поэтому расчет стержней должен выполняться при условии, что сжимающие напряжения не превышают критического значения с точки зрения потери их устойчивости:

$$\sigma < \sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A}, \quad (13.1)$$

где $P_{кр}$ – значение сжимающей силы, при котором стержень переходит из прямолинейного состояния равновесия к криволинейному; A – площадь сечения стержня.

13.2. Критической силы, нагрузки и напряжения

Изучение устойчивости стержней начнем с простейшей задачи о стержне с двумя шарнирно опертыми концами при действии центрально сжимающей силы P (рис. 13.2).

Впервые эта задача была поставлена и решена Л.Эйлером в середине XVIII века и носит его имя.

Рассмотрим условия, при которых происходит переход от центрально сжатого состояния к изогнутому, т.е. становится возможной криволинейная форма оси стержня при центрально приложенной сжимающей силе P . Предполагая, что изгиб стержня будет происходить в плоскости минимальной жесткости (относительно оси x), записывая дифференциальное уравнение упругой линии балки и ограничиваясь рассмотрением только малых перемещений, имеем:

$$EI_x y''(z) = M_x(z), \quad (13.2)$$

Абсолютное значение изгибающего момента в произвольном сечении (рис. 13.2, б) $M_x(z) = -Py$. Тогда

$$y'' = -\frac{Py}{EI_x}$$

Знак «минус» в правой части поставлен по той причине, что прогиб и вторая производная имеют разный знак независимо от выбора положительного направления оси y . Вводя обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EI_x}, \quad (13.3)$$

получаем однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + k^2 y = 0$$

Его решение, как известно из математики, имеет вид

$$y = C \sin kz + D \cos kz \quad (13.4)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, если подставить в исходное уравнение выражения y и y'' .

Постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий. При $z=0$ прогиб $y = 0$, т. е.

$$0 = C \sin 0 + D \cos 0 = D, \text{ откуда } D = 0$$

Таким образом, решение (13.4) упрощается

$$y = C \sin kz \quad (13.5)$$

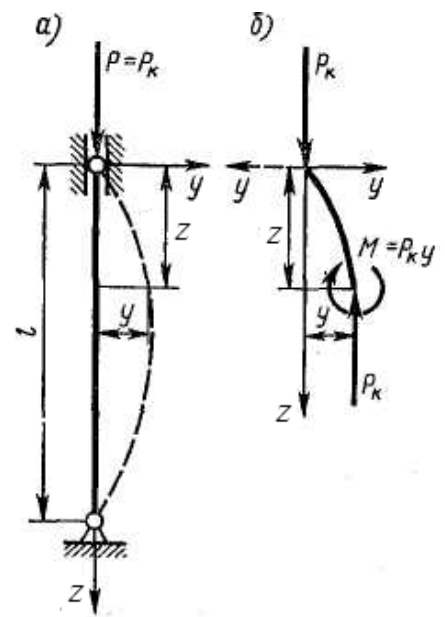


Рис. 13.2

Из второго граничного условия (при $z = l$ прогиб $y = 0$) следует $y = C \sin kl = 0$. Если $C=0$, то получаем $y=0$, что не представляет интереса (тривиальное решение), поскольку соответствует первоначальному, неискривленному положению стержня. Остается положить, что $\sin kl=0$. Это уравнение имеет бесчисленное множество корней: $kl=0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, где n — произвольное целое число. Отсюда

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad k^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Согласно обозначению (13.3)

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI_x} \quad \text{и} \quad P = \frac{n^2\pi^2 EI_x}{l^2}$$

Изменяя число n , получим последовательный ряд значений силы P , которым соответствуют различные искривленные формы равновесия стержня. Однако определению подлежит такое значение сжимающей силы, при котором наряду с исходной прямолинейной формой равновесия может существовать смежная криволинейная. Следовательно, необходимо принять наименьшее значение n . Случай, когда $n = 0$, лишен смысла, так как при этом $P=0$. Полагая $n=1$ и имея в виду, что продольный изгиб произойдет в плоскости наименьшей жесткости (относительно оси x $I_x = I_{\min}$), получаем выражение критической силы

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (13.6)$$

Формула подобного вида впервые выведена в 1744 г. Л. Эйлером⁴ и носит его имя. Таким образом, наряду с приведенным определением справедливо утверждение, что критическая сила есть *наименьшее* значение осевой сжимающей нагрузки, при котором стержень теряет способность сохранять первоначальную форму равновесия.

⁴ Леонард Эйлер (1707—1783) — выдающийся математик, родился в Швейцарии, член Российской Академии наук, один из основоположников русской науки. В строительной механике его имя связано с изучением задачи продольного изгиба

13.4. Зависимость критической силы от условий закрепления стойки, деформационных и геометрических характеристик ее сечения

Возвращаясь к уравнению (13.5), имеем

$$y = C \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right)$$

т. е. изогнутая ось стержня представляет собой *синусоиду*, имеющую n полуволн. Критической силе соответствует синусоида с одной полуволной ($n=1$, см. рис. 10.2,б):

$$y = C \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) = f \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

где f — стрела прогиба (прогиб в середине длины стержня).

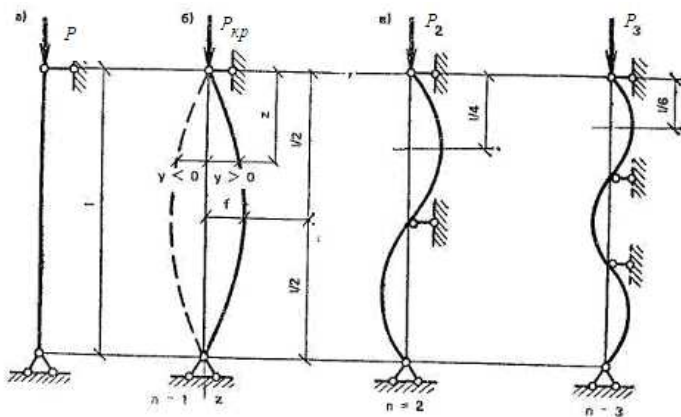


Рис. 13.3.

При $n = 2, 3, \dots, m$ искривленные формы равновесия имеют вид синусоиды с соответствующим количеством полуволн в пределах длины стержня (рис. 13.3,в). Эти формы неустойчивы, но могут быть реализованы, если перейти к другой системе, подкрепив стержень шарниропорам

в точках перегиба синусоиды. Тогда сила P будет n^2 раз превышать критическое значение. Вбудетонеравн., n^2 разпрек
Рассмотренный случай продольного изгиба стержня с шарнирным закреплением концов принято классифицировать как основной. При других способах закрепления значение критической силы может быть получено аналогично — путем решения соответствующего дифференциального уравнения изогнутой оси стержня. Однако в простейших случаях достаточно ограничиться сравнением формы изогнутой оси с той, которая представляет собой одну полуволну синусоиды (см. рис. 13.3, б).

Наиболее распространенные расчетные схемы сжатых стержней, включая основную, приведены на рис. 13.4. Соответствующие значения критической силы объединяет формула:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{ef}^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где $l_{ef} = \mu l$ — *приведенная* или *расчетная* (эффективная) длина стержня; μ — коэффициент приведения, зависящий от способа закрепления его концов; l — фактическая длина.

Приведенная длина — это та условная длина стержня, которая позволяет свести любой случай закрепления его концов к основной расчетной схеме (см. рис. 13.4, а).

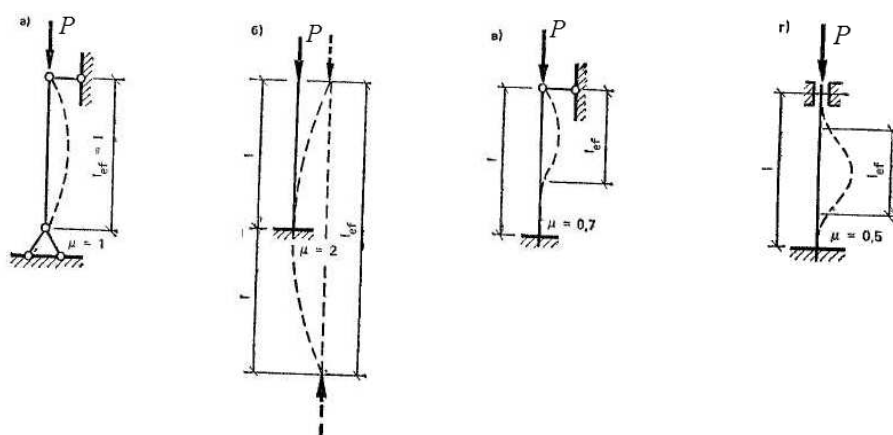


Рис. 13.4.

Так, например, критическая сила стержня с одним зашечленным и другим свободным концом (см. рис. 13.4, б) имеет такое же значение, как у стержня с шарнирным закреплением обоих концов, но вдвое большей длины. Из сказанного следует, что коэффициент μ , есть величина, обратная числу n полувольт синусоиды, уместающихся в пределах фактической длины стержня, потерявшего устойчивость.

Понятие приведенной длины введено в расчетную практику Ф. С. Ясинским⁵.

⁵ Феликс Станиславович Ясинский (1856—1899)—русский ученый и инженер, родился в Варшаве, внес большой вклад в изучение вопросов продольного изгиба. Он заложил основы современных инженерных методов расчета на устойчивость.

10.3. Пределы применимости формулы Эйлера.

Значение напряжений, вызываемых в стержне критической силой, также называется критическим. Согласно формуле для осевого сжатия запишем

$$\sigma_{кр} = \frac{N}{A} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{A(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2}$$

где A — площадь поперечного сечения стержня брутто (без учета местных ослаблений); i_{\min} — минимальный главный центральный радиус инерции (вспомним,

что ранее мы пользовались этой геометрической характеристикой $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$).

Следуя Ф. С. Ясинскому, введем обозначение

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

где λ — *гибкость* стержня—безразмерная геометрическая характеристика, определяемая способом закрепления его концов, длиной, а также формой и размерами поперечного сечения.

Тогда выражение критического напряжения принимает следующий окончательный вид:

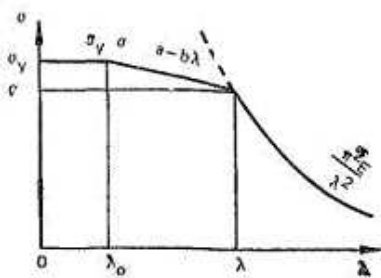


Рис. 13.5.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Эта функциональная зависимость представляет собой видоизмененную формулу Эйлера и графически изображается *гиперболой* (рис. 13.5). При гибкостях, близких к нулю, критическое значение напряжений должно, казалось бы, стремиться к бесконечности. Однако вывод формулы Эйлера основан на использовании дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, материал которого следует закону Гука. Поэтому формула Эйлера справедлива лишь при постоянном модуле упругости E , т. е. при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности. Отсюда предельная гибкость, отвечающая равенству $\sigma_{кр} = \sigma_{пр}$:

$$\lambda_{np} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{np}}}.$$

Она зависит исключительно от механических свойств материала и имеет постоянное значение. Так, для стали марки Ст3 при $\sigma_{нц} = 195$ МПа и $E = 206$ ГПа

$$\lambda_{np} = 3,14 \sqrt{\frac{206 \cdot 10^3}{195}} = 102,$$

для дюралюминия ($\sigma_{нц} = 275$ МПа, $E = 70$ ГПа)

$$\lambda_{np} = 3,14 \sqrt{\frac{70 \cdot 10^3}{275}} = 50.$$

Таким образом, формула Эйлера применима при $\lambda \geq \lambda_{np}$, т. е. только к упругим стержням. Распространение ее на стержни, теряющие устойчивость за пределом упругости (пропорциональности) материала, неверно теоретически и опасно практически, поскольку в этом случае получаются завышенные значения критического напряжения (штриховая линия на указанном рисунке), а, следовательно, и критической силы.

13.6. Формула Тетмайера-Ясинского

При потере устойчивости за пределом упругости критические напряжения определяют по более сложным формулам, учитывающим развитие пластических деформаций, или по эмпирическим зависимостям, одна из которых выражается формулой Тетмайера⁶—Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

где a и b — экспериментально установленные параметры, не имеющие физического смысла и зависящие от материала. Для стали марки Ст3 $a = 305$ МПа, $b = 1,12$ МПа; для дюралюминия $a = 400$ МПа, $b = 2,78$ МПа. Соответствующая критическая сила

$$P_{кр} = \sigma_{кр}A.$$

⁶ Людвиг Тетмайер (L. von Tetmajer, 1850—1905)— швейцарский исследователь, под руководством которого было испытано большое количество сжатых стальных стержней. Результаты, полученные им и другими исследователями, математически обработал и обобщил Ф. С. Ясинский

Полученная зависимость носит линейный характер. Получаемые с ее помощью результаты представляют практический интерес также до некоторого предела, характеризуемого гибкостью λ_0 , при которой критическое напряжение становится равным значению опасных напряжений сжатия: пределу текучести для пластичных материалов или пределу прочности – для хрупких. Для стали указанной марки $\lambda_0=30 - 40$.

13.7. Расчет сжатых стержней на устойчивость по методике СНиП

Итак, несущая способность сжатого стержня может быть исчерпана по двум причинам: 1) вследствие потери прочности, если в стержне из пластичного материала не выполняется условие $\sigma \leq \sigma_T$, а в стержне из хрупкого материала — условие $\sigma \leq \sigma_B$.

2) вследствие потери устойчивости, если в стержне из любого материала не выполняется условие $\sigma \leq \sigma_{кр}$.

Вводя обозначение

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} - \text{для пластичных} \\ \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_B} - \text{для хрупких} \end{cases} \quad (13.8)$$

условие устойчивости можно записать в следующем развернутом виде:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R$$

где N — продольная сила от расчетной сжимающей нагрузки, Н; A — площадь поперечного сечения стержня брутто, м²; φ — коэффициент, уменьшающий расчетное сопротивление сжатию R до значения, которое гарантирует устойчивость прямой формы равновесия, и называемый *коэффициентом продольного изгиба*.

Коэффициент φ для конкретного материала можно вычислять по формулам (13.8), подставляя в них значения критического напряжения. Однако в целях облегчения практических расчетов в строительных нормах приводятся готовые выражения или таблицы коэффициентов продольного изгиба в зависимости от гибкости. Согласно главе СНиП для деревянных элементов гибкостью $\lambda \leq 70$

$$\varphi = 1 - 0,6(\lambda/100)^2,$$

гибкостью $\varphi > 70$

$$\varphi = 3000/\lambda^2$$

Для стальных элементов в соответствующей главе СНиП помещены формулы, применимые к любой марке стали, толщине и виду проката. При этом вводится понятие условной гибкости стержня

$$\tilde{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{R_T}{E}}$$

где R_T —расчетное сопротивление материала, установленное по пределу текучести.

Соответствующие числовые значения коэффициентов для стальных и деревянных элементов, в зависимости от их гибкости λ , приводятся в СНиП в виде таблиц. При этом для определения промежуточных значений φ допускается линейная интерполяция.

Обычно условие устойчивости записывают так, чтобы напряжения можно было сравнивать непосредственно с расчетным сопротивлением. Для этого коэффициент продольного изгиба переносят в знаменатель и в левой части неравенства вместо действительных получают условные напряжения

$$\sigma_{\varphi} = N/(\varphi A) \leq R \quad (13.9)$$

Таким образом, расчет сжатых стержней на устойчивость внешне напоминает расчет на прочность. Принципиальное отличие заключается во введении понижающего коэффициента $\varphi < 1$ и замене площади поперечного сечения нетто площадью брутто. Для деревянных элементов такая замена допустима, если площадь ослабления не превышает 0,25 A . В противном случае расчетная площадь сечения должна назначаться в соответствии с указаниями главы СНиП.

Условие (13.9) позволяет производить три вида расчета на устойчивость, идентичные аналогичным расчетам на прочность.

1. *Проверка устойчивости* выполняется непосредственно по указанной формуле; при известной сжимающей нагрузке (а следовательно, продольной силе N), площади сечения A , а также длине стержня l и способах закрепления его концов, благодаря чему определяется гибкость λ и коэффициент λ .

2. *Подбор сечения* осуществляется по заданной нагрузке и расчетному сопротивлению материала R , известной длине стержня, способам закрепления его концов и выбранной форме поперечного сечения:

$$A \leq N / (\varphi R).$$

Использование этого неравенства затрудняется тем, что в него входят две неизвестные величины A и φ , которые нельзя выразить одну через другую. Поэтому подбор сечения приходится производить способом последовательных приближений, сущность которого будет пояснена на примерах (на практических занятиях).

3. *Определение эксплуатационной способности* производится по известным поперечным размерам стержня, его длине, способам закрепления и расчетному сопротивлению:

$$N \leq \varphi AR.$$

14. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

14.1. Особенности задачи продольно-поперечного изгиба

Если к стержню одновременно приложены сжимающая сила и поперечные нагрузки, то возникает так называемый *продольно-поперечный изгиб*. При расчете массивных элементов, например опор мостов, при одновременном сжатии и изгибе можно пользоваться принципом независимости действия сил. Иначе говоря, можно производить определение напряжений и деформаций отдельно от изгиба и отдельно от сжатия, а затем алгебраически суммировать полученные результаты. Такой метод нельзя распространить на гибкие стержни.

Расчет гибких стержней, которые работают на сжатие с изгибом, необходимо проводить по так называемой деформированной схеме.

Вследствие деформации стержня возникают перемещения, поэтому продольная сжимающая сила создает дополнительные изгибающие моменты. Изгибающий момент от продольной силы может оказаться значительным и, поэтому, им пренебрегать нельзя.

Для случая, показанного на рис. 14.1, изгибающий момент можно определить как сумму двух моментов:

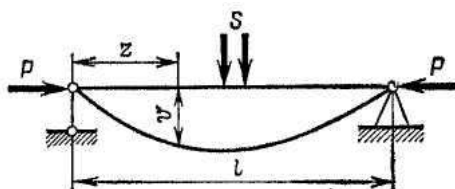


Рис. 14.1.

$$M = M_0 + Pv,$$

где M_0 — момент только от поперечных сил, определяемый обычным способом.

Из этого выражения видно, что суммарный изгибающий момент в сечениях стержня может быть подсчитан только тогда, когда известны перемещения v . Вместе с тем последние нельзя определить, не зная изгибающих моментов. Таким образом, задача продольно-поперечного изгиба является статически неопределимой задачей.

14.2. Различные формы дифференциальных уравнений, описывающих продольно-поперечный изгиб и их интегрирование

Для решения задачи продольно-поперечного изгиба необходимо составить и решить дифференциальное уравнение оси изогнутого бруса:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_0 + Pv}{EJ}.$$

Запишем его в следующем виде:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EJ}v = -\frac{M_0}{EJ}. \quad (14.1)$$

Общее решение этого уравнения представляет собой сумму двух интегралов:

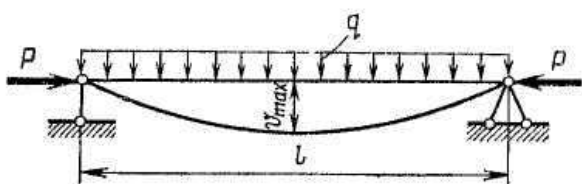


Рис. 14.2.

интеграла однородного уравнения и частного интеграла, зависящего от правой части. Проследим за решением на частном примере. На рис. 14.2 показана балка на двух опорах

с равномерной нагрузкой q и сжимающей силой P , Изгибающий момент в произвольном сечении от поперечной нагрузки определяется равенством

$$M_0 = \frac{qz}{2}(l - z).$$

Считая ось u направленной вниз, в правой части дифференциального уравнения надо поставить знак минус. В нашем случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = -\frac{qz}{2EJ}(l - z),$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Интеграл однородного уравнения уже был определен выше, когда решалась задача Эйлера:

$$v_1 = C \cos kz + D \sin kz.$$

Частный интеграл, что легко проверить двойным дифференцированием и подстановкой в дифференциальное уравнение, имеет следующий вид:

$$v_2 = -\left[\frac{q}{2P} z(l - z) + \frac{q}{k^2 P} \right].$$

Таким образом, общий интеграл дифференциального уравнения равен

$$v = C \cos kz + D \sin kz - \frac{q}{2P} z(l - z) - \frac{q}{k^2 P},$$

Произвольные постоянные C и D найдем из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad v = 0; \\ \text{при } z = l & \quad v = 0. \end{aligned}$$

Удовлетворим этим условиям выражением для v . Получим два уравнения :

$$C - \frac{q}{Pk^2} = 0; \quad C \cos kl + D \sin kl - \frac{q}{Pk^2} = 0.$$

Решая эти уравнения относительно C и D , получим выражение для v . Чтобы определить максимальные перемещения v_{\max} , подставим в полученную формулу значение $z=l/2$. Затем можно перейти к определению наибольшего изгибающего момента M_{\max} в середине пролета. После этого можно найти максимальные сжимающие напряжения.

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{A} - \frac{M_{\max}}{W}.$$

14.3. Приближенная формула для определения прогиба при продольно-поперечном изгибе

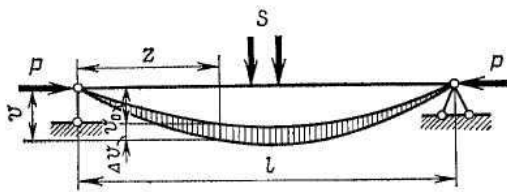


Рис. 14.3.

Из рассмотренного выше примера видно, что точное решение требует больших преобразований и сложных выводов. Задача особенно усложняется, если нагрузка делит балку на ряд участков, для которых придется писать свои уравнения и проводить их интегрирование.

Рассмотрим приближенный способ определения прогибов при продольно-поперечном изгибе. На рис. 14.3 показана балка на двух шарнирных опорах с произвольной поперечной нагрузкой S , сжатая силой P . Прогиб от этой нагрузки можно представить в виде суммы двух прогибов:

$$v = v_0 + \Delta v \tag{14.2}$$

где v_0 — прогиб, вызываемый действием только поперечной нагрузки без учета силы P ; Δv — дополнительный прогиб, появившийся в результате действия сжимающей силы P .

Если в дифференциальное уравнение (14.1) подставить выражение (14.2), то получим

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} + \frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI} - \frac{Pv}{EI}.$$

Но вместе с этим для определения прогибов от поперечной нагрузки, когда нет сжимающей силы P , можно записать следующее уравнение:

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI}.$$

Это позволяет записать

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{Pv}{EI}. \quad (14.3)$$

Далее, сделаем предположение, что дополнительные прогибы (заштрихованная область на рис. 14.3) изменяются по закону синуса – в этом и есть приближенность решения:

$$\Delta v = f \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Это позволяет записать

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v.$$

Подставляя полученное выражение в (14.3), имеем

$$-\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v = -\frac{Pv}{EI}.$$

Тогда на основании выражения (14.2) запишем $\Delta v = v - v_0$, и, следовательно

$$-\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0) = -\frac{Pv}{EI},$$

откуда

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{\pi^2 EI}{Pl^2}}.$$

Учитывая, что $\frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_{кр}$, окончательно получим

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}.$$

Эту формулу можно применять и для других случаев закрепления концов стержня. При этом критическую силу следует определять с учетом μ - коэффициента приведения длины стержня.

Величина прогиба v_0 , обусловленного действием только поперечной нагрузки, может быть найдена любым из методов, рассмотренных ранее.

Ограничением, накладываемым на полученное решение, является условие $P \leq P_{кр}$. В целом, можно отметить, что рассмотренное приближенное решение дает удовлетворительные результаты при

$$0 \leq P \leq 0,8 P_{кр}.$$

Впрочем, в инженерных задачах, которые приходится рассматривать в строительной практике сжимающая сила $P \leq 0,5-0,6 P_{кр}$.

15. РАСЧЕТ ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

15.1. Силы инерции, возникающие в поступательно перемещающемся теле

В предыдущих главах рассмотрены расчеты элементов строительных конструкций преимущественно на статическую нагрузку. В реальных условиях нередко приходится сталкиваться с нагрузками, меняющими свое значение, положение или направление в короткие промежутки времени. Такие нагрузки, как отмечалось ранее, называются *динамическими*.

Расчет на динамическую нагрузку существенно усложняется по сравнению с расчетом на нагрузку, прикладываемую статически. Причина заключается в более сложных методах определения усилий и напряжений, а также механических характеристик материалов, работающих в условиях динамического нагружения. Однако в тех случаях, когда известны силы инерции, определение усилий производится так же, как при статическом нагружении,— с помощью *метода сечений*. Этот подход основан на известном из теоретической механики принципе Д'Аламбера⁷, согласно которому всякое движущееся тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции. Она равна произведению массы m тела на его ускорение a и направлена в сторону, противоположную ускорению.

15.2. Движение тела с постоянным ускорением

Рассмотрим практическую инженерную задачу. Пусть груз весом Q поднимается с постоянным ускорением a (рис. 15.1, *а*). Для определения усилия в тросе N_d разрежем его в произвольном месте и рассмотрим равновесие системы (рис. 15.1, *б*), пренебрегая собственным весом троса:

$$\Sigma Z = 0; \quad N_d - G - F_I = 0.$$

⁷ Жан Лерон Д'Аламбер (J. L. D'Alambert, 1717—1783)—французский математик и философ. В 1743 г. он впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике.

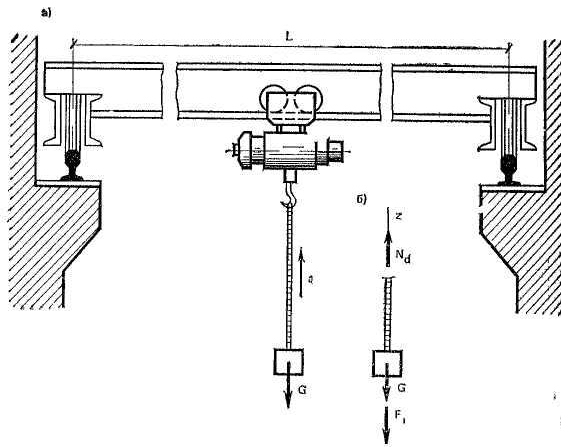


Рис. 15.1.

Сила инерции поднимаемого груза

$$F_i = ma = (G/g)a$$

где g — ускорение свободного падения, равное $9,81 \text{ м/с}^2$.

Подставляя выражение инерционной силы в уравнение равновесия, получаем

$$N_d - G - Ga/g = 0,$$

Откуда

$$N_d = G(1 + a/g). \quad (15.1)$$

15.3. Коэффициент динамичности

Выражение в скобках (15.1) характеризует отличие усилия в тросе при равноускоренном подъеме груза G от усилия, возникающего при его статическом приложении. Следовательно,

$$Nd = N_{st}k_d,$$

где N_{st} — усилие при статическом нагружении; $k_d = 1 + a/g$ — *динамический коэффициент*

Таким образом, *усилие от динамической нагрузки равно усилию от статической нагрузки, умноженному на динамический коэффициент.*

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером.

Пусть тележка однобалочного мостового крана пролетом $L=10 \text{ м}$, выполненного из двутавра № 40, поднимает равноускоренно расчетный груз $Q=70 \text{ кН}$ (см. рис. 15.1, а). Определить усилие натяжения троса и проверить прочность кранбалки, если за первую секунду груз, находящийся посередине пролета, поднялся на расстояние $s=0,5 \text{ м}$. Расчетное сопротивление стали $R=235 \text{ МПа}$. Коэффициент ус-

ловий работы $\gamma_c = 0,9$. Весом троса пренебречь. Вес кран-балки учесть с коэффициентом надежности $\gamma_f = 1,05$.

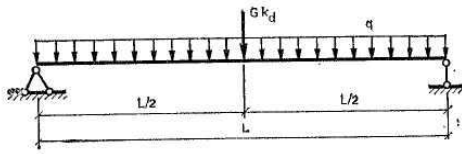


Рис.16.2.

Построим расчетную схему кран-балки. С этой целью рассмотрим самое неблагоприятное положение крановой тележки (рис. 15.2).

Определение усилия в тросе. Для вычисления динамического коэффициента необходимо найти ускорение a . Воспользуемся известным из кинематики уравнением равнопеременного движения при нулевой начальной скорости $s = at^2/2$, где s — расстояние, пройденное за время t . Тогда

$$a = 2s/t^2 = 2 \times 0,5/1^2 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ м/с}^2$$

и динамический коэффициент

$$k_d = 1 + a/g = 1 + 1/9,81 \approx 1,1.$$

Усилие от динамического нагружения согласно зависимости (15.1)

$$N_d = G \times k_d = 70 \times 1,1 \text{ кН} = 77 \text{ кН}.$$

Проверка прочности кран-балки. Балка работает на изгиб от собственного веса интенсивностью q , прикладываемого статически, и веса груза G , прикладываемого, динамически (рис. 15.2). Наибольший изгибающий момент найдем как сумму моментов от нагрузки, обусловленной собственным весом крановой баки M_q и от действия поднимающегося груза M_G (с учетом динамического эффекта), т.е.

$$M_{\max} = M_q + M_G k_d$$

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} + \frac{Gk_d L}{4} = 0,587 \cdot 10^2 / 8 + 77 \cdot 10 / 4 = 200 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Здесь расчетный вес 1 м длины двутавровой балки №40 $q = \rho_l g \gamma_f = 57 \cdot 9,81 \cdot 1,05 = 587 \text{ (Н/м)}$, где ρ_l - линейная плотность балки (кг/м), приводимая в сортаменте.

По найденному изгибающему моменту проверяем напряжения в балке, имеющей согласно той же таблице момент сопротивления сечения $W_x = 953 \text{ см}^3$. Получаем:

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{200 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 210 \cdot 10^6 \text{ Па} = 210 \text{ МПа},$$

Т.е. прочность балки обеспечена.

16. УДАР

Определение напряжений и деформаций при ударе представляет собой одну из наиболее сложных задач механики твердого деформируемого тела. Для ее упрощения в сопротивлении материалов вводят ряд допущений:

1. При ударной нагрузке в элементах конструкции возникают только упругие деформации, материал следует закону Гука и рассчитываемая система является линейно-деформируемой;

2. В то же время сам удар считается неупругим, т. е. соударяющиеся тела после удара продолжают оставаться в соприкосновении и перемещаются как одно целое, не восстанавливая первоначальной формы;

3. Масса ударяемого элемента мала по сравнению с массой ударяющего груза и при расчете не учитывается;

4. Потери энергии на нагревание соударяющихся тел и местные деформации в зоне контакта не учитываются.

16.1. Расчет на удар при осевом действии нагрузки

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу.

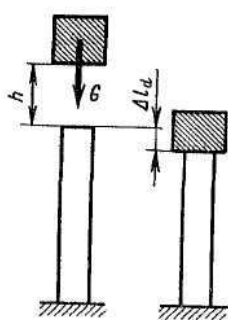


Рис.16.1.

Пусть груз весом G падает с высоты h на неподвижный стержень (рис. 16.1). Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения $v = \sqrt{2gh}$. Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля. Благодаря большому ускорению (замедлению) возникает значительная сила инерции, которая определяет действие удара. Однако определение усилий и напряжений при ударе с помощью

условия динамического равновесия (принципа Д'Аламбера) затруднительно, так как силы инерции неизвестны. В этом случае приходится первоначально искать перемещения, используя закон сохранения энергии:

$$K=U,$$

где K — кинетическая энергия ударяющего груза; U — потенциальная энергия деформации ударяемого элемента.

Работа, совершаемая весом падающего груза, $W=G(h + \Delta l_d)$,

где Δl_d - перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии, $U=\Delta l_d^2 EA/(2l)$. Из этих двух уравнений получаем

$$G(h + \Delta l_d) = \Delta l_d^2 EA/(2l), \text{ или } \Delta l_d^2 EA - G2l \Delta l_d^2 - Gh2l = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на EA , получим

$$\Delta l_d^2 - \frac{GL}{EA} 2\Delta l_d - \frac{GL}{EA} 2h = 0.$$

Но $GL/EA = \Delta l_{st}$ — укорочение стержня от статически приложенной нагрузки G . Тогда

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st}\Delta l_d - \Delta l_{st} 2h = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно Δl_d , получим

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}$$

Оставляя знак плюс (так как $\Delta l_d > \Delta l_{st}$) получаем окончательно

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} (1 \pm \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \Delta l_{st} K_d \quad (16.1)$$

где K_d — динамический коэффициент.

Разделив обе части последнего уравнения на длину стержня l и умножив на модуль упругости E , перейдем на основании, закона Гука от деформаций к напряжениям:

$$\sigma_d = \sigma_{st} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}}) = \sigma_{st} K_d.$$

Из полученных формул видно, что динамические напряжения и перемещения зависят от статической деформации ударяемого тела. Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения.

Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации.

При сжимающем ударе во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений

Частные случаи

1. Если $h = 0$, т. е. имеет место *внезапное приложение нагрузки*, то из полученных формул получим $\Delta l_d = 2\Delta l_{st}$. При внезапном приложении нагрузки деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки;
2. Если высота падения h значительно больше статической деформации Δl_{st} , то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta l_{st}} \approx \sqrt{2h/\Delta l_{st}}.$$

16.2. Расчет на удар при изгибе

Теперь исследуем удар груза весом G , падающего с высоты h на некоторую упругую систему, например балку (рис. 16.2). Такой удар называется поперечным, или изгибающим. Кинетическая энергия равна работе падающего груза:

$$K = W = G(h + f_d),$$

где f_d — динамический прогиб балки в сечении под грузом.

Эта работа переходит в потенциальную энергию деформации балки, для подсчета которой в силу 1-го допущения можно воспользоваться теоремой Клапейрона

$$U = Pf / 2,$$

где P — эквивалентная сила, которая при статическом приложении вызывает такой же прогиб f , как при ударе, т. е. $f = f_d$.

Если балка подвергается удару в середине пролета, то, как легко подсчитать

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_x}, \text{ откуда } P = \frac{48EI_x f}{l^3}, \text{ и, следова-}$$

$$\text{тельно } U = \frac{48EI_x f_d^2}{2l^3}.$$

В соответствии с уравнением энергетического баланса приравняем выражения кинетической и потенциальной энергии:

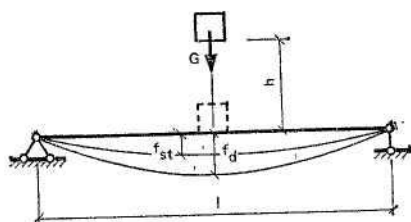


Рис. 16.2.

$$G(h + f_d) = \frac{48EI_x f_d^2}{2l^3} \text{ или}$$

$$48EI_x f_d^2 - 2Gl^3 f_d - 2Ghl^3 = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на $48EI_x$, получим

$$f_d^2 - \frac{Gl^3}{24EI_x} f_d - \frac{Ghl^3}{24EI_x} = 0.$$

Имея в виду, что $Gl^3/(48EI_x) = f_{st}$ — прогиб балки от статического приложения груза G , решаем записанное уравнение относительно динамического прогиба

$$f_d = f_{st} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \right).$$

Так как отрицательный корень уравнения лишен физического смысла, перед радикалом следует сохранить только знак «плюс»:

$$f_d = f_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \right) = f_{st} K_d.$$

Таким образом, мы получили формулу, вид которой аналогичен выражению (16.1).

16.3. Механические свойства материалов при ударе

Исследования показывают, что скорость деформирования заметно влияет на

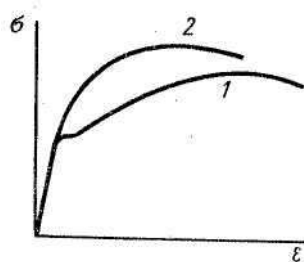


Рис.16.4.

механические свойства материалов. На рис. 16.4 показаны две диаграммы растяжения — при статическом нагружении (1) и при динамическом нагружении (2). Из этих диаграмм видно, что предел текучести и предел прочности при ударном растяжении повышаются. Исследования Н.Н. Давиденкова и других ученых показывают, что предел текучести повышается на 20—

70 %, а предел прочности — на 10—30 % по сравнению со статическим растяжением. Пластичность с ростом скорости деформирования убывает. Уже при сравнительно невысоких скоростях нагружения наблюдается склонность к хрупкому разрушению.

Для построения диаграммы ударного растяжения типа диаграммы (кривая 2 на рис. 16.4) требуются специальные, очень сложные машины. Обычно применяют

другой, более упрощенный способ оценки свойств материалов при действии ударной нагрузки, так называемую *ударную пробу*. Для испытания применяют образцы стандартной формы. Один из таких образцов показан на рис. 16.5.

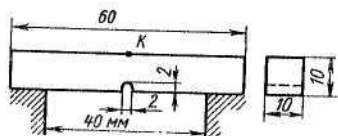


Рис.16.5.

В образце посередине делают надрез глубиной 2 мм для того, чтобы поставить материал в наиболее тяжелые условия работы, так как надрез создает концентрацию напряжений.

Образец подвергается ударному разрушению на специальном копре маятникового типа (рис. 16.6).

Нож маятника *C*, поднятый на высоту h_1 , опускаясь, ломает образец, ударяя его, и за счет оставшейся кинетической энергии поднимается на высоту $h_2 < h_1$.

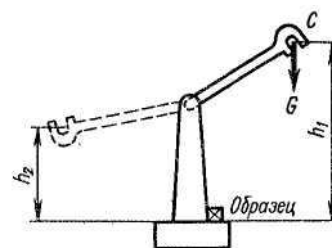


Рис. 16.6.

Работа, совершенная маятником, определяется по формуле

$$W = G(h_1 - h_2).$$

Она расходуется на разрушение образца, за исключением небольшой ее части ΔW , затрачиваемой на вредные сопротивления (трение в машине, сопротивление воздуха). Эти потери для каждого экземпляра копра известны.

За характеристику способности материала сопротивляться действию ударной нагрузки принимают величину

$$a = W_1/A,$$

где $W_1 = W - \Delta W$ — работа, затраченная на разрушение образца; A — площадь поперечного сечения образца в месте надреза.

Величина a называется *удельной ударной вязкостью* материала. Чем больше a , тем лучше материал сопротивляется удару, тем более он вязок.

17. УСТАЛОСТЬ

17.1. Понятие об усталости материалов

Большинство деталей машин и механизмов, а также элементы некоторых строительных конструкций работают в условиях напряжений, периодически меняющихся во времени t .

Термин «усталость» сохранился с первой половины XIX в., когда бытовало ошибочное мнение, что металл под влиянием переменных напряжений перерождается, превращается из пластичного «волокнистого» в хрупкий зернистый. В действительности процесс усталостного разрушения не сопровождается структурными изменениями, но терминология укоренилась.

К строительным конструкциям, подверженным усталостным явлениям, относятся подкрановые балки, балки рабочих площадок и элементы конструкций бункерных и разгрузочных эстакад, многократно воспринимающие нагрузку от подвижных составов, конструкции под двигатели, а также высотные сооружения типа антенн, промышленных труб, башен, мачт и подъемно-транспортных сооружений, испытывающие ветровую нагрузку.

Введем основные понятия.

Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период их изменения T называется *циклом*.

Цикл характеризуется максимальным σ_{\max} , минимальным σ_{\min} и средним $\sigma_m = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ напряжениями, коэффициентом асимметрии $\rho = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ (ГОСТ 23207—78 предусматривает для коэффициента асимметрии обозначение R . Здесь во избежание совпадения с символом расчетного сопротивления материала используется другое обозначение ρ , принятое в главе СНиП) и амплитудой $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$.

Если $\rho = -1$, $\sigma_m = 0$, $\sigma_0 = \sigma_{\max}$, то цикл называется *симметричным* (рис. 17.1, а). В остальных случаях циклы являются асимметричными (рис. 17.1, б).

Если минимальное или максимальное напряжение равно нулю, то цикл называется *отнулевым*. При растяжении в этом случае $\rho = 0$, $\sigma_{\min} = 0$, $\sigma_m = \sigma_a = \sigma_{\max}/2$ (рис. 17.1, в).

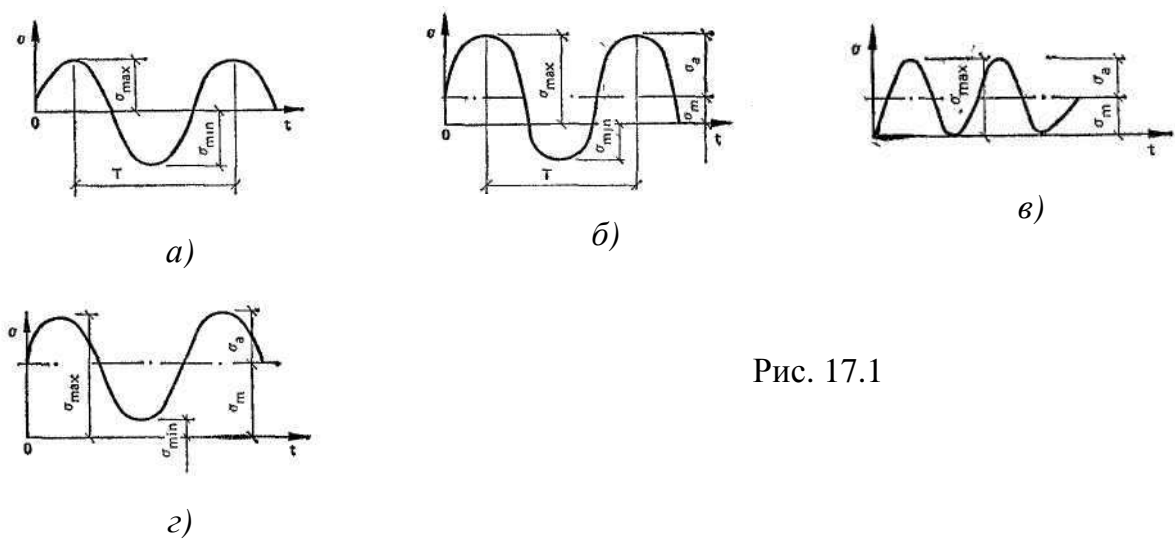


Рис. 17.1

Если алгебраические знаки напряжений σ_{\max} и σ_{\min} одинаковы, цикл называется однозначным или знакопостоянным (рис. 17.1, г); если знаки неодинаковы — знакопеременным рис. 17.1, а, б).

Разрушение, вызванное многократным повторением переменных напряжений, называется *усталостным*, а способность материала противостоять такому разрушению — сопротивлением усталости.

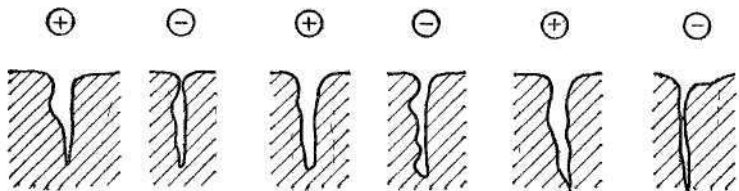


Рис. 17.2.

В случае знакопеременного цикла трещина то раскрывается, то закрывается (рис. 17.2). При закрытии ее неровные поверхности надавливают друг на друга, обминаются и сглаживаются.

По мере возрастания числа циклов трещина постепенно проникает вглубь, еще более увеличивая концентрацию напряжений (на концах трещины возникает объемное напряженное состояние). Когда напряжения в неразрушенной части сечения, которая воспринимает всю нагрузку, окажутся настолько большими, что материал не сможет их выдержать, произойдет внезапное неупругое разрушение. Картина излома имеет своеобразный вид (рис. 17.3).

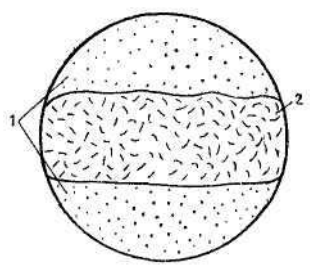


Рис. 17.3

В сечении конструкции отчетливо видна гладкая, иногда отпо-

лированная зона 1 внедрения усталостной трещины и резко отличающаяся от нее шероховатая матовая поверхность 2 типично хрупкого разрушения.

17.2. Методы определения предела выносливости.

Предел выносливости для различных конструкционных материалов определяется экспериментально. Анализ выхода из строя различных конструкций и многочисленные экспериментальные исследования показывают, что усталостное разрушение происходит при напряжениях ниже не только предела прочности, но часто и предела текучести, установленного статическим испытанием.

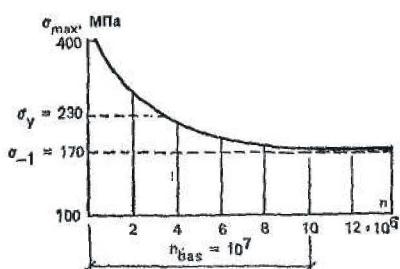


Рис. 17.2.

На рис. 17.2 приведен график изменения сопротивления усталости — кривая Вёлера⁸ стали марки Ст3 в зависимости от числа n симметричных циклов. Асимптота этой кривой характеризует напряжение усталостного разрушения при $n_{bas}=10^7$, называемое **пределом выносливости**. Указанное число

циклов принимают за **базу испытаний**. опыты показывают, что не разрушившийся за это время стальной образец выдержит сколько угодно большое число циклов при данном максимальном напряжении. Таким образом, под базой следует понимать предварительно задаваемую продолжительность испытаний образцов на усталость.

Обозначим предел выносливости при изгибе σ_p , при кручении τ_p , при растяжении (сжатии) σ_{pt} . Здесь индекс p по-прежнему указывает значение коэффициента асимметрии цикла. Тогда предел выносливости при симметричном цикле изгиба получает обозначение σ_{-1} , кручения — τ_{-1} растяжения — σ_{-1t} . При отнулевом цикле имеем соответственно σ_0 , τ_0 и σ_{0t} .

Если образцы подвергнуть испытанию на усталость при каком-либо асимметричном цикле, то кривая усталости расположится выше, чем при симметричном

⁸ А. Вёлер - A. Wohler (1819—1914) — немецкий ученый и инженер, с экспериментальных работ которого берет начало изучение усталости материалов.

цикле. Следовательно, при любом виде деформирования (изгиб, кручение, растяжение) нагружение с симметричным циклом наиболее опасно.

Кривая усталости алюминиевых сплавов не имеет асимптоты, поэтому базу испытаний для них увеличивают ($n_{bas}=10^8$). То же относится к некоторым легированным сталям, подвергнутым закалке. К таким материалам понятие предела выносливости, строго говоря, неприменимо. За характеристику их сопротивления усталости (относящуюся к спадающему участку кривой Вёлера) принимают *предел ограниченной выносливости* σ_{pn} — наибольшее максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором образец еще не разрушается после определенного (задаваемого) числа циклов $n < n_{bas}$. Для алюминиевых сплавов, используемых в строительстве, принимают число $n=2 \times 10^6$, не выходящее за рамки циклической долговечности металлических конструкций.

17.3. Влияние конструктивно-технологических факторов на предел выносливости

Из большого числа факторов, влияющих на сопротивление усталости, наиболее существенна концентрация напряжений. В местах, где возникают наибольшие напряжения (обычно в зонах изменения сечения или нарушения поверхностного слоя), образуется трещина. Ее зарождение, однако, еще не свидетельствует о потере несущей способности конструкции, которая после этого может выдержать до нескольких миллионов циклов: При однородном напряженном состоянии появлению видимой трещины предшествует 85—90 % общего числа циклов и лишь около 10 % приходится на завершающую стадию разрушения.

Другими факторами, определяющими выносливость, являются: абсолютные размеры поперечного сечения конструкции, качество обработки поверхности, агрессивность внешней среды, чувствительность материала к асимметрии цикла. В целом, опыты показывают, что чем крупнее конструкция, тем ниже предел ее выносливости. Это явление называют масштабным эффектом. Чем выше качество обработки поверхности конструкции, тем выше ее сопротивление усталости. Для количественной оценки влияния этого фактора вводится специальный коэффициент, называемый коэффициентом качества. Логичным представляется влияние внешней

среды на усталостную прочность. Агрессивная среда приводит к ухудшению качества поверхности и, тем самым снижает сопротивление усталости.

17.4. Расчет на прочность при повторно-переменных напряжениях

Проверка элементов строительных конструкций на прочность при циклическом нагружении относится к расчетам по первой группе предельных состояний. Расчет стальных элементов производится по формуле

$$\sigma_{\max} \leq \alpha R_v \gamma_v$$

где α — коэффициент учета числа циклов нагружения $n \geq 10^5$, вычисляемый согласно главе СНиП; R_v — расчетное сопротивление усталости, принимаемое по той же главе исходя из нормативного сопротивления стали R_{im} , γ_v — коэффициент, зависящий от алгебраического знака наибольшего по абсолютному значению напряжения.

17.5. Понятие о малоцикловой усталости

До недавнего времени считалось, что усталость может наступить только после очень большого числа циклов нагружения. Однако усталостные явления проявляются и при относительно небольшом числе n , но достаточно высоких напряжениях. Процесс разрушения под действием циклических напряжений, вызывающих пластическое деформирование материала, получил название малоцикловой усталости. К ней может привести, например, частое наполнение и опорожнение резервуаров большой вместимости, попеременное повышение и понижение внутреннего давления в воздухонагревателях доменных печей.

В отличие от обычной (многоцикловой) усталости, при которой пластические деформации локализуются в малых объемах вблизи зоны разрушения и максимальные напряжения ниже предела текучести, малоцикловая усталость характеризуется развитием пластических деформаций, охватывающих значительную часть сечения. Напряжения в этом случае близки к пределу текучести или даже превышают его.

Проблема малоциклового усталости весьма актуальна для строительных конструкций, поскольку в них почти всегда имеются концентраторы напряжений, способствующие развитию местных пластических деформаций. Эти деформации могут накапливаться даже в случае медленно и редко меняющейся нагрузки, обуславливая высокий уровень напряжений и долговечность материала в течение не более 10^5 циклов.